

Vorlesungsskript

zum Selbststudium
der Vorlesung

FLM I

Prof. Dr.-Ing. J. A. Szymczyk
Fachgebiet für Strömungslehre und Strömungsmaschinen
FH Stralsund, FB Maschinenbau

Stand: 04.03.2013

Inhaltsverzeichnis

1.	Eigenschaften von Fluiden.....	8
1.1.	Vorbetrachtungen.....	8
1.2.	Dichte, Kontinuität der Masse	12
1.3.	Massenstrom, Volumenstrom.....	15
1.4.	Eigenschaften von Fluiden	18
2.	Druck	19
3.	Hydrostatik.....	21
3.1.	Grundgleichung der Hydrostatik	21
3.2.	Anwendung der hydrostatischen Grundgleichung	22
3.2.1	PASCALSches Paradoxon.....	22
3.2.2	Druckverlauf in kommunizierenden Röhren	23
3.2.3	Hydraulische Presse	24
3.2.4	U - Rohr - Manometer zur Messung des Gasdruckes p_g	25
3.2.5	Flüssigkeitsschichten	26
3.3.	Statischer Auftrieb	27
3.4.	Kräfte auf Behälterwände	31
4.	Dynamik der Fluide - Beschreibung von Strömungen.....	33
5.	Viskosität und Oberflächenspannung	35
5.1.	Viskosität.....	35
5.2.	Die Oberflächen- bzw. Grenzflächenspannung	37
5.3.	Kapillareffekte in der Fluidstatik.....	43
6.	Massenerhaltungssatz	47
7.	Energiesatz (1. HS).....	50
7.1.	Allgemeiner Energiesatz	50
7.2.	Inkompressible reibungslose Strömung (BERNOULLI-Gleichung)	52
7.2.1	Geschwindigkeits-, Druck-, Höhenform	52
7.2.2	Anwendung der Energie-Gleichung	54
7.3.	Inkompressible reibungslose Strömung mit Energiezufuhr	61
7.3.1	Spezifische Stutzenarbeit Y	61
7.3.2	Pumpe.....	62
7.3.3	Turbine.....	65

7.4.	Inkompressible reibungsbehaftete Fluide ohne Energiezufuhr.....	67
7.5.	Reibungsbehaftete Rohrströmung.....	69
7.5.1	Druckverlust in Rohrleitungen bei laminarer Strömung ($Re < 2320$) ...	69
7.5.2	Rohrreibungszahl (Widerstandszahl) λ	72
7.5.3	Druckverluste in Rohrelementen. Verlustkoeffizient ζ	74
8.	Impulssatz für stationäre Strömungen	77
8.1.	Definition des Impulses	77
8.2.	Stützkraftkonzept zur Berechnung der Stützkraft	78
8.3.	NEWTON–Kräftegleichgewicht zur Berechnung der Haltekräfte (Auflagekräfte)	80
8.4.	Handhabung und Berechnungssystematik.....	81
8.5.	Anwendungen des Impulssatzes.....	82
8.5.1	Strömungskräfte an Rohrteilen:.....	82
8.5.2	Strahlkräfte:.....	82
8.5.3	Propellerschub:	82
8.5.4	Rückstoßkräfte:	87
8.5.5	Mischvorgänge:.....	87
9.	Impulsmomentensatz (Drehimpuls, Drallsatz)	88
10.	Grundlegende Strömungserscheinungen	96
10.1.	Vorbetrachtungen (Turbulenz).....	96
10.2.	REYNOLDS-Zahl	100
10.3.	Die Grenzschicht (Reibungsschicht)	102
10.4.	Umströmung von Körpern	108
10.4.1	Widerstand. Dynamischer Auftrieb	108
10.4.2	Grundlagen der praktischen Tragflügeltheorie	111
10.5.	Widerstand der längsangeströmten Platte	116
10.6.	Ablösung	119
10.7.	Umströmung einer Kugel.....	121
10.7.1	Schleichende Strömung um eine Kugel in einer reibungsbehafteten Flüssigkeit. Widerstandskraft.....	125
10.7.2	Kugelumströmung in einer reibungslosen Flüssigkeit	130
10.7.3	Kraft auf die Kugel in einer reibungslosen Flüssigkeit.....	131

Literaturhinweise

BECKER, E.:	Technische Strömungslehre
BECKER, E., PILTZ, E.	Übungen zur technischen Strömungslehre
EPPLER, R.	Strömungsmechanik
GERSTEN, K.	Einführung in die Strömungsmechanik
PRANDTL, L., OSWATITSCH, K.	Führer durch die Strömungslehre
SCHLICHTING, H.	Grenzschicht-Theorie
WHITE, F.M.	Fluidmechanics
ZIEREP, J.	Grundzüge der Strömungslehre
BÖSWIRTH, L.	Technische Strömungslehre
BOHL, W.; ELMENDORF, W.	Technische Strömungslehre
KUHLMANN, H.	Strömungsmechanik
DURST, F.	Grundlagen der Strömungsmechanik
SPURK, J. H.	Strömungsmechanik
IBEN, H. K.	Strömungslehre in Fragen und Aufgaben

Verwendete Formelzeichen und Symbole

A	Querschnittsfläche	[m ²]
c	Absolutgeschwindigkeit	[m/s]
c _p	spezifische isobare Wärmekapazität	[J/(kg·K)]
c _v	spezifische isochore Wärmekapazität	[J/(kg·K)]
c _w	widerstandsbeiwert	[-]
d	Durchmesser	[m]
e	Energiedichte	[m ² /s ²]
E	Energie	[J]
F	Kraft	[N]
g	Erdbeschleunigung	[m/s ²]
G	Gewichtskraft	[N]
h	spezifische Enthalpie	[J/kg]
h	Höhe	[m]
H	Enthalpie	[J]
H	Fallhöhe	[m]
\dot{I}	Impulsstrom	[N]
L	Drall, Drehimpuls	[kg m ² /s]
k _s	Rauhigkeitshöhe	[m]
M	Masse	[kg]
\dot{m}	Massenstrom	[kg/s]
p	Druck	[Pa]
p'	dimensionsloser Druck	[-]
P	Leistung	[W]
Δp _v	Druckverluste	[Pa]
q	kinetischer Druck	[Pa]
Q	Wärmemenge	[J]
\dot{Q}	Wärmestrom	[J/s]
r	Radius	[m]
r	Ortsvektor	[-]
R	spezielle Gaskonstante	[J/(kg·K)]
s	spezifische Entropie	[J]
t	Zeitkoordinate	[s]

T	Temperatur	[K]
u	spezifische Innere Energie	[J/kg]
u	Umfangsgeschwindigkeit	[m/s]
U	Innere Energie	[J]
v	spezifisches Volumen	[m ³ /kg]
V	Volumen	[m ³]
\dot{V}	Volumenstrom	[m ³ /s]
w	Strömungsgeschwindigkeit	[m/s]
w	Relativgeschwindigkeit	[m/s]
w _t	spezifische technische Arbeit	[m ² /s ²]
W	Arbeit	[J]
x	Raumkoordinate	[-]
y	Raumkoordinate	[-]
z	Raumkoordinate	[-]
z	geodätische Höhe	[m]
H	geodätische Höhe	[m]
α	Winkel im Geschwindigkeitsplan	[°]
β	Winkel im Geschwindigkeitsplan	[°]
β _T	Kompressibilitätskoeffizient	[-]
γ	Anstellwinkel	[°]
δ	Grenzschichtdicke	[mm]
φ	Dissipation im Laufrad	[m ² /s ²]
λ	Rohrreibungsbeiwert	[-]
η	dynamische Viskosität	[kg/m s]
η	Wirkungsgrad	[-]
ρ	Dichte	[kg/m ³]
κ	Isentropenexponent	[-]
τ	Schubspannung	[N/m ²]
ω	Winkelgeschwindigkeit	[1/s]
ζ	Widerstandsbeiwert	[-]
σ	Oberflächenspannung	[kg/s ²]
ν	kinematische Viskosität	[m ² /s]
ξ	dimensionslose Winkelgeschwindigkeit	[-]

Indizes und Apostrophierungen

0	Umgebung
1,2,3	Ort für die Betrachtung der Strömung
abs	absolut
A	Auftrieb
D	Druck
FL	Flüssigkeit
K	Körper
L	links
p	Druck
R	rechts
R	Reibung
sch	scheinbar
u	Umgebung

Kennzahlen

Bo	BOND-Zahl	[-]
Ma	MACH-Zahl	[-]
Re	REYNOLDS-Zahl	[-]

1. Eigenschaften von Fluiden

1.1. Vorbetrachtungen

Was ist ein Fluid?

Die Strömungsmechanik befasst sich mit dem Verhalten von fließfähiger Materie (Fluide) unter dem Einfluss von mechanischen Kräften. Im engeren Sinne handelt es sich bei der fließfähigen Materie um Flüssigkeiten (kondensierte, tropfbare Materie) und Gase. Als fließfähig erweisen sich aber auch Festkörperschüttungen (Granulate, Stäube) oder - in Anwesenheit hinreichend großer mechanischer Belastung - feste Bauelemente. Die Beschreibung der letztgenannten Fließvorgänge wird klassisch als Domäne der Rheologie bzw. der Plastomechanik angesehen. Hier soll nur das Verhalten von Gasen und tropfbaren Flüssigkeit betrachtet werden.

Die Strömungsmechanik (auch als Fluidmechanik bezeichnet) stellt ein Teilgebiet der Technischen Mechanik dar; diese wiederum repräsentiert ein Teil der Physik. Die Mechanik ist die Wissenschaft, die sich mit Kräften sowie mit Wirkungen von Kräften auf Körper und Stoffen aller Art befasst. Die beobachteten Objekte können dabei sowohl in Ruhe als auch in Bewegung sein. In der Lehrveranstaltung Technische Mechanik werden die diesbezüglichen Grundsachverhalte behandelt. Die Strömungsmechanik, die sich erst im letzten Jahrhundert zu einer selbständigen Wissenschaft entwickelte, erforscht die Gesetzmäßigkeiten der Bewegungen und des Kräftegleichgewichtes sowohl von ruhenden als auch von bewegten Fluiden. Man spricht von der Statik der Fluide, wenn die am Fluid angreifenden Kräfte zu einem verschwindenden Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ führen. Demgemäß bedeutet der Fall der Ruhe die schärfste Einschränkung in der Kinematik. Dieses Teilgebiet befasst sich (wie in der Technischen Mechanik dargelegt) mit der Beschreibung der Bewegung ohne nach deren Ursache zu fragen. Die Gesetze der Fluidstatik lassen sich insbesondere auch auf rotierende Systeme übertragen, bei welchen das Fluid im mitrotierenden System ruht.

Die Hydrostatik studiert das Verhalten von tropfbaren Flüssigkeiten, welche sich durch große Volumenbeständigkeit bzw. geringe Kompressibilität auszeichnen. Indessen befasst sich die Aerostatik mit gas- oder dampfförmigen Medien in einem solchen (thermodynamischen) Zustand, bei welchem sie sich leicht zusammendrücken lassen.

Als Idealisierung des physikalischen Verhaltens spricht man von inkompressibel, wenn das Medium einer Volumenänderung einen großen Widerstand entgegensetzt. Diese Aussage betrifft auch die Fluidmechanik: als kompressible werden die Fluide dann betrachtet, wenn die Strömungskinetik bzw. -kräfte zu einer Dichteänderung führen.

Die weitgehende Bedeutung der Strömungsmechanik ist offenkundig. Immer wenn sich Systeme in Fluiden (z.B. Fahrzeuge, Schiffe, Flugzeuge), oder Fluide in Systemen (z.B. Rohrleitungen, Strömungsmaschinen) bewegen, erfüllen sie die Strömungsgesetze.

Unter den Begriffen **Hydraulik** (Fluid: Flüssigkeit, meist Öl) und **Pneumatik** (Fluid: Luft) werden heute Techniken verstanden, die "Kraftbewegungen" verwirklichen und steuern. Sie werden neuerdings auch zusammengefasst unter den Begriffen Fluidik oder Fluidtechnik. Diese beiden Gebiete sind nicht Gegenstand dieses Skriptums.

Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden. zeigt die Einteilung der Strömungsmechanik in ihre Unterbereiche.

	Statik der Fluide (ruhesendes Fluid)	Dynamik der Fluide (bewegtes Fluid)
Hydromechanik <u>$\rho = \text{const}$</u>	Hydrostatik	Hydrodynamik
Aeromechanik <u>$\rho \neq \text{const}$</u>	Aerostatik	Aerodynamik Gasdynamik

Tabelle. 1.: Einteilung der Strömungsmechanik

Bei Gasströmungen mit Geschwindigkeiten kleiner als etwa 100 m/s sind die Dichteänderungen so klein, daß man mit konstanter Dichte rechnen und somit die Gesetze der Hydrodynamik anwenden kann.

Die meisten Gesetze der Strömungsmechanik gelten gleichermaßen für **Flüssigkeiten** und **Gase**. Der übergeordnete Begriff dafür heißt **Fluid**.

Flüssigkeit → Wasser }
Gas → Luft } Fluide

Geschichtliche Entwicklung:

Die Bedeutung der Strömungsmechanik lässt sich auch historisch verfolgen. In der prähistorischen Zeit musste sich der Mensch zwangsläufig mit der Wirkung von Strömungskräften befassen, um etwa geeignete Jagdwaffen, Wasserleitungen und

Wassertransportmittel zu bauen. Im klassischen Altertum macht sich der Mensch seine Erkenntnisse über Strömungsvorgänge zu Nutzen, um Schiffe, Bewässerungssysteme und Wasserräder zu entwerfen. Aus dieser Zeit stammen z.B. auch Nivelliergeräte und Spielzeuge. **ARCHIMEDES** (287-212 v. Chr.) gelingt die Berechnung des hydrostatischen Auftriebes.

Von den Römern bis zur Renaissance liegen keine wesentlichen Beiträge vor. Im Unterschied hierzu gibt es nach der Renaissance ein überaus breites Spektrum an bahnbrechenden Arbeiten. **Leonardo da Vinci** befasst sich um 1500 mit der Berechnung der Massenerhaltung sowie mit der Verlustverringerung durch Formgebung. Er studiert des Weiteren die Wellenbewegung, den hydraulischen Sprung und die Strömungsturbulenz sowie das Verhalten von Freistrahlen und Nachlaufströmungen.

Evangelista TORRICELLI (1608-1647) findet eine mathematische Beziehung zur reibungsfreien Berechnung des Ausflusses einer Flüssigkeit aus einem Gefäß.

Edme MARIOTTE (1628-1684) realisiert einen ersten Versuchskanal zur Messung des Widerstandes von Körpern in Strömungen.

Isaac NEWTON (1643-1727) trägt ganz wesentlich zum Verständnis strömungsmechanischer Vorgänge bei. Er postuliert, daß der Fluidwiderstand proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz ist. Als Maß für den Widerstand 'normaler' Fluide (Wasser, Luft) führt er die Viskosität ein. Mit Hilfe der Differentialrechnung berechnet er das Strömungsverhalten eines rotierenden Zylinders.

Daniel BERNOULLI (1700-1782) stellt bei seinen Untersuchungen fest, daß zwischen der Druckänderung und der Beschleunigung eines Fluids Proportionalität besteht. Er führt auch den Begriff Hydrodynamik ein.

Leonhard EULER (1707-1783) leitet die Grundgleichung der reibungslosen Strömung (Bernoulli-Gleichung) her und führt die Feldbeschreibung ein.

Jean D'ALEMBERT macht auf das Paradoxon aufmerksam, daß ein reibungsfrei umströmter Körper der Strömung keinen Widerstand leistet.

Josef Luis LAGRANGE (1736-1813) schlägt vor, eine Strömung durch Verfolgung der einzelnen Teilchenbahnen zu beschreiben.

Pierre Simon LAPLACE (1749-1827) formuliert ein Gesetz, welches erlaubt die Gestalt freier Oberflächen bzw. Fluidgrenzflächen zu berechnen.

Der Berücksichtigung des Einflusses der Reibung in Strömungsfeldern sind Arbeiten aus den Jahren 1827-1845 von **Claude Luis NAVIER**, **Augustin Luis CAUCHY**,

Simeon Denis Poisson und **Jean Claude St. Venant** gewidmet. Diese Verfasser führen eine unbekannte molekulare Funktion zur Beschreibung der Reibung ein. **George Gabriel Stokes** verwendet diesbezüglich die Viskosität.

Osborne Reynolds (1842-1912) studiert die Merkmale der Turbulenz. Die moderne Strömungsmechanik hat ihren Ursprung in Arbeiten von **Ludwig Prandtl** (1875-1953). Mit der von ihm entwickelten Grenzschichttheorie gelingt es, die Konflikte zwischen den Hydraulikern und den theoretischen Strömungsmechanikern zu überbrücken. Die erste Gruppe befasst sich mit technischen Anwendungen und ist häufig darauf angewiesen, empirische Erkenntnisse anzuwenden. Indessen kennen die theoretischen Strömungsmechaniker zwar die Bewegungsgleichungen, aber nur in seltenen Fällen liegen entsprechende Lösungen für praktische Anwendungen vor. Dieser kurze Abriss kann nicht alle Errungenschaften der Fluidmechanik aufzählen. Es sollen hier aber noch kurz einige der zum Teil sehr namhafter Forscher des laufenden Jahrhunderts stellvertretend genannt werden.

Albert Einstein befasst sich in seiner Jugend mit der Bestimmung der Viskosität von Suspensionen. Viel später arbeitet er mit seinen Schülern auf dem Gebiet der Turbulenz.

Taylor, Richardson, Kolmogoroff, Batchelor und **Rotta** tragen wesentlich zur Entwicklung der statistischen Turbulenztheorie bei. **Th. von Kármán** publiziert Arbeiten, etwa zum Themenkreis der rotierenden Scheibenströmungen, die inzwischen als klassisch gelten. Die sich hinter einem querangeströmten Zylinder ausbildende Wirbelstrasse ist nach ihm benannt.

Ende der sechziger Jahre werden entscheidende Fortschritte bei der Sichtbarmachung von Strömungen erzielt. Mit entsprechenden Visualisierungstechniken belegt die Gruppe um **Kline** die Existenz kohärenter Strukturen in turbulenten Strömungen. In den achtziger Jahren findet die von **Mandelbrot** entwickelte Fraktalthorie Einzug in die Turbulenztheorie. Ohne bestimmte Verfasser hervorheben zu wollen muss festgestellt werden, dass in der laufenden Dekade die numerische Simulation von Strömungsprozessen eine zunehmend wichtigere Rolle spielt. Diese Entwicklung lässt sich aber nicht nur auf die starke Zunahme der Leistungen moderner Rechenanlagen zurückführen. Vielmehr ist dies eine Folge der intensiven Bemühungen im Zusammenhang mit der Weiterentwicklung numerischer Algorithmen (z.B. die Multilevel-Verfahren).

1.2. Dichte, Kontinuität der Masse

Ein Fluid wird als ein "Kontinuum" angesehen. In einem Kontinuum ist das kleinste betrachtete Volumenelement dV noch immer homogen, d.h. die Abmessungen von dV sind noch groß gegenüber dem mittleren Molekülabstand im Fluid.

Die **Dichte** ρ eines Fluidelements ist definiert als der Kehrwert des **spezifischen Volumens** v [m^3/kg].

$$\rho = \frac{1}{v} \quad \left[\frac{kg}{m^3} \right] \quad (1-1)$$

Die Dichte ist eine Funktion des Ortes und der Zeit, d.h. $\rho = \rho(x, y, z, t)$ für ein kartesisches Koordinatensystem. Bei veränderlicher Dichte spricht man von **kompessiblen**, bei konstanter Dichte von **inkompessiblen Fluiden**.

Jedes Fluid besitzt eine Masse. Die Dimension der Masse m ist [kg]. Die Masse beansprucht Raum. Diesen Raum nennen wir Volumen V , welches die Dimension [m^3] trägt.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \left[\frac{kg}{m^3} \right] \quad (1-2)$$

Zwischen der Dichte von Flüssigkeiten und der von Gasen besteht ein riesiger Unterschied, der ungefähr dem Faktor 1000 entspricht.

Zu Beachten ist die Abhängigkeit der Dichte vom Druck p und der Temperatur T , die für viele Fluide in Form einer Zustandsgleichung gegeben ist. Für ideale Gase ist dies die Gleichung

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T \quad (1-3)$$

mit der Gaskonstante R des Gases.

Im Gegensatz zu Gasen weisen Flüssigkeiten nur schwache Abhängigkeiten der Dichte vom Druck und von der Temperatur auf.

Fluid	ρ (kg/m ³)
Helium	0,1785
Wasserdampf	0,768
Stickstoff	1,2505
Sauerstoff	1,4289
Luft	1,2928
Argon	1,784
Kohlendioxid	1,977
Mineralöl	850
Wasser	998,2
Quecksilber	13595,5
Quecksilber	13546 (20°C)

Tabelle. 2.: Dichte verschiedener Fluide bei 0°C und 1 bar

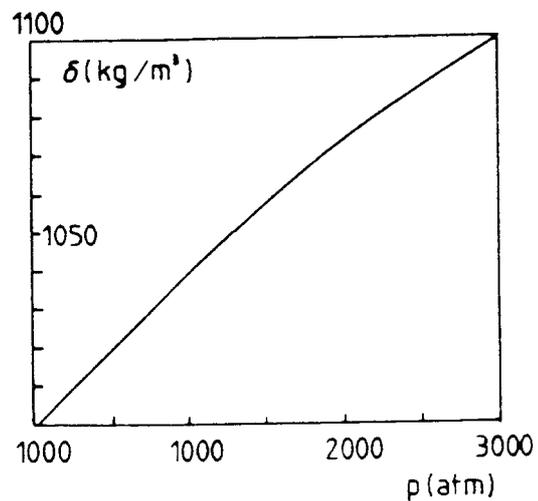
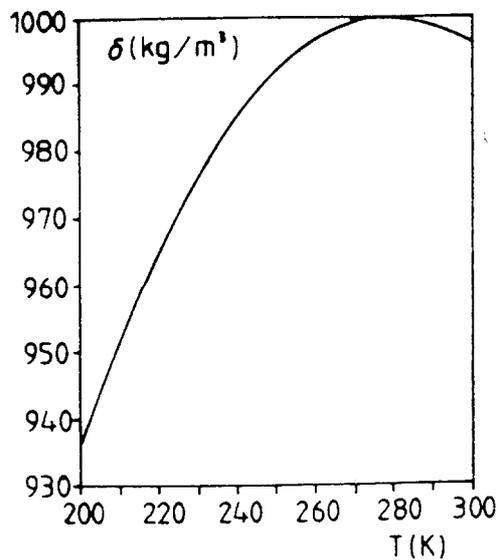


Abbildung 1: Dichte von Wasser als Funktion von T und p

Die Stoffgröße ρ hängt von p und T ab. Demgemäß lässt sich für die Änderung der Dichte schreiben (totales Differential):

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp \quad (1-4)$$

bzw. für die relative Dichteänderung:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp. \quad (1-5)$$

Im Zusammenhang mit den oben gegebenen Erläuterungen interessiert die Änderung der Dichte bei konstanter Temperatur, welche durch den Kompressibilitätskoeffizienten β_T

$$\beta_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (1-6)$$

ausgedrückt wird. An dieser Stelle erweist es sich zunächst als sehr instruktiv ein ideales Gas zu betrachten. Mit Hilfe des idealen Gasgesetzes lässt sich für schreiben:

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{p}{RT} \rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{RT} \\ \frac{1}{\rho} = \frac{RT}{p} \end{array} \right\} \beta_T = \frac{RT}{p} \cdot \frac{1}{RT} = \frac{1}{p} \quad (1-7)$$

Demgemäß ändert sich beim idealen Gas wie der Druck und kann somit eine bedeutende Größenordnung erreichen. Wie die nachfolgende Tabelle (Daten für 1 bar und 0° C) belegt, nimmt bei Flüssigkeiten hingegen nur sehr geringe Werte an.

Stoffgröße	Dimension	Wasser	Methanol	Luft	CO ₂
ρ	kg/m ³	999,8	810	1,275	1,975
$\beta_T \cdot 10^5$	m ² /N	0,0001	0,0001	1,007	1,007

Tabelle. 3.: Kompressibilitätskoeffizienten und Dichte ausgesuchter Materialien

1.3. Massenstrom, Volumenstrom

Das Fluid bewegt sich vor dem ortsfesten Hintergrund: es strömt. Wir stellen uns einen ortsfesten, ebenen Ring beliebiger Form vor, dessen Querschnitt A durchströmt wird.

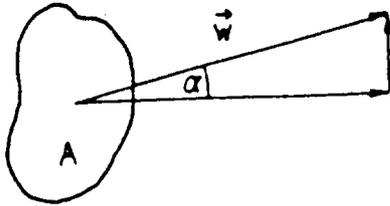


Abbildung 1-2: Strömung durch einen gedachten Querschnitt A

Wir interessieren uns für die Masse, die pro Zeiteinheit den Querschnitt A durchströmt. Sie ist proportional zu A und zu ρ . Weiter ist sie proportional zur Geschwindigkeit w des Fluids, genauer gesagt zu der Komponente, mit der das Fluid senkrecht zu A strömt.

$$\dot{m} \sim A \quad (1-8)$$

$$\dot{m} \sim \rho \quad (1-9)$$

$$\dot{m} \sim w \cdot \cos(\alpha) \cdot \rho \cdot A \quad (1-10)$$

Die andere Komponente liegt in A und kann somit nichts über A fördern. Für den Massenstrom \dot{m} mit der Dimension [kg/s] erhalten wir danach:

$$\dot{m} = w \cdot \rho \cdot A \quad (1-11)$$

Das Produkt

$$\dot{V} = w \cdot A \quad (1-12)$$

heißt Volumenstrom und hat die Einheit [m³/s]. Somit ist

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} \quad (1-13)$$

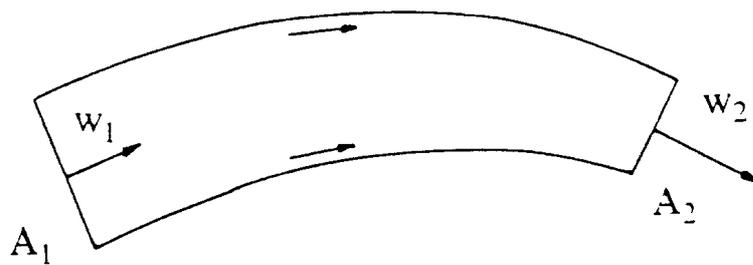


Abbildung 1-3: Stromröhre

Wir orientieren nun zwei Ringflächen A_1 und A_2 so, daß sie senkrecht zur Strömung stehen.

Wir verbinden die beiden Ringe durch eine gedachte Röhre. Das ganze heißt dann Stromröhre.

Das Wesentliche daran ist, dass das Fluid nur entlang der Röhrenwand strömen kann. Wir setzen voraus, dass sich die Strömung über die Zeit nicht verändert (stationär), d.h., dass ρ und w an jedem Punkt der Röhre konstant sind, während sie sich entlang der Röhre ändern können.

Nun muss, da Masse nicht verschwinden oder erzeugt werden kann, diejenige Masse, die pro Zeiteinheit durch A_1 in die Stromröhre eintritt, in der selben Zeiteinheit durch A_2 wieder austreten.

D.h. es gilt:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad (1-14)$$

oder

$$w_1 \rho_1 A_1 = w_2 \rho_2 A_2 \quad (1-15)$$

Wenn sich die Dichte des Fluids auf dem Weg von A_1 nach A_2 nicht ändert, gilt:

$$w_1 A_1 = w_2 A_2 \quad (1-16)$$

oder

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \quad (1-17)$$

Wenn darüber hinaus auch noch die Querschnitte gleich sind, folgt:

$$w_1 = w_2 \quad (1-18)$$

Bsp.: Spritze

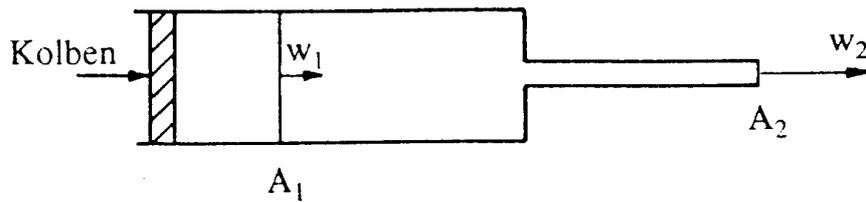


Abbildung 1-4: Spritze

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \quad (1-19)$$

Eine Spritze ist eine Stromröhre mit festen Wänden und deutlicher Querschnittsverengung.

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad (1-20)$$

$$w_1 \rho_1 A_1 = w_2 \rho_2 A_2 \text{ weil } \rho_1 = \rho_2 \quad (1-21)$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{A_2}{A_1} \quad (1-22)$$

Eine Spritze ist eine Stromröhre mit festen Wänden und deutlicher Querschnittsverengung.

Die Spritzenflüssigkeit ändert ihre Dichte nicht. Wir erhalten für die relative Erhöhung der Geschwindigkeit:

$$\frac{w_2 - w_1}{w_1} = \frac{A_1}{A_2 - A_1} \quad (1-23)$$

Bsp.: Rohrverzweigung

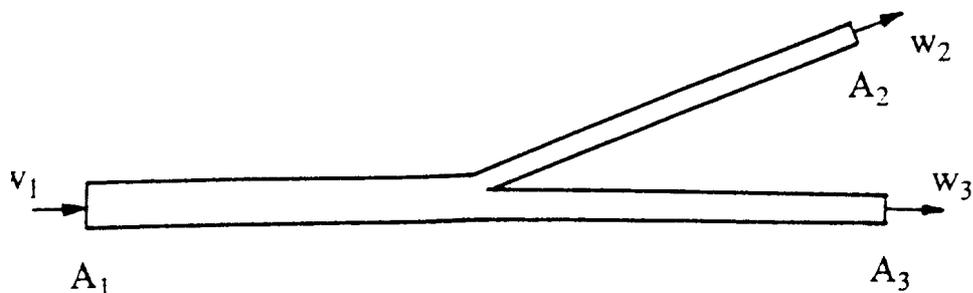


Abbildung 1-5: Rohrverzweigung

Eine Stromröhre mit festen Wänden kann sich verzweigen. Die Massenstrombilanz lautet:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \quad (1-24)$$

und bei konstanter Dichte:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad (1-25)$$

Wenn zwei Ströme gegeben sind, lässt sich der dritte ermitteln. Allein aufgrund der Flächenaufteilung der Verzweigung lässt sich allerdings nicht sagen, wie sich die Ströme verteilen.

1.4. Eigenschaften von Fluiden

Die Bewegung in einem Strömungsfeld hängt ganz wesentlich von den Eigenschaften der fließenden Materie ab. Diese Eigenschaften sind die Trägheits- und Schwerkraft (durch die Dichte ρ) ebenso wie die Reibungseffekte (Zähigkeit oder Viskosität). Eine weitere wichtige Größe ist die Kompressibilität (Änderung der Dichte bei Druck- oder Temperaturerhöhung). Sie erweist sich als ganz entscheidend hinsichtlich einer Unterscheidung von Gas (kompressibel) und Flüssigkeit (dichtebeständig).

In diesem Zusammenhang muss aber darauf hingewiesen werden, daß Gase durchaus auch als inkompressibel angesehen werden können, wenn die im Strömungsfeld auftretenden Kräfte zu keiner nennenswerten Kompression führen. Für Luft gilt diese Näherung bis zu Geschwindigkeiten von etwa 100 m/s.

Stoffgrößen und Stofffunktionen

Als Stoffgrößen bezeichnet man solche physikalischen Größen, welche eine Funktion der Temperatur T und des Druckes p darstellen, aber nicht vom Strömungsfeld abhängen. Hingegen liegt eine Stofffunktion vor, wenn die lokale Strömung die physikalische Größe beeinflusst.

Bei Gasen unter mäßigen Drücken und reinen, flüssigen (newtonschen) Medien lassen sich die Dichte ρ , die Kompressibilität β (siehe Kap. 1.2) und die dynamische Viskosität η in guter Näherung als Stoffgrößen ansehen. Darüber hinaus stellt die Oberflächenspannung σ eine Stoffgröße dar.

2. Druck

Der Druck spielt eine entscheidende Rolle in der Mechanik der Fluide.



Abbildung 2-1: Gasbehälter

$$p = \frac{F}{A} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \quad (2-1)$$

p - Druck auf den Kolben (skalar), A - Fläche des Kolbens

In der Technik werden verschiedene Druckbegriffe verwendet.

$$p_{\text{abs}} = p_{\text{u}} + p_{\text{gh}} \Rightarrow p_{\text{abs}} = p_0 \pm \Delta p \quad (2-2)$$

Absolutdruck:

p_{abs} – der Absolutdruck (gegenüber dem Druck im leeren Raum)

p_{u} – Umgebungsdruck (Atmosphärendruck - gemessen mit einem TORRICELLI - Barometer). In der Literatur auch als p_0 bezeichnet.

$\Delta p = p_{\text{abs}} - p_{\text{u}}$ – Druckdifferenz, gezeigt durch Manometer: Überdruck (positiv) oder Unterdruck (negativ).

Absolutdruck = Umgebungsdruck +/- Überdruck/Unterdruck

Einheiten:

$$10^5 \text{ N/m}^2 = 100000 \text{ Pa} = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar} = 1000 \text{ mbar}$$

$$10,2 \text{ mH}_2\text{O} = 100062 \text{ Pa}$$

$$760 \text{ Tor} = 760 \text{ mmHg} = 101098 \text{ Pa} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Annahme: Normaldruck (20°C) = $p_{\text{u}} = p_0 = 100000 \text{ Pa}$

3. Hydrostatik

3.1. Grundgleichung der Hydrostatik

Ein ruhendes inkompressibles homogenes Fluid unter dem Einfluss der Schwerkraftbeschleunigung g . An der Oberfläche herrscht immer der Umgebungsdruck. Die Aufgabe lautet: Berechne den Druck p .

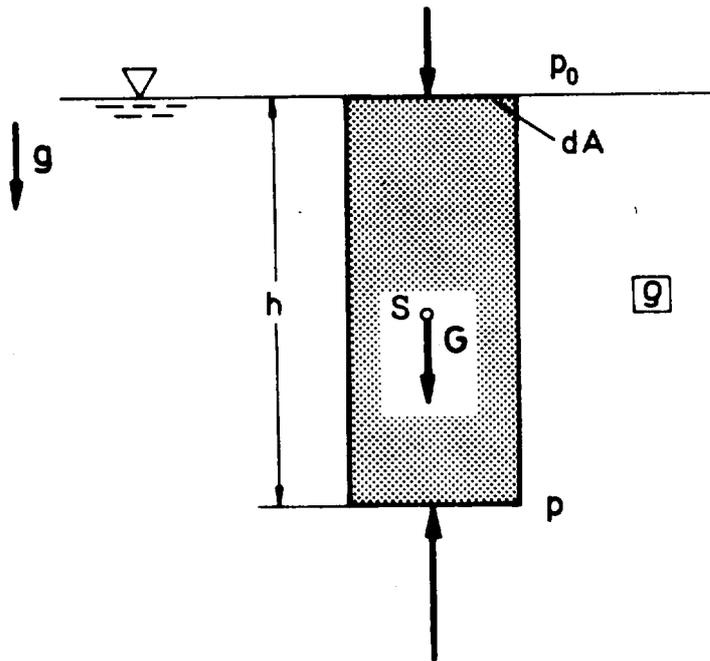


Abbildung 3-1: Inkompressibles homogenes Fluid (Gersten: Einführung in die STM)

F_p - Druckkraft; G - Gewichtskraft

Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung:

$$\sum F_{iz} = m\ddot{z} \quad (3-1)$$

$$F_p - mg - p_0 \cdot A = 0 \quad (3-2)$$

$$p \cdot A - mg - p_0 \cdot A = 0 \quad (3-3)$$

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h \text{ damit in Gl. (3-3)} \quad (3-4)$$

$$p \cdot A - \rho \cdot h \cdot A \cdot g - p_0 \cdot A = 0 \quad | : A \quad (3-5)$$

Das Ergebnis ist die Grundgleichung der Hydrostatik:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad (3-6)$$

Der Druck ist an jedem Punkt im Fluid richtungsunabhängig, also ein Skalar und resultiert, unabhängig von Verdeckungen oder Ausdehnung des Fluids, aus der lotrechten Strecke zwischen Beobachtungspunkt und der Lage der Wasseroberfläche.

Aus dieser Gleichung leitet man zwei Sätze ab:

Satz 1: In einer Flüssigkeit herrscht in Punkten gleicher Höhe/Tiefe der gleiche Druck.

Satz 2: Der Druck wächst proportional zur Tiefe und nimmt proportional zur Höhe ab.

3.2. Anwendung der hydrostatischen Grundgleichung

3.2.1 PASCALSches Paradoxon

- gleiche Flüssigkeit
- gleiche Höhe
- gleiche Fläche
- verschiedenes Gewicht

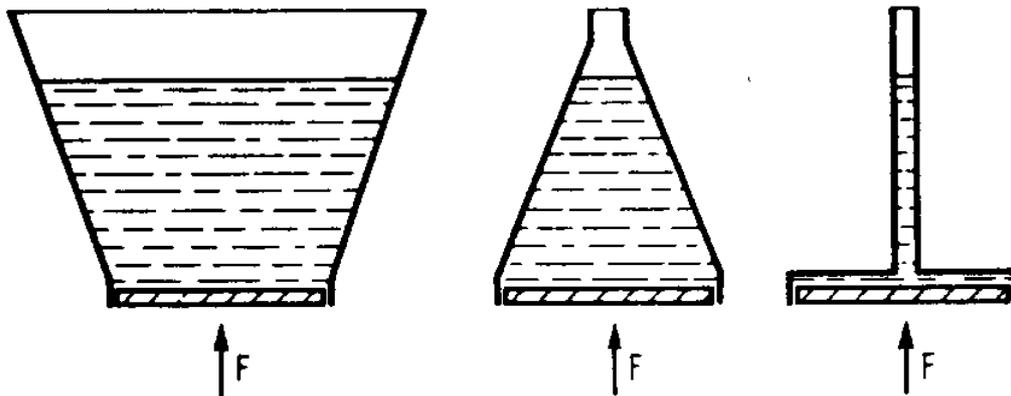


Abbildung 3-2: Pascalsches Paradoxon (Becker: Technische Strömungslehre)

$$p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad p_2 = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad p_3 = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad (3-7)$$

$$p_1 = F_1 \cdot A \quad p_2 = F_2 \cdot A \quad p_3 = F_3 \cdot A \quad (3-8)$$

$$p_1 = p_2 = p_3 \quad (3-9)$$

Der Bodendruck ist in allen skizzierten Gefäßen gleich. Es wirkt die gleiche Kraft F , unabhängig vom Gewicht der Flüssigkeit. Die Druckkraft ist unabhängig von der Gefäßform, wenn die Grundflächen gleich groß sind.

$$p = \frac{F}{A} \quad (2-1)$$

3.2.2 Druckverlauf in kommunizierenden Röhren

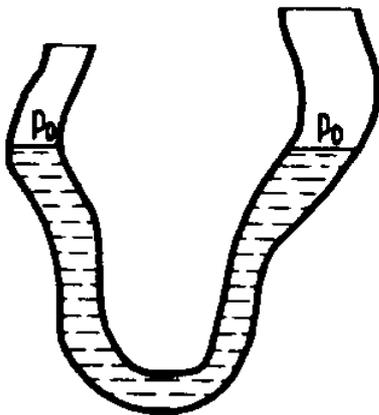


Abbildung 3-3: Kommunizierende Röhren

Beispiel: U-Rohr mit zwei nichtmischbaren Flüssigkeiten

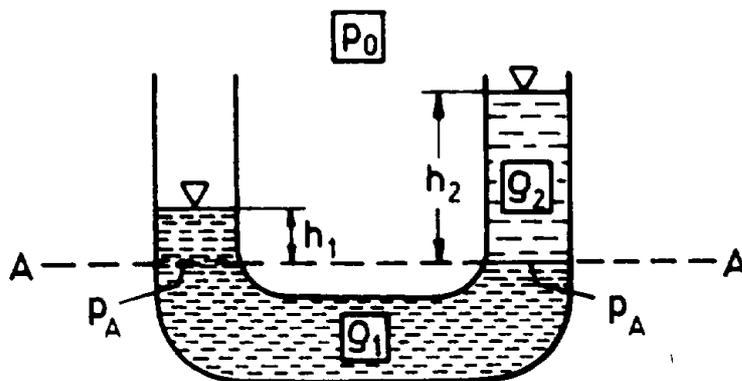


Abbildung 3-4: U - Rohr (Gersten: Einf. i. d. STM)

Die Linie A-A wird als Bezugslinie bezeichnet (BZL) => der hydrostatische Druck im linken Schenkel ist gleich dem hydrostatischen Druck im rechten Schenkel des U-Rohrmanometers. Würden wir den oberen Teil über der Bezugslinie BZL wegnehmen, würde ein System aus kommunizierenden Röhren entstehen, wie in Abbildung 3-3.

$$p_L = p_0 + \rho_1 g h_1 \quad \text{Grundgleichung der Hydrostatik im linken Schenkel} \quad (3-10)$$

$$p_R = p_0 + \rho_2 g h_2 \quad \text{Grundgleichung der Hydrostatik im rechten Schenkel} \quad (3-11)$$

$$p_L = p_R \quad \text{an der BZL sind die Drücke gleich} \quad (3-12)$$

$$p_0 + \rho_1 g h = p_0 + \rho_2 g h_2 \quad (3-13)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1} \quad (3-14)$$

(lt. Abbildung $h_2/h_1 > 1$ $\rho_1 > \rho_2$).

3.2.3 Hydraulische Presse

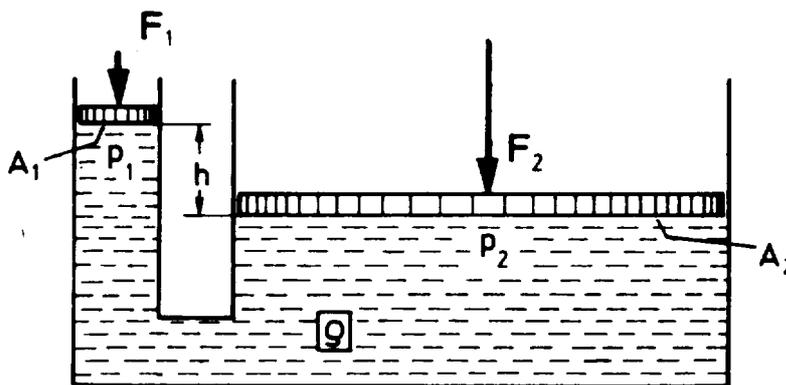


Abbildung 3-5: Hydraulische Presse (Gersten: Einf. i. d. STM)

$$p_L = p_u + \frac{F_1}{A_1} + \rho \cdot g \cdot h \quad (3-15)$$

$$p_R = p_u + \frac{F_2}{A_2} \quad (3-16)$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} - \rho \cdot g \cdot h_1 \quad (3-17)$$

$$\rho \cdot g \cdot h_1 \rightarrow 0 \quad \text{da} \quad \rho \cdot g \cdot h_1 \ll \frac{F_2}{A_2} \quad (3-18)$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (3-19)$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}; \text{ da } A_2 \gg A_1 \rightarrow F_2 \gg F_1 \quad (3-20)$$

Schlussfolgerung: Mit einer kleinen Kraft F_1 kann man eine große Kraft F_2 erzeugen.

3.2.4 U - Rohr - Manometer zur Messung des Gasdruckes p_G

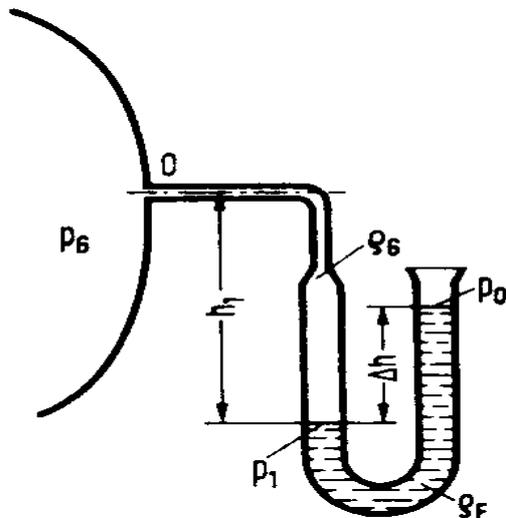


Abbildung 3-6: U - Rohr - Manometer (Becker: Technische STL)

BZL: "links = rechts"

$$p_1 + \rho_G \cdot g \cdot h_1 = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta h \quad (\text{Druck der Gassäule wird vernachlässigt}) \quad (3-21)$$

$$\rho_G \cdot g \cdot h_1 = 0 \rightarrow \rho_g \ll \rho_{Fl} \quad (3-22)$$

$$p_G = p_1 = p_0 + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta h \quad (3-23)$$

Dabei bezeichnen wir $\rho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta h = \Delta p_G$ als Überdruck. Dieser ist positiv, wenn $p_G > p_0$ ist. Bei $p_G < p_0$, ist Δp_G negativ und wird als Unterdruck bezeichnet.

*Vor jeder Berechnung ist zu prüfen, ob nach dem **Überdruck/Unterdruck Δp** oder dem **Absolutdruck p_{abs}** gefragt ist! Der Überdruck resultiert nur aus dem betrachteten Fluid, der Absolutdruck (=Gesamtdruck) zuzüglich aus dem atmosphärischen Druck (= Umgebungsdruck = Luftdruck) an der Wasseroberfläche.*

3.2.5 Flüssigkeitsschichten

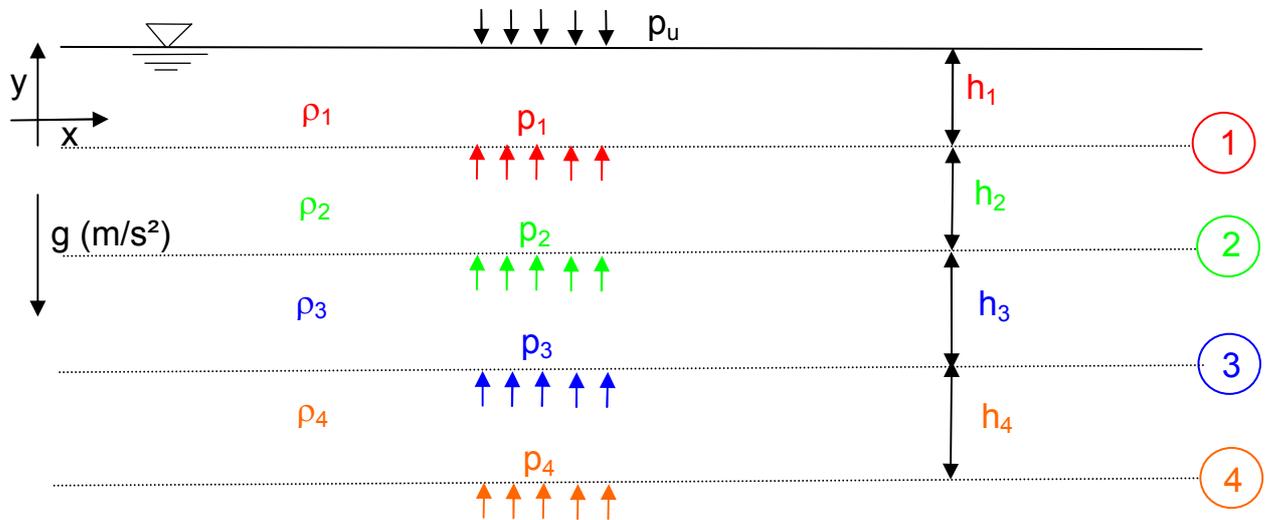


Abbildung 3-7: Geschichtete Fluide

$$p_i = p_u + \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot g \cdot h_i \quad (3-24)$$

$$p_4 = p_u + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + \rho_3 \cdot g \cdot h_3 + \rho_4 \cdot g \cdot h_4 \quad (3-25)$$

Bei gleichen Dichten $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$ vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$p_4 = p_u + \rho \cdot g \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \quad (3-26)$$

$$G_{\text{sch}} = G - F_A = G - \Delta G \quad (3-29)$$

$$F_A = G - G_{\text{sch}} = \rho_{\text{Fl}} \cdot V_K \cdot g \quad (3-30)$$

$$V_K = \frac{G - G_{\text{sch}}}{\rho_{\text{Fl}} \cdot g} \quad (3-31)$$

G - Gewicht des Körpers in Luft

G_{sch} - Gewicht des Körpers im vollständig eingetauchten Zustand

Bei bekannter Dichte ρ_{Fl} der Flüssigkeit lässt sich das Volumen des Körpers bestimmen, wenn man den Körper in Luft und in der Flüssigkeit ausgewogen hat.

Das Gewicht des Körpers lässt sich durch die Dichte ρ_K ausdrücken.

$$G = \rho_K \cdot V \cdot g \rightarrow V = \frac{G}{\rho_K \cdot g} \quad (3-32)$$

Eingesetzt in V ergibt sich:

$$\frac{G}{\rho_K \cdot g} = \frac{G - G_{\text{sch}}}{\rho_{\text{Fl}} \cdot g} \quad (3-33)$$

$$\rho_K = \frac{G}{G - G_{\text{sch}}} \cdot \rho_{\text{Fl}} \quad (3-34)$$

Schwimmen: Der Körper schwimmt, wenn ein Teil seines Volumens aus der Flüssigkeit herausragt

$$F_A = G \quad (3-35)$$

Schweben: Der Körper ist völlig eingetaucht.

Beispiel: Schweben eines Körpers

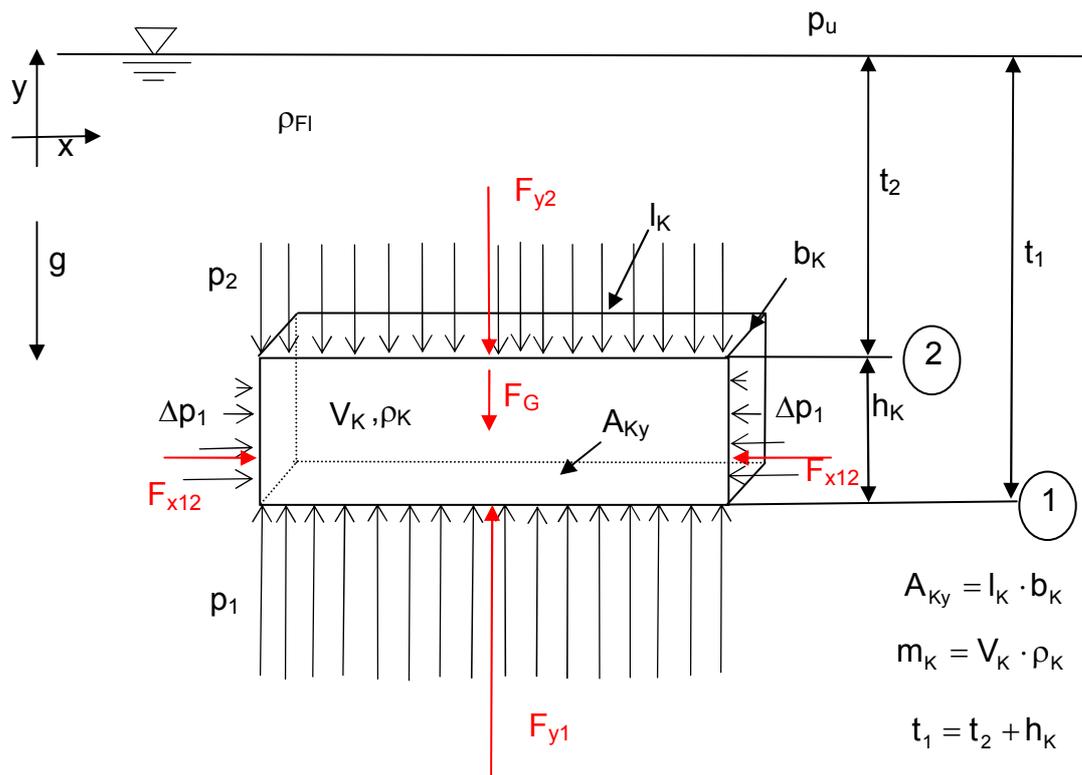


Abbildung 3-9: Kraftverteilung am eingetauchten Körper beim Schweben

Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

NEWTON:

$$\sum F_{xi} = 0 \quad (3-36)$$

$$0 = -F_{x12} + F_{x12} \quad (3-37)$$

$$F_{x12} = F_{x12} \quad (3-38)$$

Kräftegleichgewicht in y-Richtung:

NEWTON:

$$\sum F_{yi} = 0 \quad (3-39)$$

$$0 = -F_{y1} - F_G + F_{y2} \quad (3-40)$$

F_{y1} – Druckkraft, die in der Tiefe t_1 , von unten normal auf den Körper wirkt

$$F_{y1} = p_1 \cdot A_{Ky} = (p_u + \rho_{Fl} \cdot g \cdot (t_2 + h_K)) \cdot A_{Ky} \quad (3-41)$$

F_{y2} – Druckkraft, die in der Tiefe t_2 von oben normal auf den Körper wirkt

$$F_{y2} = p_2 \cdot A_{Ky} = (p_u + \rho_{Fl} \cdot g \cdot t_2) \cdot A_{Ky} \quad (3-42)$$

F_G – Gewichtskraft des Körpers

$$F_G = m_K \cdot g = \rho_K \cdot V_K \cdot g \quad (3-43)$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (3-40) ergibt sich

$$0 = (p_u + \rho_{Fl} \cdot g \cdot t_2) \cdot A_{Ky} - \rho_K \cdot A_{Ky} \cdot h_K \cdot g - (p_u + \rho_{Fl} \cdot g \cdot (h_K + t_2)) \cdot A_{Ky} \quad (3-44)$$

$$\rho_K \cdot g \cdot h_K \cdot A_{Ky} = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h_K \cdot A_{Ky} \quad (3-45)$$

Die linke Seite der Gleichung entspricht F_G .

$$F_G = \rho_K \cdot g \cdot h_K \cdot A_{Ky} \quad (3-46)$$

Die rechte Seite der Gleichung entspricht F_A .

$$F_A = m_{Fl} \cdot g = \rho_{Fl} \cdot h_K \cdot A_{Ky} \cdot g \quad (3-47)$$

Durch das Gleichgewicht dieser beiden Kräfte entspricht die Auftriebskraft F_A ebenfalls der Differenz der beiden Druckkräfte in den verschiedenen Tiefen der Flüssigkeit.

$$F_A = F_G = F_{y1} - F_{y2} \quad (3-48)$$

3.4. Kräfte auf Behälterwände

Beispiel: Druckkraft auf eine ebene Wand

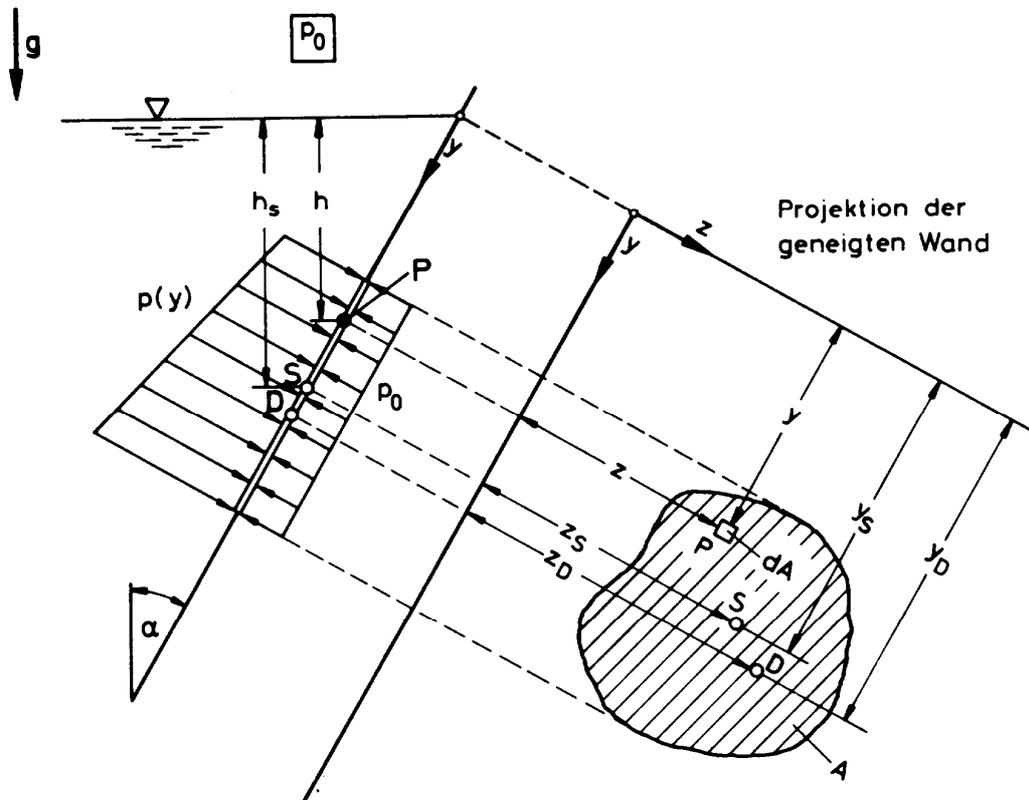


Abbildung 3-10: Druckkraft auf eine geneigte ebene Wand (Tiefe b gemessen senkrecht zur Tafel)

Ein Behälter, in dem sich ein Fluid der Dichte ρ befindet, wird durch eine geneigte ebene Wand begrenzt. Auf eine vorgegebene Fläche A übt die Flüssigkeit eine Druckkraft F aus, deren Betrag und Angriffspunkt gesucht werden.

Im Punkt P befindet sich ein Flächenelement dA mit der Tiefe $h(y)$

$$\frac{h(y)}{y} = \cos \alpha \quad h(y) = y \cdot \cos \alpha \quad dA = b \cdot dy \quad (3-49)$$

Die Kraft die auf die Innenseite des Behälters wirkt ergibt sich aus:

$$dF = p(y) \cdot dA \quad (3-50)$$

$$dF = dF_{Fl} + p_0 \cdot dA \quad (3-51)$$

Der Druck folgt aus

$$p(y) = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad (3-52)$$

$$p(y) = p_0 + \rho \cdot g \cdot y \cdot \cos \alpha \quad (3-53)$$

Der Kraftanteil, der von der Flüssigkeit allein erzeugt wird, dF_{Fl} berechnet sich zu:

$$dF_{Fl} = dF - p_0 \cdot dA \quad (3-54)$$

$$dF_{Fl} = p_0 \cdot dA + \rho \cdot g \cdot y \cdot \cos \alpha \cdot dA - p_0 \cdot dA \quad (3-55)$$

$$F_{Fl} = b \cdot \rho \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \int_0^L y \cdot dy \quad (3-56)$$

$$dA = b \cdot dy \quad (3-57)$$

$$F_{fl} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot [y^2]_0^L \quad A = b \cdot L \quad (3-58)$$

4. Dynamik der Fluide - Beschreibung von Strömungen

Um die Bewegung des Fluids in einer Strömung zu beschreiben, gibt es zwei verschiedene Darstellungsmethoden:

Die Strömung in einem vorgegebenen Koordinatensystem, z.B. kartesisch mit der Zeit, ist charakterisiert durch:

Temperatur $T = T(x, y, z, t)$ (4-1)

Druck $p = p(x, y, z, t)$ (4-2)

Dichte $\rho = \rho(x, y, z, t)$ (4-3)

Geschwindigkeit $w(x, y, z, t) = \{ u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t) \}$ (4-4)

Es interessiert in diesem Fall nicht das Einzelschicksal einzelner, sondern das Verhalten ständig wechselnder Fluidteilchen, die einen vorgegebenen Punkt passieren.

Für **dreidimensionale Strömungen** gilt:

$$u, v, w, p, \rho, T = f(x, y, z, t) \quad (\text{räumlich})$$

Für **zweidimensionale Strömungen** gilt:

$$u, v, p, \rho, T = f(x, y, t) \quad (\text{eben})$$

Für **eindimensionale Strömungen** gilt:

$$u, p, \rho, T = f(x, t) \quad (\text{Stromfaden, wenn stationäre Strömung})$$

Zeitabhängigkeit:

Liegt keine Zeitabhängigkeit vor, spricht man von einer stationären Strömung.

Liegt Zeitabhängigkeit vor, spricht man von einer instationären Strömung.

Stoffeigenschaften:

reibungsfreie / reibungsbehaftete Strömung

kompresible / inkompressible Strömung

ideales/nichtideales Gas

Inkompressibles Fluid ($\rho = \text{const.}$)

Ein Fluid dessen Dichte während der Strömung konstant bleibt, heißt ein inkompressibles Fluid.

In der Literatur verwendet man auch eine andere Formulierung: eine Strömung, bei der die Dichte ρ des strömenden Fluids konstant bleibt, heißt inkompressible Strömung.

Vernachlässigung der Temperatur T

Wenn einfache (Modell-) Fluide betrachtet werden, kann die Temperatur vernachlässigt werden.

1) Inkompressibles Fluid ($\rho = \text{const.}$)

Das Temperaturfeld hat keinen Einfluss auf Druck- und Geschwindigkeitsverteilung (-Feld) wenn Viskosität konstant sind.

2) Ideales Gas ($p = \rho R T$)

Wenn Druck p und Dichte ρ bekannt sind, kann die Temperatur berechnet werden. R ist eine Gaskonstante.

5. Viskosität und Oberflächenspannung

5.1. Viskosität

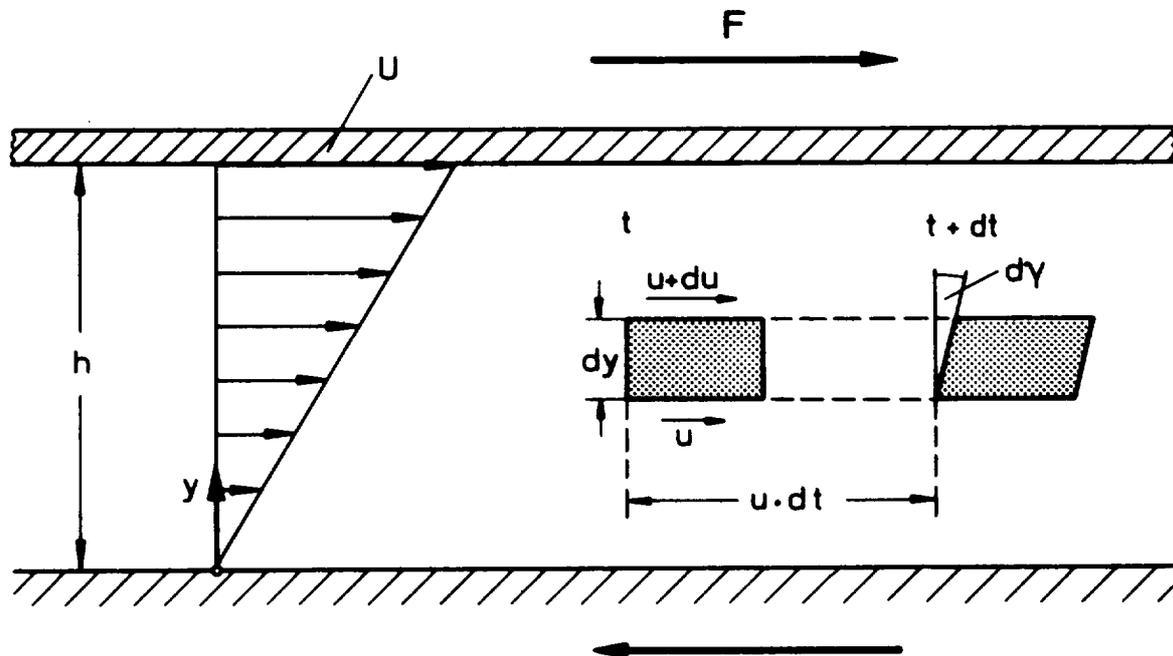


Abbildung 5-1: COUETTE - Strömung

Fluid befinde sich zwischen einer festen Grundplatte und einer im Abstand h dazu parallelen Platte, die mit der Geschwindigkeit U bewegt wird (COUETTE-Strömung).

Plattenfläche $A \rightarrow$ benötigte Tangentialkraft oder Schubspannungskraft F .

In einem Fluid ist die Schubspannung τ das Verhältnis der Schubkraft zur Fläche, an der die Schubkraft angreift.

$$\tau = \frac{F}{A} \quad \text{und} \quad (5-1)$$

mit: A = Plattenfläche

Haftbedingung: Am Rande haben die Flüssigkeitsteilchen die gleiche Geschwindigkeit wie die Platte.

Der Zusammenhang zwischen Schubspannung τ (Belastung) und dem Geschwindigkeitsgradienten heißt **Reibungsgesetz**.

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad (5-2)$$

Ein Fluid mit linearem Reibungsgesetz heißt NEWTONSches Fluid, anderenfalls Nicht-NEWTONSches Fluid.

NEWTONSches Reibungsgesetz:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}. \quad (5-2)$$

Wenn $u(y)$ linear ist, folgt:

$$\tau = \eta \frac{U}{h} \quad (5-3)$$

Der Proportionalitätsfaktor η heißt dynamische Viskosität und hat die Einheit $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2]$.

Die Fähigkeit eines Fluids Schubspannungen zwischen zwei Schichten unterschiedlicher Geschwindigkeiten oder zwischen dem bewegten Fluid und einer festen Wand übertragen zu können, liegt in seiner dynamischen Viskosität η . Sie wird durch molekulare Kräfte hervorgerufen und ist eine Stoffeigenschaft. Sie hängt bei mäßigen Drücken nur von der Temperatur des Fluids ab.

Die kinematische (dichtebezogene) Viskosität ν ist

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (5-4)$$

und hat die Einheit $[\text{m}^2/\text{s}]$.

In FLM I und FLM II behandeln wir nur NEWTONSche Fluide.

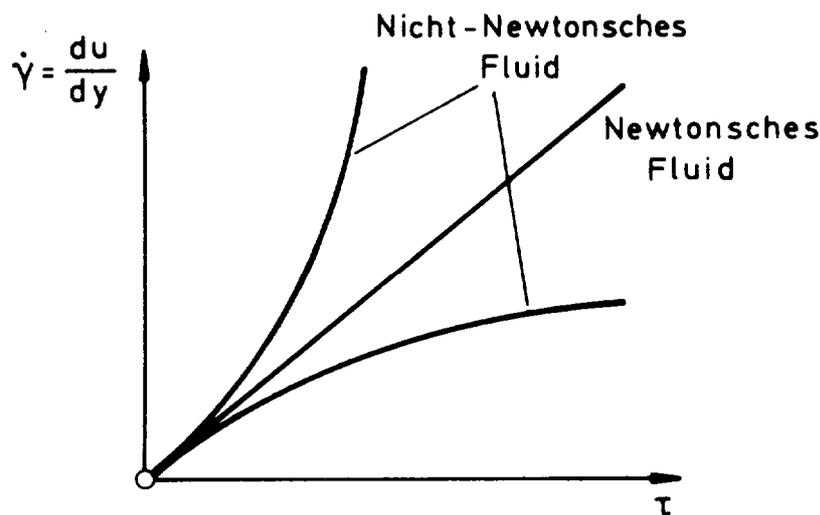


Abbildung 5-2: Reibungsgesetze

5.2. Die Oberflächen- bzw. Grenzflächenspannung

Bisher wurde das Verhalten reiner, einphasiger Fluide betrachtet. Die nachfolgenden Erörterungen betreffen indessen die Trennfläche zweier Fluide, die als ineinander unlöslich bzw. nichtmischbar angesehen werden. Eine solche Trennfläche stellt die an einem Gas angrenzende (freie) Oberfläche einer Flüssigkeit dar (siehe Abbildung 5-3).

Im Inneren der Flüssigkeit heben sich die intermolekularen Anziehungskräfte auf ein Teilchen im Mittel auf. Es liegt ein kugelsymmetrisches Kraftfeld vor. Besagte Asymmetrie an der Oberfläche bedingt eine Kraftresultierende, die ins Innere gerichtet ist, da die Gaspartikel über der Oberfläche keine intermolekularen Kräfte ausüben.

Die Dicke dieser Oberflächenschicht entspricht dem Wirkungsbereich der intermolekularen Kräfte (≈ 10 Moleküldurchmesser).

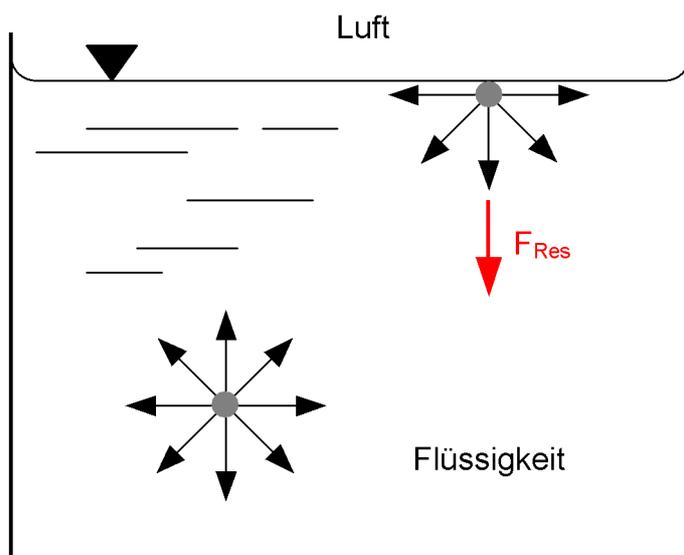


Abbildung 5-3: Oberflächenspannung als Folge eines asymmetrischen, molekularen Kraftfeldes

Gegen diese Resultierende muss Arbeit geleistet werden, wenn ein Teilchen aus dem Flüssigkeitsinnern an die Oberfläche verschoben werden soll. Demgemäß besteht ein Bestreben der Flüssigkeit ihre Oberfläche klein zu halten.

Diese Wirkung der Oberflächenspannung lässt sich durch den in Abbildung 5-4 dargestellten Versuch veranschaulichen.

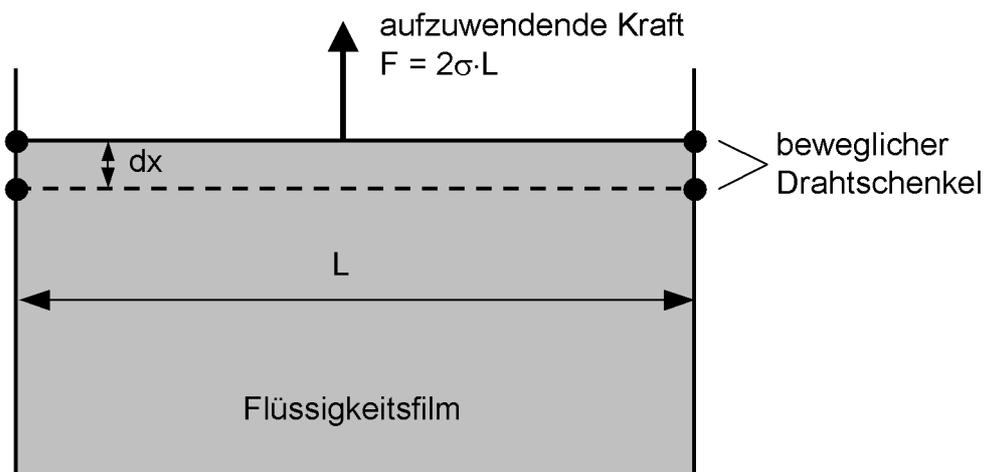


Abbildung 5-4: Versuch zur Bestimmung der Oberflächenspannung

Um die Oberfläche durch das Auseinanderziehen der verschiebbaren Drahtschenkel zu vergrößern, benötigt man die Kraft F . Da zwei Oberflächen vorliegen, gilt

$$|F| = 2l\sigma \quad (5-5)$$

Die Oberflächenspannung verursacht also eine Kraft, die bei einer Verschiebung um dx die Arbeit

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} \quad (5-6)$$

Dies führt zur Entstehung von sogenannten Minimalflächen, die unter einer Oberflächenspannung σ stehen. Eine solche Minimalfläche stellt die Kugelgestalt dar. Freie Flüssigkeitsvolumina (d.h. in Abwesenheit von Störungen) nehmen daher die sphärische Form an, siehe Abbildung 5-5.

Als Oberflächenspannung σ definiert man diejenige Kraft pro Längeneinheit der Berandung, welche die Oberfläche im Gleichgewicht hält. Sie hat demnach die Einheit [N/m].

Bei dem in Abbildung 5-5 dargestellten Tropfen ist die Oberflächenspannung bestrebt, den Tropfen zu komprimieren. Dadurch kommt es zu einem Druckanstieg Δp im Innern. In Abwesenheit anderer Kräfte besteht daher Gleichgewicht zwischen der Druckkraft und der aus der Oberflächenspannung resultierenden Kraft.

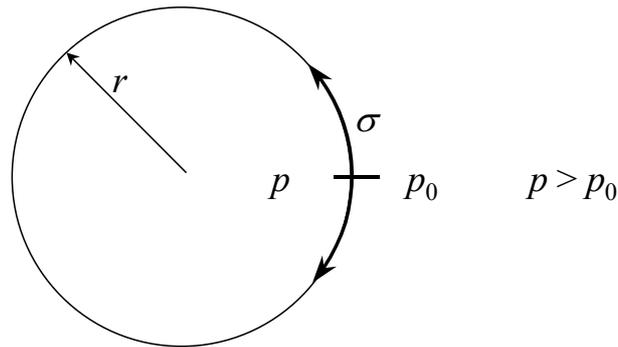


Abbildung 5-5: Gleichgewichtsbetrachtung für einen kugelförmigen Tropfen

Wird der in Abbildung 5-5 dargestellte Tropfen am Äquator gedanklich aufgetrennt, so ergibt sich infolge der Oberflächenspannung eine Kraft mit dem Betrag

$$F_{\sigma} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sigma. \quad (5-7)$$

Die resultierende Druckkraft weist in vertikale Richtung. Ihr Betrag F_D ergibt sich als Produkt der Druckdifferenz Δp und der Äquatorfläche $\pi \cdot r^2$, d.h.

$$F_D = \Delta p \cdot \pi \cdot r^2 = (p_i - p_a) \cdot \pi \cdot r^2. \quad (5-8)$$

Aus dem Kräftegleichgewicht $F_D = F_{\sigma}$ folgt:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}. \quad (5-9)$$

Dieser Drucksprung an der Oberfläche kann bei kleinen Werten von r eine erhebliche Größenordnung annehmen. Folgendes Beispiel dient der Veranschaulichung dieses Sachverhaltes.

Beispiel: Druckdifferenz bei einem Nebeltropfen

Die Oberflächenspannung von Wasser beträgt $71 \cdot 10^{-3}$ N/m. Der Tropfen soll einen angenommenen Radius von 10^{-6} m, also 1 μ m, haben. Die Druckdifferenz Δp berechnet sich somit zu

$$\Delta p = \frac{2 \cdot 71 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1,42 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1,42 \text{ bar}. \quad (5-10)$$

Wenn die freie Oberfläche eine beliebig gekrümmte Form annimmt, ist in Gl. (5-9) der Radius r durch den mittleren Krümmungsradius r_k

$$\frac{1}{r_k} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad (5-11)$$

zu ersetzen. Dabei sind r_1 und r_2 die lokalen Hauptkrümmungsradien.

Diesen Zusammenhang stellt Abbildung 5-6 dar.

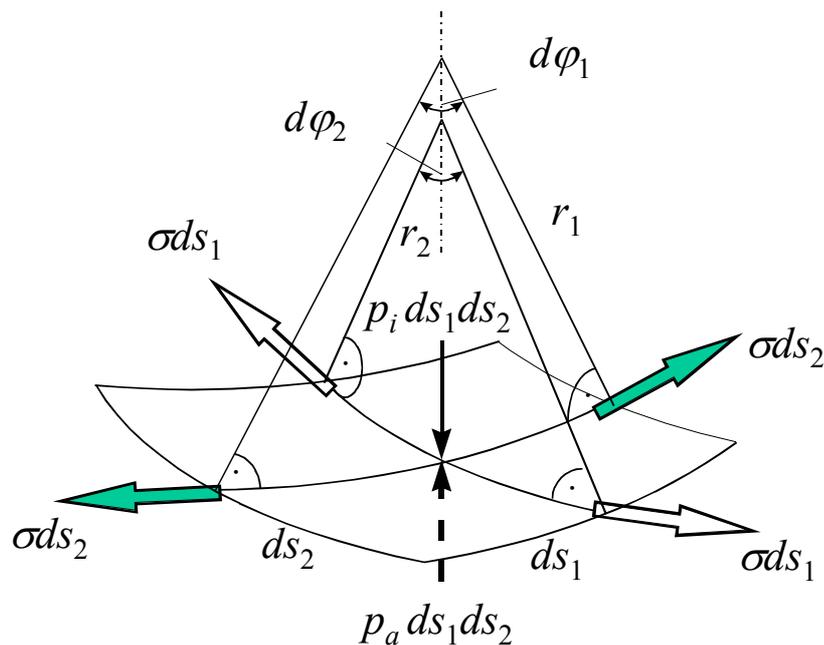


Abbildung 5-6: Gleichgewichtsbetrachtung für ein beliebig gekrümmtes Oberflächenelement

Die Radien r_1 und r_2 gehören zu den Schnittkurven der Oberfläche mit zwei zueinander senkrechten Ebenen. Wie im obigen Bild zu erkennen ist, gilt

$$ds_1 = r_1 d\varphi_1 \quad ds_2 = r_2 d\varphi_2 \quad (5-12)$$

Für die Beträge der Kräfte ergibt sich:

$$\begin{aligned} dF_D &= \Delta p ds_1 ds_2 \\ dF_{\sigma_1} &= \sigma ds_1 d\varphi_2 = \frac{\sigma}{r_2} ds_1 ds_2 \\ dF_{\sigma_2} &= \sigma ds_2 d\varphi_1 = \frac{\sigma}{r_1} ds_1 ds_2 \end{aligned} \quad (5-13)$$

Die Gleichgewichtsbetrachtung

$$dF_D + dF_{\sigma_1} + dF_{\sigma_2} = 0 \quad (5-14)$$

führt zu

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (5-15)$$

Zur korrekten Interpretation dieser Beziehung sei erwähnt, daß r_1 und r_2 auch negative Werte annehmen können. Haben also r_1 und r_2 unterschiedliche

Vorzeichen, so ist die Krümmung in den beiden Richtungen 1 und 2 entgegengesetzt.

Für den in Abbildung 5-6 dargestellten Tropfen gilt $r_1 = r_2 = r$ und somit

$$\frac{1}{r_k} = \frac{2}{r} \quad (5-16)$$

Ohne Herleitung sei hier nun ein Ergebnis aus der Differentialgeometrie mitgeteilt, welches erlaubt, den mittleren Krümmungsradius einer beliebig gekrümmten Oberfläche $z(x,y)$ zu beschreiben (vgl. Abbildung 5-6):

$$\frac{1}{r_k} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]}{2 \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (5-17)$$

Die bisher gegebenen Erörterungen gelten nicht nur für freie Oberflächen (Grenzfläche Gas/Flüssigkeit), sondern auch für solche Grenzflächen, welche von zwei nicht mischbaren Flüssigkeiten gebildet werden.

Im Hinblick auf Fluidsysteme im Bereich der Bio- und Lebensmitteltechnologie spielen kleine Tröpfchen in Flüssigkeitsmatrizen eine wichtige Rolle. So liegen vielfach Emulsionen vor, d.h. Flüssig-Flüssig-Systeme bestehend aus sehr kleinen Tröpfchen in einer Flüssigkeitsmatrix. Beispielsweise weisen die sich in der Milch befindlichen Fetttröpfchen Größenordnungen von etwa 10^{-4} m auf.

Wenn die Dichte der emulgierten Tröpfchen sich nur insignifikant von derjenigen der Flüssigkeitsmatrix unterscheidet, nehmen die Tröpfchen die Kugelgestalt an. Diese Aussage gilt nicht nur für kleine Tröpfchen, sondern auch für beliebige Volumina der dispergierten Phase.

Im Abschnitt 5.2 wurde vom Erfahrungswissen Gebrauch gemacht, daß Flüssigkeiten gegenüber Gasen eine freie Oberfläche bilden. Nichtmischbare Flüssigkeiten bilden indessen eine Grenzfläche (vgl. Abbildung 5-7). Demgegenüber vermischen sich unterschiedliche Gase vollständig.

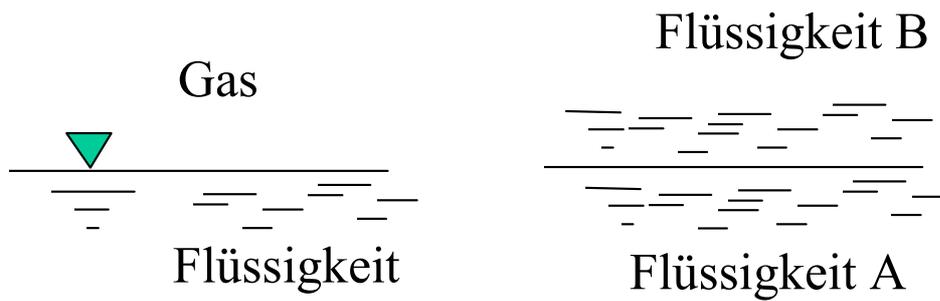


Abbildung 5-7: Freie Oberfläche und Flüssigkeitsgrenzfläche

Flüssigkeiten und Gase weisen in Abwesenheit einer Beschleunigung ein weiteres, prägnantes Unterscheidungsmerkmal auf: das Raumfüllvermögen. Während ein Gas (oder eine Gasmischung) stets den ganzen ihm zur Verfügung stehenden Raum ausfüllt, bildet die Flüssigkeit eine Schichtung in Richtung der Beschleunigung bzw. füllt den Raum nur partiell aus. Die Anwesenheit der Erdbeschleunigung führt dazu, daß die Existenz solcher Schichtungen eine geläufige Erfahrung darstellt (vgl. Abbildung 5-8).

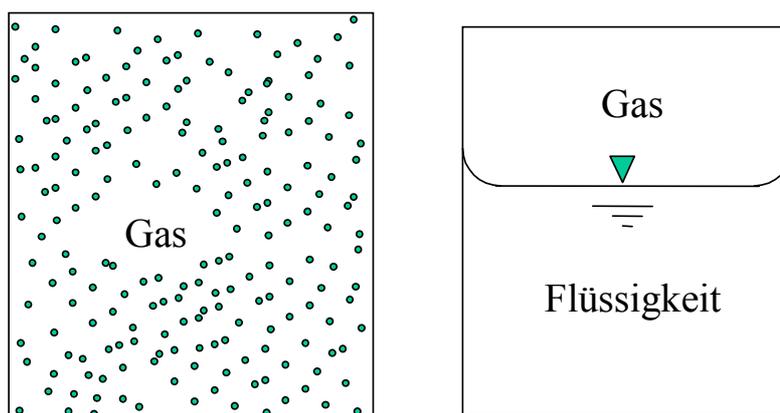


Abbildung 5-8: Das Raumfüllvermögen als Unterscheidungsmerkmal von Flüssigkeiten und Gasen

Auch das unterschiedliche Raumfüllvermögen lässt sich in den verschieden starken intramolekularen Kräften in der Flüssigkeit und im Gas begründen. Die Adhäsion, die einen Ausdruck molekularer Wechselwirkungen zwischen Flüssigkeit und Festkörper darstellt, führt indessen makroskopisch zur Bildung eines sogenannten Benetzungswinkels, vgl. Abbildung 5-9. Vollständige Benetzung ist durch den Winkel $\alpha = 0^\circ$ charakterisiert. Nichtbenetzung liegt dann vor, wenn $\alpha = 180^\circ$ ist.

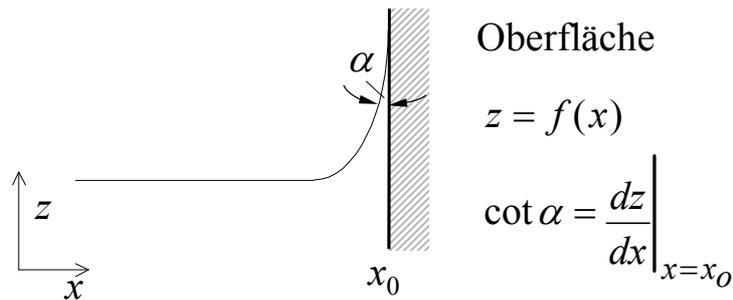


Abbildung 5-9: Die Benetzung von Festkörpern als weiteres Charakteristikum einer Flüssigkeit

5.3. Kapillareffekte in der Fluidstatik

Die Erläuterungen im vorliegenden Abschnitt betreffen die Wirkung von Adhäsions- und Kohäsionskräften in Fluidsystemen, die durch $w = 0$ charakterisiert werden.

Befindet sich nun ein Fluid im Zustand der Ruhe, so können sich die Benetzungs- und Oberflächenspannungskräfte nur auf die einzige nicht verschwindende Spannung auswirken, d.h. auf die Normalspannung bzw. auf den Druck. Dies wurde bereits bei der Herleitung der Druckerhöhung im Inneren eines Tropfens diskutiert.

Der Einfachheit halber wurde bisher die Wirkung der Gravitationskraft und somit die Existenz der hydrostatischen Druckverteilung vernachlässigt. Eine solche Vernachlässigung ist an sich nur dann zulässig, wenn die Größe der Gravitationskraft viel geringer ist als diejenige der Kapillarkraft F_σ . Diese Aussage gilt für beliebige Flüssigkeitsgeometrien. Es erweist sich aber als sehr instruktiv, zu ermitteln, ab welcher Größenordnung des Durchmessers eines Tropfens die hydrostatische Druckverteilung zu einer signifikanten Änderung der Kugelgestalt ($r = R$) führt. Das Verhältnis von Gewichtskraft

$$F_G = m \cdot g = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho \cdot g \quad (5-18)$$

und Oberflächenspannungskraft

$$F_\sigma = \sigma \cdot 2\pi R \quad (5-19)$$

ergibt eine dimensionslose Kennzahl, die Bond-Zahl Bo :

$$Bo = \frac{F_G}{F_\sigma} = \frac{2R^2 \cdot \rho \cdot g}{3 \sigma} \quad (5-20)$$

Definitionsgemäß bilanziert sie das Verhältnis von Gravitations- und Grenzflächenspannungskraft. Dominanz der Kohäsionskraft liegt dann vor, wenn $Bo \ll 1$. Hierfür lässt sich auch schreiben (der Faktor lässt sich bei dieser Größenordnungsbetrachtung vernachlässigen):

$$R_o^2 = \frac{\sigma}{\rho \cdot g} \quad (5-21)$$

bzw. wegen $R_o > 0$

$$R_o = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot g}} \quad (5-22)$$

Tabelle 1 gibt Auskunft über die Größe von R_o für verschiedene Medien.

Medium	σ [10^{-3} N/m]	ρ [kg/m^3]	R_o [10^{-3} m]
Wasser	71	1000	2,7
Quecksilber	484	13600	1,9
Öl	15	900	1,3

Tabelle 1: Abschätzung zur Vernachlässigung der hydrostatischen Druckverteilung in Tropfen

Wie diese Tabelle demonstriert, lässt sich die hydrostatische Druckverteilung für die typischen Lebensmittelinhaltsstoffe Wasser und Öl nur bei freien Tropfen und sehr kleinen Radien vernachlässigen. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß nur bei sehr kleinen Werten von r (< 1 mm) die Abweichung von der Kugelgestalt hinreichend klein ausfällt.

Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, daß bei Emulsionen die Dichtedifferenz der dispergierten und kontinuierlichen Flüssigkeit in die Bond-Zahl eingeht. Darüber hinaus muss die Grenzflächenspannung σ eingesetzt werden. Liegen andere Beschleunigungen vor, so muss g entsprechend ersetzt werden.

Wird das Volumen des betrachteten Tropfens bzw. der studierten Flüssigkeit hinreichend groß gewählt, so überwiegt die Gravitationswirkung. Dies drückt sich darin aus, daß die freie Oberfläche eine Ebene senkrecht zu der Wirkrichtung von g bildet, vgl. auch Abbildung 5-8.

Die Kohäsion führt indessen zu einer Auslenkung der Oberfläche in der Nähe der festen Berandung auch dann, wenn das betrachtete Flüssigkeitsvolumen eine sehr große Ausdehnung besitzt, vgl. Abbildung 5-8. Bei kleiner Größenordnung der

typischen Abmessungen des betrachteten Flüssigkeitsvolumens dominieren hingegen die Benetzungs- und Oberflächenspannungskräfte weitgehend, so daß die gesamte Oberfläche (gegebenenfalls Grenzfläche) signifikant gekrümmt ist. Aus den im Abschnitt 5.2 vorgestellten Überlegungen lässt sich für diesen Fall schlussfolgern, daß in der Flüssigkeit ein Druck vorherrscht, der sich von der Umgebung unterscheidet.

In der Tat liegt ein solcher Zustand etwa in dünnen Kapillaren vor, siehe Abbildung 5-10. vor. Der beim Eintauchen einer Kapillare in eine Flüssigkeit beobachtete Aufstieg (Aszension) oder Abstieg (Depression) der Flüssigkeitsoberfläche erweist sich als so charakteristisch für die Wirkung der Kohäsion- und Adhäsionskräfte, daß man häufig auch von Kapillarkräften spricht.

Die Berechnung der Kapillarhebung erfordert folgende Überlegung:

Ursache für den Aufstieg ist der durch die Oberflächenspannung induzierte Unterdruck p_u , wobei bei sphärischer Oberfläche ($Bo \ll 1$) gilt:

$$p_o = p_u + \rho \cdot g \cdot h \quad (5-23)$$

Aus der Geometrie ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{d}{2} = R \cdot \cos \alpha \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{d}{2 \cdot \cos \alpha} \quad (5-24)$$

Zusammenfassend läßt sich für die Kapillarhebung h_k schreiben:

$$h_k = \frac{4 \cdot \sigma \cdot \cos \alpha}{d \cdot \rho \cdot g} \quad (5-25)$$

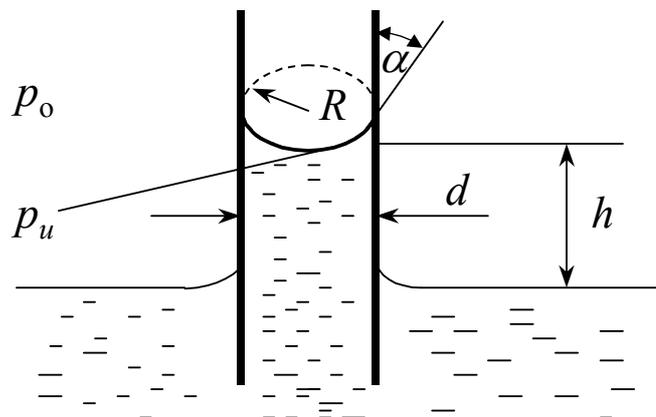


Abbildung 5-10: Die Benetzung von Festkörpern als weiteres Charakteristikum einer Flüssigkeit

Das in Abbildung 5-10 gezeigte Beispiel setzt stillschweigend benetzende Eigenschaften der Flüssigkeit voraus ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Für den Fall vollständiger

Benetzung ($\alpha = 0^\circ$) nimmt $\cos\alpha$ den Wert von Eins an. Bei nichtbenetzenden Flüssigkeits-Festkörpersystemen (Quecksilber/Gas) ist Der Wert von $\cos\alpha$ und mit ihm h_k werden negativ. Dies bedingt bei der Kapillardepession einen Überdruck in der Kapillare.

Beispiel: Verfälschung der Anzeige eines Manometers durch Kapillarkräfte ohne Kapillarwirkung:

$$h_1 = \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} \quad (5-26)$$

mit Kapillarwirkung (h_k : Kapillarhebung bei $p_2 = p_1$)

$$h_1^* = h_1 + \frac{4 \cdot \sigma \cdot \cos\alpha}{d \cdot \rho \cdot g} = h_1 + h_k \quad (5-27)$$

$$\frac{h_1^*}{h_1} = 1 + \frac{h_k}{h_1} = 1 + \frac{4 \cdot \sigma \cdot \cos\alpha}{d \cdot (p_2 - p_1)}$$

Mit den folgenden Werten, $\alpha = 0^\circ$, $d = 10^{-3}$ m, $\rho = 10^3$ kg/m³, $\sigma = 70 \cdot 10^{-3}$ N/m, $p_2 - p_1 = 1000$ Pa ergibt sich der Fehler zu

$$\frac{h_1^*}{h_1} = 1.28, \text{ d.h. } 28\% \text{ Fehler.} \quad (5-28)$$

Möchte man sicherstellen, daß der durch die Kapillarkräfte bedingte Fehler gering ausfällt, so muss der Durchmesser d der Ablesekapillare hinreichend groß gewählt werden. Dies bedeutet, daß die mit d als charakteristische Länge definierte Bond-Zahl Bo sehr viel größer als Eins sein muss. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich eine freie Oberfläche, die im Wesentlichen nur in unmittelbarer Nähe der Wand gekrümmt ist.

Im Bereich der Lebensmittel- und Biotechnologie gibt es zahlreiche Vorgänge, bei welchen Kapillarkräfte mit der hydrostatischen Druckverteilung wechselwirken. Beispiele hierzu werden in der Vorlesung besprochen.

6. Massenerhaltungssatz

Schon in der Einführung wird darauf hingewiesen, dass sich die Fluidstatik als Spezialfall bewegter Fluide ansehen lässt, bei welchem die kinematische Restriktion $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x,y,z) = \{u, v, w\} = 0$ gilt. Beim Studium des Bewegungsverhaltens homogener Fluide interessieren uns der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{w} , der Druck p und gegebenenfalls die Temperatur T . Hier wird in einer eindimensionalen Form die Kontinuitätsgleichung erklärt.

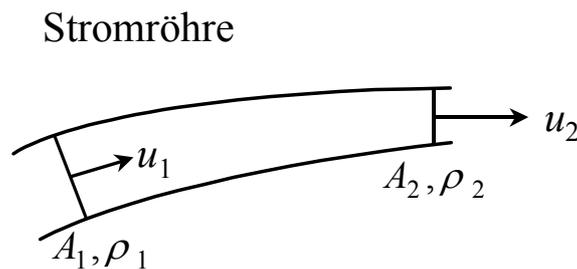


Abbildung 6-1: Massenbilanz an einer Stromröhre

Die Größen u_1, ρ_1, u_2 und ρ_2 stellen geeignete Mittelwerte über die Querschnitte 1 und 2 dar. Über den Mantel der Stromröhre kann keine Masse fließen. Die Massenerhaltung fordert für den Massenstrom

$$\rho \cdot u \cdot A = \text{konst.} \quad \text{bzw.} \quad \dot{m} = \rho \cdot u_1 \cdot A_1 = \rho \cdot u_2 \cdot A_2 \quad (6-29)$$

Bei dichtebeständigen, d.h. inkompressiblen Medien ist $\rho = \text{konst.}$ In diesem Fall nimmt der Volumenstrom $\dot{V} = u \cdot A$ einen konstanten Wert an. Wie Tabelle 2 zeigt, liegt bei konstanter Fläche A ein konstanter Volumenstrom bzw. eine konstante Massenstromdichte vor.

	kompressibel ($\rho \neq \text{konst.}$) / Gase	inkompressibel ($\rho = \text{konst.}$)
$A \neq \text{konst.}$	$\rho \cdot w \cdot A = \text{konst.}$ $\rho \cdot \dot{V} = \dot{m} = \text{konst.}$ (Massenstrom)	$w \cdot A = \text{konst.}$ $\dot{V} = \text{konst.}$ (Massenstrom)
$A = \text{konst.}$	$\rho \cdot w = \text{konst.}$ Massendichte = konst.	$w = \text{konst.}$ Volumendichte = konst.

Tabelle 2: Formulierungen der Kontinuitätsgleichung

Aus didaktischen Erwägungen sei hier noch folgendes illustriert:

Volumenstrom $\dot{V} = dV/dt$ bzw. Massenstrom $\dot{m} = dm/dt$

wie Abbildung 6-2 veranschaulicht, tritt in die Stromröhre im Zeitintervall dt das Volumen $dV_1 = A_1 \cdot u_1 \cdot dt$ ein.

Bei der oben durchgeführten Herleitung der Kontinuitätsgleichung stellt der Volumenstrom (Massenstrom) \dot{V} (\dot{m}) demgemäß nichts anderes dar, als dasjenige Volumen, (die Masse), welche durch die Fläche A_1 pro Zeiteinheit dt hindurchgeht.

Kompression: Die Kompression eines Mediums führt zwar zu einer zeitlichen Änderung des eingeschlossenen Volumens V , es findet aber kein Massentransport statt.

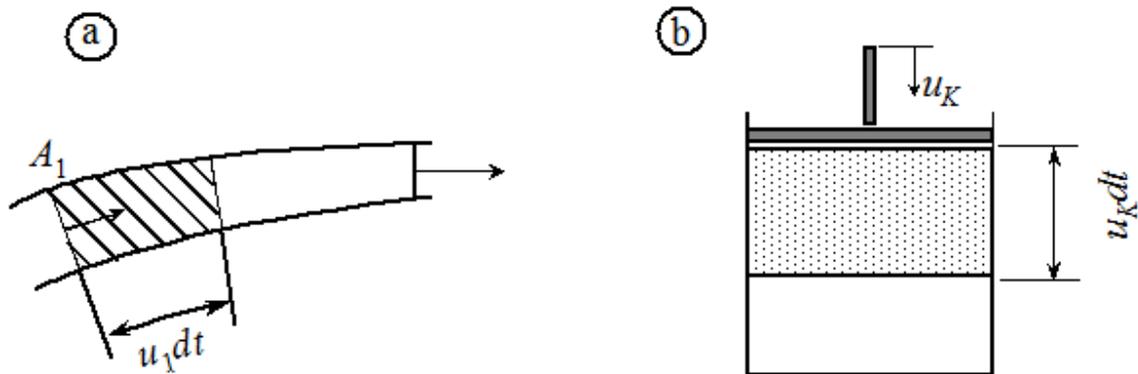


Abbildung 6-2: Volumenstrom und zeitliche Volumenänderung

Für **kompressible** Fluide ($\rho \neq \text{konst.}$) bei **veränderlichem** Querschnitt gilt:

$$\dot{m} = \rho \cdot w \cdot A = \text{konst.} \quad (6-30)$$

Für **inkompressible** Fluide ($\rho = \text{konst.}$) gilt:

$$\dot{V} = w \cdot A = \text{konst.} \quad (6-31)$$

Obige Gleichungen gelten für veränderlichen Querschnitt ($A = \text{konst.}$) der Stromröhre.

Bei **konstantem** Querschnitt ($A = \text{konst.}$) der Stromröhre gilt:

– für **kompressibles** Fluid

$$\rho \cdot w_1 \cdot A_1 = \rho \cdot w_2 \cdot A_2 \quad (6-32)$$

$$\rho \cdot w = \text{konst.} \quad (6-33)$$

– für **inkompressibles** Fluid

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \quad (6-34)$$

$$w = \text{konst.} \quad (6-35)$$

Die Geschwindigkeit w trifft senkrecht auf die Fläche A zu!

7. Energiesatz (1. HS)

7.1. Allgemeiner Energiesatz

Energiesatz bedeutet Energiebilanz. Energiebilanz bedeutet Gleichgewicht.

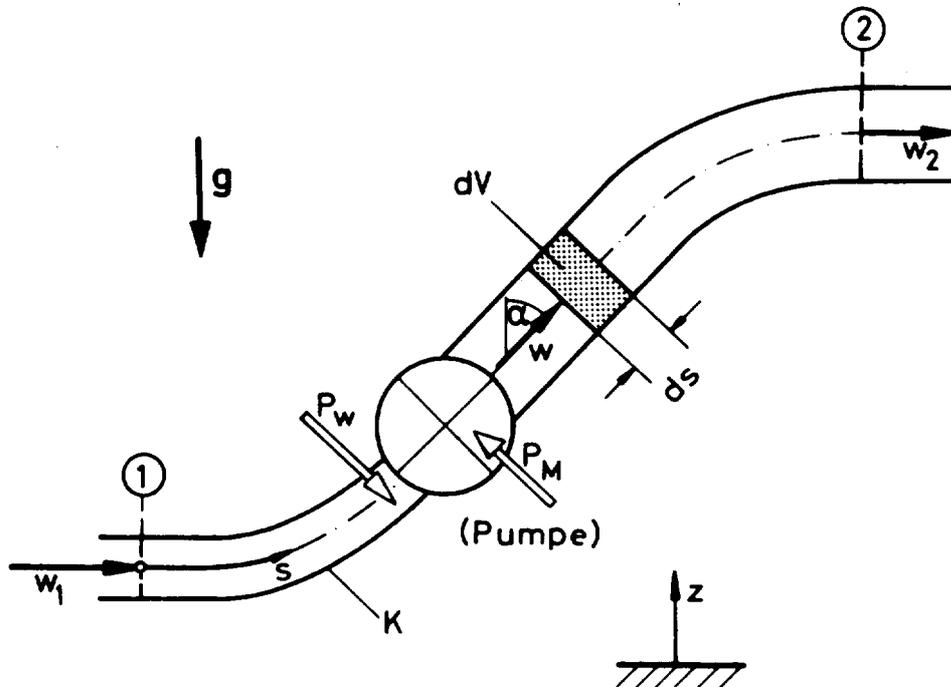


Abbildung 7-1: Energiebilanz für eine Stromröhre

1, 2: Querschnitte, für welche eine Energiebilanz aufgestellt wird
 P_M mechanische Leistung einer Pumpe oder Energie pro Zeit

ANNAHMEN:

stationäre Strömung (zeitunabhängig)

inkompressible Strömung ($\rho = \text{const.}$)

reibungsbefahete Strömung ($\nu \neq 0$)

Die gesamte Energie besteht aus:

dem kinetischen Energiestrom (Bewegungsenergie)

$$\dot{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{m} \cdot w^2 \quad (7-1)$$

dem Druckenergiestrom (Druckenergie)

$$\dot{E}_{\text{Druck}} = \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p = \dot{V} \cdot p \quad (7-2)$$

dem Höhenenergiestrom (Lageenergie) zwischen den Zuständen 1 und 2 besteht ein Höhenunterschied (Leistung eines Kraftfeldes g)

$$\dot{E}_{\text{Höhe}} = \dot{m} \cdot g \cdot z \quad (7-3)$$

der Reibungsenergie (als aufgespeicherte Wärme)

$$\dot{Q} = \dot{m} \cdot c_v \cdot \Delta T \quad (7-4)$$

$$c_v \cdot \Delta T = \varphi$$

φ [m²/s²] - spezifische technische Dissipation (Reibungsverluste)

c_v [Nm/kgK] - Wärmekapazität (die Wärme, die zur Erwärmung von 1 kg eines Stoffes um 1K erforderlich ist)

dem zu- oder abgeführten Energiestrom (mechanische Leistung)

$$P_M = \dot{m} \cdot w_t \quad (7-5)$$

w_t [m²/s²] - spezifische technische Arbeit. Über die Arbeitsmaschine (z.B. Pumpe) oder eine Kraftmaschine (z.B. Turbine) kann dem Volumen Arbeit zu- oder abgeführt werden.

Vorzeichenregelung:

Pumpe plus (+), da dem Fluid Energie zugeführt

Turbine minus (-), da dem Fluid Energie entzogen

Aus dem Energieerhaltungssatz

$$\dot{E}_{\text{Kin}} + \dot{E}_{\text{Druck}} + \dot{E}_{\text{Höhe}} + \dot{Q} + P_M = \text{const.} \quad (7-6)$$

Die Energiegleichung (Energiebilanz) zwischen (1) → (2) wird definiert zu:

$$\dot{E}_{\text{Kin1}} + \dot{E}_{\text{Druck1}} + \dot{E}_{\text{Höhe1}} \pm P_M = \dot{E}_{\text{Kin2}} + \dot{E}_{\text{Druck2}} + \dot{E}_{\text{Höhe2}} + \dot{Q} \quad (7-7)$$

$$\frac{\dot{m}}{2} \cdot w_1^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_1 + \dot{m} \cdot g \cdot z_1 \pm \dot{m} \cdot w_t = \frac{\dot{m}}{2} \cdot w_2^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_2 + \dot{m} \cdot g \cdot z_2 + \dot{m} \cdot \varphi \quad (7-8)$$

7.2. Inkompressible reibungslose Strömung (BERNOULLI-Gleichung)

7.2.1 Geschwindigkeits-, Druck-, Höhenform

$$\frac{\dot{m}}{2} \cdot w_1^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_1 + \dot{m} \cdot g \cdot z_1 \pm \dot{m} \cdot w_t = \frac{\dot{m}}{2} \cdot w_2^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_2 + \dot{m} \cdot g \cdot z_2 + \dot{m} \cdot \varphi \quad (7-8)$$

Mit den Annahmen:

$$w_{t12} = 0; \varphi = 0; \rho = \text{konst.}; T = \text{konst.}$$

Ergibt sich:

$$\frac{\dot{m}}{2} \cdot w_1^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_1 + \dot{m} \cdot g \cdot z_1 = \frac{\dot{m}}{2} \cdot w_2^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_2 + \dot{m} \cdot g \cdot z_2 \quad (7-9)$$

Daraus werden die verschiedenen Formen der BERNOULLI-Gleichung hergeleitet.

a) Geschwindigkeitsform / geteilt durch Massenstrom \dot{m}

$$\underbrace{\frac{w_1^2}{2}}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{\frac{p_1}{\rho}}_{\text{Druckenergie}} + \underbrace{g \cdot z_1}_{\text{potentielle Energie}} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \quad (7-10)$$

b) Druckform / multipliziert mit Dichte ρ

$$\underbrace{\rho \frac{w_1^2}{2}}_{\text{dynamischer Druck}} + \underbrace{p_1}_{\text{statischer Druck}} + \underbrace{\rho \cdot g \cdot z_1}_{\text{geodätischer Druck}} = \rho \frac{w_2^2}{2} + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 \quad (7-11)$$

c) Höhenform / geteilt durch die Erdbeschleunigung g und Dichte ρ

$$\underbrace{\frac{w_1^2}{2 \cdot g}}_{\text{Geschwindigkeitshöhe}} + \underbrace{\frac{p_1}{\rho \cdot g}}_{\text{Druckhöhe}} + \underbrace{z_1}_{\text{geodätische Höhe}} = \frac{w_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 \quad (7-12)$$

Beispiel zur Energie-Gleichung in Höhenform

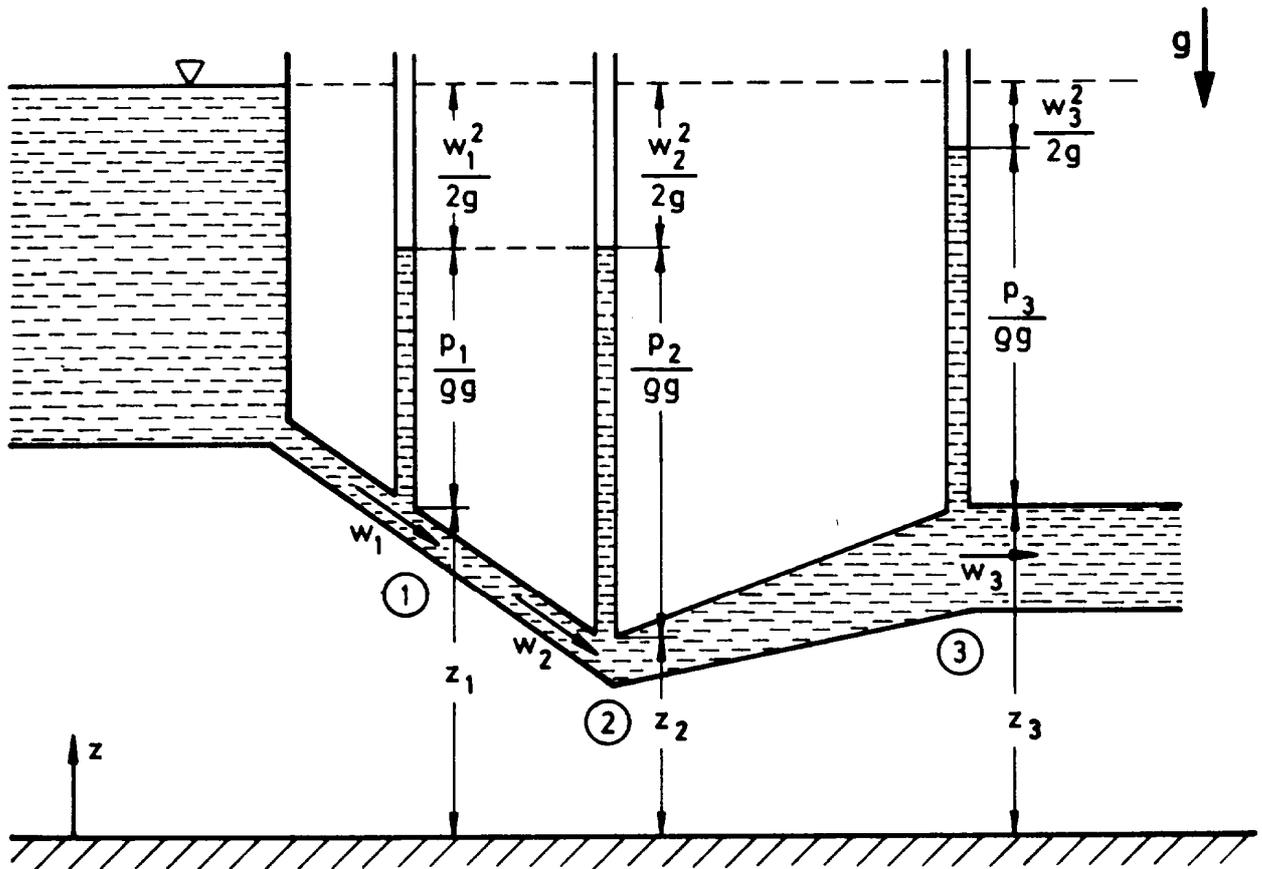


Abbildung 7-2: Reibungslose Rohrströmung

Entsprechend dem Energiesatz:

$$\frac{w^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\rho \cdot g} + z = \text{konst.} \quad (7-13)$$

ist die Summe aus

der Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2 \cdot g}$,

der Druckhöhe $\frac{p}{\rho \cdot g}$ und

der geodätischen Höhe z

konstant.

In den Manometerröhren wird die Druckhöhe an der jeweiligen Anschlussstelle angezeigt.

Die Differenz der Flüssigkeitshöhe in der Manometerröhre und im Behälter ist gleich der Geschwindigkeitshöhe $w^2/(2g)$.

Daraus kann die Geschwindigkeit an der Anschlussstelle berechnet werden. Es ist ersichtlich, daß $w_3 < w_2 = w_1$ ist. Aus $w \cdot A = \text{konst.}$ ergibt sich

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \Rightarrow w_1 = w_2$$

$$w_2 \cdot A_2 = w_3 \cdot A_3 \Rightarrow w_3 = w_2 \frac{A_2}{A_3}, \text{ da } A_2 < A_3 \Rightarrow w_3 < w_2$$

7.2.2 Anwendung der Energie-Gleichung

7.2.2.1 BERNOULLI-Gleichung ohne Höhenglied

Bei annähernd horizontalen Flüssigkeitsströmungen und bei Gasströmungen kann das Höhenglied fast immer vernachlässigt werden, d.h. $z=0$.

Die BERNOULLI-Gleichung ohne Höhenglied lautet:

$$\rho \frac{w_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{w_2^2}{2} + p_2 = \text{konst.} \quad (7-14)$$

Der **dynamische Druck** q (Staudruck):

$$q = \rho \frac{w^2}{2} \quad [q] = \text{Pa} \quad (7-15)$$

Der **Gesamtdruck** p_g

$$p_g = \rho \frac{w^2}{2} + p \quad [p_g] = \text{Pa} \quad (7-16)$$

Damit lautet die BERNOULLI-Gleichung ohne Höhenglied:

$$p_g = q + p = \text{konst.} \quad (7-17)$$

7.2.2.2 Ausflussformel nach TORRICELLI

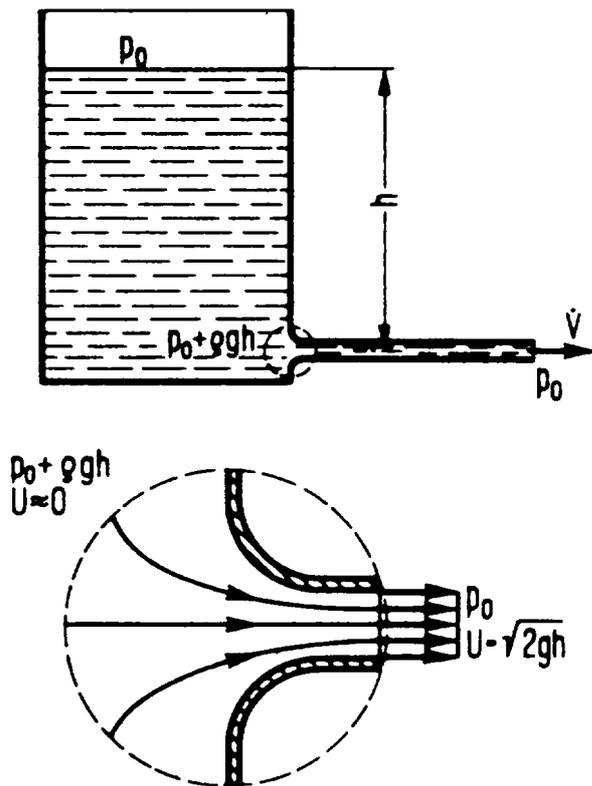


Abbildung 7-3: Ausflussformel nach TORRICELLI

Ein oben offenes (**großes!**) Gefäß mit einer Öffnung am unteren Ende, aus dem reibungslos Flüssigkeit in die Umgebung ausströmt. Die BERNOULLI-Gleichung in Energieform lautet dazu:

$$0 + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_2 \quad (7-18)$$

$$A_1 \gg A_2 \text{ (großes Gefäß)} \rightarrow w_1 = 0 \quad (7-19)$$

$$\frac{w_2^2}{2} = g \cdot (z_1 - z_2) = g \cdot h \quad (7-20)$$

$$w_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (7-21)$$

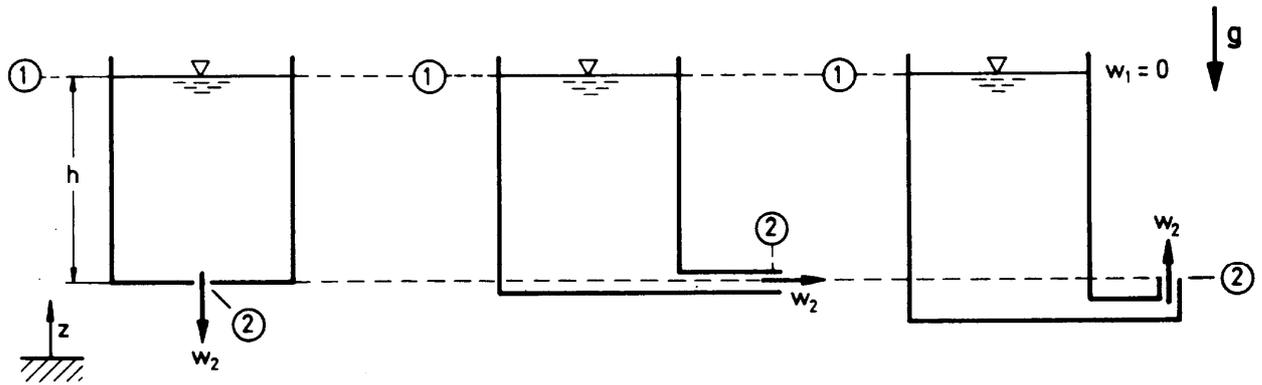


Abbildung 7-4: Ausfluss von Flüssigkeiten aus verschiedenen Gefäßen

Die Ausflussgeschwindigkeit hängt nur von h und nicht von der Ausflussrichtung ab. In der obigen Darstellung ist die Geschwindigkeit w_2 in allen drei Fällen konstant. Die Dichte hat hier ebenfalls keinen Einfluss.

Die Ausflussformel von TORRICELLI gilt nur für $h = \text{konst.}$ $\rightarrow (z_1 - z_2) = \text{konst.}$

Wenn $h \neq \text{konst.}$ ist, liegt ein instationärer Ausflussvorgang vor.

7.2.2.3 Druck im Staupunkt

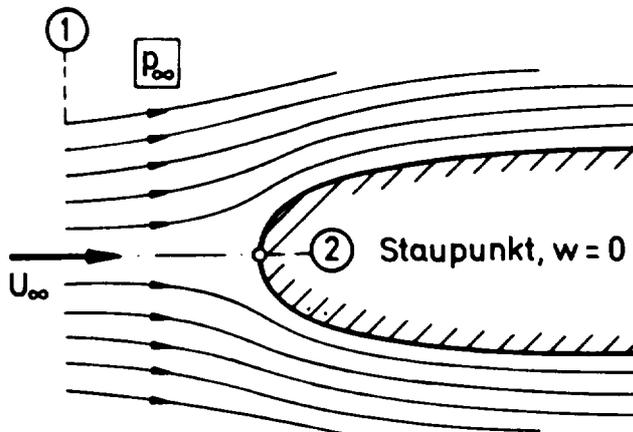


Abbildung 7-5: Druck im Staupunkt

Beim Auftreffen einer Strömung auf ein freies Hindernis entsteht der Staupunkt. Gesucht ist der Druck im Staupunkt ($w_2 = 0$).

Da $z_1 = z_2$, ist hierfür die BERNOULLI-Gleichung für horizontale Strömungen ohne Höhenglied geeignet.

$$\frac{\rho}{2} \cdot w_{\infty}^2 + p_{\infty} = 0 + p_s = p_{\text{ges}} \quad (7-22)$$

Der dynamische Druck ist nicht der Druck im Staupunkt, der Druck im Staupunkt ist gleich dem Gesamtdruck: $p_2 = p_{\text{ges}}$.

Beispiel: Wind gegen eine Wand

Bei der Windgeschwindigkeit $v = 100 \text{ km/h}$ ergibt sich mit $\rho_L = 1,2 \text{ kg/m}^3$ der Staudruck

$$q = p_{\text{dyn}} = \frac{\rho_L \cdot v^2}{2} = 464 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (7-23)$$

Diese Kraft $F = p_{\text{dyn}} \cdot A$ muss beim Bau von Häusern als Windlast berücksichtigt werden.

Man unterscheidet STAUDRUCK (dynamischer Druck) und DRUCK IM STAUPUNKT!

Für den Stromfaden im weit stromaufwärts gelegenen Punkt 1 (obige Abbildung) gilt: Umgebungsdruck = p_∞ , Geschwindigkeit = w_∞ ; w_∞ bedeutet nicht $w = \infty$ sondern weit entfernt vom Objekt; gleiches gilt für den Druck p_∞ .

Dieser Zusammenhang erlaubt es, die Messung der Anströmgeschwindigkeit eines Körpers auf eine Druckmessung zurückzuführen. Das geschieht mit zwei Sonden, dem PITOT-Rohr und dem PRANDTL-Rohr.

7.2.2.4 PITOT-Rohr in einer Rohrströmung

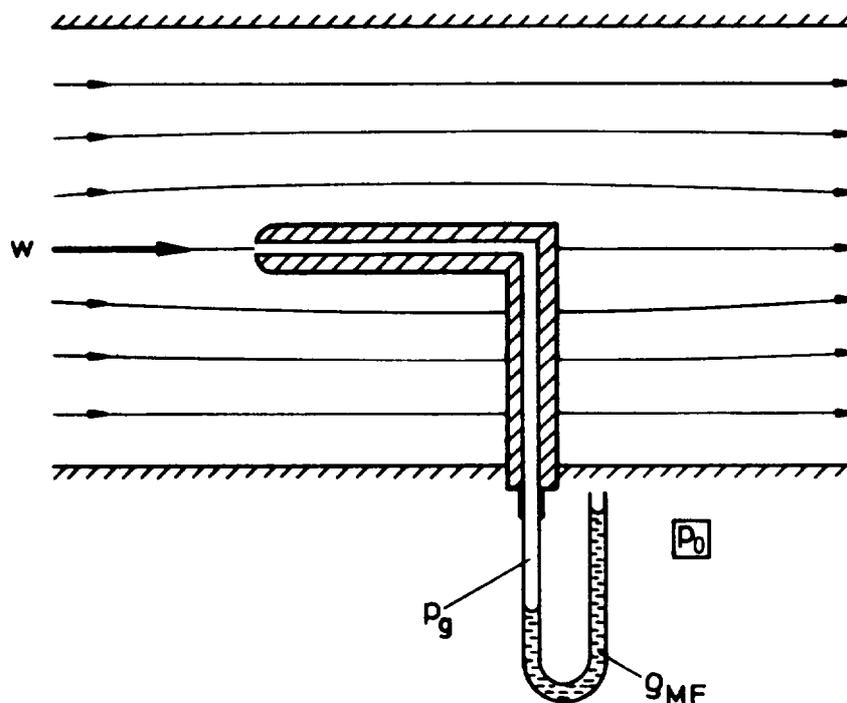


Abbildung 7-6: PITOT - Rohr

Messung des Gesamtdruckes (Druck im Staupunkt). Am anderen Ende der Druckleitung (mit p_g) wird mit einem Manometer der Staudruck gegenüber dem Umgebungsdruck gemessen.

$$\frac{\rho}{2} \cdot w_{\infty}^2 + p_{\infty} = 0 + p_g \quad (7-24)$$

$$\frac{\rho}{2} \cdot w_{\infty}^2 + p_{\infty} = p_g \quad (7-25)$$

$$\underbrace{p_{\text{Stau}} = p_{\text{ges}}}_{\text{Druck im Staupunkt}} = \underbrace{\frac{\rho}{2} \cdot w_{\infty}^2}_{\text{Staudruck}} + \underbrace{p_{\infty}}_{\text{Umgebungsdruck}}$$

PRANDTL-Sonde in einer Rohrströmung

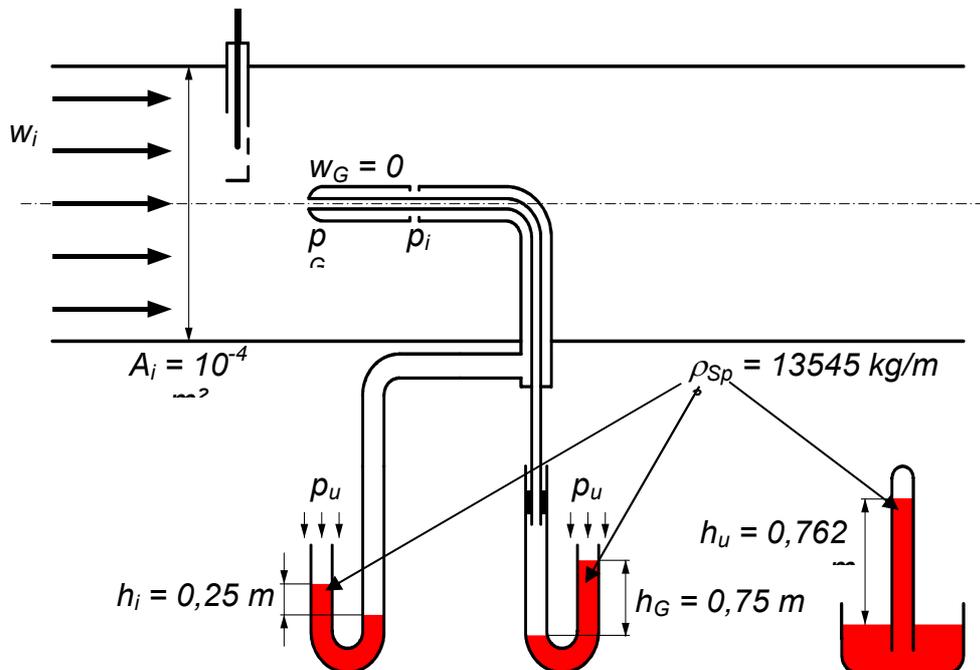


Abbildung 7-7: PRANDTL-Sonde

PITOT-Rohr in einer Rohrströmung

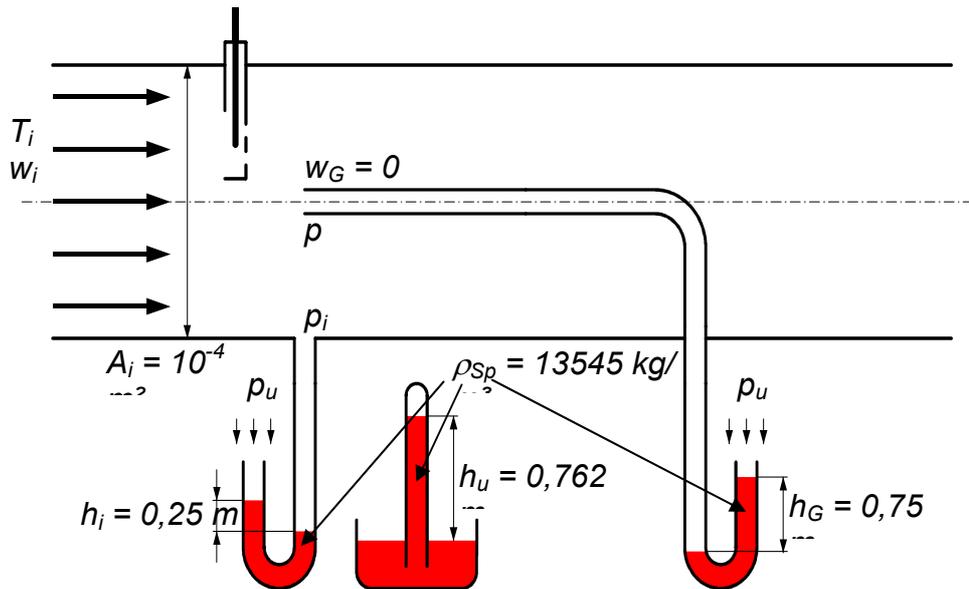


Abbildung 7-8: PITOT-Rohr in einer Rohrströmung

PITOT-Rohr in einer freien Anströmung

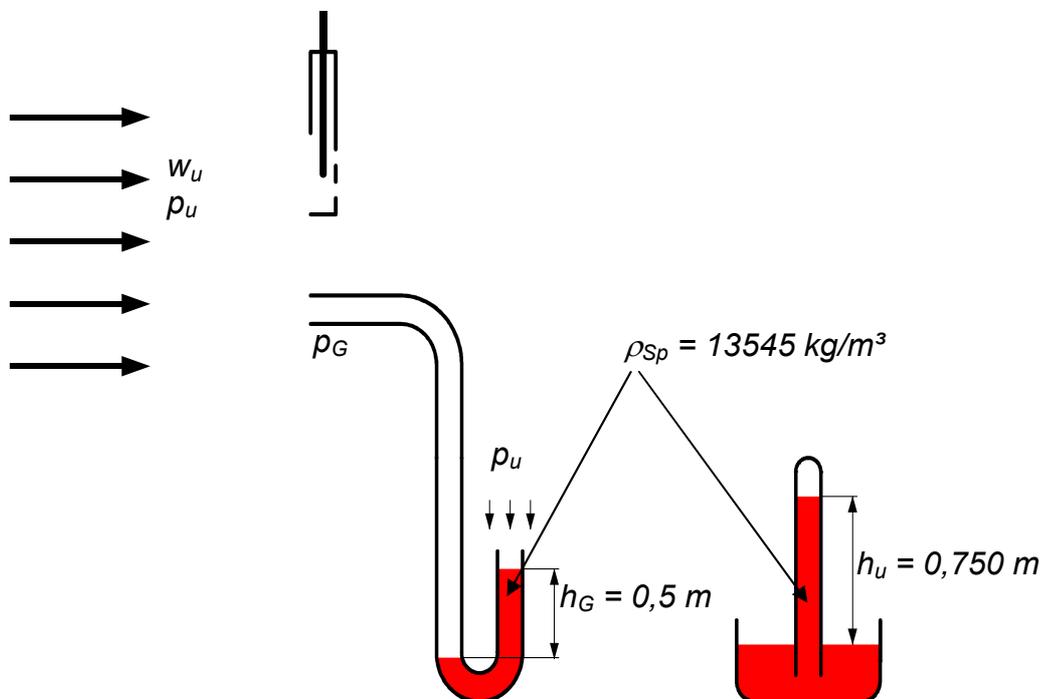
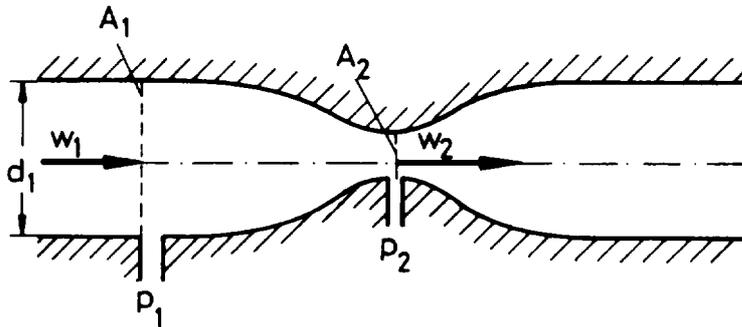


Abbildung 7-9: PITOT-Rohr in freier Anströmung

7.2.2.5 VENTURI-Düse

Abbildung 7-10: VENTURI-Rohr, Drücke p_1 und p_2 werden gemessen

Eine VENTURI-Düse ist eine sich verengende und wieder erweiternde Stromröhre. Sie wird zur verlustfreien Messung der Geschwindigkeit und damit des Volumenstromes in einer Leitung verwendet, wenn die Drücke gemessen werden.

Der Energiesatz (BERNOULLI-Gleichung ohne Höhenglied und Verluste) lautet:

$$\rho \frac{w_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{w_2^2}{2} + p_2 \quad (7-26)$$

Die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide lautet:

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \quad (\dot{V} = \text{konst.}) \quad (6-34)$$

$$w_2 = w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} \quad (7-27)$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \cdot w_1^2 - w_1^2 \right] \quad (7-28)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] \quad (7-29)$$

Für die Geschwindigkeitsmessung mit der VENTURI-Düse ergibt sich daraus:

$$w_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}} \quad (7-30)$$

Für den Volumenstrom gilt:

$$\dot{V} = w_1 \cdot A_1 = w_1 \cdot \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \quad (7-31)$$

7.3. Inkompressible reibungslose Strömung mit Energiezufuhr

7.3.1 Spezifische Stutzenarbeit Y

Definition der Stutzenarbeit:

Zwischen dem Eintritts- und Austrittsstutzen einer Strömungsmaschine kann dem Volumen (strömendes Fluid) spezifische technische Arbeit zugeführt (Pumpe) oder entzogen (Turbine) werden. Anstelle dieser spezifischen technischen Arbeit w_t wird bei den Strömungsmaschinen die spezifische Stutzenarbeit Y verwendet. Diese Stutzenarbeit ist immer positiv.

Energiezufuhr (dem strömenden Fluid zugeführt):

z.B.: Arbeitsmaschine (Pumpe, Ventilator)

- (1) Saugseite der Pumpe
- (2) Druckseite der Pumpe

$$Y = w_{t12} \quad (7-32)$$

Energieentnahme (dem strömenden Fluid entzogen):

z.B.: Kraftmaschine (Turbine)

- (1) Druckseite der Turbine
- (2) Saugseite der Turbine

$$Y = -w_{t12} \quad (7-33)$$

7.3.2 Pumpe

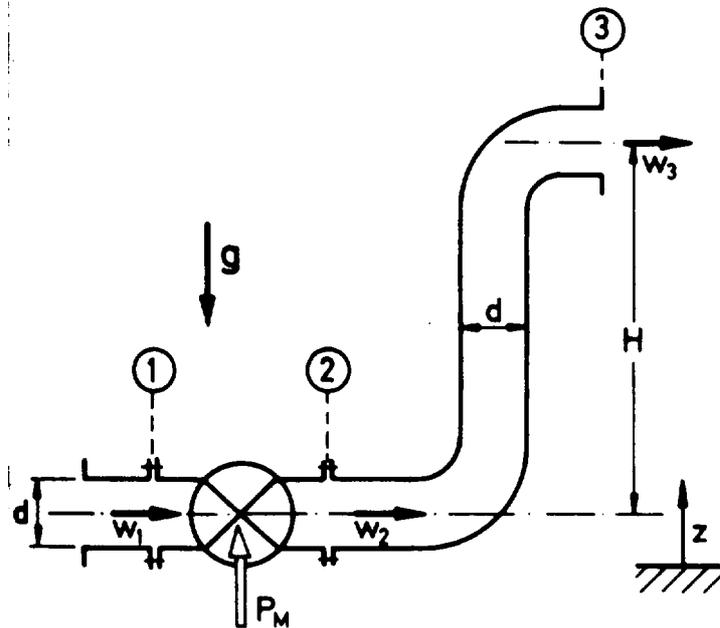


Abbildung 7-11: Rohrströmung mit Pumpe

Aufgabe:

Eine Pumpe ist in einer Rohrleitung konstanten Durchmessers d integriert und fördert eine Flüssigkeit in die Höhe H . Es treten keine Reibungsverluste auf.

Frage 1: Wie groß wird die spezifische Stutzenarbeit Y und die mechanische Leistung P_M der Pumpe?

$$\Delta p_{12} = p_2 - p_1 \quad (7-34)$$

Lösung:

Kontinuitätsgleichung und Energiegleichung zwischen ① über die (Pumpe) und ② mit

$$z_1 = z_2$$

Kontinuitätsgleichung: ① \rightarrow ②

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \text{ mit } A_1 = A_2 = \text{const.} \quad (7-35)$$

$$w_1 = w_2 \quad (7-36)$$

Energiegleichung: ① \rightarrow ②

Anfang + Energiezufuhr = Ende

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 + w_{t12} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \quad (7-37)$$

$$\frac{p_1}{\rho} + w_{t12} = \frac{p_2}{\rho} \Rightarrow w_{t12} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = Y \quad (7-38)$$

Die spezifische Stutzenarbeit Y der Pumpe (Frage 1) ergibt sich aus:

$$Y = \frac{1}{\rho} \cdot (p_2 - p_1) = \frac{\Delta p_{12}}{\rho} \quad (7-39)$$

Spezifische Stutzenarbeit: Die zwischen Eintritts- und Austrittsstutzen einer Strömungsmaschine dem strömenden Fluid zugeführte (Pumpe) oder entzogene (Turbine) spezifische technische Arbeit w_t wird die spezifische Stutzenarbeit Y genannt.

Mechanische Leistung der Pumpe:

$$P_M = \dot{m} \cdot w_{t12} = \dot{m} \cdot Y = \dot{V} \cdot \rho \cdot Y = \dot{V} \cdot \Delta p_{12} \quad (7-40)$$

Frage 2: Wie groß ist die Förderhöhe H der Pumpe, wenn $p_3 = p_1$ ist?

Gegeben ist:

$$p_3 = p_1 \quad (\text{in der Aufgabe vorausgesetzt})$$

$$w_3 = w_1 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

Damit wird die Energiegleichung zwischen ① und ③ zu:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 + w_{t13} = \frac{w_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + g \cdot z_3 \quad (7-41)$$

$$w_{t13} = w_{t12} = Y = g \cdot (z_3 - z_1) = g \cdot H = \frac{\Delta p_{12}}{\rho} \quad (7-42)$$

$$H = \frac{\Delta p_{12}}{g \cdot \rho} \quad (7-43)$$

bzw. zwischen ② und ③: 2. Methode:

$$\frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 = \frac{w_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + g \cdot z_3 \quad (7-44)$$

Mit $w_2 = w_3$

$$\frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 = \frac{p_3}{\rho} + g \cdot z_3 \quad (7-45)$$

Mit $z_3 - z_2 = H$ und $p_3 = p_1$

$$\frac{1}{\rho} \cdot (p_2 - p_1) = \frac{\Delta p_{12}}{\rho} = g \cdot H = w_{t12} \quad (7-46)$$

Förderhöhe H:

$$H = \frac{Y}{g} \quad (7-47)$$

Die Förderhöhe H einer Pumpe ist die geodätische Höhendifferenz, über die sie ein Fluid bei dem gleichen Ein- (p_1) und Austrittsdruck (p_3), der gleichen Ein- und Austrittsgeschwindigkeit in reibungsloser Strömung fördern kann.

$$P_M = \dot{m} \cdot Y = \dot{m} \cdot g \cdot H = \dot{V} \cdot \Delta p_{12} \quad (7-48)$$

Der Wirkungsgrad einer Pumpe ist der Quotient aus mechanischer Leistung P_M und Wellenleistung P.

$$\eta_P = \frac{P_M}{P} = \frac{\dot{m} \cdot Y}{P} = \frac{\dot{m} \cdot g \cdot H}{P} \leq 1 \quad (7-49)$$

H: Förderhöhe wenn gegeben: $p_1 = p_3$, $w_1 = w_3$

$\eta_P = 1$ ist ein Idealfall (unmöglich)

7.3.3 Turbine

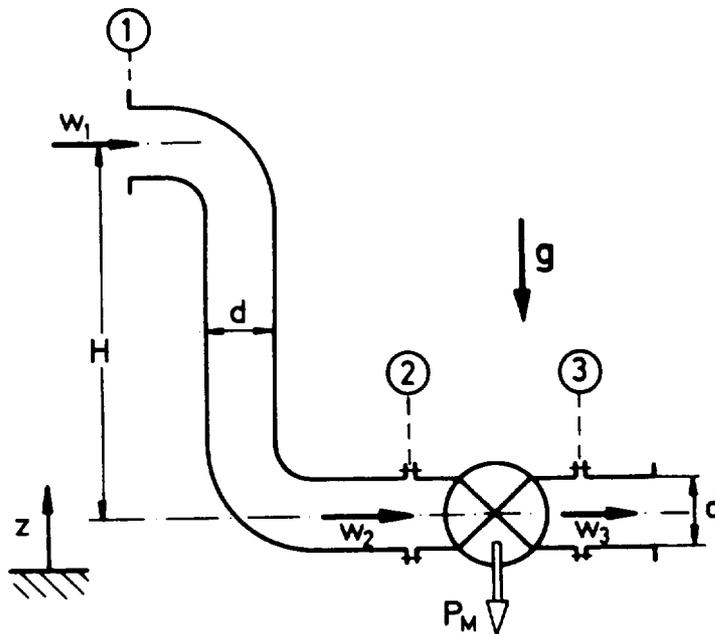


Abbildung 7-9: Rohrströmung mit Turbine

Eine Turbine ist mit einer Rohrleitung konstanten Durchmessers d verbunden. Die Strömung erfolgt reibungslos.

Frage 1: Wie groß wird die spezifische Stutzenarbeit Y und die mechanische Leistung P_M der Turbine?

Annahme reibungsfreie Strömung: $p_1 = p_3, Z_2 = Z_3$

Der Druckabfall in der Turbine ergibt sich aus:

$$\Delta p_{23} = p_3 - p_2 \quad (7-50)$$

Energiegleichung zwischen ② und ③:

$$\frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - w_{t23} = \frac{w_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} \quad (7-51)$$

mit $w_2 = w_3$ (gleiche Durchmesser) ergibt sich:

$$\frac{p_2}{\rho} - w_{t23} = \frac{p_3}{\rho} \quad (7-52)$$

Nach der Vorzeichenregelung gilt für die Turbine:

$$Y = -w_t$$

$$w_{t23} = -Y = -\frac{1}{\rho} \cdot (p_3 - p_2) = -\frac{\Delta p_{32}}{\rho} = \frac{P_M}{\dot{m}} \quad (7-53)$$

$$w_{t23} = \frac{P_M}{\dot{m}} \quad (7-54)$$

Die mechanische Leistung, die das Fluid an die Turbine abgibt errechnet sich zu:

$$P_M = -\dot{m} \cdot Y = \dot{V} \cdot \Delta p_{23} \quad (7-55)$$

Frage 1: Wie groß ist die Fallhöhe H?

Energiebilanz zwischen ① → ③

Annahmen: $w = \text{const.}$; $p_1 = p_3$

$$w_{t13} = w_{t23} \quad Y = g \cdot (z_1 - z_3) = g \cdot H = \frac{\Delta p_{23}}{\rho} \quad (7-56)$$

Energiebilanz zwischen ① → ②

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + g \cdot (z_1 - z_2) \quad \rightarrow \quad w_{t12} = 0 \quad (7-57)$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot (p_2 - p_1) = \frac{1}{\rho} \cdot (p_2 - p_3) = g \cdot H = -\frac{1}{\rho} \cdot (p_3 - p_2) = -\frac{\Delta p_{23}}{\rho} \quad (7-58)$$

Die Fallhöhe H ist die geodätische Höhendifferenz, die notwendig wäre, um bei gleichem Eintritts- und Austrittsdruck (p_1 und p_3), gleicher Eintritts- und Austrittsgeschwindigkeit sowie reibungsloser Strömung die Turbinenleistung P_M zu erzeugen.

$$P_M = -\dot{m} \cdot Y = -\dot{m} \cdot g \cdot H \quad (7-59)$$

$$H = \frac{w_{t23}}{g} = \frac{-Y}{g} \quad (7-60)$$

Der Wirkungsgrad η_T einer Turbine ist der Quotient aus Wellenleistung P und negativer mechanischer Leistung ($-P_M$).

$$\eta_T = -\frac{P}{P_M} = \frac{P}{\dot{m} \cdot Y} \quad (7-61)$$

7.4. Inkompressible reibungsbehaftete Fluide ohne Energiezufuhr

Inkompressible reibungsbehaftete Fluide sind in vielen technischen Anlagen vorhanden (Hydraulik).

Durch Reibung entstehen Verluste. Als Verlust bezeichnen wir Temperaturzunahme. Sie äußert sich als Druckabfall.

$$\frac{\dot{m}}{2} \cdot w_1^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_1 + \dot{m} \cdot g \cdot z_1 = \frac{\dot{m}}{2} \cdot w_2^2 + \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot p_2 + \dot{m} \cdot g \cdot z_2 + \text{Verluste}$$

Druckform der BERNOULLI-Gleichung:

$$\frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = \frac{\rho}{2} \cdot w_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \Delta p_{v12} \quad (7-62)$$

Der Druck p_2 am Ende der betrachteten Stromröhre ist um den Druckabfall Δp_{v12} kleiner als bei reibungsfreier Strömung.

Die obige Gleichung durch ρ geteilt ergibt:

$$\frac{1}{2} \cdot w_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + \varphi_{12} \quad (7-63)$$

die spezifische Dissipation:

$$\varphi_{12} = \frac{\Delta p_{12}}{\rho} \quad (7-64)$$

Verluste werden durch zwei verschiedene Ursachen erzeugt:

gerades Rohr

und

durch Rohrleitungselemente

Betrachtet wird ein Rohrsystem in mehreren Abschnitten. Die gesamte Dissipation φ_{ges} (oder gesamter Druckabfall Δp_v) ist gleich der Summe der Verluste aller Teilsysteme.

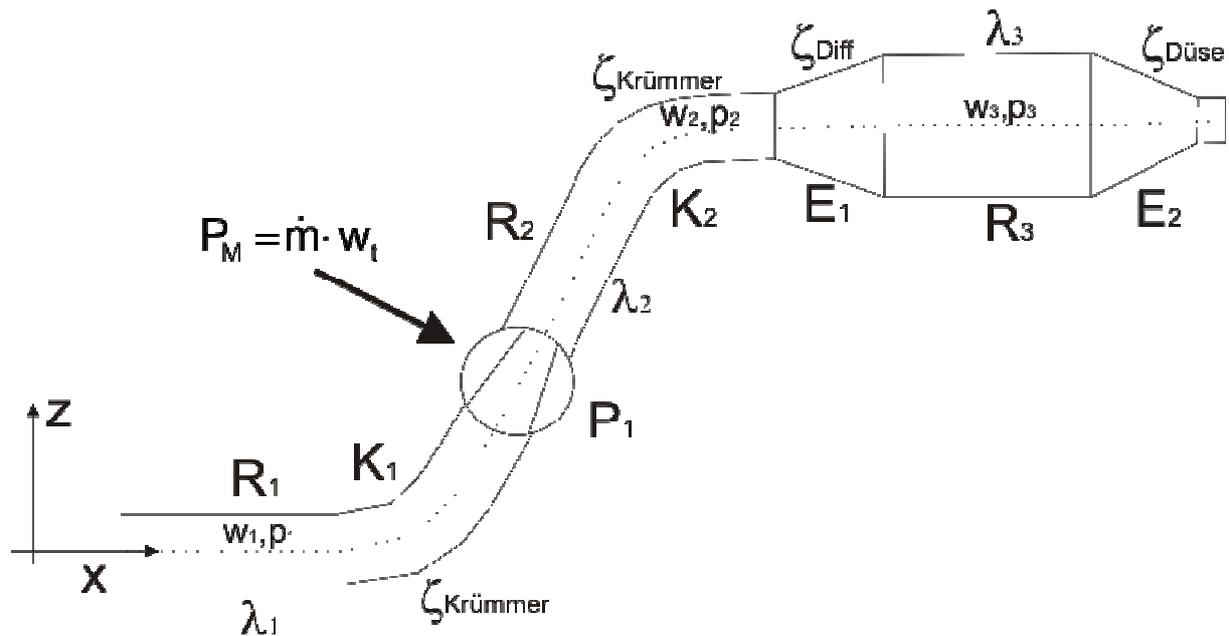


Abbildung 7-9: Rohrströmung mit Pumpe und Einbauelementen

- gerades Rohr R_1, R_2, R_3 mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
- Rohrkrümmer K_1, K_2 mit $\zeta_{\text{Krümmer}}$
- Pumpe P_1
- Einbauelement Diffusor E_1 mit ζ_{Diff}
- Einbauelement Düse E_2 mit $\zeta_{\text{Düse}}$

Der Gesamtverlust bei Rohrleitungen mit Übergängen und Rohrreibung resultiert aus:

$$\varphi_G = \sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \frac{w_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot \frac{l_i}{d_i} \cdot \frac{w_i^2}{2} \quad (7-65)$$

$$\Delta p_G = \rho \cdot \sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot \frac{w_i^2}{2} + \rho \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot \frac{l_i}{d_i} \cdot \frac{w_i^2}{2} \quad (7-66)$$

Es gibt zwei Arten der Strömung: laminare und turbulente. Darüber entscheidet die REYNOLDS-Zahl:

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot w \cdot d}{\eta} = \frac{w \cdot d}{\nu} \leq 2320 \text{ bedeutet laminare Strömung} \quad (7-67)$$

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \text{ bei der laminaren Strömung} \quad (7-68)$$

Im nächsten Kapitel wird die Gl. 7-68 hergeleitet.

7.5. Reibungsbehaftete Rohrströmung

7.5.1 Druckverlust in Rohrleitungen bei laminarer Strömung ($Re < 2320$)

Bei laminarer Rohrströmung lässt sich der Reibungsverlust theoretisch berechnen, was bei der turbulenten Strömung nicht mehr der Fall ist. In Abbildung 7-2 ist eine horizontale Rohrleitung mit kreisförmigem Querschnitt dargestellt.

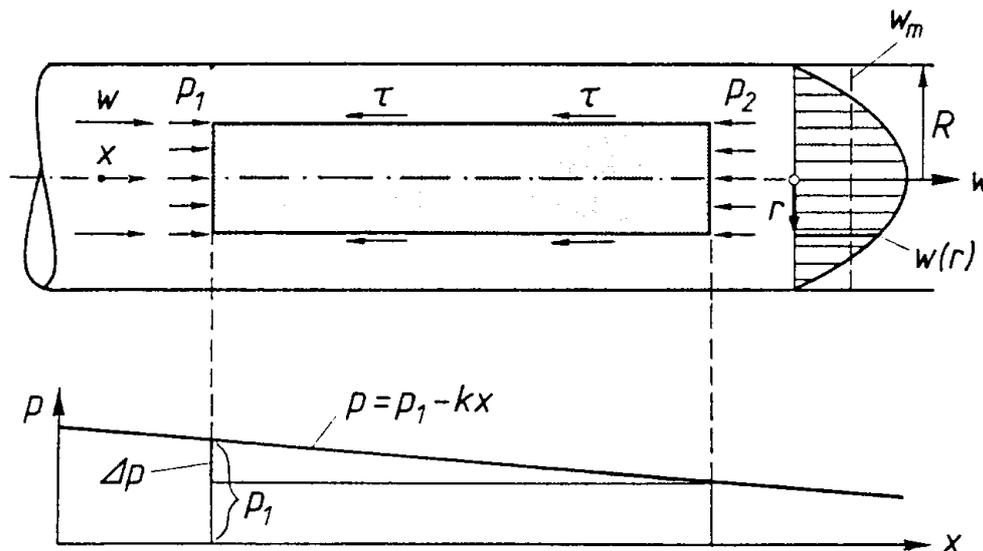


Abbildung 7-12: Rohrströmung

Wir betrachten einen von der ausgebildeten Rohrströmung herausgeschnittenen gedachten Teilzylinder mit dem Radius r und der Länge L und bringen an ihm die Schubspannungen und Druckkräfte an.

Der Druck nimmt linear in Strömungsrichtung ab, da der infolge Reibung entstehende Druckabfall überwunden werden muss. Bei stationärer Strömung muss der Flüssigkeitszylinder im Gleichgewicht sein. Druck- und Reibungskräfte müssen sich das Gleichgewicht halten.

Die Druckkraft wirkt auf die Fläche A in x -Richtung:

$$(p_1 - p_2) \cdot A = (p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2 \quad (7-69)$$

Die Reibungskraft wirkt auf den Mantel in x -Richtung:

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \tau = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \eta \cdot \frac{dw}{dr} \quad (7-70)$$

Durch Gleichsetzen der beiden Kräfte (für τ siehe Kap 5) erhält man folgende, die Geschwindigkeitsverteilung beschreibende Differentialgleichung:

$$(p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \eta \cdot \frac{dw}{dr} \quad (7-71)$$

$$dw = \frac{p_1 - p_2}{2 \cdot \eta \cdot L} \cdot r \cdot dr \quad (7-72)$$

$$w = \int_r^R \frac{p_1 - p_2}{2 \cdot \eta \cdot L} \cdot r \cdot dr \quad (7-73)$$

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot r^2 \Big|_r^R \quad (7-74)$$

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot (R^2 - r^2) \quad (7-75)$$

$$w_{\max} = w(r=0) = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^2 \quad (7-76)$$

Die mittlere Geschwindigkeit w_m entspricht dabei genau

$$w_m = \frac{1}{2} w_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^2 = \frac{p_1 - p_2}{32 \cdot \eta \cdot L} \cdot D^2 \quad (7-77)$$

(auf die Herleitung soll hier nicht weiter eingegangen werden).

Aus der nachfolgenden Gleichung wird der Druckverlust bei laminarer Strömung bestimmt.

$$p_1 - p_2 = \Delta p_v = \frac{32 \cdot w_m \cdot \eta \cdot L}{D^2} \quad (7-78)$$

Der Volumenstrom \dot{V} errechnet sich aus:

$$\dot{V} = w_m \cdot A = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{p_1 - p_2}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^2 = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot (p_1 - p_2)}{8 \cdot \eta \cdot L} \quad (7-79)$$

und ist proportional zum Druckunterschied zwischen Rohranfang und Rohrende und zur 4. Potenz des Rohrradius und umgekehrt proportional zur Rohrlänge und zur dynamischen Zähigkeit des Strömungsmediums (HAGEN-POISEUILLESches Gesetz).

Daraus ergibt sich der Druckverlust Δp :

$$\Delta p = \frac{8 \cdot \eta \cdot L \cdot \dot{V}}{\pi \cdot R^4} = \frac{128 \cdot \eta \cdot L \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^4} \quad (7-80)$$

Mit

$$\dot{V} = w_m \cdot A = w_m \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad (7-81)$$

folgt daraus

$$\Delta p = \frac{128 \cdot \eta \cdot L \cdot D^2}{D^4 \cdot 4} \cdot w_m \quad (7-82)$$

$$\Delta p = \frac{64 \cdot \eta \cdot L}{2 \cdot D^2} \cdot w_m \quad (7-83)$$

$$\eta = \rho \cdot \nu \quad (7-84)$$

$$\Delta p = \frac{64 \cdot \rho \cdot \nu \cdot L}{2 \cdot D^2} \cdot w \quad (7-85)$$

$$\Delta p = 64 \cdot \left(\frac{L}{D}\right) \cdot \left(\frac{\rho}{2}\right) \cdot w^2 \cdot \left(\frac{\nu}{D \cdot w}\right) \quad (7-86)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} = \left(\frac{\nu}{D \cdot w}\right) \quad (7-87)$$

$$\Delta p = \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w^2 \quad (7-88)$$

$$\frac{64}{\text{Re}} = \lambda \quad (7-89)$$

mit λ als der Rohrreibungszahl. Es berechnet sich der Druckverlust von Rohrleitungsteilen mit der Formel

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w^2 \quad (7-90)$$

Diese Formel gilt ebenso für turbulente Strömung, jedoch kann in diesem Fall die Rohrreibungszahl nicht mehr mit dieser Gleichung berechnet werden.

7.5.2 Rohrreibungszahl (Widerstandszahl) λ

Als Maß für die Dissipation in der Rohrströmung ist die Rohrreibungszahl λ eingeführt worden.

Die Abhängigkeit der Rohrreibungszahl λ von der REYNOLDS-Zahl Re ist im Rohr widerstandsdiagramm nach der BLASIUSSchen Gleichung, der PRANDTLschen Gleichung und der COLEBROOKSchen Gleichung dargestellt. Dabei ist auch der Einfluss der Wandrauigkeit aufgenommen. Diese ist durch die Rauigkeitshöhe k_s gekennzeichnet.

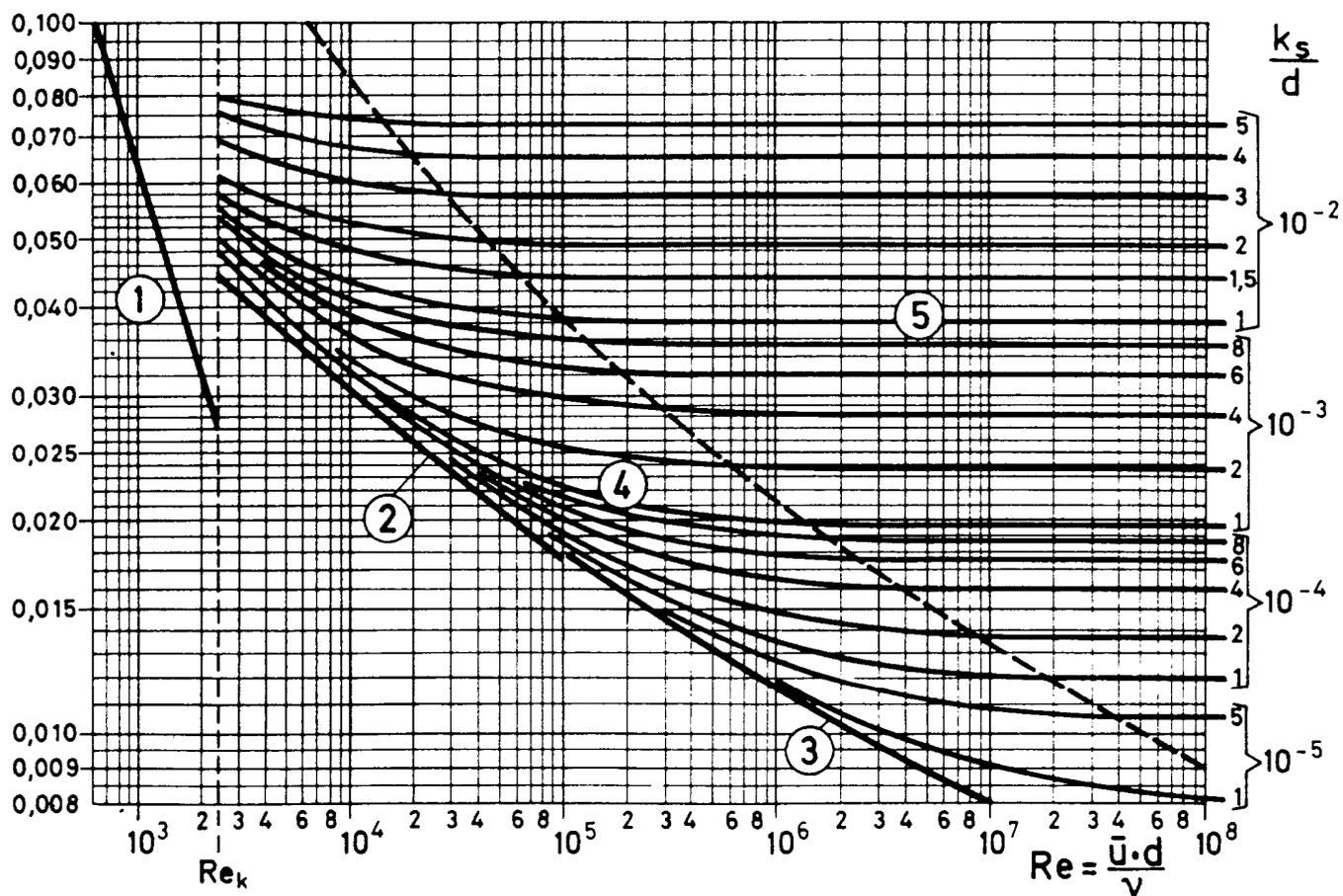


Abbildung 7-13: Rohrreibungszahl nach der COLEBROOKSchen Formel

Im Diagramm sind zwei Hauptbereiche dargestellt, für laminare und turbulente Strömung. Es werden fünf Kurvenbereiche unterschieden.

Die Formeln für die Berechnung der Rohrreibungszahl λ lauten:

1. HAGEN-POISEUILLE, laminar, **hydraulisch glatt,** $Re < 2320$

$$\lambda_{\text{lam}} = \frac{64}{Re} \quad (7-91)$$

2. BLASIUS, turbulent, **hydraulisch glatt,** $2320 < Re < 10^5$

$$\lambda_{\text{turb}} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad (7-92)$$

3. PRANDTL, turbulent, **hydraulisch glatt,** $10^5 < Re < 10^7$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{turb}}}} = 2,03 \cdot \log(Re \cdot \sqrt{\lambda_{\text{turb}}}) - 0,8 \quad (7-93)$$

4. COLEBROOK, turbulent, **mit Rauigkeit**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{turb}}}} = 1,74 - 2 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot k_s}{d} + \frac{18,7}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{\text{turb}}}}\right) \quad (7-94)$$

5. v.KARMAN-NIKURADSE, turbulent, **mit Rauigkeit unabhängig von Re**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{turb}}}} = 1,14 - 2 \cdot \log \frac{2 \cdot k_s}{d} \quad (7-95)$$

Kurve 1 entspricht der laminaren Strömung $Re < Re_{kr}$.

Die Kurven 2 und 3 gelten, wenn die Rauigkeit keinen Einfluss hat (das Rohr ist hydraulisch glatt), bei Kurve 2 bis $Re = 10^5$.

Oberhalb von $Re = 10^5$ gilt Kurve 3. Die **Rauigkeit ist so klein**, dass sie den Rohrwiderstand nicht beeinflusst. Man bezeichnet die Wand dann als **hydraulisch glatt**.

Ist die Rauigkeit k_s groß genug, um die Rohrreibung zu beeinflussen, sind wieder zwei Bereiche zu unterscheiden. Im Bereich 4 hängt λ sowohl von der REYNOLDS-Zahl als auch von der relativen Sandrauigkeit k_s/d ab.

Im Bereich 5 ist der Widerstand praktisch von der Viskosität unabhängig.

7.5.3 Druckverluste in Rohrelementen. Verlustkoeffizient ζ

7.5.3.1 Grundgleichung

$$\Delta p_v = \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w^2 \quad (7-96)$$

7.5.3.2 Plötzliche, sprungartige Rohrerweiterung

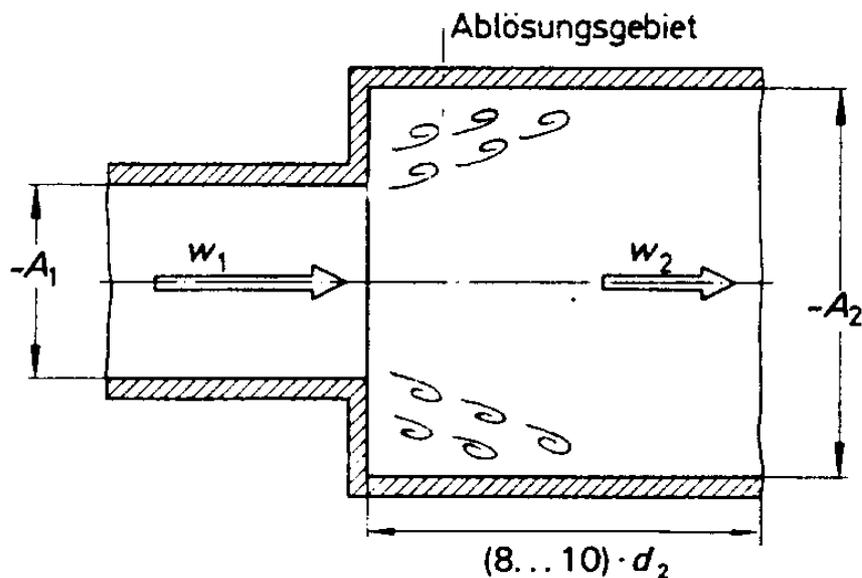


Abbildung 7-14: Rohrerweiterung; CARNOT-Diffusor

Der Druckverlust in einer sprungartigen Rohrerweiterung ist folgendermaßen definiert:

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} \cdot (w_1 - w_2)^2 \quad (7-97)$$

Setzt man die obige Gleichung mit der Grundgleichung

$$\Delta p_v = \zeta_v \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 \quad (7-98)$$

gleich, so erhält man den folgenden Ausdruck für ζ_2 :

$$\zeta_v \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 = \frac{\rho}{2} \cdot (w_1 - w_2)^2 \quad (7-99)$$

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \rightarrow w_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot w_1 \quad (7-100)$$

$$\zeta_v \cdot w_1^2 = \left(w_1 - w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (7-101)$$

$$\zeta_v \cdot w_1^2 = w_1^2 \cdot \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (7-102)$$

$$\zeta_v = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (7-103)$$

Diese Gleichung stellt die Widerstandszahl ζ_v einer plötzlichen Rohrerweiterung dar, bezogen auf die größere Geschwindigkeit w_1 im Rohr.

7.5.3.3 Plötzliche, sprungartige Rohrverengung (Kontraktion)

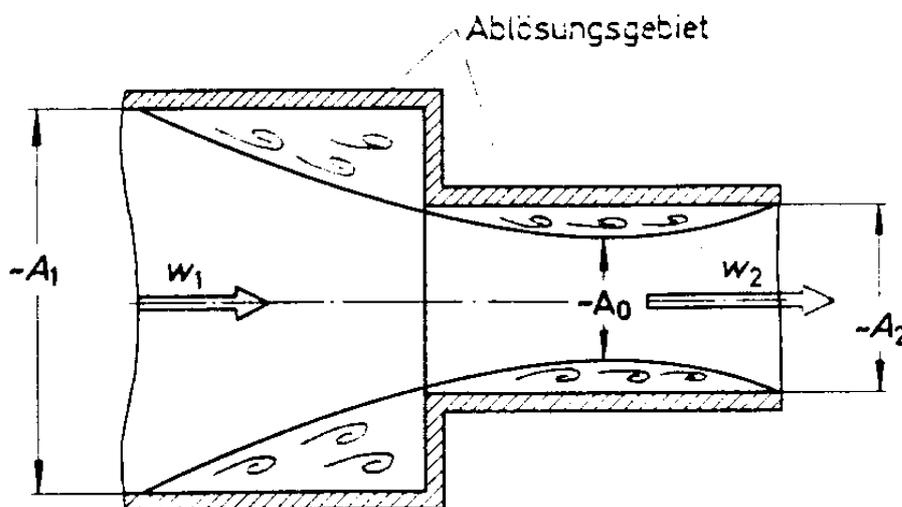


Abbildung 7-15: Rohrverengung

Bei einer plötzlichen Verengung tritt vor und nach der Kontraktion eine Separation der Strömung auf. Dadurch schafft sich die Strömung selbst einen glatten Übergang. Als Folge ist der minimale Querschnitt $A_0 = A_{\min}$ kleiner als A_2 . Bei der plötzlichen Kontraktion wird der Druckverlust hauptsächlich durch die Expansion von A_0 auf A_2 nach der Kontraktion verursacht. Daher kann man den Druckverlust durch denjenigen des CARNOT-Diffusors approximieren.

Der Druckverlust ergibt sich zu:

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} \cdot (w_0 - w_2)^2 \quad (7-104)$$

mit

$$\zeta_v = \left(\frac{A_2}{A_0} - 1 \right)^2 \quad (7-105)$$

Dabei ist A_0 der „freie“ Querschnitt infolge Strahlkontraktion an der Verengungsstelle.

7.5.3.4 Allmähliche Rohrerweiterung (Diffusor) und allmähliche Rohrverengung (Konfusor, Düse)

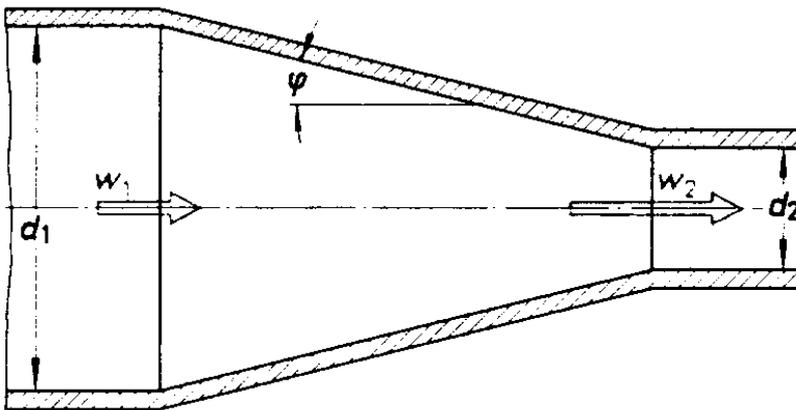


Abbildung 7-16: Rohrverengung

Die Reibungsverluste werden in einem Diffusor oder in einer Düse durch einen ζ Wert erfasst.

$$\zeta_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \quad (7-106)$$

Die Widerstandszahl ζ ist eine Funktion

- der Rohrrauigkeit,
- der REYNOLDS-Zahl,
- des Winkels φ und
- des Durchmesserhältnisses d_1/d_2 .

8. Impulssatz für stationäre Strömungen

Die stationäre BERNOULLISCHE Gleichung (siehe Kap. 7) erlaubt eine Aussage hinsichtlich der Umwandlung von kinetischer Energie in Druckenergie bei der isothermen Strömung reiner Fluide. Bei dieser Umwandlung muss die Masse erhalten bleibt. Dies wird mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (siehe Kap. 6) zum Ausdruck gebracht.

Es stehen somit 2 Gleichungen zur Bestimmung der Geschwindigkeit und des Druckes entlang des Stromfadens zur Verfügung. Bei der Beschreibung der mechanischen Wechselwirkung des Fluids mit Strömungselementen wurden ausschließlich dissipative Effekte (Verluste) berücksichtigt.

Der an dieser Stelle eingeführte Impulssatz ermöglicht indessen, diejenigen Kräfte zu berechnen, die im Rahmen besagter Wechselwirkung entstehen. Der Impulssatz stellt somit ein wichtiges Werkzeug für die konstruktive Auslegung von Anlagen dar.

Wie anhand von Beispielen gezeigt wird, vermag der Impulssatz aber noch weitaus mehr zu leisten. So lässt sich mit ihm etwa die Querkontraktion eines Flüssigkeitsstrahls ebenso erklären wie die Druckerhöhung bei der Vermischung von Fluidteilströmen oder die Verluste von Stoßdiffusoren.

Der an Ende dieses Abschnittes behandelte Drehimpulssatz macht eine Aussage zu der Wechselwirkung Fluid-Strömungselement bei rotierenden Strömungsmaschinen. Die sich hierbei ergebende EULERSche Turbinengleichung verknüpft das aufzubringende bzw. abzuführende Drehmoment mit der Kinematik des Fluids.

8.1. Definition des Impulses

1. Bei der Herleitung des Energieerhaltungssatzes haben wir festgestellt, dass die Massenelemente eines strömenden Fluids Energieträger sind.
2. Die Massenelemente des strömenden Fluids sind auch Träger von Impuls:
3. Definition: Der Impuls ist das Produkt von Masse und Geschwindigkeit:

$$I = m \cdot v \quad \left[\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = [\text{N} \cdot \text{s}] \quad (8-1)$$

Man kann auch sagen, aufgrund seiner Geschwindigkeit besitzt jedes strömende Fluidelement einen Impuls.

In der Strömungsmechanik wird bei Strömungen allerdings seltener mit dem Impuls, sondern mit dem Impulsstrom, d.h. der zeitlichen Änderung des Impulses, gearbeitet:

Für eine konstante Masse ergibt sich aus (8-1)

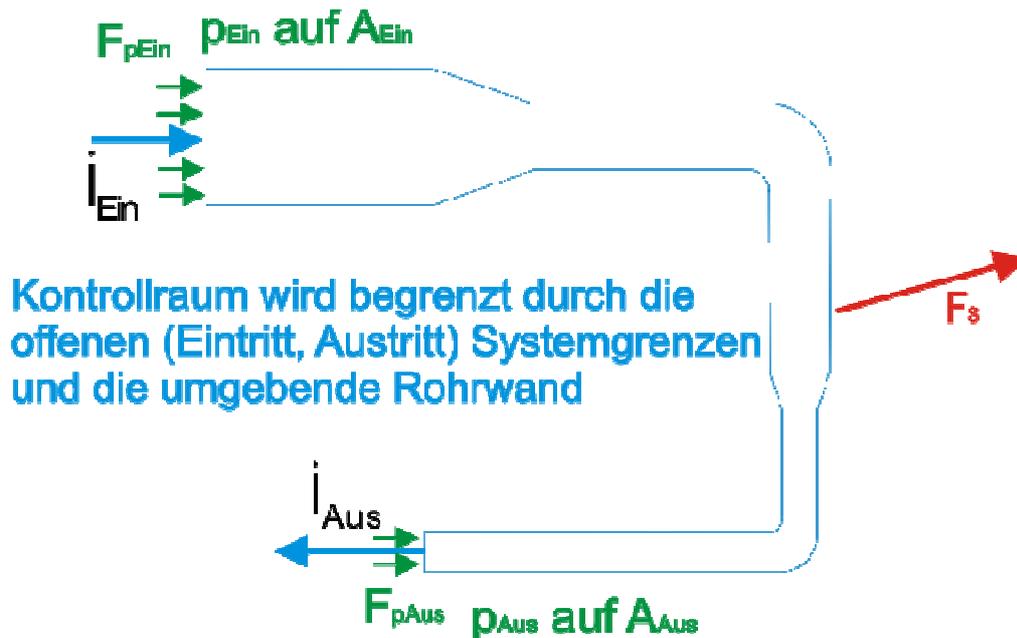


Abbildung 8-2: innere Kräfte im Kontrollraum

die Druckkraft $F_p = p \cdot A$ ist eine Oberflächenkraft, p ist der statische Druck in der Rohrleitung darüber hinaus hat das Fluid ein Eigengewicht $F_G = \rho \cdot V \cdot g$ bei Umlenkungen und Verengungen wirkt auf die Flüssigkeit eine Stützkraft F_S .

Es gilt:

$$\vec{i}_{\text{aus}} - \vec{i}_{\text{ein}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad (8-3)$$

Bestimmung von ein- und ausfließendem Impulsstrom \vec{i}_{ein} und \vec{i}_{aus} .

$$\vec{i}_{\text{ein}} = \dot{m}_{\text{ein}} \cdot \vec{v}_{\text{ein}} \quad \vec{i}_{\text{aus}} = \dot{m}_{\text{aus}} \cdot \vec{v}_{\text{aus}} \quad (8-4)$$

Der Massenstrom

$$\dot{m} = \rho \cdot v \cdot A = \rho \cdot v_{\text{ein}} \cdot A_{\text{ein}} = \rho \cdot v_{\text{aus}} \cdot A_{\text{aus}} \quad (8-5)$$

wird als konstant angenommen und als Skalar mit stets positivem Vorzeichen angegeben. Die Berechnung der Impulsbilanz erfolgt komponentenweise, d.h.

Für die Impulsströme gilt damit (nur jeweils die x-Komponente angegeben):

$$\begin{aligned} i_{\text{ein},x} &= \dot{m}_{\text{ein},x} \cdot v_{\text{ein},x} = (\rho \cdot |v_{\text{ein},x}| \cdot A_{\text{ein},x}) \cdot v_{\text{ein},x} \\ i_{\text{aus},x} &= \dot{m}_{\text{aus},x} \cdot v_{\text{aus},x} = (\rho \cdot |v_{\text{aus},x}| \cdot A_{\text{aus},x}) \cdot v_{\text{aus},x} \end{aligned} \quad (8-6)$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass die Geschwindigkeitskomponenten das korrekte Vorzeichen, bezogen auf das verwendete Koordinatensystem, aufweisen.

Des Weiteren ist:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \text{Druckkraft}[F_p] + \underbrace{\text{Gewichtskraft}[F_G]}_{\substack{\text{meist} \\ \text{vernachlässigt}}} + \text{Stützkraft}[F_s] \quad (8-7)$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \Sigma \vec{F}_p + F_s. \quad (8-8)$$

Somit ist

$$\vec{i}_{\text{aus}} - \vec{i}_{\text{ein}} = \Sigma \vec{F}_p + \vec{F}_s. \quad (8-9)$$

Eine Stützkraft ist eine Kraft, die auf das Fluid einwirkt. In der Strömungstechnik hat sich bei der Verwendung des Impulssatzes das so genannte Stützkraftkonzept fest etabliert. Das ist nichts anderes als eine Idee, die Berechnungen mit dem Impulssatz etwas übersichtlicher zu machen.

8.3. NEWTON–Kräftegleichgewicht zur Berechnung der Haltekräfte (Auflagekräfte)

Mit dem Stützkraftkonzept kann man die Haltekräfte (Auflagekräfte), die notwendig sind, um ein Rohr (Krümmer) zu verankern, nicht direkt berechnen, da diese Haltekräfte im Kontrollvolumen, also in der Impulsbilanz nicht auftauchen.

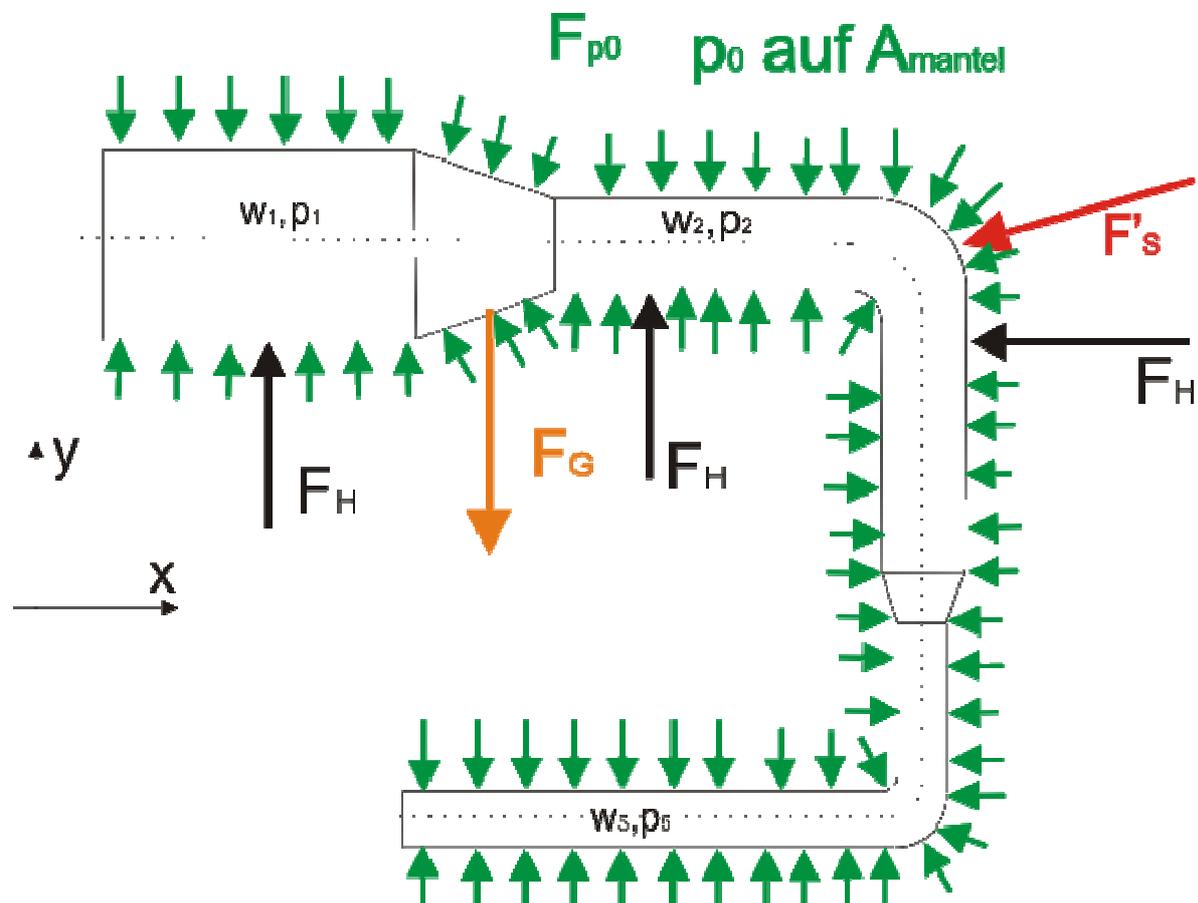


Abbildung 8-3: äußere Kräfte im Kontrollraum

Um die Haltekraft/Auflagekraft zu berechnen, muss man das Kräftegleichgewicht von allen Schnittkräften (wie in der Statik), die auf ein Rohr (Krümmer) wirken, aufstellen:

$$\vec{F}'_S + \vec{F}_H + \vec{F}_{p0} + \vec{F}_G = 0. \quad (8-10)$$

Dabei sind in der Regel vier verschiedene Kräfte zu berücksichtigen:

$\mathbf{F}_S' = - \mathbf{F}_S$ ist die Kraft, die von der Flüssigkeit auf das Rohr (Krümmer) wirkt. F_S wurde mit Hilfe der Impulsbilanz im Kontrollvolumen berechnet.

\mathbf{F}_H ist die Haltekraft/Auflagekraft (Schrauben, Verankerung, etc.)

\mathbf{F}_{p0} ist die Kraft, die bedingt durch den Umgebungsdruck auf das Rohr (Krümmer) wirkt.

\mathbf{F}_G ist die Gewichtskraft des Rohres (Krümmers); sie wird meistens vernachlässigt

8.4. Handhabung und Berechnungssystematik

BEMERKUNG ZUM SCHWIERIGKEITSGRAD BEI DER BERECHNUNG DER ÜBUNGS-AUFGABEN:

E/OV und E/V: Kontinuitätsgleichung + Energiegleichung

Impuls: Kontinuitätsgleichung + Energiegleichung + Impulsgleichung

Im Allgemeinen sind es drei Fragen, die gestellt werden können:

- | | | | |
|----|--|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. | Stützkraft vom Rohr auf das Fluid | \mathbf{F}_S | Lösung über Impuls-Gl. |
| 2. | Kraft von der Flüssigkeit auf das Rohr | $\mathbf{F}_S' = - \mathbf{F}_S$ | Lösung über Impuls-Gl. |
| 3. | Haltekraft | \mathbf{F}_H | Lösung über Impuls-Gl.
und Newton |

8.5. Anwendungen des Impulssatzes

8.5.1 Strömungskräfte an Rohrteilen:

Rohrbogen, Rohrkrümmer, Reduzierstück, Rohr-T-Stück, plötzliche Rohrerweiterung, plötzliche Rohrverengung, Kniestück mit Querschnittsänderung

Im Rohrleitungsbau sind Rohrbögen in Gusskonstruktion mit Normflansch sehr häufig anzutreffen. Hierbei wird neben der Strömungsumlenkung oft auch eine Flächenvariation von A_1 nach A_2 durchgeführt.

8.5.2 Strahlkräfte:

Senkrechter Stoß gegen ebene feststehende Wand, schiefer Stoß gegen eine ebene feststehende Wand, Strahlstoß gegen symmetrisch gekrümmte Wand (PELTON-Turbine), Angeschnittener ebener Strahl, Kugel oder Walze schwebend im schrägen Luftstrahl

Im Übungsskript FLM I Kap. 1.2 behandeln wir die Freistrahlen, die in der Technik häufig zur Oberflächenbehandlung von Platten, z.B. Sandstrahlen, Trocknen Lackieren, eingesetzt werden. Bei diesem Strömungsvorgang tritt der unerwünschte Effekt der Rückströmung („Backflow“) ein, der den Bearbeitungsprozess empfindlich stören kann. Der aus einer Düse mit der mittleren Geschwindigkeit w austretende Strahl trifft auf eine Wand, von der er abgelenkt wird. Der statische Druck im Strahl ist nach Verlassen der Düse konstant und gleich dem der Umgebung. Überdruck ist somit nicht mehr vorhanden. Kraftwirkungen sind daher ausschließlich durch die vorhandenen Impulsströme bedingt. Mit dem Impulssatz kann deshalb die Kraft, die der Strahl auf die Wand ausübt, berechnet werden. Die Bernoulli-Gl. liefert bei der Reibungsfreiheit die Gleichheit der Geschwindigkeiten

8.5.3 Propellerschub:

Vereinfachte Propellertheorie, Propeller, Windturbine

Der Impulssatz ermöglicht die Schubwirkung von Propellern zu bestimmen, ohne auf deren Profil-, Flügelform und Flügelzahl einzugehen. Diese Betrachtungsweise wird auch als vereinfachte Propellertheorie- oder Strahltheorie bezeichnet, die auch als das RANKINE-Modell des Propellers bekannt ist. Dazu nehmen wir an, dass der Rotor aus einer sehr großen Anzahl dicht angeordneter Rotorblätter besteht. Dann kann man eine Rotorfläche A_S definieren, an welcher der Druck einen Sprung macht $p_2 \Rightarrow$

p_3 (siehe Abbildung 8-4). Weiter nehmen wir an, dass wir das Fluid als inkompressibel betrachten können, was bei hinreichend langsamen Strömungen erlaubt ist. Werden Reibung, Rückwirkung des Fahrzeuges und Strahldrehung (Schraubenbewegung) vernachlässigt, ergibt der Impulssatz mit Hilfe von Abbildung 8-4 die Propellerschubkraft F_S .

Für die Analyse verwenden wir ein Koordinatensystem, das fest mit der Rotorachse verbunden ist. Außerdem wählen wir ein Kontrollvolumen mit der Oberfläche O_1 um den Rotor herum, das hinreichend weit vom Rotor entfernt ist, so dass der Druck $p = p_{\text{Umgebung}}$ konstant ist und damit die resultierende Druckkraft der Umgebung auf das Kontrollvolumen $F_P = 0$ gesetzt werden kann.

8.5.3.1 Propeller

Der Propeller gehört.....

Die Schuberzeugenden Propeller dienen zum Antrieb von Flugzeugen und Schiffen. Der Propeller saugt bei Drehung ständig Medium an, beschleunigt dieses und gibt es nach rückwärts mit höherer Geschwindigkeit ab.

Bei der Anwendung des Impulssatzes auf einen angetriebenen Propeller ist es zu beachten, dass beim Durchgang der Strömung durch den Propeller eine Strahlkontraktion stattfindet. Der Propeller erhöht die Geschwindigkeit des von ihm erfassten Fluidstrom um etwa 30%. Daher muss sich wegen der Kontinuitätsgleichung der erfasste Strahl kontrahieren. Die gesamte Druckabnahme infolge Beschleunigung von w_1 auf w_4 innerhalb des Strahles wird kompensiert durch Energiezufuhr im Propeller.

Vor dem Propeller ergibt sich ein Unterdruck, hinter dem Propeller ein Überdruck. In der dünnen Scheibe des Propellers „Propeller Disk“ nimmt die Geschwindigkeit w_S den arithmetischen Mittelwert aus An- und Abströmgeschwindigkeit an.

Die vom Propeller/Rotor ausgeübte Kraft auf das Fluid (bzw. mit anderem Vorzeichen die auf ihn wirkende Kraft) ist positiv und zeigt in Strömungsrichtung.

Es werden folgende Annahmen gemacht:

Stationäre Strömung

Achsparallele, gleichmäßige An- und Abströmung

Inkompressibles Fluid

Reibungsfreiheit

Vernachlässigbare Einfluss des Schiffskörpers auf die Propellerdurchströmung

Eintrittsdruck $p_1 =$ Austrittsdruck p_2 .

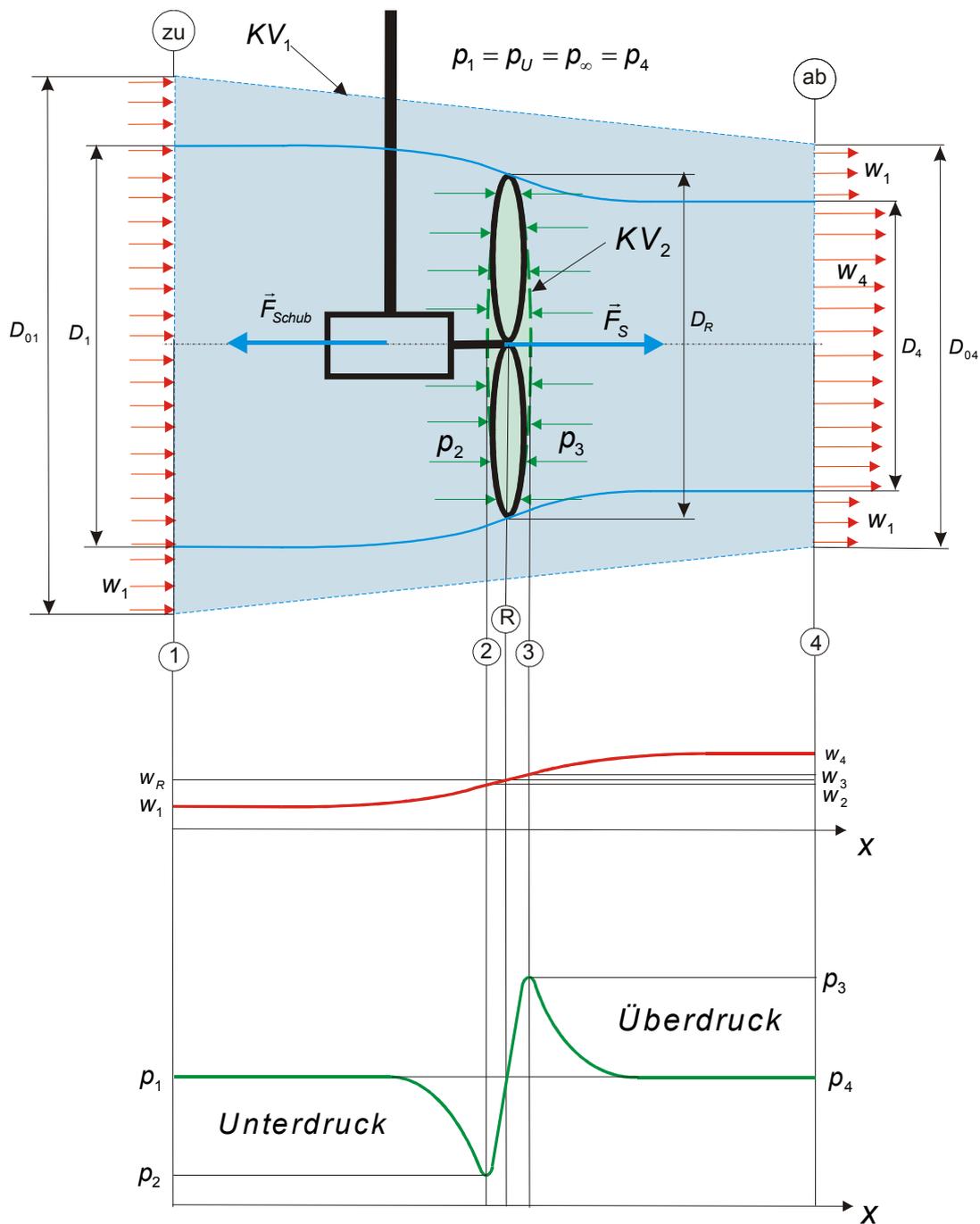


Abbildung 8-4: Anwendung des Impulssatzes auf einen Propeller

- a) Strombild
- b) Geschwindigkeitsverteilung
- c) Druckverlauf

8.5.3.2 Windturbine

Im Gegensatz zum Vortriebspropeller findet beim Durchgang der Strömung durch die Windturbine eine Strahldilatation (Strahlaufweitung).

Infolge der Energieabfuhr in der dünnen Scheibe des Propellers „Propeller Disk“ kommt es zur Geschwindigkeitsabnahme von w_1 auf w_2 . Vor dem Windturbinenlaufrad ergibt sich ein Überdruck, hinter dem Windturbinenlaufrad ein Unterdruck. Die vom Propeller/Rotor ausgeübte Kraft auf das Fluid (bzw. mit anderem Vorzeichen die auf ihn wirkende Kraft) ist negativ und zeigt entgegen der Strömungsrichtung. Es werden folgende Annahmen gemacht:

Stationäre Strömung

Achsparelle, gleichmäßige An- und Abströmung

Inkompressibles Fluid

Reibungsfreiheit

Vernachlässigbare Einfluss des Turms auf die Windturbinenströmung

Eintrittsdruck p_1 = Austrittsdruck p_2 .

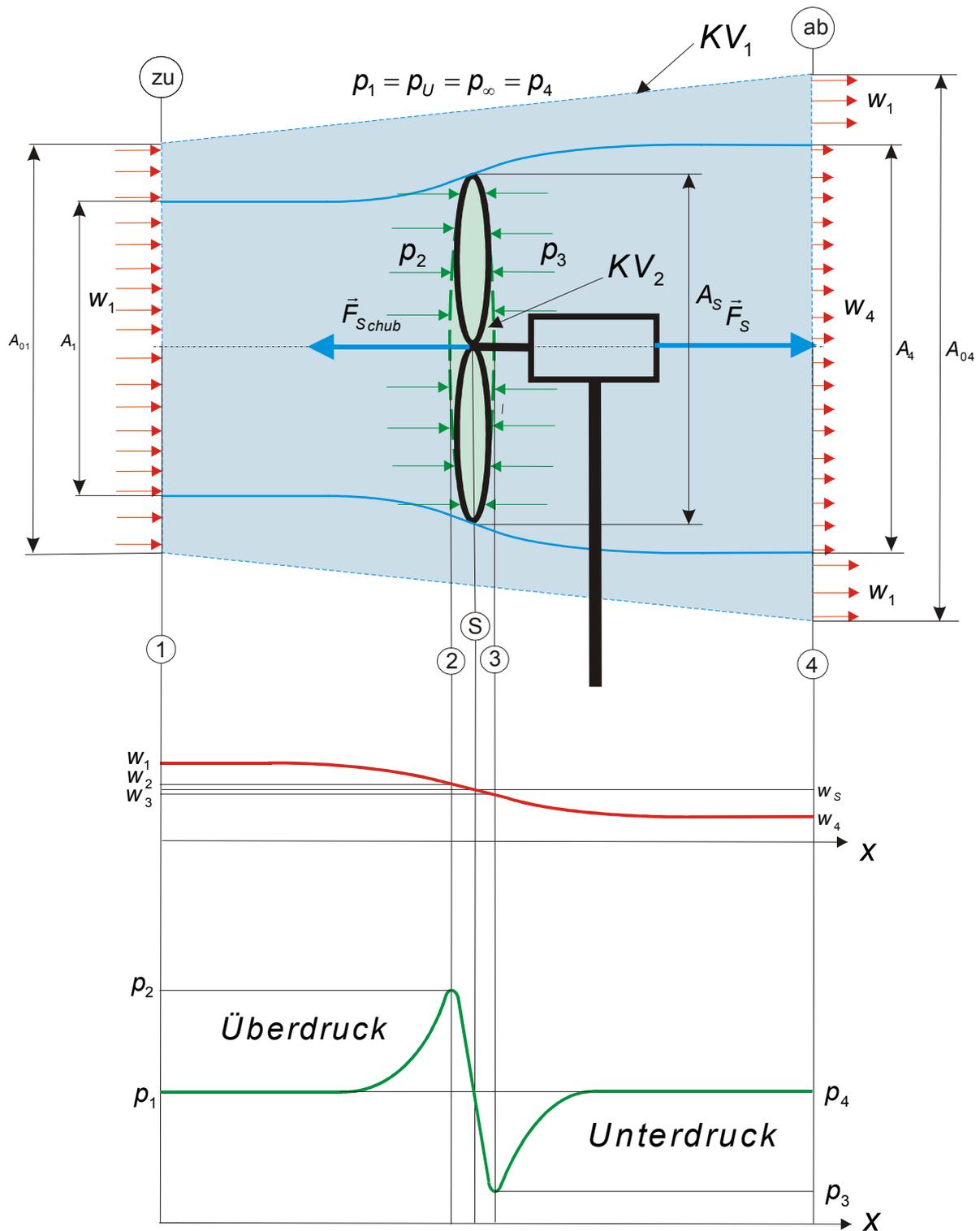


Abbildung 8-5: Anwendung des Impulssatzes auf eine Windturbine

a) Strombild

b) Geschwindigkeitsverteilung

c) Druckverlauf

Der Kontrollraum ist vorne und hinten je soweit vom Propeller entfernt, dass dieser den Fluidstrom direkt noch nicht bzw. nicht mehr beeinflusst.

In der folgenden Rechnung wird eine Windturbinen strömungstechnisch nach der vereinfachten Propellertheorie ausgelegt.

Berechnung der Schubkraft F_S (Haltekraft F_H)

Berechnung der Strahlgeschwindigkeit in Propellermitt w_S

Berechnung der allgemeinen theoretischen Windturbinenleistung P_{th} (die der Strömung im Kontrollvolumen entzogen wird)

Maximale Windturbinenleistung P_{max}

Maximaler Wirkungsgrad η_{max}

8.5.4 Rückstoßkräfte:

Behälterausfluss aus seitlicher Öffnung, Strahltriebwerk(Strahldüse)

8.5.4.1 Behälterausfluss

8.5.4.2 Strahltriebwerk

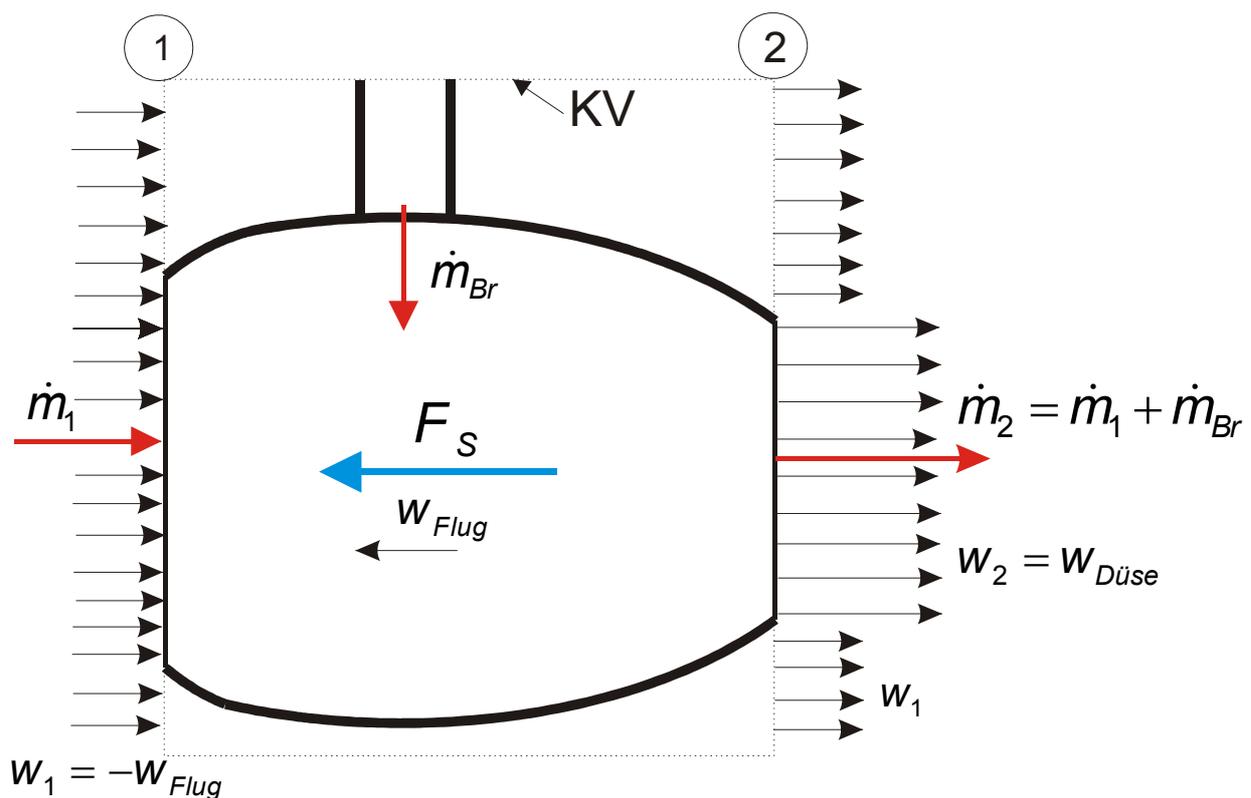


Abbildung 8-6: Strahltriebwerk

8.5.4.3 Rakentriebwerk

8.5.5 Mischvorgänge:

9. Impulsmomentensatz (Drehimpuls, Drallsatz)

Bisher wurde davon ausgegangen, daß die Fluidteilchen in einer Strömung Träger von Masse, Energie und Impuls sind. Mit dem Impuls besitzen sie auch ein Impulsmoment (Drehimpuls oder Drall) in Bezug auf ein vorgegebenes Zentrum (z.B. Ursprung des Koordinatensystems). Aus der Mechanik der Massenpunkte ist bekannt:

Impulssatz (aus Analogiegründen angegeben):

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F} \quad (9-1)$$

Drallsatz:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{M} \quad (9-2)$$

Die zeitliche Änderung des Dralles \vec{L} (Impulses \vec{I}) eines Systems von Massenpunkten ist gleich der Vektorsumme aller äußeren Momente \vec{M}_i (Kräfte \vec{F}_i), die auf das System einwirken.

Für einen Körper gilt:

$$\vec{I} = m \cdot \vec{w} \quad (9-3)$$

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{w}) \quad (9-4)$$

Dabei ist \vec{w} die Geschwindigkeit eines Massepunktes.

Die Erweiterung zu einem System von Fluidteilchen führt zu den Beziehungen

$$\vec{I} = \int_V \rho \vec{w} dV \quad (9-5)$$

$$\vec{L} = \int_V \rho \vec{r} \times \vec{w} dV \quad (9-6)$$

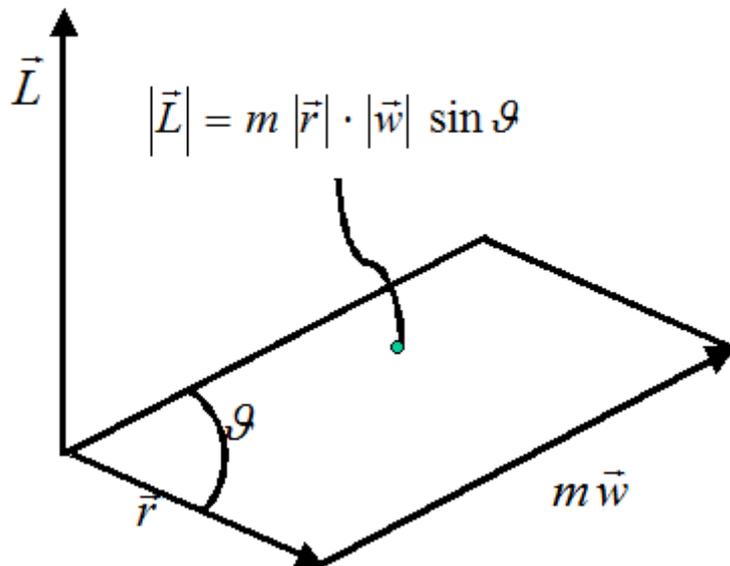


Abbildung 9-1: Drall eines Massepunkts

\vec{r} - Ortsvektor eines Fluidteilchens vom Ursprung

Der Drallsatz ist eine Vektorgleichung und steht für drei Komponentengleichungen.

Analog zu Kap. 8 gilt auch hier:

Man berechnet die Dralländerung des betrachteten Systems von Fluidteilchen zur Zeit t , in dem man die Oberfläche, die zur Zeit t dieses System begrenzt, als raumfeste Kontrollfläche betrachtet und die Differenz zwischen aus- und einströmendem Impulsmomentenstrom ermittelt.

Analog zu den Kräften im Impulssatz gibt es Momente der Volumenkraft, der Druckkraft und der Stützkraft.

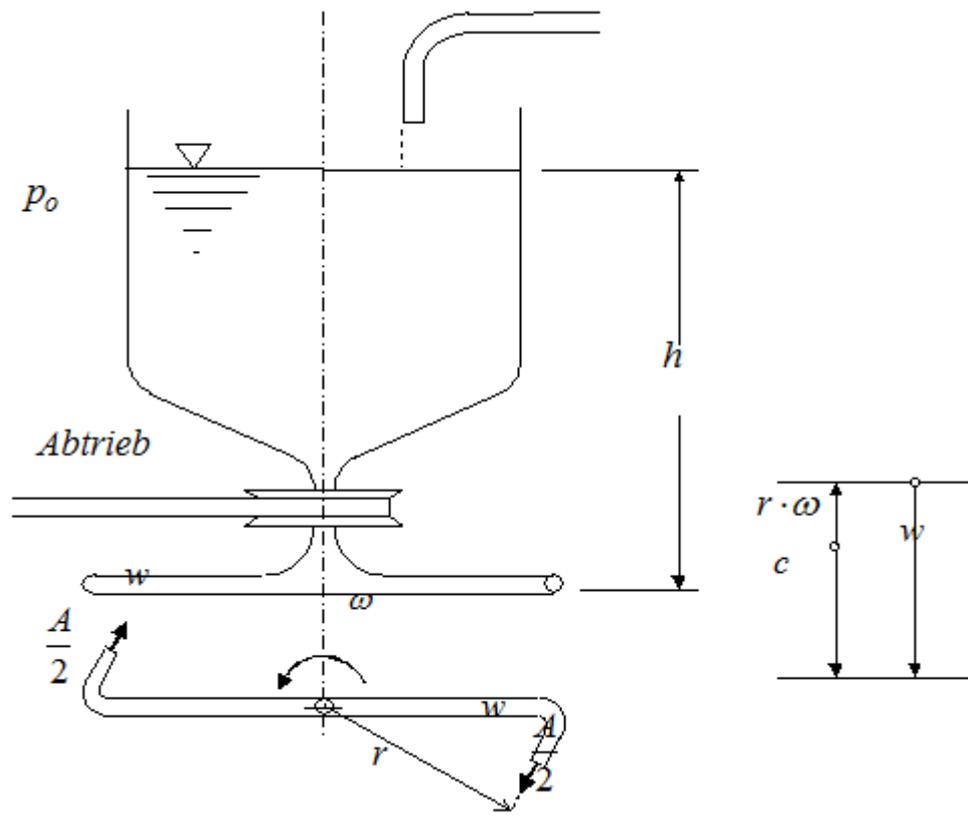


Abbildung 9-2: SEGNER'Sches Wasserrad (1750)

ω Winkelgeschwindigkeit

w Relative Geschwindigkeit (bezogen auf das rotierende System: Beobachter sitzt auf dem Rad)

$r \cdot \omega$ Systemgeschwindigkeit, Umfangsgeschwindigkeit

$c = w - r \cdot \omega$ Absolutgeschwindigkeit, da der Beobachter ruht

\dot{m} Massenstrom

Der einfließende Impulsmomentenstrom ergibt sich zu null. Demgegenüber nimmt der ausfließende Impulsmomentenstrom den Wert $\dot{m} \cdot c \cdot r$ an. Für einen mitrotierenden Beobachter ist die Strömung im segnerschen Wasserrad stationär. Dafür lässt sich die BERNOULLI-Gl. anschreiben (der Behälter sei so groß, daß die Sinkgeschwindigkeit des Flüssigkeitsspiegels vernachlässigt werden kann):

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{\rho}{2} w^2 - \frac{\rho}{2} (r \omega)^2 \quad (9-7)$$

$$w = \sqrt{2 g h + (r \omega)^2} = \sqrt{2 g h (1 + \xi^2)}. \quad (9-8)$$

Dabei ist

$$\xi = \frac{r \omega}{\sqrt{2gh}} \quad (9-9)$$

dimensionslose Winkelgeschwindigkeit.

Die absolute Ausströmgeschwindigkeit (das ist die Geschwindigkeit, mit der sich die ausströmende Flüssigkeit relativ zu einem ruhenden Beobachter bewegt) ist dann

$$c = w - r \omega = \sqrt{2gh} \left(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right) \quad (9-10)$$

Der Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit ω und Drehmoment M folgt aus dem Drallsatz. Da die zur Drehachse parallel gerichtete Schwerkraft kein Moment bezüglich dieser Achse hat, bleibt als einziges Drehmoment das Moment der von den festen Wänden des Strömungskanals im Wasserrad auf die Flüssigkeit ausgeübten Druckkräfte. Zu diesem Moment trägt nur das rotierende Ausflussrohr bei. Nach dem Reaktionsprinzip ist dies betragsmäßig gleich dem Moment, das an der Welle abgenommen werden kann.

Die Anwendung des Drallsatzes ergibt:

$$\frac{dL}{dt} = M = \dot{m} c r = \rho w A c r \quad (9-11)$$

$$\frac{M}{M_0} = \sqrt{1 + \xi^2} \left[\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right] \quad (9-12)$$

mit

$$M_0 = 2\rho ghAr. \quad (9-13)$$

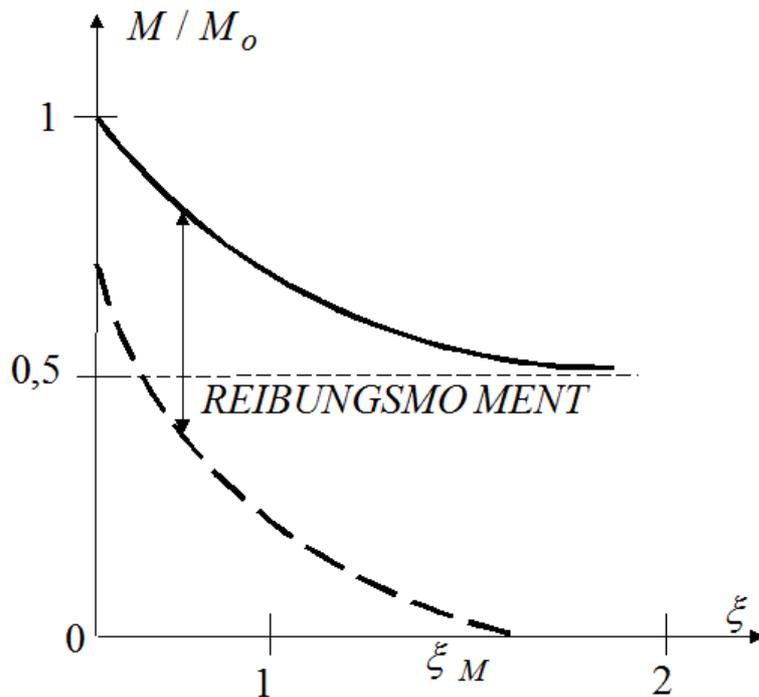


Abbildung 9-3: Drehmoment M über dimensionslose Winkelgeschwindigkeit ξ

Die "Apparatekonstante" M_0 hat die Bedeutung des Anfahrmomentes (Drehmoment für $\omega = 0$).

Für $\xi \rightarrow \infty$, gleichbedeutend mit $\omega \rightarrow \infty$, geht $M \rightarrow M_0/2$, d.h. gegen einen endlichen Grenzwert. Demgemäß würde das Rad seine Drehzahl unbegrenzt vergrößern, wenn man nicht das seiner Drehzahl entsprechende Moment an der Welle abnähme. Tatsächlich wird jedoch durch verschiedene Dissipationseffekte (Lagerreibung, Luftreibung, innere Reibung der Flüssigkeit) immer ein "Reibungsmoment" erzeugt. Dieses ist von M_ξ abzuführen, um das effektiv nutzbare Moment zu erhalten.

Die (mechanische) Laufradleistung P der segnerschen Turbine folgt aus

$$P_M = M \cdot \omega. \quad (9-14)$$

zu

$$\frac{P}{P_0} = \xi \sqrt{1 + \xi^2} \left[\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right]. \quad (9-15)$$

Die theoretisch nutzbare Leistung P entspricht der potentiellen Energie der pro Zeiteinheit ausfließenden Masse auf dem Niveau des Spiegels im Behälter:

$$\tilde{P} = \dot{m}gh = \rho w Agh \rightarrow \frac{\tilde{P}}{P_0} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \xi^2}. \quad (9-16)$$

Als theoretischer Wirkungsgrad (ohne "Reibungsmoment") ergibt sich

$$\eta = \frac{P}{\tilde{P}} = 2\xi \left[\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right]. \quad (9-17)$$

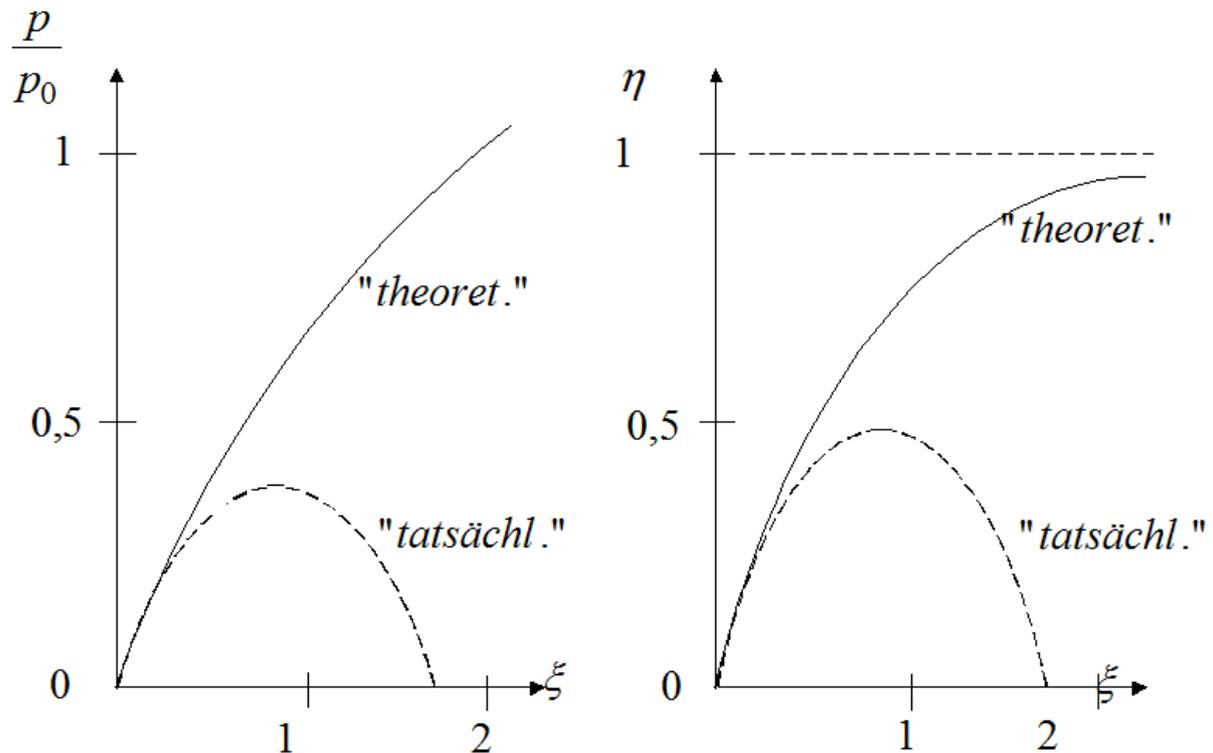


Abbildung 9-4: Druckverhältnis p/p_0 , Wirkungsgrad η über dimensionslose Winkelgeschwindigkeit ξ

Es ist $\eta < 1$, da von der verfügbaren potentiellen Energie (pro Zeit) $\dot{m} \cdot g \cdot h$ nur ein Teil in Nutzleistung umgesetzt wird; der Rest trägt als kinetische Energie (pro Zeit) $\dot{m} \cdot c^2 / 2$ nicht zur Leistung bei.

Die Nutzleistung kann daher auch geschrieben werden als:

$$P = \dot{m}gh - \frac{1}{2} \dot{m}c^2 \Rightarrow \eta = \frac{P}{\tilde{P}} = 1 - \frac{c^2}{2gh}. \quad (9-18)$$

Beispiel: Laufrad einer Kreiselpumpe mit Radialgitter

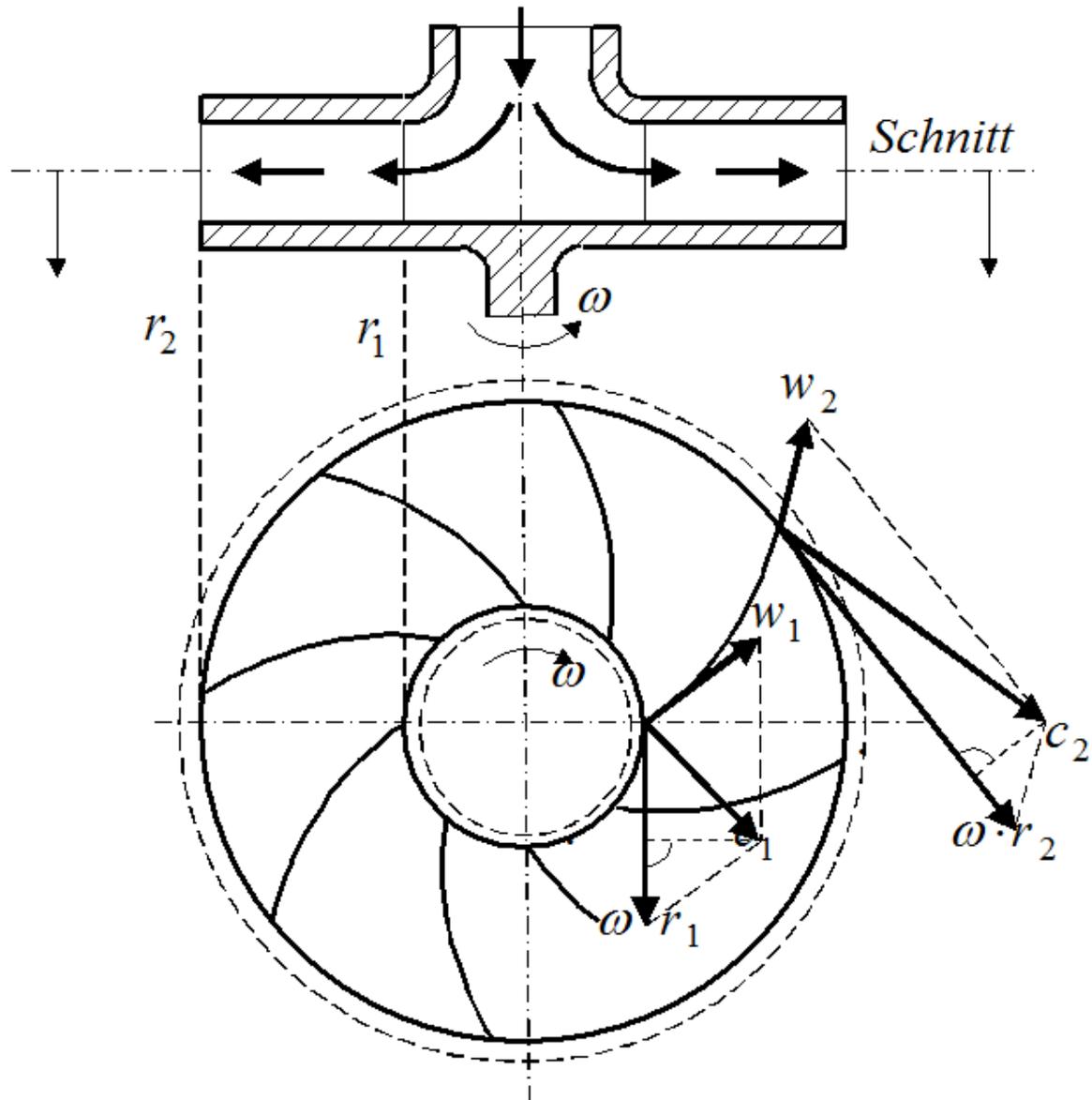


Abbildung 9-5: Laufrad und Geschwindigkeitsplan mit Radialgitter

Die Größen c_{1u} , c_{2u} stellen die Umfangskomponenten der Absolutgeschwindigkeit $c = w + r \cdot \omega$ dar. Mit w wird hier die Relativgeschwindigkeit bezeichnet. Die Größe $r \cdot \omega = u$ entspricht der Umfangsgeschwindigkeit u . Der Drehimpulssatz führt zur Aussage:

$$\frac{dL}{dt} = M = \dot{m} r_2 c_{2u} - \dot{m} r_1 c_{1u} \quad (9-19)$$

bzw.

$$M = \dot{m} (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) \quad (9-20)$$

Man unterscheidet

Pumpe: $M > 0$ ("Kraftmaschine")

Turbine: $M < 0$ ("Arbeitsmaschine")

Die EULERSche Turbinengleichung sagt aus, daß das vom Laufrad an das Fluid (oder umgekehrt) übertragene Moment gleich ist dem Produkt aus Massenstrom (Durchsatz) und der Differenz von $r \cdot c_u$ am Austritt minus $r \cdot c_u$ am Eintritt.

Als übertragene Leistung ergibt sich:

$$P = M \cdot \omega = m \omega \cdot (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) \quad (9-21)$$

10. Grundlegende Strömungserscheinungen

10.1. Vorbetrachtungen (Turbulenz)

Die bisher aufgestellten Erhaltungssätze

- Masse,
- Energie,
- Impuls

liefern nur globale Aussagen über das gesamte Fluid im gewählten Kontrollraum.

Der restliche Teil der Vorlesung ist den lokalen Aussagen über Strömungen gewidmet. Es werden die Einzelheiten der Strömung in der unmittelbaren Umgebung eines beliebig gewählten Punktes betrachtet.

Turbulenz

Es gibt zwei verschiedene Strömungsformen, laminare und turbulente Strömungen. Kennzeichen der turbulenten Strömungsform ist eine unregelmäßige, zufallsbedingte Schwankungsbewegung, die einer geordneten Grundströmung überlagert ist.

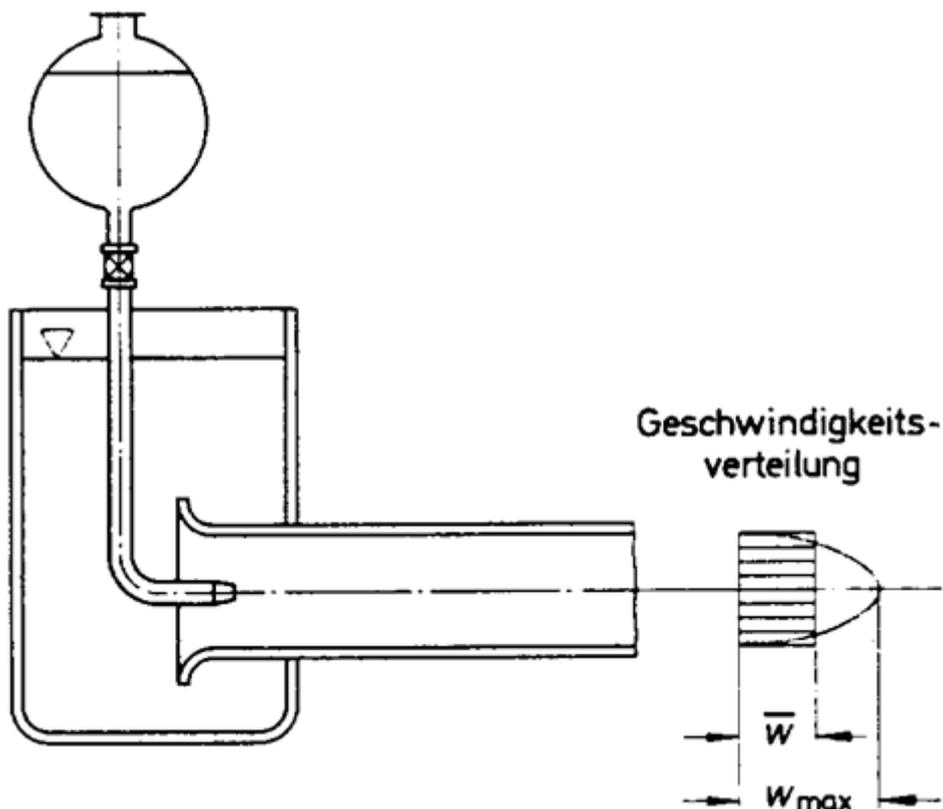


Abbildung 10-1: Versuch von REYNOLDS (laminare Strömung)

Die Teilchen bewegen sich auf zur Rohrachse parallelen Stromlinien ohne sich untereinander zu vermischen (Grundströmung). Der in der Rohrachse eingeleitete Farbstrahl mischt sich nicht mit der Grundströmung.

An einer Berührungsstelle zwischen dem Festkörper und dem Fluid herrscht immer eine Haftbedingung, d.h. die Geschwindigkeit des Fluids ist an dieser Stelle Null.

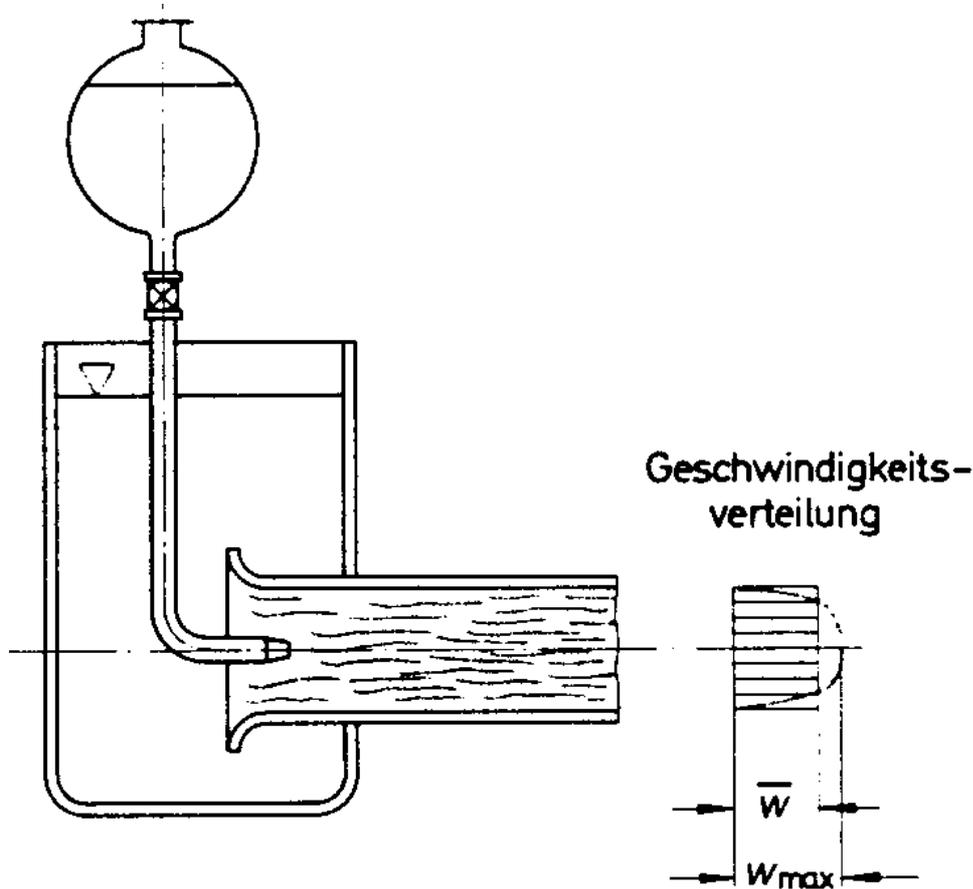


Abbildung 10-2: Versuch von REYNOLDS (turbulente Strömung)

Neben der in Rohrachse gerichteten Transportbewegung treten noch Querbewegungen auf, die zu einer ständigen Vermischung der Strömungsteilchen führen. Der Farbstrahl zerreißt und vermischt sich mit der Grundströmung.

Bisher wurde angenommen, daß die Geschwindigkeit in einer Rohrströmung konstant ist.

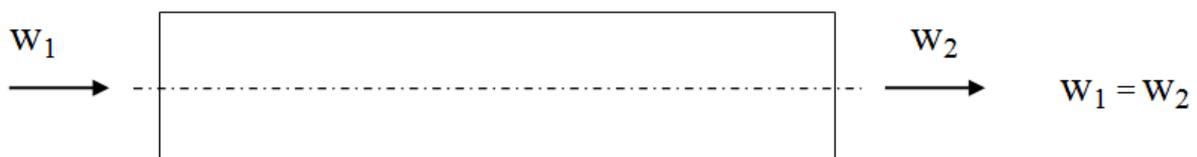


Abbildung 10-3: Rohrströmung

- eindimensionales "Feld"

- Globale Aussage über das gesamte Feld

Wenn aber die Haftbedingung gilt, muss die Geschwindigkeit an der Wand verschwinden. Daher herrscht in einer Rohrströmung keine konstante Geschwindigkeit, wie für Strömrohren bisher angenommen, sondern eine Geschwindigkeitsverteilung.

Die Geschwindigkeitsverteilungen für laminare und turbulente Strömungen sind sehr unterschiedlich.

Die Geschwindigkeitsprofile turbulenter Strömungen sind völliger und wesentlich gleichmäßiger als die vergleichbarer laminarer Strömungen. Für viele praktische Rechnungen, insbesondere bei der Anwendung der Stromfadentheorie, wird das Geschwindigkeitsprofil durch eine konstante Geschwindigkeitsverteilung mit gleichem Volumenstrom ersetzt.

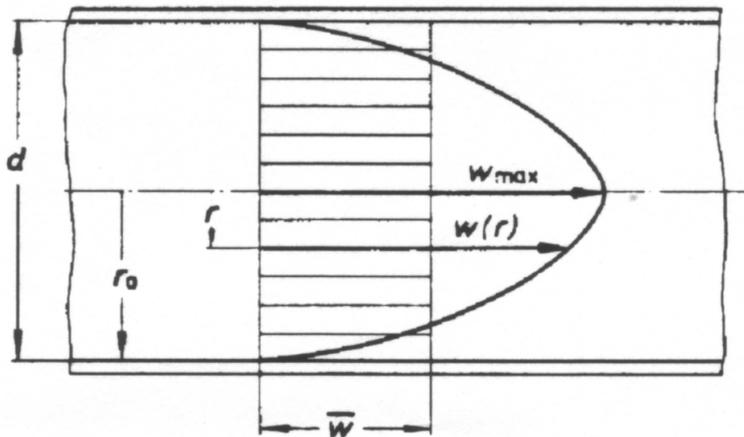


Abbildung 10-4: Geschwindigkeitsprofil für laminare Strömung

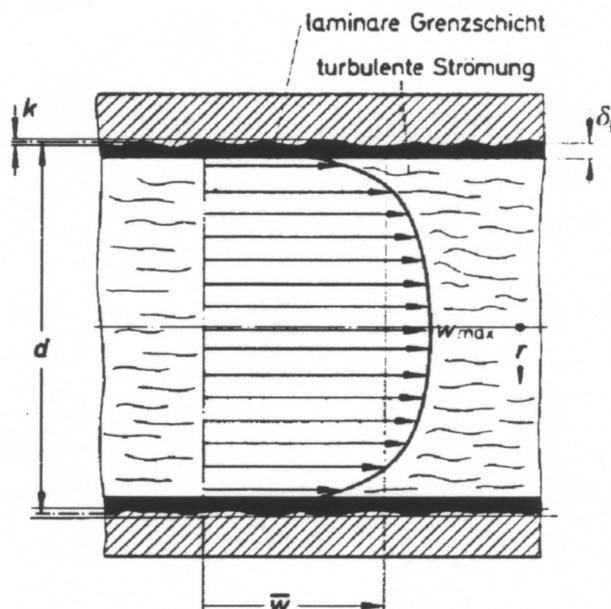


Abbildung 10-5: Geschwindigkeitsprofil für turbulente Strömung

Bei turbulenter Strömung ist \bar{w} größer.

Die Entstehung der Turbulenz beruht auf einer Instabilität der Strömung. An jeder Stelle einer Strömung herrscht Gleichgewicht zwischen Trägheitskraft, Druckkraft, Reibungskraft und Schwerkraft. Schwache Störungen der Strömung werden im laminaren Fall von der Reibungskraft gedämpft. Bei Erhöhung der Geschwindigkeit nimmt die Reibungskraft nicht so stark zu wie die übrigen Kräfte, so dass sie schließlich im Verhältnis zu klein ist, um Störungen zu dämpfen. Die Störung wird angefacht und führt schließlich zur turbulenten Strömungsform.

Man bezeichnet die laminare Strömung als Schichten - Strömung. Schichten von unterschiedlichen Geschwindigkeiten gleiten übereinander.

10.2. REYNOLDS-Zahl

Der Wechsel von der laminaren in die turbulente Strömungsform hängt von einer mit der mittleren Geschwindigkeit u , dem Rohrdurchmesser d (bzw. einer anderen charakteristischen Länge L , die von der Art der Strömung abhängt), der Dichte ρ und der dynamischen Viskosität η gebildeten dimensionslosen Kennzahl, der REYNOLDS-Zahl Re ab:

$$R_e = \frac{\rho \cdot u \cdot d}{\eta} = \frac{u \cdot d \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{N} \cdot \text{s}}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{N} \cdot \text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}} \quad (10-1)$$

Ähnlichkeitsmechanik:

Strömungen, deren REYNOLDS-Zahlen trotz unterschiedlicher geometrischer Größen gleich sind, heißen mechanisch ähnlich.

An folgenden Modellen wird die Ähnlichkeitsmechanik angewendet:

- Schiffe,
- Automobile,
- Flugzeuge,
- Weltraumkörper.

Strömungen können an einem geometrisch ähnlich verkleinerten bzw. vergrößerten Modell untersucht werden, wenn die Strömungen am Modell und am Original mechanisch ähnlich sind, d.h. gleiche Werte der charakteristischen Kennzahlen aufweisen. In allen Strömungen, in denen die vier Größen Dichte, Geschwindigkeit, Länge und Viskosität eine Rolle spielen, ist die REYNOLDS-Zahl eine Kennzahl.

Bei der Rohrströmung beträgt die kritische REYNOLDS-Zahl $Re_{kr} = 2320$.

Für $Re < Re_{kr}$ ist die Strömung laminar,
für $Re > Re_{kr}$ ist sie turbulent.

Beispiel 1:

Gegeben ist ein Rohr mit $d = 20 \text{ mm}$ Durchmesser.

Bei welcher Geschwindigkeit u_{kr} setzt turbulente Strömung ein? Untersucht werden sollen eine Wasser- ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) und eine Luftströmung ($\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$).

$$u_{kr} = Re_{kr} \cdot \frac{\nu}{d} \quad (10-2)$$

$$u_{kr} = 2320 \cdot \frac{\nu}{d}$$

Wasser:

$$u_{kr,W} = 2320 \cdot \frac{10^{-6} \text{ m}^2}{20 \cdot 10^{-3} \text{ s} \cdot \text{m}} = 0,12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Luft:

$$u_{kr,W} = 2320 \cdot \frac{15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{20 \cdot 10^{-3} \text{ s} \cdot \text{m}} = 1,72 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Beispiel 2:

Wie groß ist die REYNOLDS-Zahl im Blutkreislauf des Menschen (Blut: $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$) in der Kapillare ($d = 8 \text{ }\mu\text{m}$, $u = 5 \text{ mm/s}$) und in der Aorta ($d = 20 \text{ mm}$, $w = 0,3 \text{ m/s}$)?

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot u}{\eta} \quad (10-1)$$

Kapillare:

$$Re = \frac{\left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot \left(8 \cdot 10^{-6} \text{ m}\right)}{4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}} = 10^{-2}$$

Aorta:

$$\text{Re} = \frac{\left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot 0,02\text{m}}{4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}} = 1,5 \cdot 10^3$$

Die Blutströmung in der Aorta liegt noch im unterkritischen Bereich.

10.3. Die Grenzschicht (Reibungsschicht)

In diesem Kapitel werden die Konsequenzen der Haftung (Haftbedingung) für die Umströmung von Körpern besprochen.

Der einfachste und überschaubarste Fall der Grenzschicht liegt bei der längsangeströmten Platte vor.

Da die Strömungsgeschwindigkeit an der Wand verschwinden muss (Haftung), sind starke Änderungen der Geschwindigkeit, d.h. große Geschwindigkeitsgradienten, in Wandnähe zu erwarten.

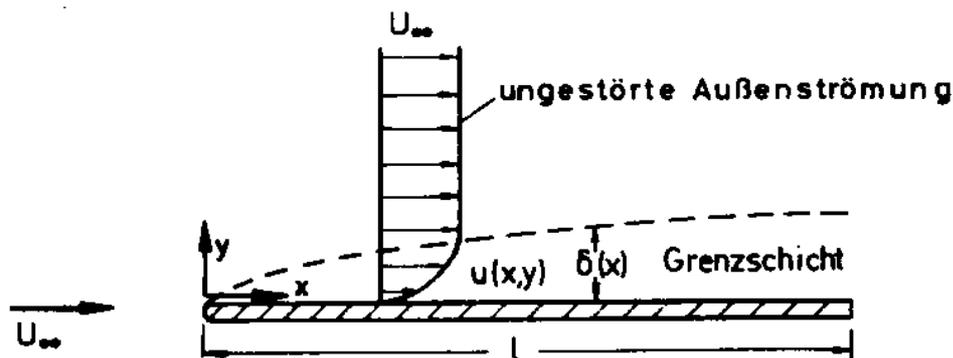


Abbildung 10-6: Geschwindigkeitsprofil an der längsangeströmten ebenen Platte

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot u \cdot l}{\eta} \quad (10-1)$$

Bei (verschwindend) kleiner Viskosität $\nu \rightarrow 0$ (in ungestörter Außenströmung) ergibt sich eine (unendlich) große REYNOLDS-Zahl $\text{Re} \rightarrow \infty$ und die Strömung des Geschwindigkeitsprofils beschränkt sich nur auf eine dünne Schicht unmittelbar an der Wand. Man spricht deshalb von Reibungsschicht oder Grenzschicht.

Vergleicht man Grenzschichtströmung und Strömung im Rohr, dann findet man die Analogie, wenn man die Strömung von der Rohrachse her betrachtet.

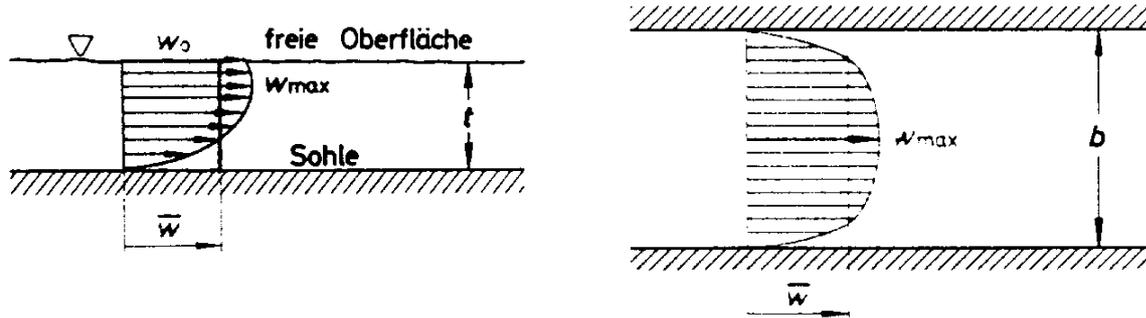


Abbildung 10-7: Vergleich der Grenzschichtströmung und der Strömung im Rohr

Die Grenzschicht entwickelt sich entlang der Kontur des umströmten Körpers, und zwar nimmt in allgemeinen stromabwärts die Grenzschichtdicke zu.

Die Strömung in der Grenzschicht kann ebenso wie die Rohrströmung laminar oder turbulent sein.

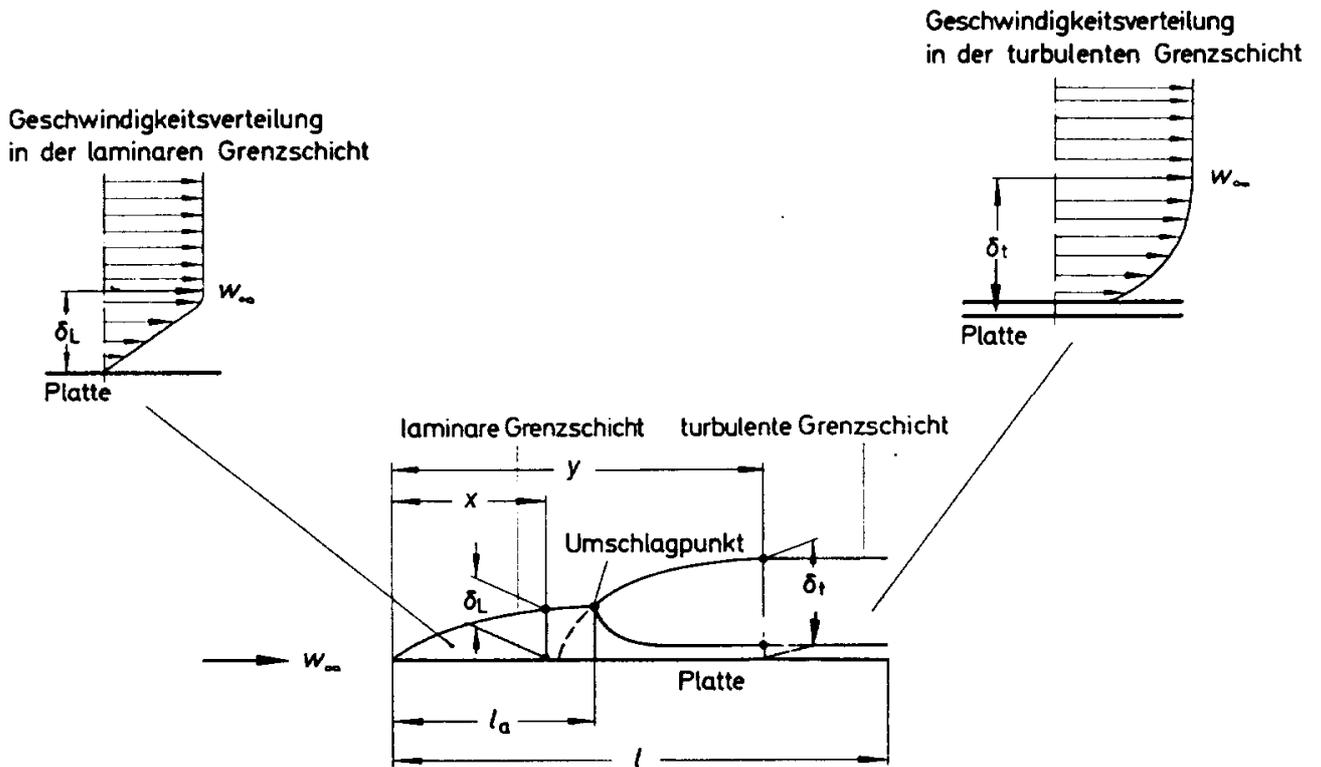


Abbildung 10-8: Vergleich laminare und turbulente Grenzschicht an der längsangeströmten Platte

Die turbulente Grenzschicht ist dicker als die laminare, reicht also weiter in die Strömung hinaus. Das Geschwindigkeitsprofil ist an der Wand steiler. Die Grenzschichtdicke nimmt nach hinten stetig zu.

Definitionen der Grenzschichtdicke:

Zylinder, Durchmesser d , Strömung laminar

1. im Staupunkt:

$$\delta_1 = 1,2 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_d}} \quad (10-3)$$

2. an der dicksten Stelle:

$$\delta_2 = 1,8 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_d}} \quad (10-4)$$

Kugel, Durchmesser d , Strömung laminar

1. im Staupunkt:

$$\delta_1 = 1,06 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_d}} \quad (10-5)$$

2. an der dicksten Stelle:

$$\delta_2 = 1,7 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_d}} \quad (10-6)$$

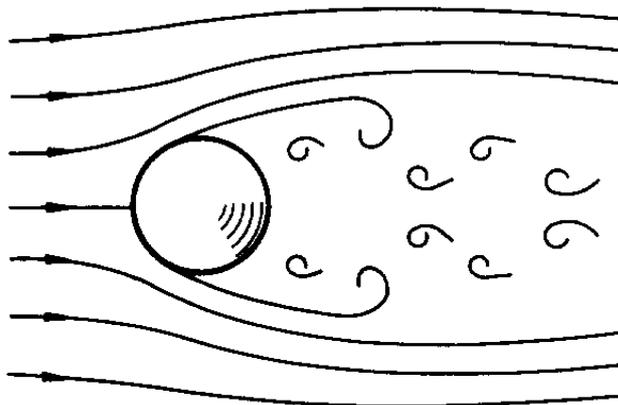


Abbildung 10-9: Umströmte Kugel

Tragfläche, d (größte Profildicke), Strömung laminar

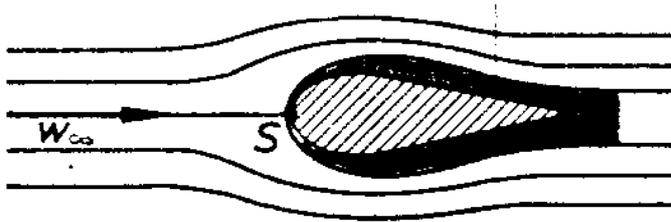


Abbildung 10-10: Umströmte Tragfläche

$$\delta_1 = 1,2 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{Re_d}} \quad (10-7)$$

$$Re_d = \frac{w \cdot d}{\nu} \quad (10-8)$$

Längsangeströmte Platte, Länge L

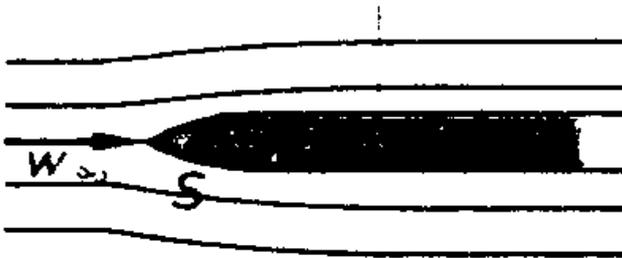


Abbildung 10-11: Längsangeströmte Platte

$$Re = \frac{w \cdot L}{\nu} \quad (10-9)$$

$$\delta = 0,37 \cdot Re^{-0,2} \cdot L \quad (\text{turbulente Grenzschicht am Ende der Platte}) \quad (10-10)$$

$$\delta = 5 \cdot \sqrt{\frac{\nu \cdot L}{w}} \quad (\text{laminar}) \quad (10-11)$$

Beispiel

Der Finger (angenähert durch einen Zylinder mit $d = 2 \text{ cm}$ beschrieben) wird mit einer Geschwindigkeit von $w = 0,25 \text{ m/s}$ durch eine Kerzenflamme bewegt (Querströmung). Die kinematische Viskosität ν beträgt $15,11 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Welche Grenzschichtdicken δ stellen sich in der Luft bei $20 \text{ }^\circ\text{C}$ im Staupunkt (δ_1) und an der dicksten Stelle (δ_2) ein?

Lösung a):

$$\delta_1 = 1,2 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_d}}$$

$$\text{Re}_d = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,02 \text{m}}{15,11 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 331$$

$$\delta_1 = 1,2 \cdot 0,02 \text{m} \cdot \sqrt{\frac{1}{331}} = 1,32 \text{mm}$$

Lösung b):

$$\delta_2 = 1,8 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_d}} = 1,8 \cdot 0,02 \text{m} \cdot \sqrt{\frac{1}{331}} = 2,0 \text{mm}$$

Diese Schichtdicken bieten eine gewisse Zeit Schutz vor den heißen Brenngasen.

Entwicklung der Grenzschicht an einem Tragflächenprofil. $\text{Re} = 10^4$ (d.h. ν ist sehr klein)

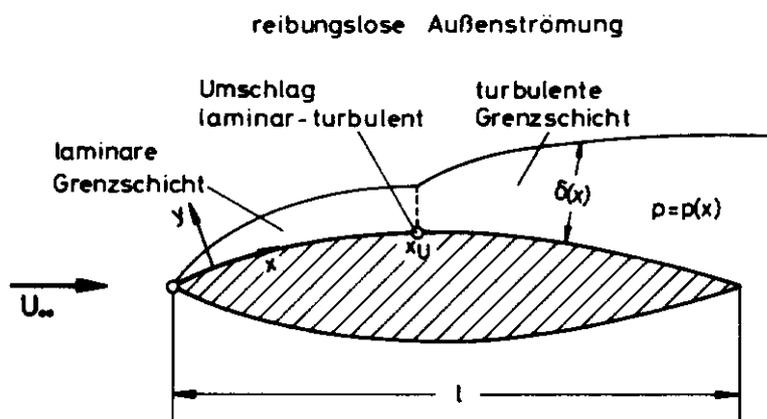


Abbildung 10-12: Grenzschicht an einem Tragflächenprofil

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot U_{\infty} \cdot L}{\eta} = \frac{U_{\infty} \cdot L}{\nu} \quad (10-12)$$

Nach einer bestimmten Lauflänge x_u wird die Strömung in der Grenzschicht instabil, da die in der Strömung beteiligten Reibungskräfte zur Dämpfung von Störungen nicht mehr ausreichen. Es kommt zum Umschlag laminar - turbulent. Hinter dem Umschlagpunkt ist die Grenzschicht turbulent. Die Lage des Umschlagpunktes ist festgelegt durch die kritische REYNOLDS-Zahl

$$\text{Re}_k = \frac{U_{\infty} \cdot x_u}{\nu} \quad (10-13)$$

die noch von der Körpergeometrie abhängt.

In der Literatur findet man die Werte von $3,2 \cdot 10^5$ bis $3 \cdot 10^6$. Normalerweise ist mit dem unteren Grenzwert zu rechnen. Nur bei besonders störungsfreier Außenströmung wird $3 \cdot 10^6$ erreicht.

Außer der REYNOLDS-Zahl gibt es noch andere dimensionslose Größen zur Beschreibung der Grenzschicht und damit zur Charakterisierung der Umströmung von Körpern.

Die auf den Staudruck der Anströmgeschwindigkeit bezogene Wandschubspannung heißt Reibungsbeiwert c_w .

$$c_w = \frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2} \cdot w_{\infty}^2} = \frac{F}{\frac{\rho}{2} \cdot w_{\infty}^2 \cdot A} \quad (A - \text{umströmte Fläche}) \quad (10-14)$$

10.4. Umströmung von Körpern

10.4.1 Widerstand. Dynamischer Auftrieb

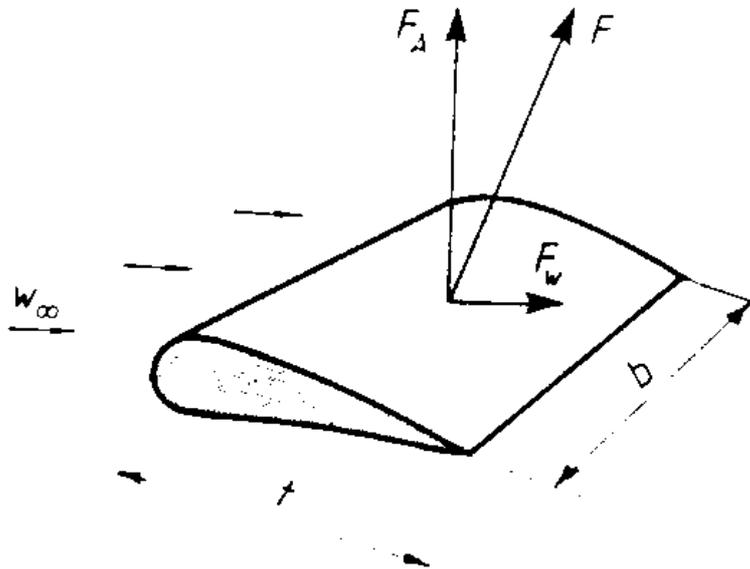


Abbildung 10-13: Widerstand und Auftrieb bei Tragflächen

Bei der Umströmung eines Körpers wirkt vom realen Fluid auf den Körper eine Kraft F . Das Ziel ist es diese Kraft zu berechnen.

In einem gewählten Koordinatensystem (KS) bestehend aus der Anströmrichtung (horizontal) und einer Senkrechten dazu (parallel zur Erdbeschleunigung) kann diese Kraft in ihre Komponenten zerlegt werden. Die Komponente in Anströmrichtung ist der Strömungswiderstand F_w , die Komponente senkrecht dazu und parallel zur Erdbeschleunigung ist der dynamische Auftrieb F_A .

Bei plumpen Körpern hat F praktisch die Richtung der Anströmgeschwindigkeit.

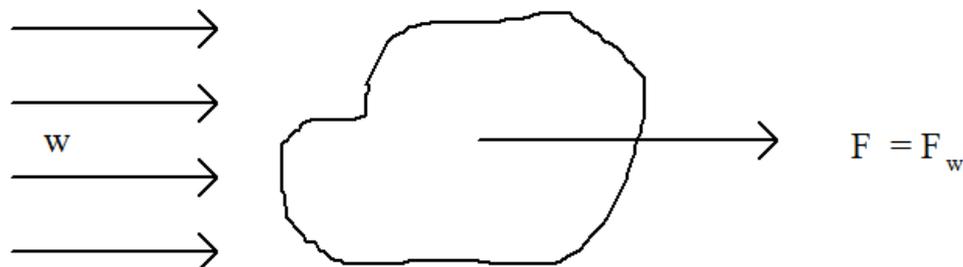


Abbildung 10-14: Widerstand bei plumpen Körpern

Bei schlanken Körpern, insbesondere bei Tragflächen, kann die Richtung von F erheblich von w_{∞} abweichen.

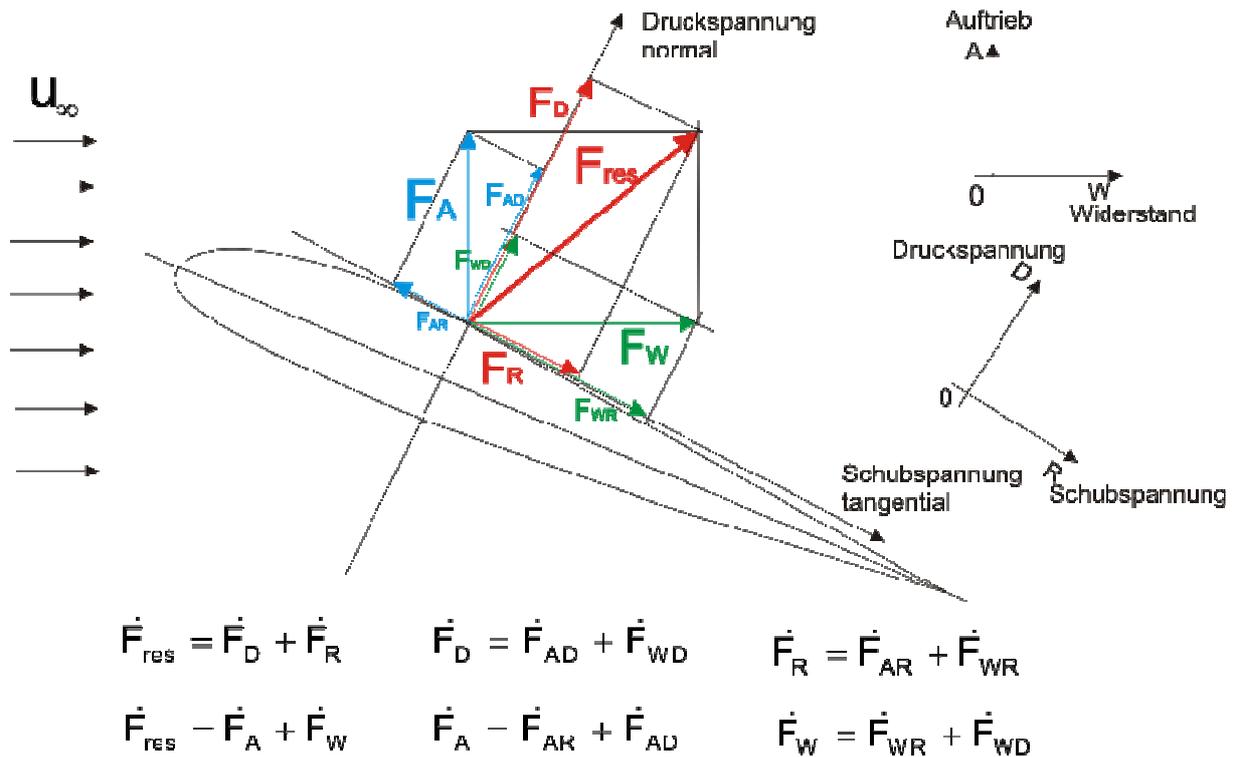


Abbildung 10-15: Kombination der Koordinatensysteme A0W und D0R

Betrachten wir jetzt einen umströmten Körper und seine Oberfläche. An der Grenzfläche des umströmten Körpers wirken in jedem Punkt eine Schubspannung tangential zur Grenzfläche und Druck normal zur Grenzfläche.

Daher setzt sich der Strömungswiderstand F_W wiederum aus einer Kraft der Schubspannungen (Reibungswiderstand F_R) und der Druckspannungen (Druckwiderstand F_D) zusammen.

Der Reibungswiderstand wird durch die Integration der Schubspannungen und der Druckwiderstand durch die Integration der Druckspannungen über die Oberfläche berechnet.

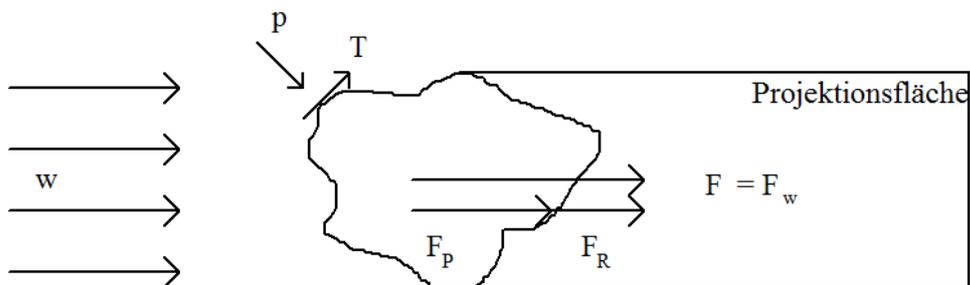


Abbildung 10-16: Strömungswiderstand zusammengesetzt aus Reibungs- und Druckwiderstand

Bei plumpen Körpern ist $F_D \gg F_R$. Bei schlanken Körpern ist $F_R \gg F_D$.

Die folgende Tabelle gibt ungefähr die Aufteilung des Widerstandes in Druck- und Reibungswiderstand für einige Fälle in Prozent an:

Körper	Druckwiderstand	Reibungswiderstand
Tragfläche	10 %	90 %
längsangestr. Platte	0 %	100 %
querangstr. Platte	100 %	0 %
Kugel	90 %	10 %
PKW	90 %	10 %
Flugzeug	50 %	50 %

Tabelle 3: Widerstandsanteile umströmter Körper

Der Reibungswiderstand ist eine Funktion der Viskosität. Im Idealfall reibungsloser Strömung tritt kein Reibungswiderstand auf. Aber auch der Druckwiderstand verschwindet. Man bezeichnet diese Tatsache als d'ALAMBERTsches Paradoxon.

Die theoretische Bestimmung des Körperwiderstandes ist nicht möglich. Der Körperwiderstand findet daher Eingang in die Berechnungen über die c – Beiwerte (c_w , c_D , c_A), die jeweils in Laborversuchen empirisch bestimmt werden. Es gilt:

$$(c_w, c_D, c_A) = f(\text{Geometrie, Rauigkeit, Re, Ma}).$$

Eine Tabellierung erfolgt in Abhängigkeit des Anstellwinkels α . Für Standardgeometrien findet man die c -Werte in umfassenden Tabellenwerken. Für individuelle Objekte müssen spezielle Versuchsreihen durchgeführt werden. Dies ist zum Beispiel bei jedem neuen Automodell der Fall und ein hoher Werbefaktor.

Der Widerstandsbeiwert c_w ist definiert durch:

$$c_w = \frac{F_w}{\frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2 \cdot A_s} \quad (10-14)$$

Er ist eine dimensionslose Größe. Als Bezugsfläche A dient hier die Grundrissfläche (Schattenfläche).

$$A_s = b \cdot L \quad (10-15)$$

Der Druckbeiwert c_D ist definiert durch:

$$c_D = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2} \quad (10-16)$$

Der Auftriebsbeiwert c_A ist definiert durch:

$$c_A = \frac{F_A}{\frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2 \cdot A} \quad (10-17)$$

mit F_A als der wirkenden Auftriebskraft.

- Bei einer Anströmung erfährt jedes Objekt eine Widerstandskraft.
- Objekte erfahren eine Auftriebskraft nur, wenn diese asymmetrisch bezüglich der Achse in Anströmungsrichtung sind.

10.4.2 Grundlagen der praktischen Tragflügeltheorie

Definitionen des Koordinatensystems:

z - Achse parallel zur Schwerkraft

x-Achse - parallel zur Anströmrichtung

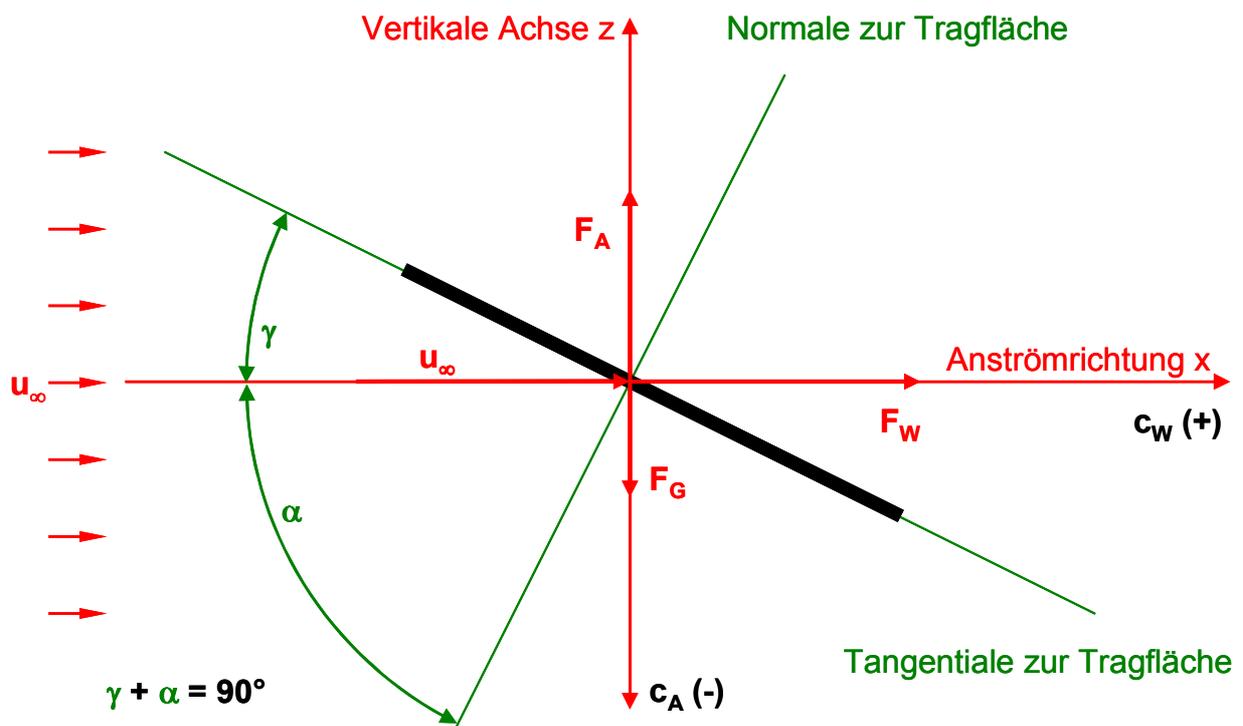


Abbildung 10-17: Koordinatensystem

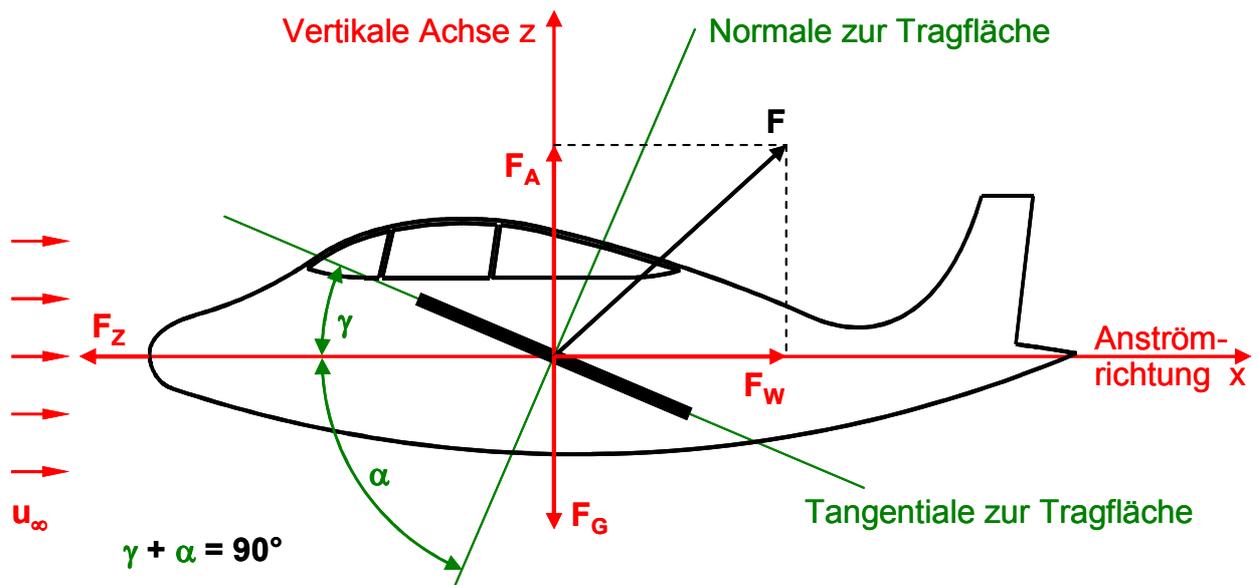


Abbildung 10-18: Kräfte am Tragflügel

F_W Widerstandskraft F_W immer in Anströmrichtung, d.h. entgegen der Bewegungsrichtung des Objektes (Strömungswiderstand)

F_A Dynamische Auftriebskraft F_A immer entgegen der Erdbeschleunigung normal zur Anströmrichtung

α Winkel zwischen der Anströmrichtung und der Normalen zur Tragfläche

γ Anstellwinkel der Tragfläche mit der Horizontalen

F_Z Zugkraft des Flugzeugs

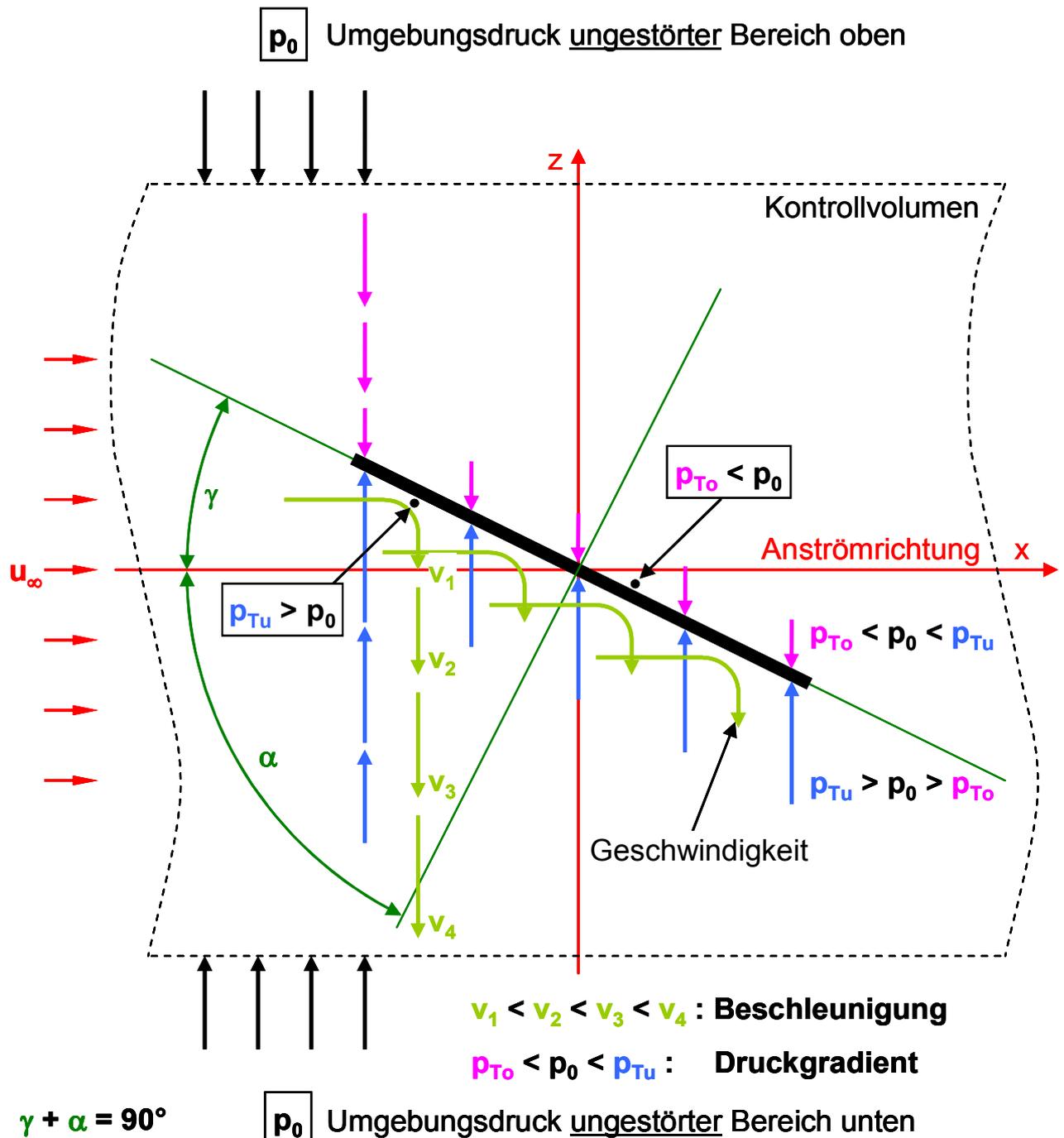


Abbildung 10-19: Erklärung für den dynamischen Auftrieb

p_{Tu} der Druck unmittelbar an der Tragflächenunterseite

p_{To} der Druck unmittelbar an der Tragflächenoberseite

p_0 Umgebungsdruck außerhalb des Kontrollvolumens

Erklärung des dynamische Auftriebes (siehe Abbildung 10-19):

Im Nahfeld der angewinkelten Tragfläche wird ein Kontrollvolumen aufgespannt.

Im vom Tragflügel ungestörten Bereich an den Rändern des Kontrollvolumens herrscht jeweils Normaldruck p_0 .

Die einströmende Luft mit u_∞ wird in diesem Kontrollvolumen durch die angewinkelte Tragfläche nach unten umgelenkt und erfährt dabei eine Vertikalbeschleunigung in Richtung Erdboden. Diese Vertikalbeschleunigung nach unten bewirkt im Kontrollvolumen einen Druckgradienten in Richtung nach oben.

Unterhalb der Tragfläche nimmt der Druck in der Vertikalen zu - vom Normaldruck p_0 im ungestörten Bereich auf einen höheren Druck unmittelbar an der Tragflächenunterseite (Index TU) an. $p_{TU} > p_{0,unten}$

Oberhalb der Tragfläche nimmt der Druck ebenfalls in der Vertikalen von einem niedrigen Druck p_{To} unmittelbar an der Tragflächenoberseite wieder auf den Normaldruck p_0 im ungestörten Bereich oben zu. $p_{To} < p_{0,oben}$

Es resultiert:

$$p_{Tu} > p_0 > p_{To} \rightarrow p_{To} < p_{Tu} \text{ (Druckunterschied } \rightarrow \text{ Auftrieb)}$$

Dieses Druckfeld ist die Ursache der Auftriebskraft!

Die Auftriebskraft ist eine Reaktionskraft, die aus der Vertikalbeschleunigung der Luft resultiert, die an einer angewinkelten Tragfläche in Richtung Erdboden umgelenkt wird.

Ob ein Flugobjekt fliegt oder nicht hängt nur vom Anstellwinkel der Tragfläche ab.

Diese Erklärung für den Auftrieb gilt nicht nur für das Abheben vom Boden, sondern auch für alle Probleme mit dynamischen Auftriebskräften, die ganz allgemein als Kräfte normal zur Strömungsrichtung verstanden werden.

Im Fall der Flugobjekte ist die Platte so als Tragfläche ausgerichtet, dass die resultierende Auftriebskraft genau der Gewichtskraft des Flugobjektes entgegenwirkt.

Der Strömungswiderstand F_W steht im Gleichgewicht zur Zugkraft (**Schubkraft**) F_Z , mit welcher der Propeller das Flugzeug durch die Luft zieht (siehe Abbildung 10-19).

Der Auftrieb kann erhöht werden durch:

- Erhöhung der Geschwindigkeit u_∞
- Vergrößerung der Tragfläche
- Vergrößerung des Anstellwinkels γ

Hierbei schließt sich eine hochkomplizierte Optimierungsarbeit an, die Forschungsabteilungen und Institute seit Jahrzehnten mit Arbeit versorgt.

Die Geschwindigkeit kann man erhöhen, indem leistungsfähige Antriebsaggregate eingebaut werden, was aber einen höheren Energiebedarf verursacht.

Eine Vergrößerung der Tragflächen vergrößert gleichzeitig das Gewicht des Flugzeuges. Die Gegenmaßnahme sind teure High-Tech-Werkstoffe wie Aluminium und glasfaserverstärkte Kunststoffe.

Mit der Vergrößerung des Anstellwinkels steigt auch die Widerstandskraft der Tragfläche und es kommt zu starken Wirbelablösungen auf der Rückseite, so dass die Geschwindigkeit des Flugzeuges einbricht und damit dann auch wieder der Auftrieb.

Und genau das ist der Grund für die Profilierung der Tragfläche. Tragflächen werden profiliert, um ein stabiles Strömungsfeld mit einem Maximum an Auftriebskraft bei gleichzeitiger Minimierung der Widerstandskraft zu generieren!

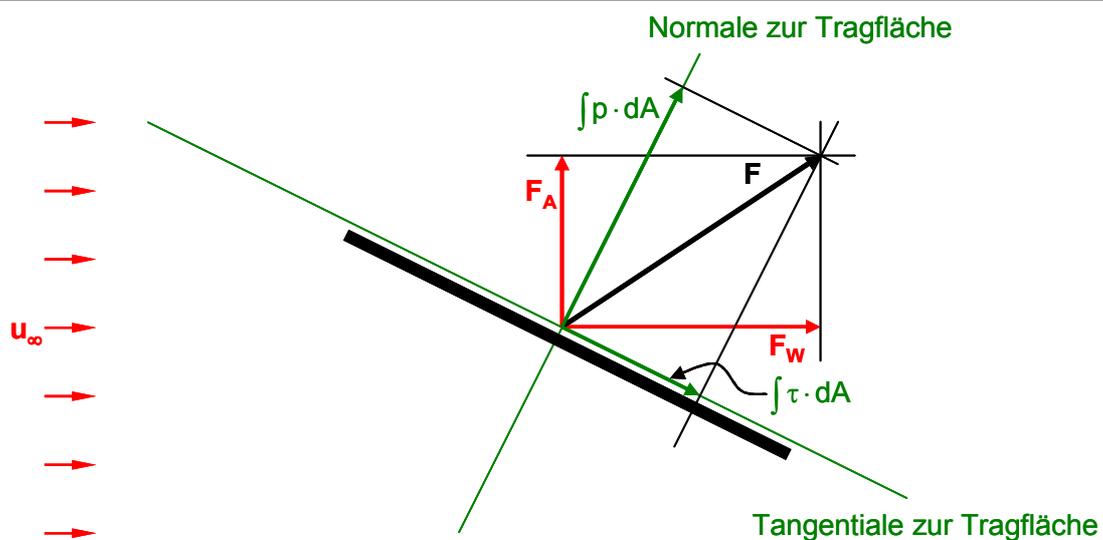


Abbildung 10-20: Kraft aus Auftriebs- und Widerstandskraft und aus den Normal- und Tangentialspannungen

10.5. Widerstand der längs angeströmten Platte

Bei längs angeströmter Platten entsteht nur der Reibungswiderstand. Für die kritische REYNOLDS-Zahl gilt:

$$Re_k = \frac{U_\infty \cdot x_u}{\nu} = 5 \cdot 10^5. \quad (10-18)$$

Ist die Plattenlänge $L < x_u$, dann ist die gesamte Grenzschicht bis zur Plattenhinterkante laminar. Ist die Plattenlänge $L > x_u$, dann ist der vordere Teil der Grenzschicht (bis x_u) laminar, dahinter wird sie turbulent.

Der Widerstandsbeiwert für eine einseitig benetzte ebene Platte als Funktion der REYNOLDS-Zahl Re und der relativen Sandrauigkeit k_s/L ist in Abbildung 10-21 dargestellt.

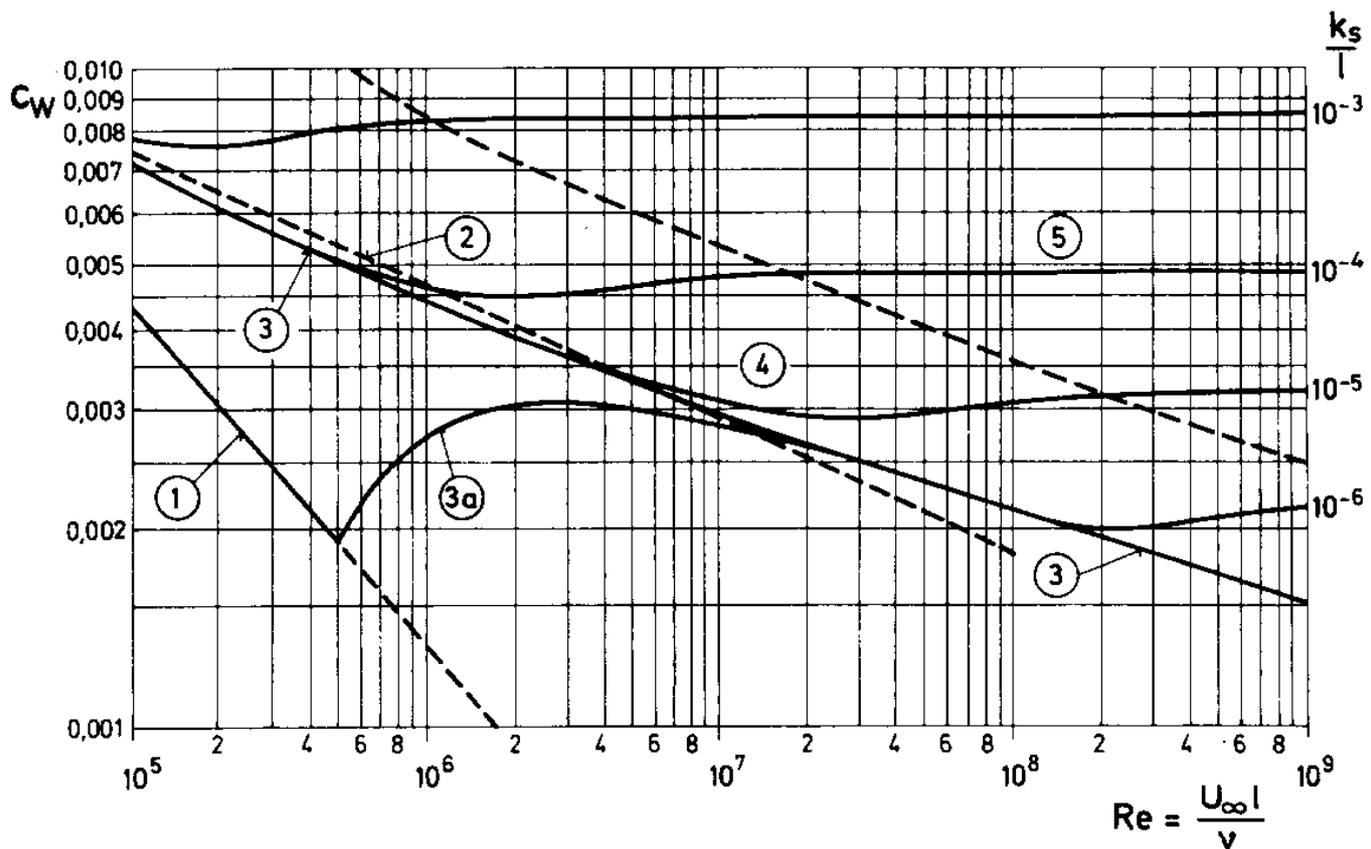


Abbildung 10-21: Widerstand der längs angeströmten ebenen Platte

Für die c_W -Werte der längsangeströmten Platte gelten die folgenden Formeln:

1. BLASIUS,

laminar, hydraulisch glatt $Re < 5 \cdot 10^5$

$$c_W = \frac{1,32824}{\sqrt{Re}} \quad (10-19)$$

2. PRANDTL,

turbulent, hydraulisch glatt, $5 \cdot 10^5 < Re < 10^6$ $L \gg x_u$

$$c_W = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re}} \quad (10-20)$$

3a. PRANDTL,

turbulent, hydraulisch glatt, $5 \cdot 10^5 < Re < 5 \cdot 10^6$ $L > x_u$

$$c_W = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re}} - \frac{1700}{Re} \quad (10-21)$$

3. PRANDTL-SCHLICHTING,

turbulent hydraulisch glatt, $10^6 < Re < 10^9$ und $L \gg x_u$

$$c_W = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} \quad (10-22)$$

4. turbulent und hydraulisch glatt, $10^6 < Re < 10^9$ $L > x_u$

$$c_W = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} - \frac{1700}{Re} \text{ und } \frac{U_\infty \cdot k_s}{\nu} \leq 100 \quad (10-23)$$

5. turbulent mit Rauigkeit, $10^6 < Re < 10^9$, $10^3 < L/k_S < 10^9$

$$c_W = \left(1,89 + 1,62 \cdot \log \frac{L}{k_S} \right)^{-2,5} \text{ und } \frac{U_\infty \cdot k_s}{\nu} > 100 \quad (10-24)$$

(hydraulisch glatt bedeutet, Rauigkeit spielt keine Rolle)

Für Rauigkeitshöhen k_s , bei welchen die Rauigkeit noch keinen Einfluss auf den Widerstand hat, gilt die einfache Formel:

$$\frac{U_\infty \cdot k_s}{\nu} \leq 100 \quad \text{hydraulisch glatt} \quad (10-25)$$

$$\frac{U_{\infty} \cdot k_s}{\nu} > 100 \quad \text{Rauhigkeit muss berücksichtigt werden} \quad (10-26)$$

Überschreitet k_s diese zulässige Grenze, dann sind zwei Bereiche zu unterscheiden. Im Bereich 4 ist der Widerstandsbeiwert von der relativen Rauigkeitshöhe k_s/L und der Reynolds-Zahl Re abhängig. Im Bereich 5 nur noch von k_s/L .

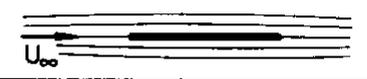
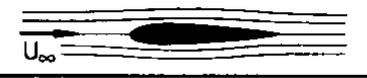
Körper	Druckwiderstand	Reibungswiderstand
	0 %	100 %
	≈ 10 %	≈ 90 %
	≈ 90 %	≈ 10 %
	100 %	0 %

Abbildung 10-22: Widerstandsanteile umströmter Körper

10.6. Ablösung

Wenn ein Körper von einem Fluid angeströmt wird, bildet sich an seiner Vorderseite ein Staupunkt aus.

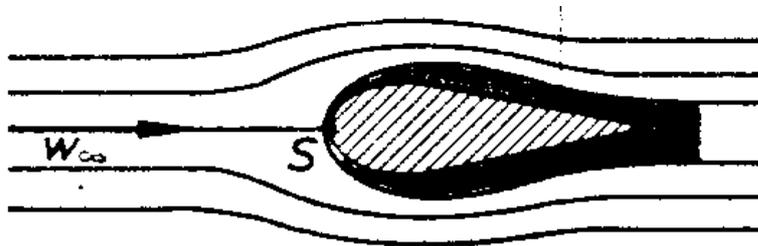


Abbildung 10-23: Staupunkt

In diesem Punkt ist die gesamte kinetische Energie in Anströmung vollständig in Druck umgesetzt worden.

Wir verfolgen nun den Weg eines Fluidteilchens auf einer Stromlinie nahe der Körperoberfläche.

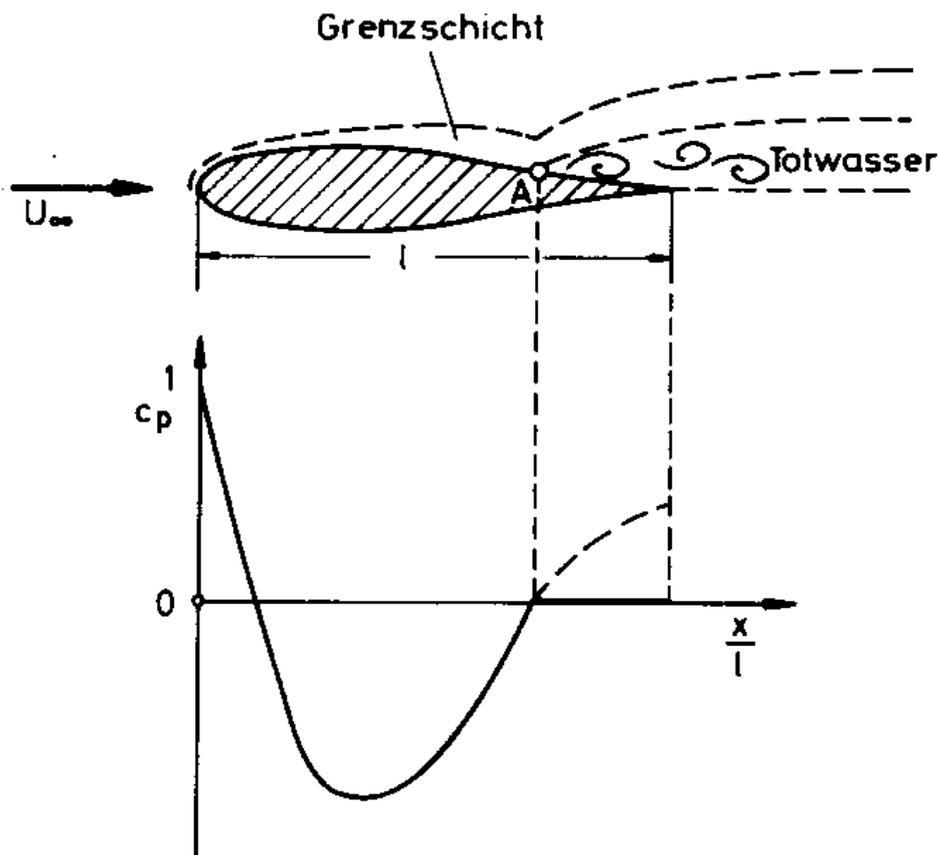


Abbildung 10-24: Druckverteilung am Profil bei Ablösung der Grenzschicht

- Das Fluidteilchen bewegt sich vom Staupunkt aus in ein Gebiet abnehmenden Druckes (blaue Linie).
- Dabei wird es beschleunigt.
- In dieser Beschleunigungsphase nimmt seine kinetische Energie zu.
- Hinter der dicksten Stelle des Körpers steigt der Druck aber wieder an (grüne Linie).
- Das Teilchen wird infolgedessen verzögert.
- Außerdem wirkt auf das Teilchen eine verzögernde Reibungskraft.
- Ein Teil der Energie wird dissipiert.

➔ Als Folge davon reicht die gewonnene kinetische Energie nicht aus, um das Teilchen gegen den Druckanstieg bis zum hinteren Ende des Körpers strömen zu lassen.

Das Teilchen fängt unter dem Einfluss des weiteren Druckanstieges an, in Gegenrichtung zu strömen (Gebiet III)

Es bildet sich ein Rückströmungsgebiet, das die Außenströmung von der Oberfläche abdrängt, was zur Ablösung der Strömung von der Wand führt.

Die Verhinderung der Ablösung ist durch Absaugen der Grenzschicht möglich, wodurch diese eine konstante Dicke δ erhält.

10.7. Umströmung einer Kugel

Die Kugel ist im Vergleich zu einem schlanken Körper ein stumpfer Körper. Daher ist mit Strömungsablösung zu rechnen. Der überwiegende Teil des Kugelwiderstandes ist der Druckwiderstand. Dieser ergibt sich aus:

$$c_w = \frac{F_w}{\frac{\rho \cdot U_\infty^2 \cdot \pi \cdot D^2}{4}} \quad (10-27)$$

In Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahle

$$Re = \frac{U_\infty \cdot D}{\nu} \quad (10-28)$$

gilt ebenfalls:

- | | | | |
|----|--------------------|--------------------------------------|-----------------------|
| 1. | $c_w = 24/Re$ | $Re < 2$ (Stokes) | schleichende Strömung |
| 2. | c_w aus Diagramm | $2 < Re < 0,5 \cdot 10^3$ | Übergangsbereich |
| 3. | $c_w = 0,4$ | $0,5 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$ | Unterkritisch |
| 4. | $c_w = 0,08$ | $2 \cdot 10^5 < Re < 10^7$ | Überkritisch |
| 5. | $c_w = 0,2$ | $Re > 10^7$ | Transkritisch |

Der Umschlag von laminarer zu turbulenter Umströmung erfolgt bei der kritischen REYNOLDS-Zahl $Re_k = 3 \cdot 10^5$.

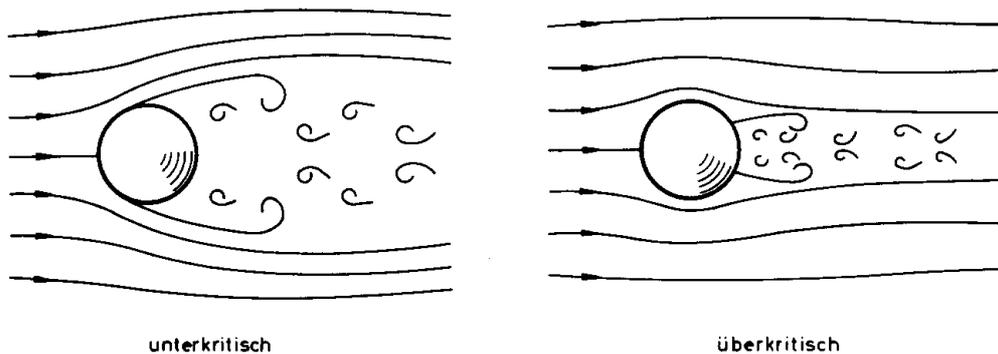


Abbildung 10-25: Totwassergebiet hinter der Kugel (v. Karmansche Wirbelstraße)

Beispiel: Freier Fall mit Strömungswiderstand

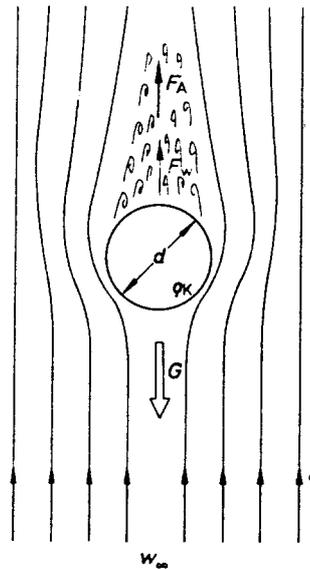


Abbildung 10-26: Körper im freien Fall

Beim freien Fall in einem Fluid wirken folgende Kräfte auf den Körper:

Die Gewichtskraft

$$G = F_G = m \cdot g \quad (10-29)$$

nach unten, der Strömungswiderstand

$$F_W = \frac{\rho}{2} \cdot w_\infty^2 \cdot c_W \cdot A \quad (10-30)$$

nach oben, der Anströmgeschwindigkeit entgegengesetzt und die Auftriebskraft F_A

$$F_A = \rho \cdot V \cdot g \quad (10-31)$$

ebenfalls nach oben (ρ - Dichte der Luft, V – Volumen der Kugel).

Das Kräftegleichgewicht lautet somit:

$$F_G = F_W + F_A \quad (10-32)$$

$$m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g + \frac{c_W \cdot \rho}{2 \cdot w_\infty^2} \cdot A \quad (10-33)$$

Daraus ergibt sich für die stationäre Endgeschwindigkeit:

$$w_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot g(m - \rho \cdot V)}{c_W \cdot \rho \cdot A}} \quad (10-34)$$

Wenn der Auftrieb vernachlässigt wird ($\rho \ll \rho_K$ bzw. $\rho \cdot V \ll m$), so vereinfacht sich das Ergebnis zu:

$$w_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot m}{c_W \cdot \rho \cdot A}} \quad (10-35)$$

Rechenbeispiel:

Gegeben ist eine Kugel, mit dem Durchmesser D und der Dichte ρ_K , die in einer Flüssigkeit der Dichte ρ nach unten sinkt. Nach einer gewissen Zeit bewegt sie sich mit der stationären Fallgeschwindigkeit w_∞ - wie groß ist die Geschwindigkeit?

Die Masse der Kugel ist

$$m = \rho_K \cdot V \cdot g. \quad (10-36)$$

Einsetzen in (10-34) ergibt für die Fallgeschwindigkeit

$$w_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot V(\rho_K - \rho)}{c_W \cdot \rho \cdot A}}, \quad (10-37)$$

für deren Berechnung jedoch der korrekte c_W -Wert benötigt wird. Dieser selbst hängt jedoch von der REYNOLDS-Zahl und diese wiederum von der Fallgeschwindigkeit ab. Somit lässt sich w_∞ nur durch einen iterativen Prozess bestimmen.

Man geht von einem Schätzwert für den c_W -Wert aus, berechnet damit w_∞ und die dazugehörige REYNOLDS-Zahl und prüft anhand des Diagramms (Abbildung 10-27), ob REYNOLDS-Zahl und c_W -Wert zueinander passen bzw. die Abweichung in einem tolerierbaren Bereich liegt.

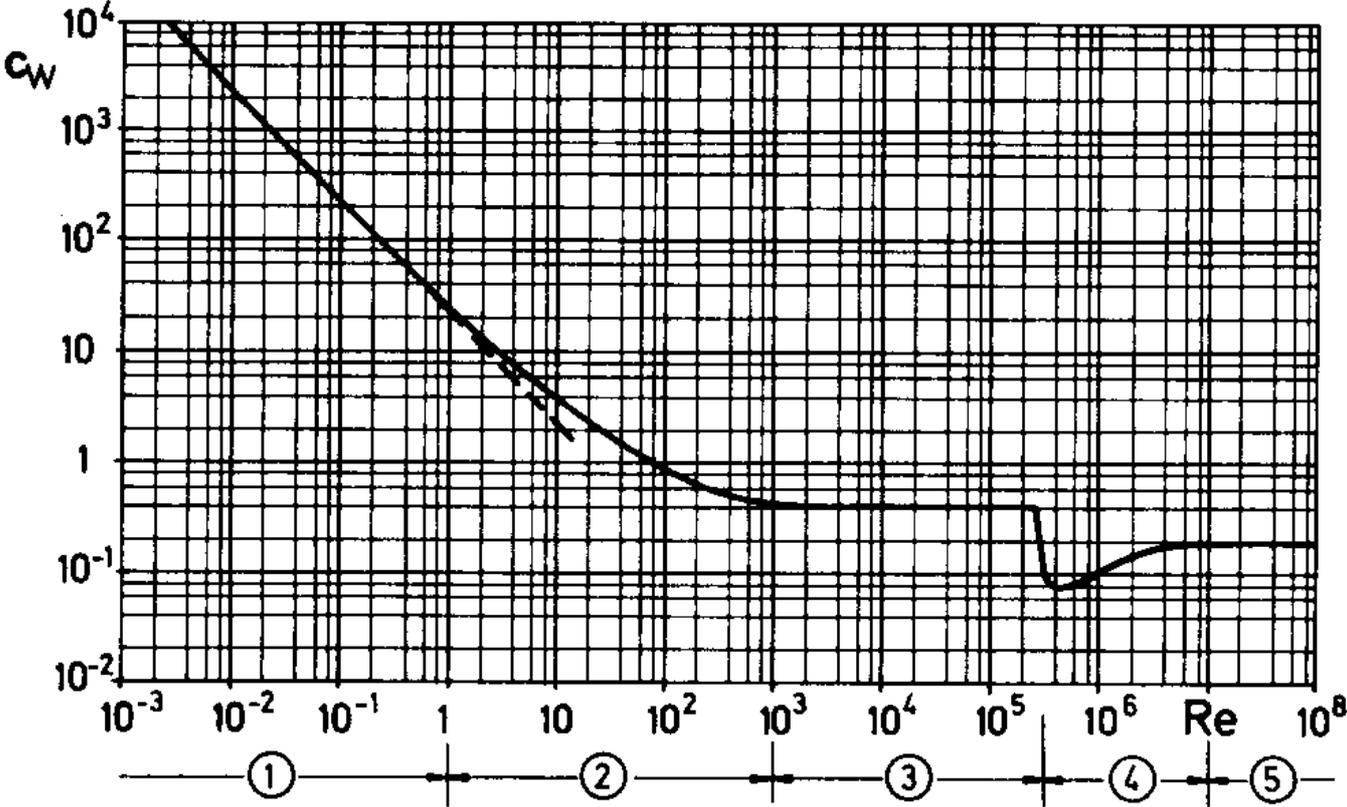


Abbildung 10-27: Widerstandsbeiwert der Kugel

10.7.1 Schleichende Strömung um eine Kugel in einer reibungsbehafteten Flüssigkeit. Widerstandskraft

Ziel: Herleitung des c_w -Werts

Die Kugel ist im Vergleich zu einem schlanken Profil ein stumpfer Körper. Daher ist mit Strömungsablösung zu rechnen. Im Folgenden werden wir uns mit dem Umströmungswiderstand beschäftigen.

Körperumströmungen bei kleinen Reynoldszahlen $Re < 1$ werden in der Technik als schleichende Strömungen bezeichnet. Sie treten auf, wenn z.B. die Zuströmgeschwindigkeit U klein oder die Viskosität ν des strömenden Mediums groß ist. In diesem Kapitel soll die schleichende, inkompressible Strömung um eine Kugel mit dem Durchmesser D betrachtet werden.

Der Umströmungswiderstand F_W eines Körpers setzt sich

- aus einem Druckwiderstand $F_{W,D}$
- und einem Reibungswiderstand $F_{W,R}$

zusammen.

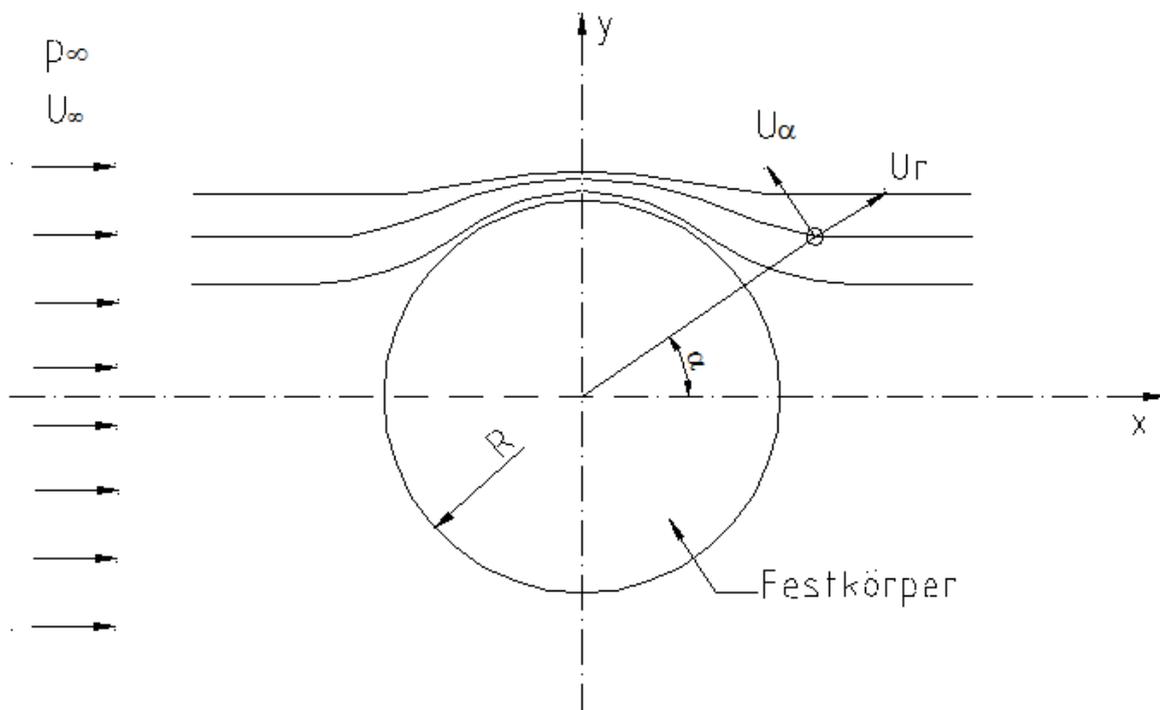


Abbildung 10-28: Kugelumströmung

<u>Gegeben:</u> $U_\infty, p_\infty, R, \nu = \eta/\rho$	<u>Gesucht:</u> $F_{W,R}, F_{W,D}, F, c_w$
---	---

10.7.1.1 Druckwiderstand

p_k Normalspannung (Konturdruck)

τ Tangentialspannung (Schubspannung)

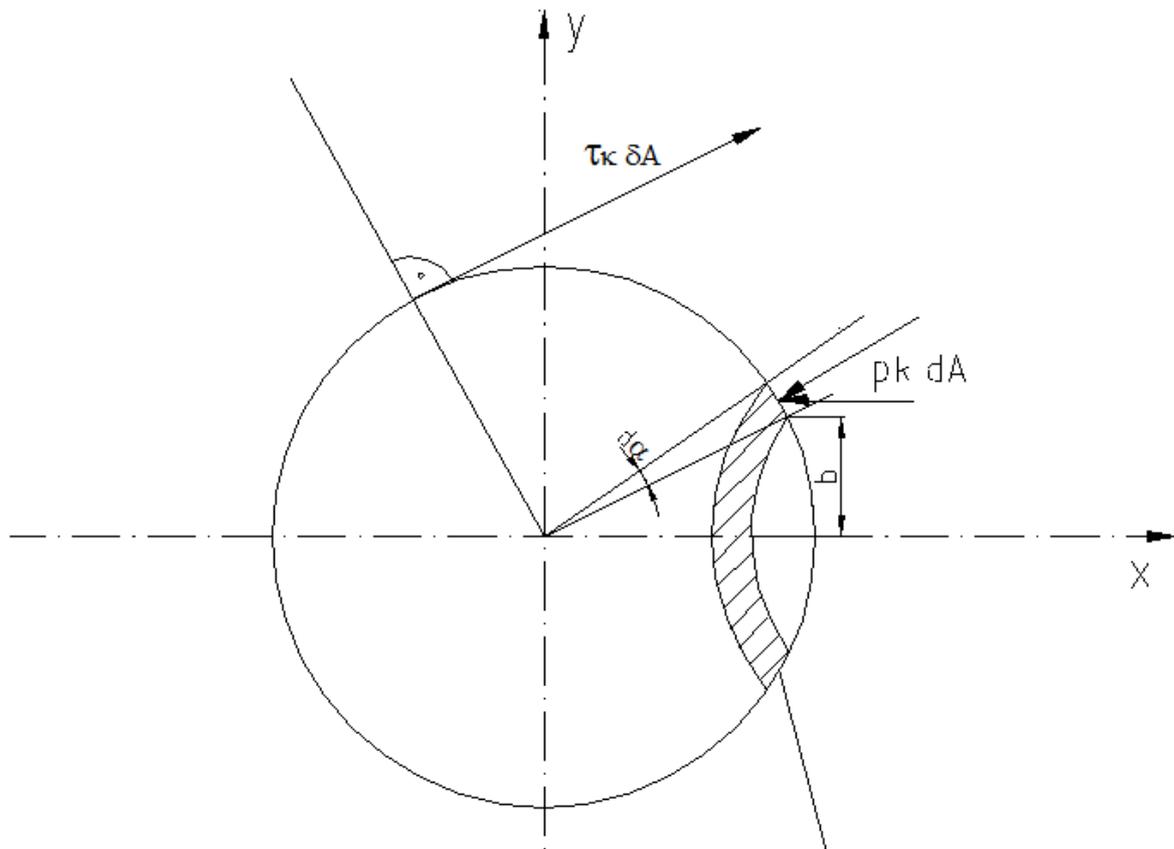


Abbildung 10-29: Kugelumströmung

$$dA = (2\pi b) \cdot R d\alpha \quad (b = R \sin \alpha) \quad (10-38)$$

$$dA = 2\pi R^2 \sin \alpha \cdot d\alpha$$

Der Druckwiderstand resultiert aus der Integration der in Anströmrichtung wirkenden Komponenten der Normalspannung (horizontale, d.h. x-Komponenten in diesem Beispiel)

$$dF_{W,D} = p_k \cdot dA \cos \alpha = p_k \cdot \cos \alpha \cdot dA$$

$$F_{W,D} = \int_A dF_{W,D} \quad (10-39)$$

$$= - \int_A p_k \cdot \cos \alpha \cdot dA$$

Der Druck p_k ist auf der Fläche dA konstant. Das Minuszeichen auf der rechten Seite der Gleichung berücksichtigt, dass die Kräfte $F_{W,D}$ für $0 < \alpha < 90^\circ$ in negative x-Richtung und für $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ in positive x-Richtung wirken.

$$F_{W,D} = - \int_A p_k \cdot \cos \alpha \cdot 2\pi R^2 \sin \alpha \, d\alpha \quad (10-40)$$

Der Konturdruck p_k ergibt sich aus einer analytischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung zu

$$p_k = - \frac{3\eta U_\infty}{2R} \cdot \cos \alpha + p_\infty \quad (10-41)$$

Eingesetzt in Gl. (10-40) erhält man:

$$F_{W,D} = \int_0^\pi 2\pi R^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \frac{\eta U_\infty}{R} \cdot \cos \alpha - p_\infty \right) \cos \alpha \cdot \sin \alpha \, d\alpha \quad (10-42)$$

Mit der Lösung des Integrals

$$I = 2\pi R^2 \left(\int_0^\pi \frac{3}{2} \frac{\eta U_\infty}{R} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \, d\alpha - \int_0^\pi p_\infty \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \, d\alpha \right) \quad (10-43)$$

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{3}{2} \frac{\eta U_\infty}{R} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \, d\alpha, \quad I_2 = \int_0^\pi p_\infty \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \, d\alpha \quad (10-44)$$

Substitution:

$$\cos \alpha = z \quad \Rightarrow \quad -\sin \alpha \, d\alpha = dz \quad (10-45)$$

$$I_1 = \int -\frac{3}{2} \frac{\eta U_\infty}{R} z^2 dz = -\frac{3}{2} \frac{\eta U_\infty}{R} \left(\frac{1}{3} z^3 \right) \quad (10-46)$$

$$I_1 = -\frac{3}{2} \frac{\eta U_\infty}{R} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right)_0^\pi \quad (10-47)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{3}{2} \frac{\eta U_\infty}{R} \cdot \frac{1}{3} (-1 - 1) \\ &= \frac{\eta U_\infty}{R} \end{aligned} \quad (10-48)$$

$$I_2 = p_\infty \cdot \int z \, dz = p_\infty \frac{1}{2} z^2 \quad (10-49)$$

$$I_2 = -p_\infty \left(\frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right)_0^\pi \quad (10-50)$$

$$I_2 = -p_\infty(1-1) = 0 \quad (10-51)$$

erhalten wir

$$F_{W,D} = 2\pi R^2 \frac{\eta U_\infty}{R} = 2\pi\eta R U_\infty \quad (10-52)$$

10.7.1.2 Reibungswiderstand

Der Reibungswiderstand $F_{W,R}$ ergibt sich aus der Integration der horizontalen x-Komponente der Tangentialspannungen $dF_{WR} = |\tau| \cdot dA$, die vom Fluid auf die Kontur übertragen werden, also:

$$F_{W,R} = \int_{F_{Rx}} dF_{W,R} = \int_A |\tau| \cdot \sin \alpha \, dA \quad (10-53)$$

Die vom Fluid auf die Kugel übertragene Schubspannung τ ergibt sich ebenfalls aus einer analytischen Lösung der N-S-Gleichung zu:

$$\tau = -\eta \frac{3 U_\infty \sin \alpha}{2 R} \quad (10-54)$$

Damit kann der Reibungswiderstand durch Integration bestimmt werden.

$$F_{W,R} = \int_0^\pi \eta \frac{3 U_\infty \sin \alpha}{2 R} \cdot \sin \alpha \cdot 2\pi R^2 \sin \alpha \, d\alpha \quad (10-55)$$

$$F_{W,R} = \int_0^\pi 3\pi\eta U_\infty R \sin^3 \alpha \, d\alpha \quad (10-56)$$

$$F_{W,R} = 4\pi\eta U_\infty R \quad (10-57)$$

Damit beträgt die gesamte Widerstandskraft $F_W = F_{W,D} + F_{W,R}$

$$\begin{aligned} F_W &= F_{W,D} + F_{W,R} \\ &= 6\pi\eta U_\infty R \end{aligned} \quad (10-58)$$

Mit dem Ausdruck für die Widerstandskraft

$$F_W = c_W \frac{\rho}{2} U_\infty^2 \pi R^2 \quad (10-59)$$

lässt sich der dimensionslose c_W -Wert für diesen Fall berechnen:

$$c_w = \frac{2F_w}{\rho U_\infty^2 \pi R^2} = \frac{2(6\pi\eta U_\infty R)}{\rho U_\infty^2 \pi R^2} = \frac{12\eta}{\rho U_\infty R} = \frac{24\eta}{\rho U_\infty D}. \quad (10-60)$$

Mit

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu} = \frac{\rho U_\infty D}{\eta} \quad (10-28)$$

erhält man schließlich

$$c_w = \frac{24}{Re}. \quad (10-61)$$

10.7.2 Kugelumströmung in einer reibungslosen Flüssigkeit

10.7.2.1 Geschwindigkeitspotential φ der Strömung

Lösung der LAPLACE- Gleichung mit der zugehörigen Randbedingung. – Der Satz alleine sagt gar nichts aus

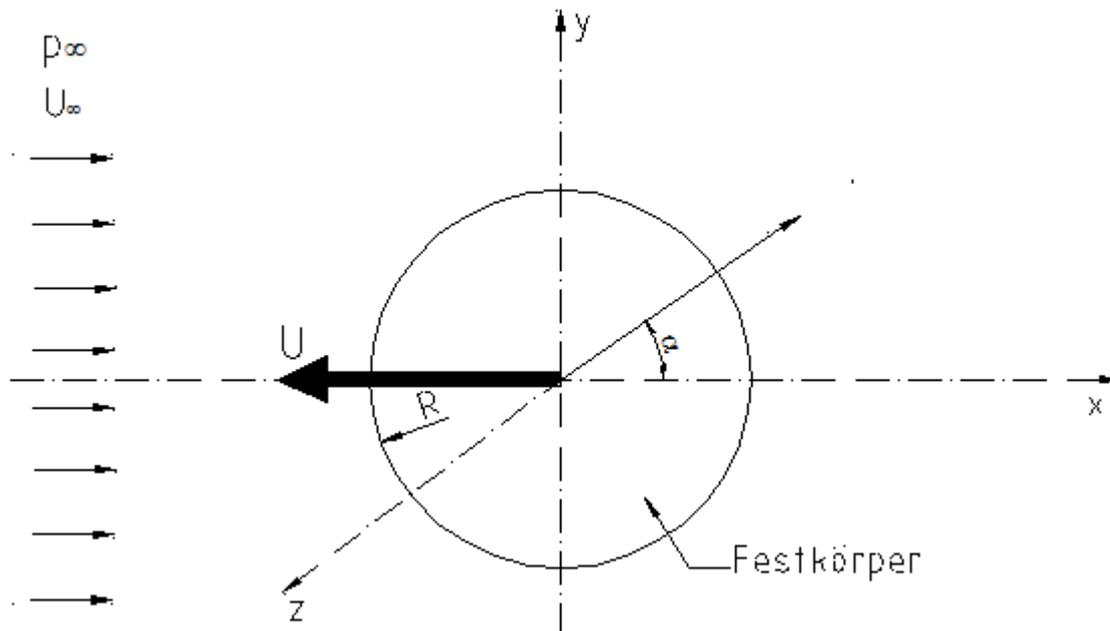


Abbildung 10-30: Kugelumströmung

Das Problem ist rotationssymmetrisch zur x-Achse und wird in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \\ y &= r \sin \alpha \cos \beta \quad (\text{siehe Mathe 1 Szymczyk}) \\ z &= r \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (10-62)$$

formuliert, da sich der Rand dann als Fläche $r = \text{const.}$ besonders einfach beschreiben lässt. Um das gesuchte Geschwindigkeitspotential φ zu finden, muss die LAPLACE-Gleichung gelöst werden.

Der LAPLACE-Operator für den Skalar φ in Kugelkoordinaten lautet:

$$\Delta \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} \quad (10-63)$$

Das Problem ist rotationssymmetrisch, somit gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0 \quad (10-64)$$

und Gl. (10-63) vereinfacht sich zu

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right] = 0. \quad (10-65)$$

Randbedingungen:

(i) an der Oberfläche (kein Durchfluss durch die Fläche)

$$U_r = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (10-66)$$

(ii) im Unendlichen

$$\varphi|_{\infty} = U_{\infty} \cdot r \cdot \cos \alpha \quad (10-67)$$

Gleichung (10-67) ist eine Funktion von r und φ , die durch den Separationsansatz

$$\varphi(r, \alpha) = R(r) \cdot F(\alpha) \quad (10-68)$$

getrennt wird.

Nach kurzer Rechnung erhält man die Lösung:

$$\varphi = U_{\infty} \left(r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \alpha \quad (10-69)$$

Wir berechnen jetzt die Geschwindigkeit auf der Kugeloberfläche $r = R$.

$$\left. \begin{aligned} U_r = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} &= U_{\infty} \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \alpha = 0 \\ U_{\alpha} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right|_{r=R} &= -U_{\infty} \left(r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \sin \alpha = -\frac{3}{2} U_{\infty} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (10-70)$$

10.7.3 Kraft auf die Kugel in einer reibungslosen Flüssigkeit.

Die BERNOULLI-Gl. lautet:

$$p_{\infty} + \frac{\rho}{2} U_{\infty}^2 = p + \frac{\rho}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \quad (10-71)$$

auf der Kugel gilt: $u_r = 0$ (Randbedingung!), des weiteren ist

$$U_{\alpha} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right|_{r=R} = -\frac{3}{2} U_{\infty} \sin \alpha \quad (10-72)$$

und somit

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \frac{9}{4} U_\infty^2 \sin^2 \alpha . \quad (10-73)$$

Die Kraft \vec{F} auf die Kugel ist:

$$\vec{F} = -\iint (p - p_\infty) \cdot \vec{e}_r \cdot dA \quad (10-74)$$

$$\vec{F} = -\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho}{2} U_\infty^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \alpha \right) \cdot \vec{e}_r R^2 \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot d\beta \quad (10-75)$$

mit

$$\vec{e}_r = \cos \alpha \cdot \vec{e}_x + \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \vec{e}_y + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \vec{e}_z \quad (10-76)$$

erhalten wir nach kurzer Rechnung (2 A4 Seiten sehr dicht beschrieben),

$$\vec{F} = 0 \quad (10-77)$$

Der Druckbeiwert c_D , definiert als

$$c_D = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} \cdot U_\infty^2} , \quad (10-78)$$

ergibt sich mit der BERNOULLI-Gl. (10-71) und (10-73) zu

$$c_D = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} \cdot U_\infty^2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \alpha \quad (10-79)$$