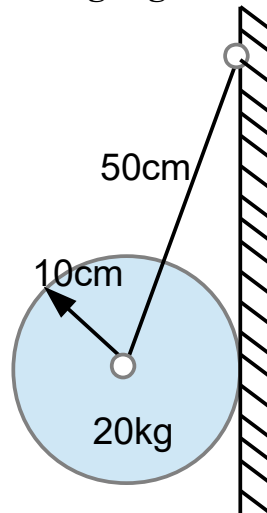


Kurs: Statik

Thema: Zentrale Kräftegruppe

Aufgabe 1: Gleichgewichtsbedingungen



Gegeben sei eine Kugel mit dem Gewicht von 20 kg, welche an einem Seil an einer **glatten Wand** befestigt ist. Wie groß ist die Seilkraft? Wie groß ist die Kraft, welche die Kugel auf die Wand ausübt?

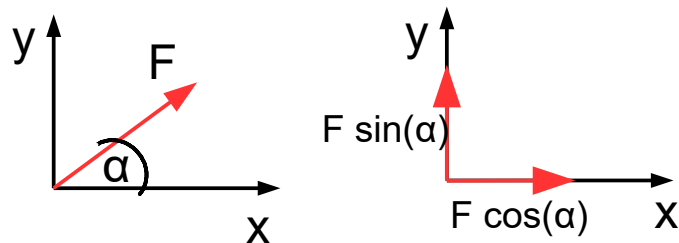
Verwendete Formeln:

Gleichgewichtsbedingungen:

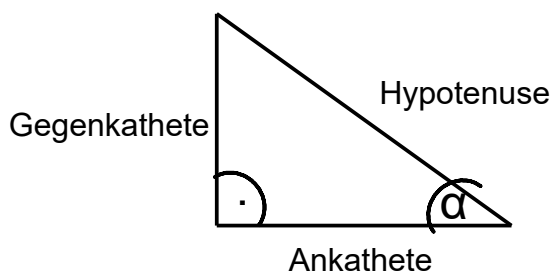
$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

Kräftezerlegung:



Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck:



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

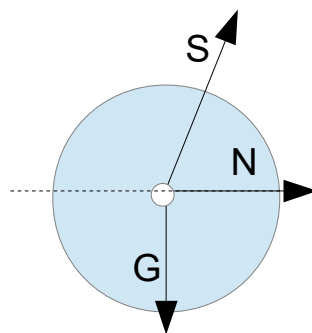
Analytische Lösung:

FRAGE: Was kennzeichnet eine zentrale Kräftegruppe, welche Bedingung muss erfüllt sein, damit eine zentrale Kräftegruppe vorliegt?

ANTWORT: Bei einer zentralen Kräftegruppe schneiden sich alle Kräfte bzw. deren Wirkungslinien in einem Punkt!

Zunächst wird das Freikörperbild gezeichnet. D.h. die betrachtete Kugel wird von der Wand und dem Seil freigeschnitten und stattdessen die Kräfte eingezeichnet:

Kräfte schneiden sich alle in einem Punkt



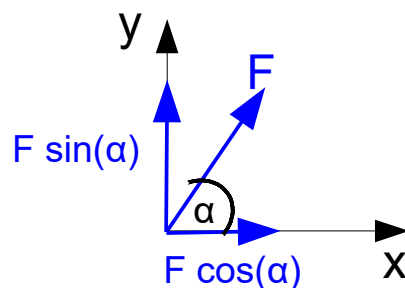
Dabei ist **N** die von der Kugel auf die Wand ausgeübte Kraft (keine Reibungskraft, da glatte Wand). **G** ist die Gewichtskraft der Kugel, welche im Schwerpunkt der Kugel angreift. Und **S** ist die Seilkraft. Da sich alle Kräfte in einem Punkt schneiden, liegt hier eine zentrale Kräftegruppe vor.

FRAGE: Welcher Schritt muss als nächstes folgen, bevor die vertikale und horizontale Gleichgewichtsbedingung aufgestellt werden kann? (Hinweis: Seilkraft)

ANTWORT: Die Kräfte welche nicht in horizontale oder vertikale Richtung zeigen müssen in ihre Komponenten zerlegt werden.

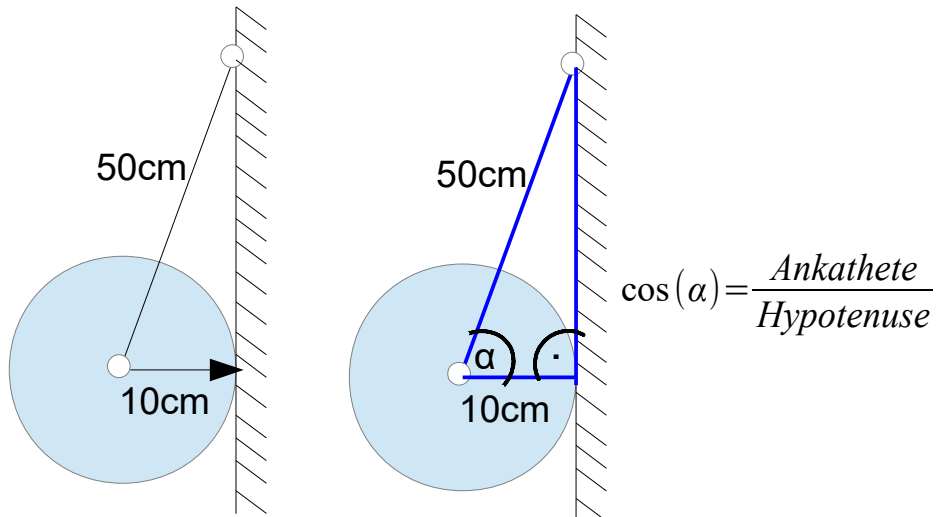
In dem obigen Fall muss demnach die Seilkraft **S** in ihre Horizontal- und Vertikalkomponente zerlegt werden.

Eine Kraft wird wie folgt in ihre Komponenten zerlegt:



Da im Ausgangsbeispiel keine Winkel angegeben sind, muss der Radius der Kugel mit 10cm und die Länge des Seils mit 50cm herangezogen werden, um den Winkel bestimmen zu können.

FORMEL: WINKELBERECHNUNG AM DREIECK



Der Winkel kann nun mittels der Längen berechnet werden:

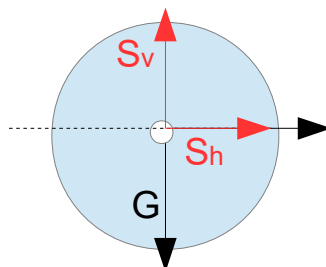
$$\alpha = \arccos\left(\frac{10 \text{ cm}}{50 \text{ cm}}\right) = 78,46^\circ$$

Die Seilkraft S kann nun in ihre Horizontal- und Vertikalkomponente zerlegt werden:

$$S_h = S \cdot \cos(78,46^\circ)$$

$$S_v = S \cdot \sin(78,46^\circ)$$

Die Kraft S wird im Freikörperbild ersetzt:



Als nächstes können die Gleichgewichtsbedingungen angewandt werden.

Horizontale Gleichgewichtsbedingung

Es werden alle horizontalen Kräfte berücksichtigt. Die Vorzeichenkonvention wird so festgelegt, dass nach rechts zeigende Kräfte positiv eingehen und nach links zeigende Kräfte negativ.

$$\rightarrow: N + S_h = 0$$

$$\rightarrow: N + S \cos(\alpha) = 0$$

Auflösen nach S:

$$S = \frac{-N}{\cos(\alpha)}$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung

Es werden alle vertikalen Kräfte berücksichtigt. Die Vorzeichenkonvention wird so festgelegt, dass nach oben zeigende Kräfte positiv eingehen und nach unten zeigende Kräfte negativ.

$$\uparrow: S_v - G = 0$$

$$\uparrow: S \cdot \sin(\alpha) - G = 0$$

Auflösen nach S:

$$S = \frac{G}{\sin(\alpha)}$$

Die Gewichtskraft **G** beträgt:

$$G = m \cdot g = 20 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s} = 196,2 \text{ N}$$

Es kann nun die Seilkraft **S** berechnet werden.

$$S = \frac{196,2 \text{ N}}{\sin(78,46^\circ)} = 200,25 \text{ N}$$

Auch die Normalkraft **N**, welche die Kugel auf die Wand ausübt kann bestimmt werden. Und zwar durch Umstellung der folgenden Formel (siehe: horizontale Gleichgewichtsbedingung):

$$S = -\frac{N}{\cos(\alpha)} \quad N = -S \cos(\alpha) = -200,25 \text{ N} \cdot \cos(78,46^\circ) = -40,06 \text{ N}$$

FRAGE: Was bedeutet das Minuszeichen?

ANTWORT: Das Minuszeichen bedeutet, dass die Normalkraft entgegengesetzt also nach oben gerichtet eingezeichnet werden muss. Die Wand übt demnach eine Zwangskraft auf die Kugel aus. Dadurch dass die Wand gegeben ist, verharrt die Kugel in ihrer Position und bewegt sich nicht nach rechts.

