Aufgabe: Wassertropfen

Wir betrachten zwei Wassertropfen an einer Dachkante eines Hochhauses. Einer der Wassertropfen fällt von der Dachkante (mit Höhe $h = 40m$ zum Boden) herunter. Der zweite Tropfen folgt eine Sekunde danach.

a) Wie viel Abstand weisen beide Tropfen während des Fallens zueinander auf?
b) Wie groß sind die Geschwindigkeitsdifferenzen während des Falls?
c) Nach welcher Zeit erreichen beide Tropfen jeweils den Boden?

Lösung:

Es handelt sich um eine gradlinige Bewegung der Wassertropfen (senkrecht nach unten). Zunächst fällt der erste Tropen mit der Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\ m/s^2$ zu Boden. Eine Sekunde später folgt der 2. Tropfen.

a) Wir wollen zunächst die Geschwindigkeitsdifferenzen beider Tropfen bestimmen. Da die Beschleunigung gegeben ist, können wir die folgende Gleichung verwenden:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Mit a = g ergibt sich dann:

$$g = \frac{dv}{dt}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$dv = g\, dt$$

Die Fallbeschleunigung g ist konstant:

$$\int_0^v dv = g \int_0^t dt$$

Wir betrachten zunächst die Geschwindigkeit des ersten Tropfens. Dieser fällt zur Zeit t=0 (wir beginnen dort mit der Zeitmessung) von der Dachkante herunter. Die Geschwindigkeit ist zum Zeitpunkt t=0 natürlich null, weil der Tropfen da gerade noch an der Dachkante hängt. Integrieren führt dann zu:

$$v - 0 = g(t - 0)$$

$$v_1 = g \cdot t$$

Wir beginnen also mit der Zeitmessung beim 1. Tropfen. Für den 2. Tropfen gilt eine Zeitverzögerung von einer Sekunde, d.h. dieser löst sich erst bei der unteren Grenze t = 1s von der Dachkante. Kurz vor dem Fall ist die Geschwindigkeit null, also ist hier die unteren Grenze v = 0:

$$\int_0^v dv = g \int_{1s}^t dt$$

$$v - 0 = g(t - 1s)$$

$$v_2 = g \cdot t - g \cdot 1s$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz beträgt also:

$$v_1 - v_2 = g \cdot t - (g \cdot t - g \cdot 1s) = g \cdot 1s$$

$$\boxed{\Delta = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 1s = 9{,}81\,\frac{m}{s}}$$ Geschwindigkeitsdifferenz der beiden Tropfen

Die Geschwindigkeitsdifferenz ist konstant. Das bedeutet, dass die beiden Tropfen immer dieselbe Geschwindigkeitsdifferenz aufweisen.

Als nächstes betrachten wird die **Wegdifferenz**. Um den Weg jedes einzelnen Tropfen zu berechnen, verwenden wir den folgenden Zusammenhang:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Wir betrachten hierzu beiden Wegfunktionen getrennt voneinander. Zunächst betrachten wir den Weg, den der 1. Tropfen zurücklegt und setzen hierfür v_1 ein:

$$g \cdot t = \frac{dx}{dt}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$dx = g \cdot t \;dt$$

Die Fallbeschleunigung ist konstant. Diese kann also vor das Integral gezogen werden:

$$\int_0^{x_1} dx = g \cdot \int_0^t t \;dt$$

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{2} g \cdot t^2}$$ **Wegfunktion 1. Tropfen**

Als nächstes betrachten wir die Wegfunktion des 2. Tropfens:

$$v_2 = \frac{dx}{dt}$$

Einsetzen von v_2 ergibt dann:

$$g \cdot t - g \cdot 1s = \frac{dx}{dt}$$ Wir trennen die Veränderlichen:

$$dx = (g \cdot t - g \cdot 1s)\,dt$$

$$dx = g \cdot t \;dt - g \cdot 1s \;dt$$

Und bilden das Integral:

$$\int_0^{x_2} dx = \int_{1s}^{t} g \cdot t \; dt - \int_{1s}^{t} g \cdot 1s \; dt$$

Auch hier gilt wieder, dass wir die Zeit bei t = 1s starten, weil der 2. Tropfen 1s nach dem 1. Tropfen fällt und die Zeitmessung mit dem 1. Tropfen beginnt.

$$x_2 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 - \frac{1}{2} g (1s)^2 - (g \cdot 1s \cdot t - g \cdot 1s \cdot 1s)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 - \frac{1}{2} g \, 1s^2 - g \cdot 1s \cdot t + g \cdot 1s^2$$

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + \frac{1}{2} g \, 1s^2 - g \cdot 1s \cdot t}$$ **Wegfunktion 2. Tropfen**

Was genau sagt die Wegfunktion des 2. Tropfens aus? Wenn wir t = 1s einsetzen, dann ergibt sich ein Weg von $x_2 = 0$, weil der 2. Tropfen erst ab der 1s abfällt.

Die Wegdifferenz kann als nächstes bestimmt werden mit $\Delta x = x_1 - x_2$:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 - \left(\frac{1}{2} g \cdot t^2 + \frac{1}{2} g \, 1s^2 - g \cdot 1s \cdot t \right)$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} g \cdot t^2 - \frac{1}{2} g \cdot t^2 - \frac{1}{2} g \, 1s^2 + g \cdot 1s \cdot t$$

$$\Delta x = -\frac{1}{2} g \, 1s^2 + g \cdot 1s \cdot t$$

Einsetzen von g = 9,81:

$$\boxed{\Delta x = -4{,}91\,m + 9{,}81 \frac{m}{s} \cdot t}$$ **Wegdifferenz der beiden Tropfen**

Die Wegdifferenz ist dabei abhängig von der Zeit t, weil diese nicht konstant ist. Wir bestimmen die Wegdifferenzen nach 2 und 3 Sekunden:

$$\boxed{\Delta x = -4{,}91\,m + 9{,}81 \frac{m}{s} \cdot 2s = 14{,}71\,m}$$

$$\boxed{\Delta x = -4{,}91\,m + 9{,}81 \frac{m}{s} \cdot 3s = 24{,}52\,m}$$

Als nächstes wollen wir die Dauer t =T bestimmen, welche die Tropfen benötigen, um den Boden zu erreichen. Wir betrachten hierzu den Weg des 1. Tropfens:

$$x_1 = \frac{g}{2} t^2$$

Auflösen nach t = T:

$$T^2 = \frac{2}{g} x_1$$

$$T = \sqrt{\frac{2}{g} x_1}$$

Einsetzen der Werte:

$$T = \sqrt{\frac{2}{9{,}81 \frac{m}{s^2}} 40m} = 2{,}86 s$$

Dieselbe Falldauer gilt natürlich ebenfalls für den zweiten Tropfen. Wir können dies aber auch anhand der Wegfunktion des 2. Tropfens aufzeigen. Wichtig ist zu berücksichtigen, dass der 2. Tropfen bei t=1s startet und demnach auch erst 1s später auf dem Boden aufschlägt. Wir betrachten nun also als Endzeit t = T+1s:

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + \frac{1}{2} g\, 1s^2 - g \cdot 1s \cdot t}$$ Wegfunktion des 1. Tropfens

Einsetzen von t = T+1s:

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2} g \cdot (T + 1s)^2 + \frac{1}{2} g\, 1s^2 - g \cdot 1s \cdot (T + 1s)}$$ Binomische Formel anwenden

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2} g \cdot (T^2 + 2T \cdot 1s + 1s^2) + \frac{1}{2} g\, 1s^2 - g \cdot 1s \cdot (T + 1s)}$$ Klammern auflösen

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2} g \cdot T^2 + \frac{1}{2} g \cdot 2T \cdot 1s + \frac{1}{2} g \cdot 1s^2 + \frac{1}{2} g\, 1s^2 - g \cdot 1s \cdot T - g \cdot 1s^2}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2} g \cdot T^2 + g \cdot T \cdot 1s + \frac{1}{2} g \cdot 1s^2 + \frac{1}{2} g\, 1s^2 - g \cdot 1s \cdot T - g \cdot 1s^2}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2} g \cdot T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{2}{g} x_2}$$

$$T = \sqrt{\frac{2}{9{,}81 \frac{m}{s^2}} 40m} = 2{,}86\,s$$