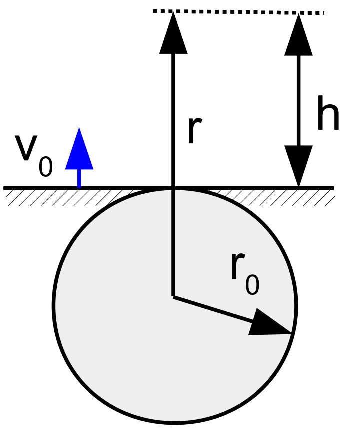


Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit muss ein Körper senkrecht nach oben geworfen werden, damit einer eine Höhe h über dem Erdboden erreicht? (Vernachlässige den Luftwiderstand). Der Verlauf der Fallbeschleunigung ist gegeben zu:

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2}, \quad r > r_0$$

Dabei ist r_0 der Erdradius und g_0 die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche

Gegeben: r_0, h, g_0

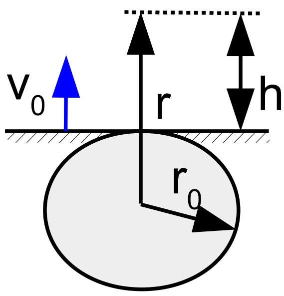
Der Verlauf der Fallbeschleunigung ist gegeben zu

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2}, \quad r > r_0$$

In der Aufgabenstellung wird r_0 , g_0 und h als gegeben angenommen.Gesucht ist v_0.
In der obigen Gleichung ist aber noch der Radius r gegeben, welcher unbekannt ist. Da auch g unbekannt ist, können wir r nicht aus der obigen Gleichung ermitteln.

Besteht die Möglichkeit r durch bereits bekannte Variablen auszudrücken?

Dazu betrachten wir die Grafik:



Es ist also der Verlauf der Fallbeschleunigung gegeben. Wir führen die x-Achse (gradlinige Bewegung) von unten nach oben ein. Es ist möglich den Radius r durch bekannte Variablen auszudrücken:

$r = r_0 + x$

Einsetzen in die obige Formel ergibt:

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + x)^2}$$

Das bedeutet, dass die Beschleunigung in Abhängigkeit vom Weg gegeben ist. Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit:

$$\frac{dv}{dt} = a$$

Hier ist die Beschleunigung aber nicht in Abhängigkeit von der Zeit t gegeben. Wir erweitern also mit:

$$\frac{dx}{dx}$$

um eine Abhängigkeit vom Weg zu erhalten:

$$a = \frac{dv}{dt}\,\frac{dx}{dx}$$

Wir schreiben um:

$$a = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt}$$

Und sehen und, dass die Ableitung des Weges x nach der Zeit t die Geschwindigkeit ergibt:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Einsetzen:

$$a = \frac{dv}{dx}\,v$$

Trennung der Veränderlichen:

$$a\,dx = v\,dv$$

Es muss nun die Fallbeschleunigung für a eingesetzt werden. Die Fallbeschleunigung wirkt aber entgegen der positiven x-Achse, muss also negativ berücksichtigt werden:

$$a = -g$$

Einsetzen:

$$-g_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + x)^2}\,dx = v\,dv$$

<u>Integration:</u>

Die Grenzen werden für x_0 (Startpunkt) bis x (Endpunkt) betrachtet. Für die Geschwindigkeit wird v_0 (gesuchte Anfangsgeschwindigkeit) und v (Endgeschwindigkeit) eingesetzt:

$$-g_0 r_0^2 \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(r_0 + x)^2}\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv$$

Wir betrachten zunächst das Integral auf der linken Seite:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(r_0+x)^2} dx$$

Wir substituieren:

$$u = r_0 + x \qquad \frac{du}{dx} = 1 \qquad dx = 1\,du$$

Einsetzen:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{u^2} du$$

Wir schreiben um:

$$\int_{x_0}^{x} u^{-2} du$$

<u>Wir integrieren (Potenzregel):</u>

Potenzregel: $\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$$\int_{x_0}^{x} u^{-2} du = \frac{1}{-2+1} u^{-2+1} = -u^{-1} = -\left[\frac{1}{u}\right]_{x_0}^{x}$$

Wir führen die Rücksubstitution durch $u = (r_0 + x)$:

$$-\left[\frac{1}{r_0+x}\right]_{x_0}^{x}$$

Grenzen einsetzen:

$$-\frac{1}{r_0+x} + \frac{1}{r_0+x_0}$$

Einsetzen in die gesamte Gleichung:

$$-g_0 r_0^2 \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(r_0+x)^2} dx = \int_{v_0}^{v} v \, dv$$

$$-g_0 r_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{r_0+x} + \frac{1}{r_0+x_0}\right) = \int_{v_0}^{v} v \, dv$$

Die rechte Seite integrieren:

$$-g_0 r_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{r_0+x} + \frac{1}{r_0+x_0}\right) = \left[\frac{1}{2} v^2\right]_{v_0}^{v}$$

Grenzen einsetzen:

$$-g_0 r_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{r_0+x} + \frac{1}{r_0+x_0}\right) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

Die allgemeine Integration ist bestimmt. Wir wissen, dass der Weg bei $x_0 = 0$ beginnt. Außerdem ist bei $x = h$ der höchste Punkt des Körpers erreicht. An diesem Punkt ist die Geschwindigkeit $v = 0$ (der Körper verharrt kurz und fällt dann wieder Richtung Erdboden). Einsetzen dieser Werte ergibt:

$$-g_0 r_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{r_0+h} + \frac{1}{r_0+0}\right) = \frac{1}{2} 0^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

$$-g_0 r_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{r_0+h} + \frac{1}{r_0}\right) = -\frac{1}{2} v_0^2$$

Auflösen der Klammer:

$$\frac{g_0 r_0^2}{r_0+h} - \frac{g_0 r_0^2}{r_0} = -\frac{1}{2} v_0^2$$

$$\frac{g_0 r_0^2}{r_0+h} - g_0 r_0 = -\frac{1}{2} v_0^2$$

Auflösen nach v_0:

$$-\frac{2 g_0 r_0^2}{r_0+h} + 2 g_0 r_0 = v_0^2$$

Auf einen Nenner bringen durch Erweiterung:

$$-\frac{2g_0 r_0^2}{r_0+h}+2g_0 r_0\frac{(r_0+h)}{(r_0+h)}=v_0^2$$

$$-\frac{2g_0 r_0^2}{r_0+h}+\frac{2g_0 r_0^2}{(r_0+h)}+\frac{2g_0 r_0 h}{(r_0+h)}=v_0^2$$

Ersten beiden Terme kürzen sich raus:

$$\frac{2g_0 r_0 h}{(r_0+h)}=v_0^2$$

Wurzel ziehen:

$$v_0=\sqrt{\frac{2g_0 r_0 h}{(r_0+h)}}$$