



Bei einem Crash-Test fährt ein Versuchsfahrzeug mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  gegen eine Wand. Während des Knautschvorgangs wird eine Beschleunigung von  $a_0 = -a_0 (e^{t/T} - 1)$  gemessen. Dabei sei  $l$  die Länge der Knautschzone, welche komplett zusammengedrückt wird.

- a) Bestimme den Knautschvorgang  $t = T$ , wenn die Geschwindigkeit unmittelbar vor Ende des Knautschens Null ist.
- b) Wie groß ist die Länge  $l$  der Knautschzone?

Gegeben:  $v_0, a_0$

**Lösung:**

a) Bestimme den Knautschvorgang  $t = T$ , wenn die Geschwindigkeit unmittelbar vor Ende des Knautschens Null ist.

Gegeben ist  $v_0$  und  $a_0 = -a_0 (e^{v/T} - 1)$

Es handelt sich um eine gradlinige Bewegung. Die Beschleunigung ist in Abhängigkeit von  $t$  gegeben. Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit:

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit } t \text{ ergibt die Beschleunigung}$$

Einsetzen der Beschleunigung:

$$\frac{dv}{dt} = -a_0 \left( e^{\frac{t}{T}} - 1 \right)$$

Trennung der Veränderlichen:

$$dv = -a_0 \left( e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) dt$$

Vereinfachung der rechten Seite:

$$dv = \left( -a_0 e^{\frac{t}{T}} + a_0 \right) dt$$

Integration:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t \left( -a_0 e^{\frac{t}{T}} + a_0 \right) dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = -a_0 \int_0^t e^{\frac{t}{T}} dt + a_0 \int_0^t dt$$

Wir integrieren zunächst den Term:

$$-a_0 \int_0^t e^{\frac{t}{T}} dt$$

Mittels Substitution ergibt sich:

$$u = \frac{t}{T}$$

Ableitung von u nach t:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{T}$$

Auflösen nach dt:

$$dt = T \, du$$

Einsetzen von u und dt in die obige Gleichung:

$$-a_0 \cdot \int_0^t e^u T \, du$$

$$-a_0 T \cdot \int_0^t e^u \, du$$

Integration der Exponentialfunktion ergibt wieder die Exponentialfunktion:

$$-a_0 T \cdot [e^u]_0^t$$

Rücksubstitution von  $u = t/T$ :

$$-a_0 T \cdot [e^{\frac{t}{T}}]_0^t$$

Einsetzen der Grenzen:

$$-a_0 T \cdot [e^{\frac{t}{T}} - e^{\frac{0}{T}}]$$

$$-a_0 T \cdot [e^{\frac{t}{T}} - e^0] = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T$$

In die gesamte Gleichung einsetzen:

$$\int_{v_0}^v dv = -a_0 \int_0^t e^{\frac{t}{T}} dt + a_0 \int_0^t dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 T + a_0 \int_0^t dt$$

Den Rest integrieren:

$$v - v_0 = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T + a_0 \cdot t \quad 1. \text{ allgemeine Ableitung}$$

Laut Aufgabenstellung betrachten wir den Knautschvorgang. Dieser beginnt bei  $t = 0$  und endet bei  $t = T$ . Am Ende des Knautschvorgangs (bei  $t = T$ ) soll die Geschwindigkeit  $v = 0$  sein. Wir setzen nun also für  $t = T$  und für  $v = 0$  ein:

$$-v_0 = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{T}{T}} + a_0 \cdot T + a_0 \cdot T$$

$$-v_0 = -a_0 \cdot T \cdot e^1 + 2a_0 \cdot T$$

Es soll nun die Dauer des Knautschvorgangs ermittelt werden. Es wird also nach  $T$  aufgelöst:

$$v_0 = a_0 \cdot T \cdot e^1 - 2a_0 \cdot T \quad \text{Mal Minus 1}$$

$$v_0 = T(a_0 \cdot e^1 - 2a_0)$$

$$T = \frac{v_0}{a_0 \cdot e^1 - 2a_0}$$

$$T = \frac{v_0}{a_0} \frac{1}{(e^1 - 2)}$$

### b) Wie groß ist die Länge $l$ der Knautschzone?

Die Länge  $l$  der Knautschzone ist der Weg vom Beginn bis zum Ende des Knautschvorgangs.

Der Zusammenhang ergibt sich wie folgt:

$$\frac{dl}{dt} = v \quad \text{Ableitung des Weges nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$dl = v \, dt$$

Die erste Ableitung haben wir bereits oben bestimmt. Diese ergab:

$$v - v_0 = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T + a_0 \cdot t$$

Auflösen nach v:

$$v = -a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T + a_0 \cdot t + v_0$$

Einsetzen:

$$dl = (-a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T + a_0 \cdot t + v_0) dt$$

Integration:

$$\int_0^l dl = \int_0^t (-a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T + a_0 \cdot t + v_0) dt$$

$$l = -\int_0^t a_0 \cdot T \cdot e^{\frac{t}{T}} dt + \int_0^t a_0 \cdot T dt + \int_0^t a_0 \cdot t dt + \int_0^t v_0 dt$$

Das erste Integral mittels Substitution ergibt:

$$u = \frac{t}{T} \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{T} \quad dt = T du$$

Einsetzen:

$$-\int_0^t a_0 \cdot T^2 \cdot e^u du$$

Integrieren:

$$-[a_0 \cdot T^2 \cdot e^u]_0^t$$

Rücksubstitution:

$$-[a_0 \cdot T^2 \cdot e^{\frac{t}{T}}]_0^t$$

Grenzen einsetzen:

$$-[a_0 \cdot T^2 \cdot e^{\frac{t}{T}} - a_0 \cdot T^2 \cdot e^0]$$

$$-[a_0 \cdot T^2 \cdot e^{\frac{t}{T}} - a_0 \cdot T^2]$$

Einsetzen in die obige Gleichung:

$$l = -a_0 \cdot T^2 \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 \cdot T^2 + \int_0^t a_0 \cdot T dt + \int_0^t a_0 \cdot t dt + \int_0^t v_0 dt$$

Rest Integrieren:

$$l = -a_0 \cdot T^2 \cdot e^{\frac{t}{T}} + a_0 T^2 + a_0 \cdot T \cdot t + \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t \quad 2. \text{ allgemeine Ableitung}$$

Es gilt auch hier wieder  $t = T$ :

$$l = -a_0 \cdot T^2 \cdot e + a_0 T^2 + a_0 \cdot T^2 + \frac{1}{2} a_0 \cdot T^2 + v_0 \cdot T$$

Zusammenfassen:

$$l = -a_0 \cdot T^2 \cdot e + \frac{5}{2} a_0 T^2 + v_0 \cdot T$$

Die Knautschdauer haben wir bereits in Aufgabenteil a) bestimmt und können diese nun hier einsetzen:

$$l = -a_0 \cdot \frac{e}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{5}{2} a_0 \cdot \frac{1}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + v_0 \cdot \frac{1}{(e-2)} \frac{v_0}{a_0}$$

Kürzen:

$$l = - \frac{e}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{1}{(e-2)} \frac{v_0^2}{a_0}$$

Auf einen Nenner bringen:

Wir wollen nun den Ausdruck vereinfachen, indem wir alles auf einen Nenner bringen. Hierzu wählen wir zunächst den Nenner  $(e-2)^2$  aus. Dies erreichen wird durch Erweiterung. Der letzte Term muss also mit

$$\frac{(e-2)}{(e-2)}$$

erweitert werden:

$$l = - \frac{e}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{5}{2(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{1 \cdot (e-2)}{(e-2)(e-2)} \frac{v_0^2}{a_0}$$

$$l = - \frac{e}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{5}{2(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{e-2}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0}$$

Der zweite Term hat eine zusätzliche 2 im Nenner. Wir werden nun die anderen beiden Terme auf diesen Nenner bringen. Auch dies wieder mittels Erweiterung:

$$\frac{2}{2}$$

Es ergibt sich:

$$1 = -\frac{2e}{2(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{5}{2(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{2e-4}{(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0}$$

Zusammenfassen des Zählers:

$$\text{Zähler} = -2e + 5 + 2e - 4 = 1$$

Es ergibt sich als Lösung:

$$1 = \frac{1}{2(e-2)^2} \frac{v_0^2}{a_0}$$