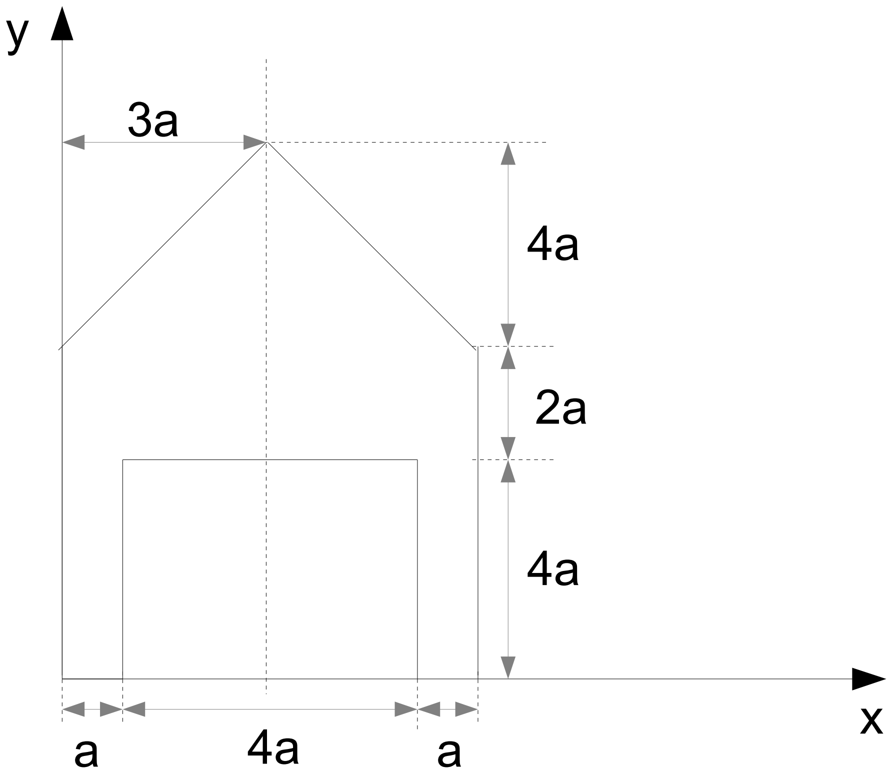
Kurs: Statik
Thema: Schwerpunkte

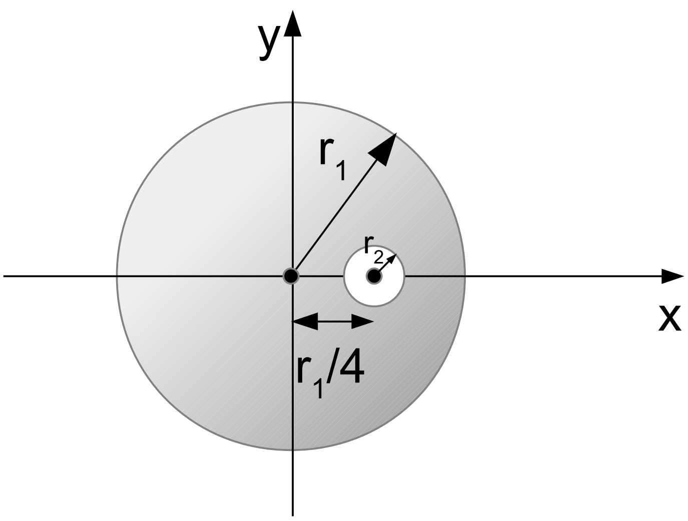
ingenieurkurse.de
Interaktive Online-Kurse

Aufgabe 1) Schwerpunkt bestimmen



Für die obige Fläche sollen die Schwerpunktkoordinaten bestimmt werden!

Aufgabe 2) Schwerpunkt bestimmen



Aus der obigen Kreisfläche ist ein Kreis mit dem Radius r_2 ausgeschnitten worden. Es soll der Schwerpunkt für die Restfläche bestimmt werden.

Verwendete Formeln:

<u>Flächenschwerpunkte</u>

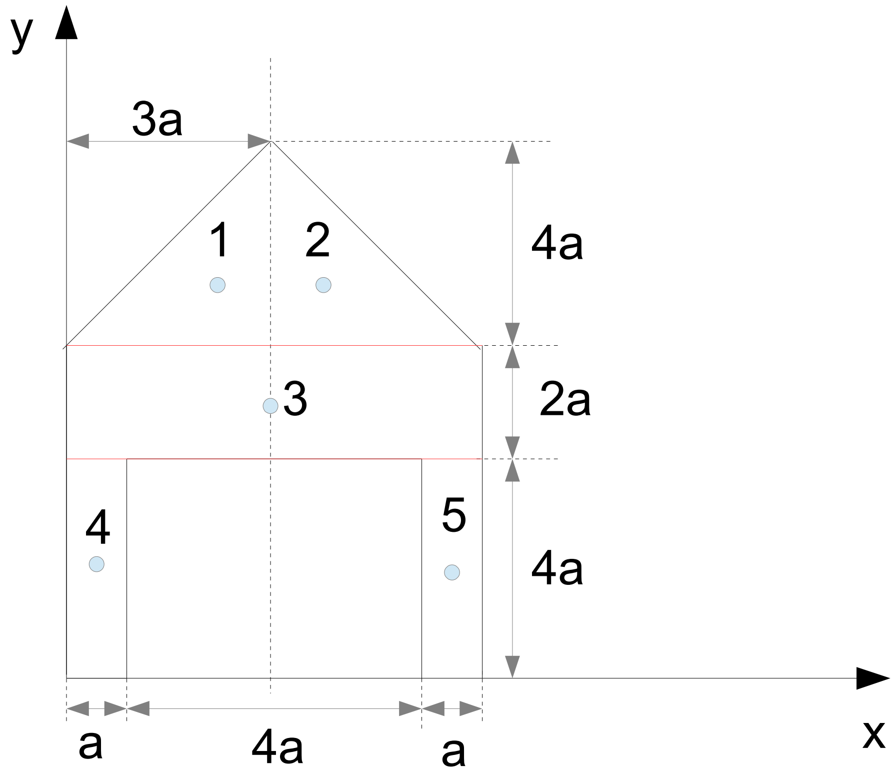
$$x_s = \frac{1}{A} \int x \, dA \qquad y_s = \frac{1}{A} \int y \, dA$$

Für zusammengesetzte Flächen:

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} \qquad y_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

Lösung Aufgabe 1)

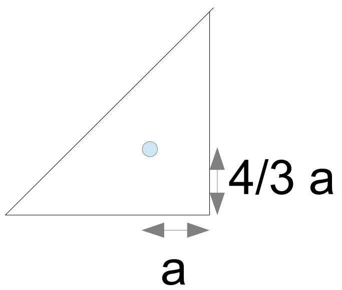
Das obige Haus wird zunächst in Teilflächen unterteilt. Dabei ist es sinnvoll Teilflächen zu wählen, für welche die Lage der Schwerpunkte einfach zu bestimmen sind:



Das Haus ist in 5 Teilflächen unterteilt worden. Die 1. und 2. Teilflächen stellen rechtwinklige Dreiecke, die anderen drei Teilflächen Rechtecke dar.

Für die rechtwinkligen Dreiecke gilt:

-> Vom Rand ausgehend, dort wo sich der rechte Winkel befindet, horizontal und vertikal 1/3 Abstand zum Schwerpunkt.



Die horizontale Seite ist 3a lang. Da der Abstand 1/3 vom Rand des rechten Winkels aus beträgt wird berechnet:

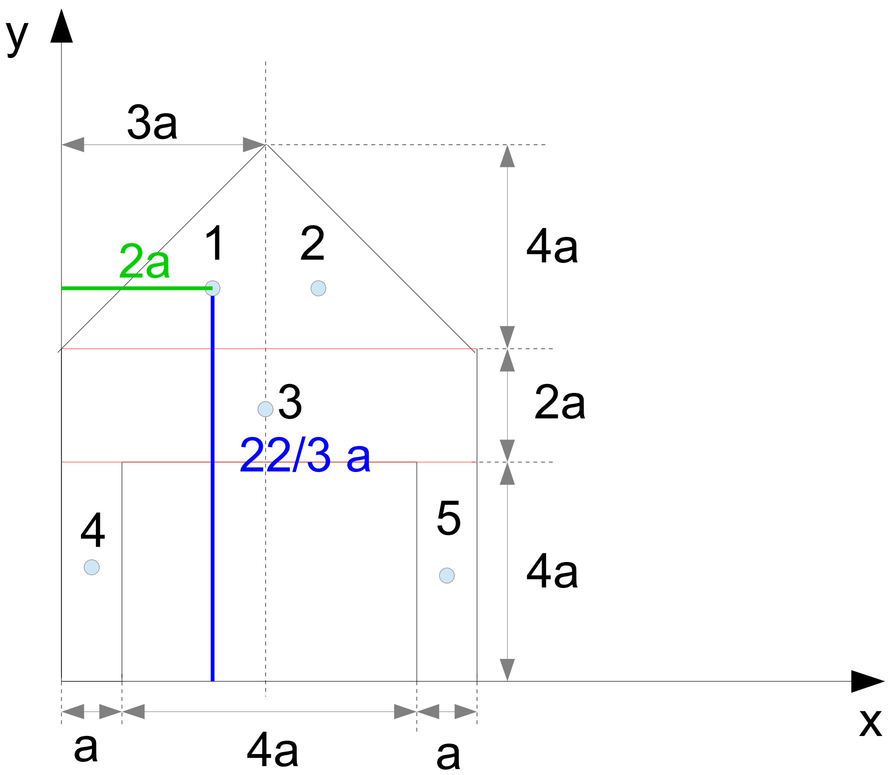
$$3a \cdot \frac{1}{3} = a$$

Für Rechtecke gilt:

-> Der Schwerpunkt liegt in der Mitte der Fläche.

Es muss außerdem der Koordinatenursprung des x,y-Koordinatensystems berücksichtigt werden. Vom Koordinatenursprung aus sollen die Abmessungen für den Schwerpunkt betrachtet werden.

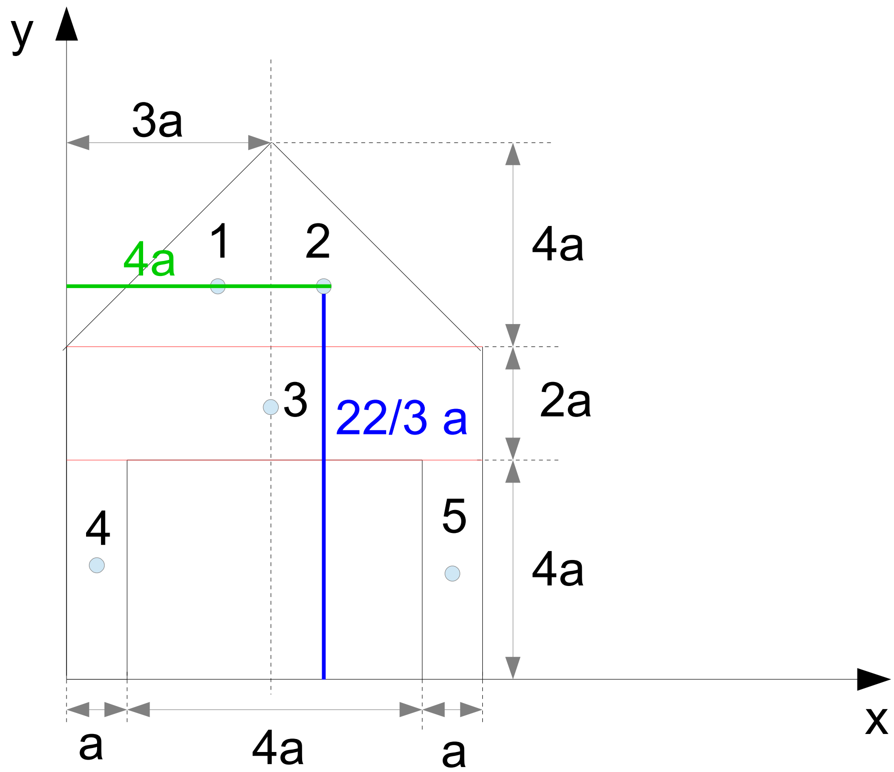
Wir beginnen mit den beiden rechtwinkligen Dreiecken. Der Abstand vom Koordinatenursprung hin zum 1. Dreieck in x-Richtung (grün) und in y-Richtung (blau):



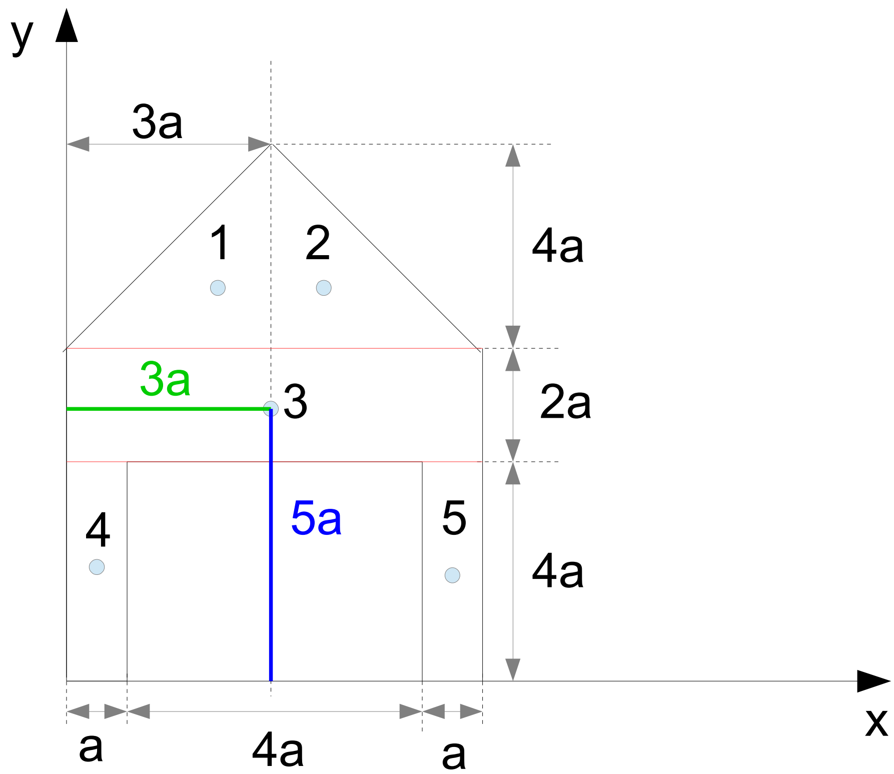
Der Abstand in x-Richtung ist 2a, weil der Schwerpunkt einen Abstand von a vom Rand des rechten Winkels aus besitzt.
Der Abstand in y-Richtung ist 4a + 2a + 4/3 a.

Der Abstand für das zweite Dreieck beträgt:

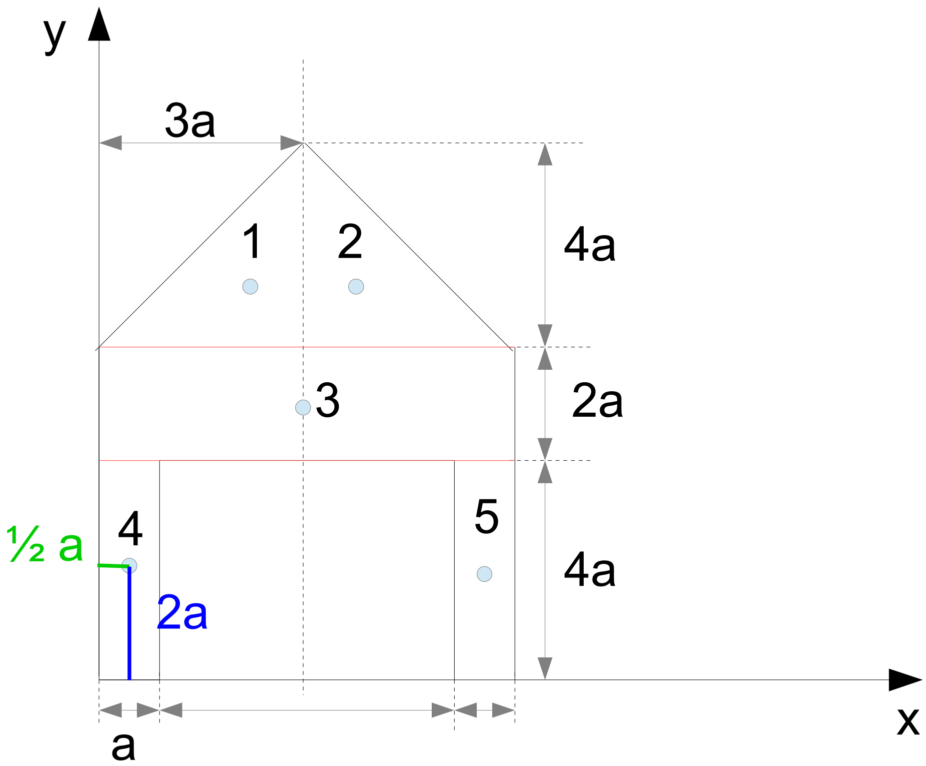
In x-Richtung: 3a + a
In y-Richtung: 4a + 2a + 4/3 a

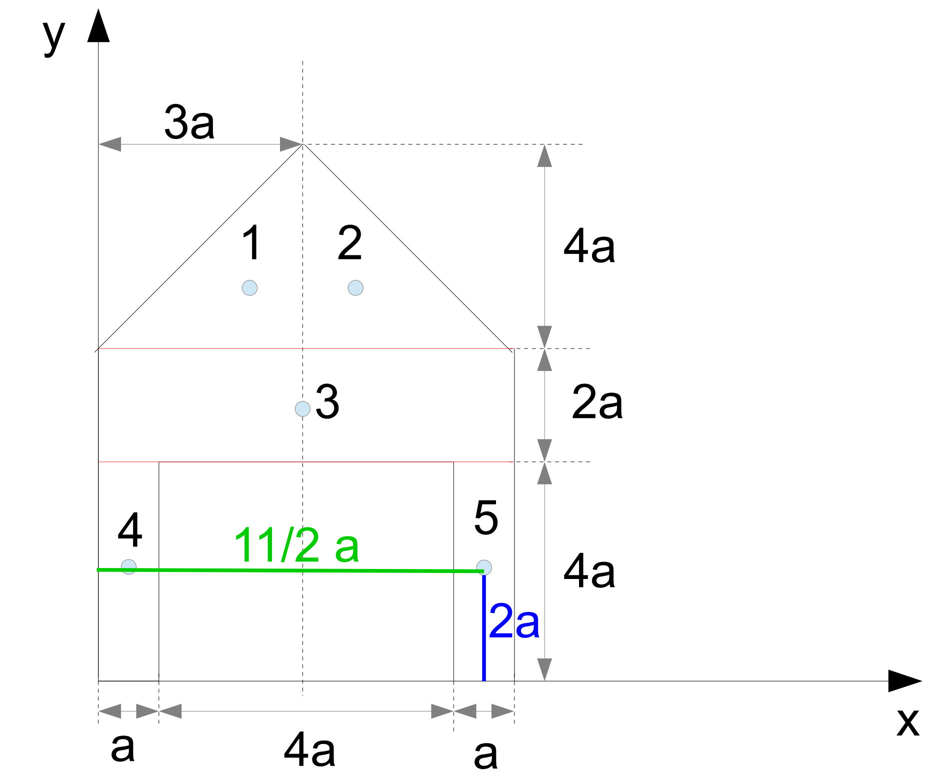


Es wird als nächstes das Rechteck (3. Fläche) betrachtet:



Danach folgen die Abstände für die unteren Rechtecke:





Nachdem alle Abstände bestimmt worden sind kann als nächstes der Schwerpunkt der gesamte Fläche bestimmt werden.

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} \qquad y_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

$$x_s = \frac{2a \cdot 6a^2 + 4a \cdot 6a^2 + 3a \cdot 12a^2 + 1/2\,a \cdot 4a^2 + 11/2\,a \cdot 4a^2}{6a^2 + 6a^2 + 12a^2 + 4a^2 + 4a^2}$$

$$x_s = \frac{12a^3 + 24a^3 + 36a^3 + 2a^3 + 22a^3}{32a^2}$$

$$x_s = \frac{96a^3}{32a^2} = 3a$$

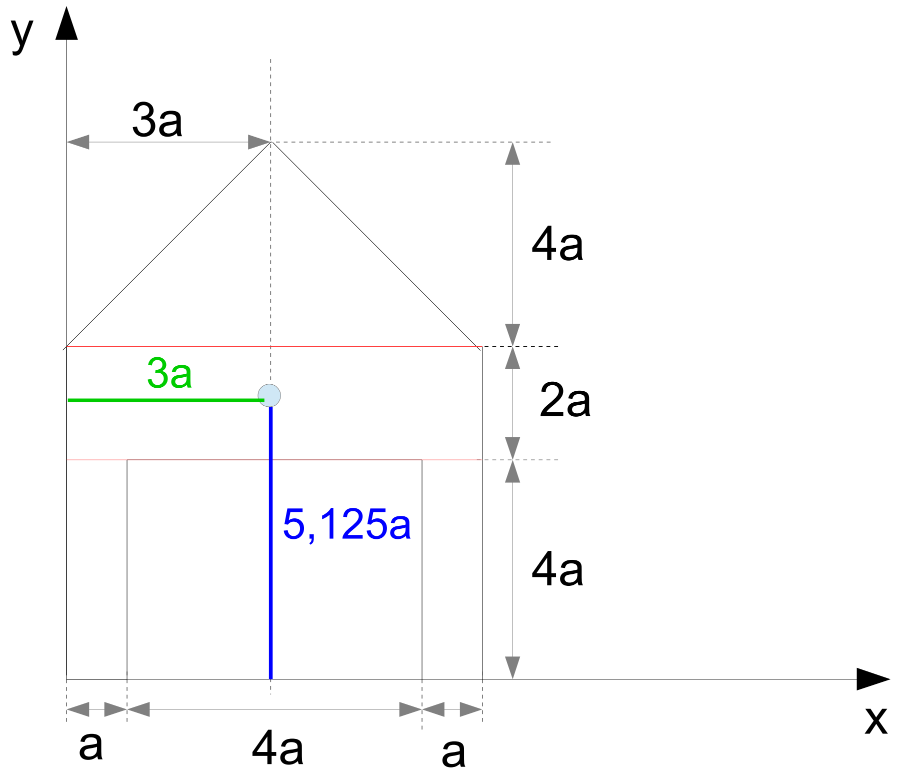
Der Abstand vom Koordinatenursprung in x-Richtung zum Schwerpunkt beträgt $x_s = 3a$.

$$y_s = \frac{22/3a \cdot 6a^2 + 22/3a \cdot 6a^2 + 5a \cdot 12a^2 + 2\,a \cdot 4a^2 + 2a \cdot 4a^2}{6a^2 + 6a^2 + 12a^2 + 4a^2 + 4a^2}$$

$$y_s = \frac{44a^3 + 44a^3 + 60a^3 + 8a^3 + 8a^3}{6a^2 + 6a^2 + 12a^2 + 4a^2 + 4a^2}$$

$$y_s = \frac{164a^3}{32a^2} = 5{,}125\,a$$

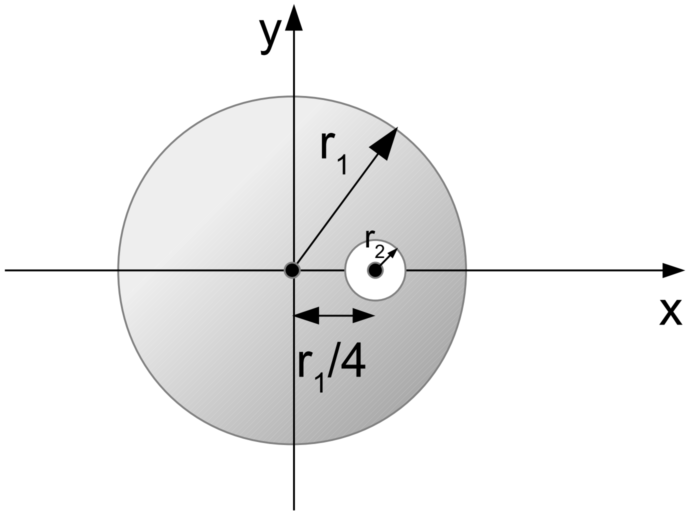
Der Abstand vom Koordinatenursprung in y-Richtung zum Schwerpunkt beträgt $y_s = 5{,}125a$.



Lösung Aufgabe 2)

Die ausgeschnitte Kreisfläche mit dem Radius r_2 wird innerhalb der Schwerpunktberechnung negativ mit einbezogen. Es wird also zunächst die gesamte Kreisfläche betrachtet und dann der ausgeschnittene Kreis davon abgezogen.

Es existiert nur ein Abstand in y-Richtung, da die x-Achse eine Symmetrieachse darstellt. Das bedeutet, dass man die obige Fläche an der x-Achse spiegeln kann und die untere Fläche erhält. Der Schwerpunkt befindet sich also auf der x-Achse! Grund dafür ist, dass der ausgeschnitte Kreis mit dem Schwerpunkt auf der x-Achse liegt.



Es werden beide Kreisflächen sepearat betrachtet.

Großer Kreis

Der Abstand **x** vom Koordinatenursprung zum Schwerpunkt des großen Kreises ist:

$$x_1 = 0$$

-> Der Koordinatenursprung liegt im Schwerpunkt des großen Kreises.

Die Fläche des Kreises ergibt sich durch: $A_1 = \pi \cdot r_1^2$

Kleiner Kreis

Der Abstand **x** vom Koordinatenursprung zum Schwerpunkt des großen Kreises ist:

$$x_2 = \frac{r_1}{4}$$

Die Fläche des Kreises ergibt sich durch: $A_2 = -\pi \cdot r_2^2$

Das negative Vorzeichen wurde gewählt, weil diese Fläche aus dem großen Kreis ausgeschnitten wurde.

Es wird nun die Formel für die zusammengesetzten Flächenschwerpunkte herangezogen. Aufgrund der negative Fläche A_2 ergibt sich:

$$x_s = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2}$$

$$x_s = \frac{0 \cdot \pi r_1^2 - \frac{r_1}{4} \pi r_2^2}{\pi r_1^2 - \pi r_2^2} \qquad x_s = \frac{-\frac{r_1}{4} \pi r_2^2}{\pi r_1^2 - \pi r_2^2} \qquad x_s = \frac{-r_1 r_2^2}{4\left(r_1^2 - r_2^2\right)}$$