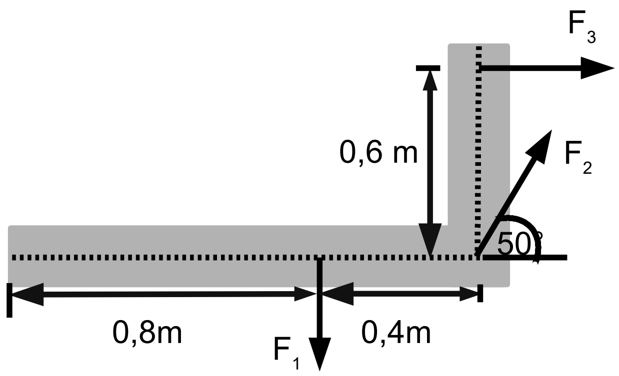
**Kurs:** Statik
**Thema:** Resultierende bestimmen

**Aufgabe 1)**

Wo liegt bei der Berechnung der Resultierenden der Unterschied zwischen Kräften mit einem gemeinsamen Angriffspunkt und Kräften mit unterschiedlichen Angriffspunkten?

**Aufgabe 2)**




Gegeben seien die obigen drei auf den Balken wirkenden Kräfte mit:

$F_1 = 40$ kN
$F_2 = 160$ kN
$F_3 = 88$ kN

Bestimme den Betrag, die Richtung und die Lage der resultierenden Kraft!

**Lösung 1)**

Wirken Kräfte auf einen Balken, die sich alle in einem einzigen Punkt schneiden, so liegt die resultierende Kraft in diesem Angriffspunkt. Es muss also nur Betrag und Richtung der Resultierenden bestimmt werden, weil die Lage bereits bekannt ist.

Wirken Kräfte auf einen Balken, die sich nicht alle in einem einzigen Punkt schneiden, so muss zusätzlich zum Betrag und zur Richtung die Lage der Resultierenden bestimmt werden.

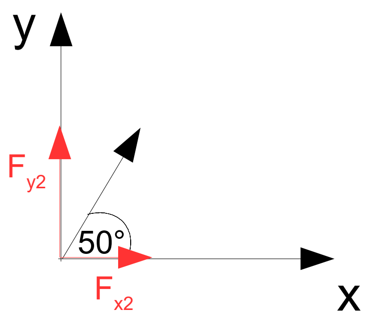
**Vorgehensweise bei der Berechnung der Resultierenden:**

1. **Kräftezerlegung für Kräfte die nicht vertikal oder horziontal gerichtet sind durchführen**
2. **Teilresultierenden $R_x$ und $R_y$ bestimmen**
3. **Betrag der Resultierenden R aus den Teilresultierenden berechnen**
4. **Richtung (Winkel) der Resultierenden berechnen**
5. **Lage der Resultierenden berechnen (fällt für Kräfte mit gemeinsam Angriffspunkt weg)**

**Lösung 2)**

1. **Kräftezerlegung durchführen:**

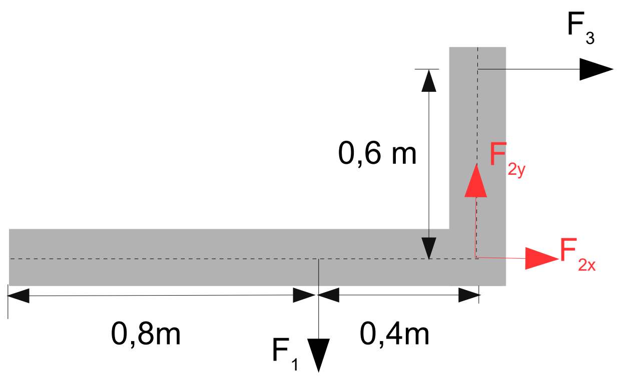
Sind Kräfte mit einem Winkel gegeben, so zeigen diese weder in x- noch in y-Richtung. Für diese Kräfte muss zunächste eine Kräftezerlegung durchgeführt werden. Die Kraft $F_2$ muss in ihre x- und y-Komponenten zerlegt werden:




Es gilt:

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin(50°)$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos(50°)$$




## 2. Teilresultierenden bestimmen

Zur Bestimmung des Betrages der resultierenden Kraft müssen wir zunächst die Teilresultierenden $R_x$ und $R_y$ bestimmen.

$R_x$ ist die Summe aller Kräfte in x-Richtung

$R_y$ ist die Summe aller Kräfte in y-Richtung

Wir nehmen hierzu die x-Achse nach rechts und die y-Achse nach oben gerichtet an. Alle Kräfte die in positive Koordinatenrichtung zeigen werden positiv, alle Kräfte in negative Koordinatenrichtung negativ berücksichtigt.

$$\rightarrow R_x = \sum F_{ix} = F_{2x} + F_3$$

$$R_x = F_2 \cdot \cos(60°) + F_3$$

$$R_x = 160\,kN \cdot \cos(50°) + 88\,kN = 190{,}85\,kN$$

$$\uparrow R_y = \sum F_{iy} = -F_1 + F_{2y}$$

$$R_x = -F_1 + F_2 \cdot \sin(50°)$$

$$R_y = -40\,kN + 160\,kN \cdot \sin(50°) = 82{,}57\,kN$$

Da beide Ergebnisse positiv sind zeigen die Teilresultierenden beide in positive Achsenrichtung.

### 3. Betrag der Resultierenden bestimmen

Nachdem die Teilresultierenden bestimmt sind, kann als nächstes die Resultierende mittels Satz des Pythagoras bestimmt werden:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{(190{,}85\,kN)^2 + (82{,}57\,kN)^2}$$

$$R = 207{,}95\,kN$$

Der Betrag der Resultierenden beträgt 207,95 kN.

### 4. Richtung der Resultierenden berechnen

Als nächstes benötigen wir die Richtung der Resultierenden. Um die Richtung bestimmen zu können werden wir den Winkel α zwischen der Resultierenden und der x-Achse (bzw. $R_x$) bestimmen. Dieser Winkel kann mittels Tangens berechnet werden:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{R_y}{R_x}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{190{,}85\,kN}{82{,}57}\right) = 66{,}6\,°$$

Die Resultierende hat einen Winkel von 66,6° zur Horizontalen.

### 5. Lage der Resultierenden bestimmen

Als nächtes wollen wir die Lage der Resultierenden bestimmen. Die Lage der Resultierenden ist der Hebelarm in Bezug auf einen beliebig gewählten Punkt. Der Hebelarm kann bestimmt werden aus der folgenden Gleichung:

$$M = F \cdot h$$

Das Produkt aus Kraft mal Hebelarm ist das resultierende Moment. In diesem Fall ist die Resultierende die Kraft R = F und M = $M_R$ damit das resultierende Moment:

$$M_R = R \cdot h$$

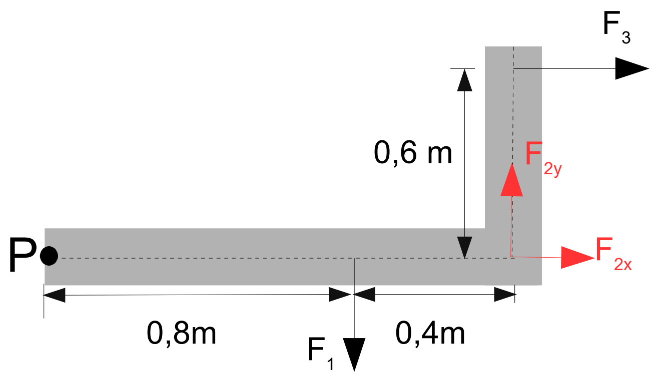
Die Resultierende haben wir bereits bestimmt. Als nächstes müssen wir also das resultierende Moment bestimmen, um den Hebelarm h  aus der obigen Gleichung berechnen zu können.

$$M_R = \sum M_i = \sum F_i \cdot h_i$$

**Das resultierende Moment ist die Summe aller Momente.**

Wir betrachten als nächstes jede Kraft separat und bilden das Produkt aus Kraft mal Hebelarm, um das Moment für einen beliebigen Punkt zu bestimmen. Zusätzlich muss noch der Drehsinn berücksichtigt werden. Handelt es sich im ein linksdrehendes Moment, so wird dieses bei der Berechnung positiv berücksichtigt.

Bevor wir die Momente bestimmen können, müssen wir noch einen beliebigen Bezugspunkt wählen, auf welchen wir uns beziehen. Hierbei sollte der Bezugspunkt so gewählt werden, dass die vertikalen und horizontalen Abmessungen jeder einzelnen Kraft zu diesem Bezugspunkt gegeben sind. Wir wählen den Punkt P am Anfang des Balkens:



Wir beginnen mit der Kraft $F_1$. Der Hebelarm ist der senkrechte Abstand der Kraft $F_1$ zum Bezugspunkt P. Hierfür verschieben wir die Kraft F1 gedanklich solange parallel zu sich selbst, bis die Kraft (oder ihre Wirkungslinie) den Bezugspunkt schneidet. In diesem Fall ist der senkrechte Abstand $h_1$ = 0,8 m. Der Drehsinn ist negativ, weil die Kraft $F_1$ den Balken in einer Rechtsdrehung um den Bezugspunkt dreht:

$$M_1 = -F_1 \cdot h_1 = -40\,\text{kN} \cdot 0{,}8\,\text{m} = -32\,\text{kNm}$$

Analog ist das Vorgehen für die anderen Kräfte. Für die Kraft $F_2$ betrachten wir aber die Vertikal- und Horizontalkomponenten:

$$M_{2x} = 160 \cdot \cos(50°)\,\text{kN} \cdot 0\,\text{m} = 0$$

$$M_{2y} = 160 \cdot \sin(50°)\,\text{kN} \cdot 1{,}2\,\text{m} = 147{,}08\,\text{kNm}$$

$$M_3 = 88\,\text{kN} \cdot 0{,}6\,\text{m} = -52{,}8\,\text{kNm}$$

Für die Horizontalkomponente $F_{2x}$ ist der Hebelarm Null, weil die Wirkungslinie der Kraft den Bezugspunkt bereits schneidet.

Das Moment $M_{2y}$ ist positiv, weil die Kraft $F_{2y}$ den Balken in einer Linksdrehung um den Bezugspunkt dreht.

Das Moment $M_3$ ist negativ, weil die Kraft $F_3$ den Balken in einer Rechtsdrehung um den Bezugspunkt dreht.

**Wichtig: Der senkrechte Abstand der Kraft zum gewählten Bezugspunkt ist der Hebelarm. Diesen kann man durch die gedankliche Parallelverschiebung der Kraft zum Bezugspunkt bestimmen (solange bis die Kraft oder die Wirkungslinie den Bezugspunkt schneidet). Schneidet die Kraft oder ihre Wirkungslinie bereits zu Beginn den Bezugspunkt, so existiert kein Hebelarm und das Moment ist Null (es kann keine Parallelverschiebung vorgenommen werden).**

**Wir berechnen nun das resultierenden Moment:**

$$M_R = \sum M_i = -32\,\text{kNm} + 147{,}08\,\text{kNm} - 52{,}8\,\text{kNm} = 62{,}28\,\text{kNm}$$

Das resultierende Moment ist positiv. Das bedeutet, dass die Resultierende den Balken in einer Linksdrehung um den Bezugspunkt dreht. Der Hebelarm ist:

$$h = \frac{M_R}{R} = \frac{62{,}28\,\text{kNm}}{207{,}95\,\text{kN}} = 0{,}3\,\text{m}$$

Der Hebelarm beträgt 0,3 m. Das bedeutet, dass die Resultierende einen senkrechten Abstand von 0,3m zum Hebelarm besitzt.