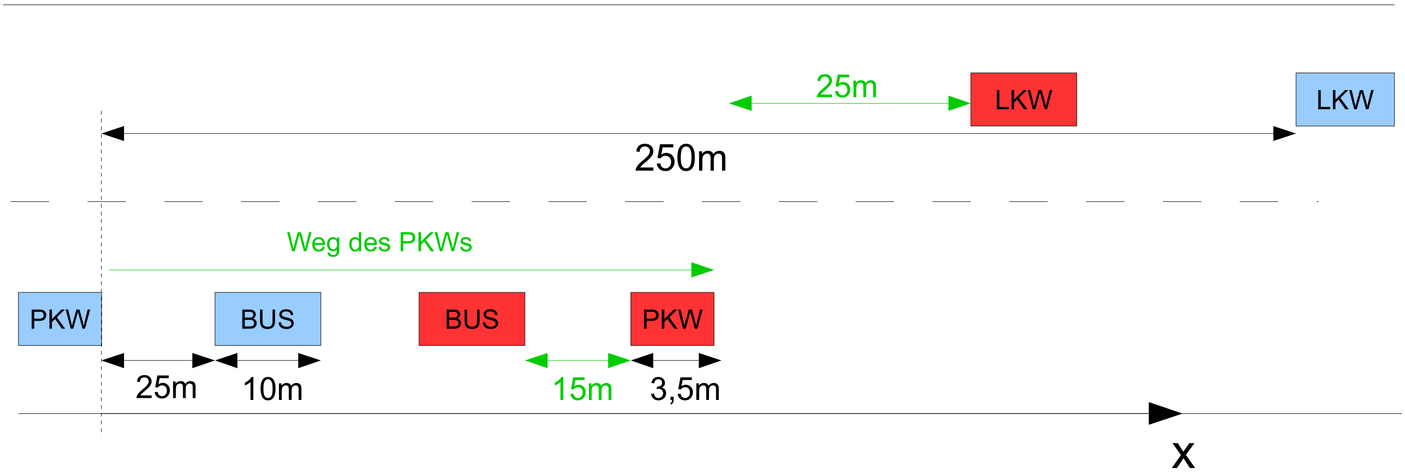
Aufgabe: Überholvorgang

Wir befinden uns auf einer Landstraße mit unserem PKW der Länge l_{PKW} = 3,5m und der Geschwindigkeit v_{PKW} = 100 km/h. Vor uns im Abstand von d_{Bus} = 20m befindet sich ein Bus mit der Länge l_{BUS} = 10m und der Geschwindigkeit v_{Bus} = 85 km/h. Auf der Gegenfahrbahn kommt uns ein LKW mit der Geschwindigkeit v_{LKW} = 90 km/h entgegen. Der LKW weist den Abstand von d_{LKW} = 250m zu uns auf.

> Mit welcher konstanten Beschleunigung a müssen wir den Bus überholen, wenn wir noch im Abstand von d'_{Bus} = 15m vor dem Bus und im Abstand d'_{LKW} = 25m vor dem entgegenkommenden LKW einscheren wollen? Der Weg des Einscherens und Aussscherens wird vernachlässigt.
>
> Bestimme außerdem die Überholzeit $t_ü$, den Überholweg $x_ü$ und die Engeschwindigkeit v'_{PKW} unseres PKW's nach dem Überholvorgang.

Lösung:

Zunächst fertigen wir eine Skizze an, um uns die Situation besser vorstellen zu können:
In der unteren Skizze (nicht maßstäblich) sehen wir die aktuelle Position der Fahrzeuge in blau eingezeichnet. Die gewünschte Position ist dabei in rot eingezeichnet.



Uns fehlt noch der Weg zwischen dem Bus in der aktuellen und der gewünschten Situation. Der Bus weist eine konstante Geschwindigkeit v_{BUS} = const. auf. Der Weg lässt sich dann wie folgt bestimmen:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$dx = v\, dt$$

Integration:

$$\int_0^x dx = v \cdot \int_0^t dt$$

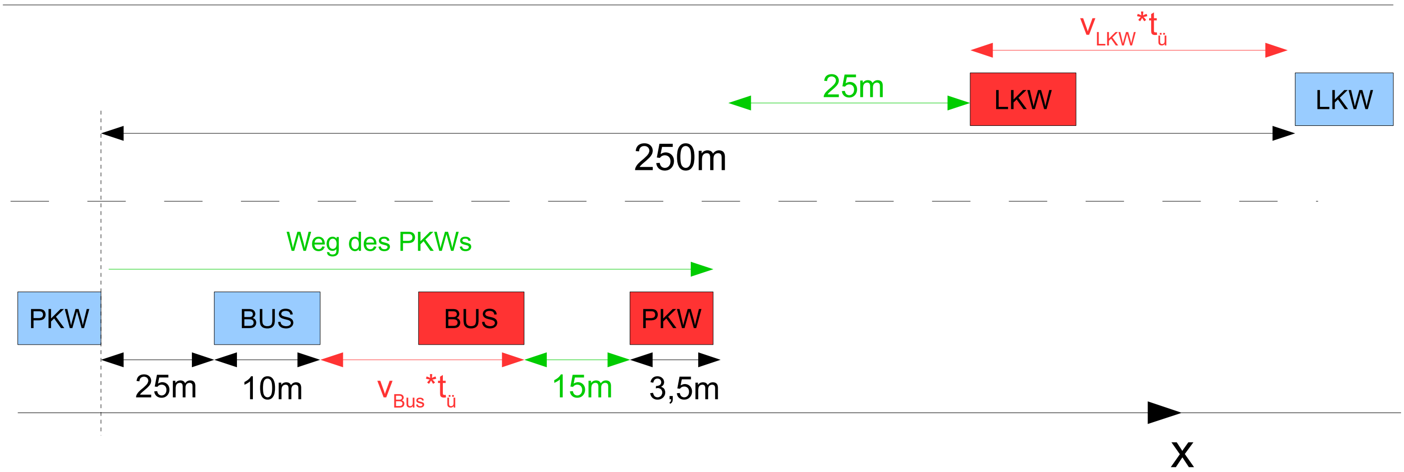
$$x - 0 = v \cdot (t - 0)$$

$$x = v \cdot t$$

Während der Überholzeit $t_ü$ unseres PKWs bewegt sich der Bus mit der konstanten Geschwindigkeit v_{BUS} von der aktuellen Position zur gewünschten Position. Das gleiche gilt für den LKW. Dieser fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit v_{LKW} während der Überholzeit $t_ü$ von der aktuellen zur gewünschten Position:

$$x_{BUS} = v_{BUS} \cdot t_ü$$

$$x_{LKW} = v_{LKW} \cdot t_ü$$



Nachdem nun alle Wege eingezeichnet sind können wir zunächst den Überholweg unseres PKWs bestimmen:

$$x_{ü} = 25m + 10m + v_{BUS} \cdot t_{ü} + 15m + 3{,}5\,m$$

(1) $$x_{ü} = v_{BUS} \cdot t_{ü} + 53{,}5\,m$$

Wir können den Weg des PKWs im Vergleich zum Abstand des LKWs wie folgt setzen:

$$x_{ü} = 250\,m - v_{LKW} \cdot t_{ü} - 25m$$

(2) $$x_{ü} = 225m - v_{LKW} \cdot t_{ü}$$

Es ist uns nun möglich die Überholzeit $t_{ü}$ zu bestimmen, da die Geschwindigkeiten in der Aufgabenstellung angegeben sind:

Wir setzen dafür (1) und (2) gleich:

$$225m - v_{LKW} \cdot t_{ü} = v_{BUS} \cdot t_{ü} + 53{,}5\,m$$

Geschwindigkeiten einsetzen (in m/s):

$$225m - 25\frac{m}{s} \cdot t_{ü} = 23{,}61\frac{m}{s} \cdot t_{ü} + 53{,}5\,m$$

Nach der Überholzeit auflösen:

$$171{,}5\,m = t_{ü}\left(25\frac{m}{s} + 23{,}61\frac{m}{s}\right)$$

$$t_{ü} = 3{,}53\,s$$

Der gesamte Überholweg $x_ü$ kann dann aus (1) oder (2) berechnet werden:

(1) $$x_ü = 23{,}61\,\frac{m}{s}\cdot 3{,}53\,s + 53{,}5\,m = 136{,}84\,m$$

(2) $$x_ü = 225m - 25\frac{m}{s}\cdot 3{,}53\,s = 136{,}75\,m$$

Differenzen bestehen aufgrund von Rundungsfehlern bei der Geschwindigkeit v_{BUS}.

Als nächstes wollen wir die Beschleunigung bestimmen, welcher unser PKW aufweisen muss. Hierzu werden wir den Überholweg bestimmen.
Diesen Weg können wir aus den Zusammenhängen der gradlinigen Bewegung bestimmen. Zunächst ist laut Aufgabenstellung die Beschleunigung des PKWs beim Überholen konstant:

$$a = const$$

Die Beschleunigung ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Wir trennen die Veränderlichen:

$$dv = a\,dt$$

Und integrieren:

$$v - v_0 = a\cdot t$$

$$v = a\cdot t + v_0$$

Dabei ist die Geschwindigkeit v_0 die Anfangsgeschwindigkeit unseres PKWs v_{PKW}

$$v = a\cdot t + v_{PKW}$$

Wir können nun den Weg bestimmen. Der Weg ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Trennen der Veränderlichen:

$$dx = v\,dt$$

Einsetzen von v:

$$dx = \left(a \cdot t + v_{PKW}\right)\,dt$$

Integration:

$$x - x_0 = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_{PKW} \cdot t$$

$x - x_0$ ist der Überholweg $x_ü$, des PKWs in der Überholzeit $t = t_ü$:

$$x_ü = \frac{1}{2} a \cdot t_ü^2 + v_{PKW} \cdot t_ü$$

Wir haben alle Variablen bis auf die Beschleunigung gegeben. Wir stellen die Gleichung also nach a um:

$$a = \left(x_ü - v_{PKW} \cdot t_ü\right) \cdot \frac{2}{t_ü^2}$$

Einsetzen der Werte:

$$a = \left(136{,}84\,m - 27{,}78\,\frac{m}{s} \cdot 3{,}53\,s\right) \cdot \frac{2}{\left(3{,}53\,s\right)^2} = 6{,}22\,\frac{m}{s^2}$$

Unser PKW muss eine Beschleunigung von a = 6,22 m/s² aufweisen, damit er den Abstand von 15m zum Bus und 25m zum LKW einhält.

Zum Schluss wollen wir noch die Endgeschwindigkeit unseres PKWs bestimmen. Hierfür ziehen wir die bereits oben ermittelte Gleichung heran:

$$v = a \cdot t + v_{PKW}$$

Dabei ist v die Endgeschwindigkeit, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des PKWs, t die Überholzeit und a die Beschleunigung zum Überholen:

$$v = a \cdot t_ü + v_{PKW}$$

$$v = 6{,}22\,\frac{m}{s^2} \cdot 3{,}53\,s + 27{,}78\,\frac{m}{s} = 49{,}74\,\frac{m}{s} = 179{,}06\,\frac{km}{h}$$