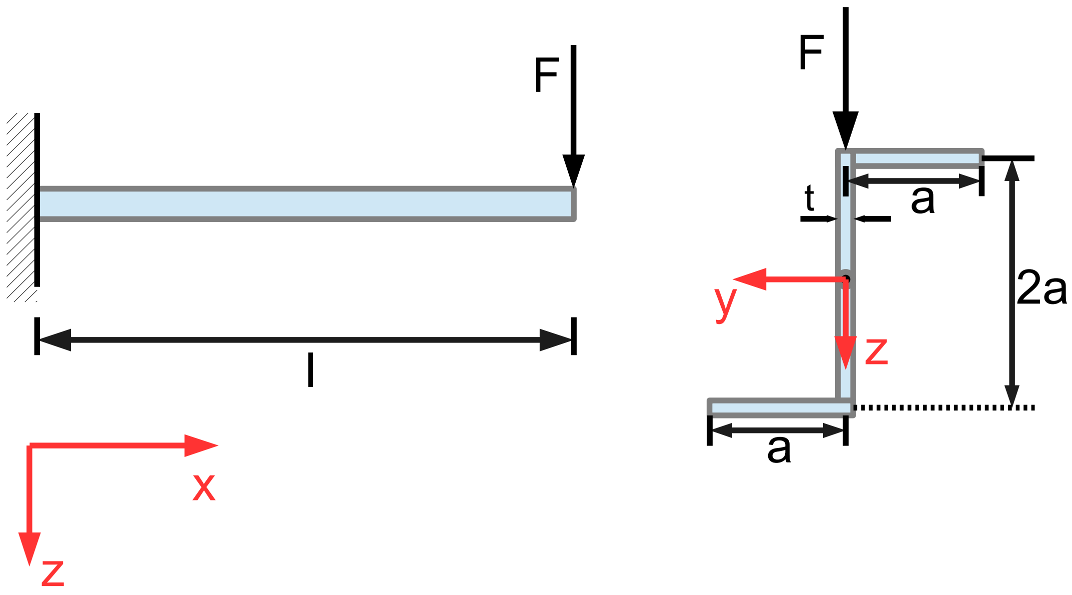
Webinar: Elastostatik
Thema: Zweiachsige Biegung

Aufgabe) Biegelinie bestimmen



Gegeben sei der obige Kragträger, welcher durch eine Kraft F in z-Richtung belastet wird. Der Querschnitt des Kragträgers ist rechts abgebildet und besitzt eine S-Form. Es sei t << a. Gegeben sind: t, a, F, l, E.

Bestimme die Hauptachsen und die Biegelinie!

Verwendete Formeln:

Biegelinie (schiefe Biegung)

$$Ev''=\frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$Ew''=\frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$u_{gesamt}=\sqrt{v^2+w^2}$$

Flächenträgheitsmomente: Koordinatentransformation

$$I_\eta=\frac{1}{2}(I_y+I_z)+\frac{1}{2}(I_y-I_z)\cos(2\alpha)+I_{yz}\sin(2\alpha)$$

$$I_\zeta=\frac{1}{2}(I_y+I_z)-\frac{1}{2}(I_y-I_z)\cos(2\alpha)-I_{yz}\sin(2\alpha)$$

$$I_{\eta\zeta}=\frac{-1}{2}(I_y-I_z)\sin(2\alpha)+I_{yz}\cos(2\alpha)$$

Hauptachsen

$$I_{1/2}=\frac{I_y+I_z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}$$

Hauptrichtung

$$\tan(2\alpha)=\frac{2I_{yz}}{I_y-I_z}$$

Flächenträgheitsmomente (Satz von Steiner)

$$I_y=\sum\left(I_{yi}+z_i^2\cdot A_i\right)$$

$$I_z=\sum\left(I_{zi}+y_i^2\cdot A_i\right)$$

$$I_{yz}=\sum\left(I_{yzi}-y_i z_i\cdot A_i\right)$$

Lösung: Schiefe Biegung

Schiefe Biegung liegt dann vor, wenn die Summe aller auf einen Balken wirkenden Kräfte nicht in Richtung einer der Hauptachsen angreift.

Das obige Profil ist nicht symmetrisch bezüglich der y-z-Achsen. Das bedeutet, dass die y-z-Achsen keine Hauptachsen des Querschnitts darstellen. Die Belastung F wirkt in Richtung der z-Achse. Da diese keine Hauptachse darstellt liegt hier schiefe Biegung vor. Die Belastung in z-Richtung führt zu einen Moment um beide Hauptachsen (zweiachsige Biegung). Es werden zunächst die Hauptachsen berechnet, um zu zeigen, dass die Belastung nicht in Richtung einer der Hauptachsen angreift und damit Momente um beide Hauptachsen resultieren.

Berechnung der Hauptachsen

$$I_{1/2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Zunächst müssen nun die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z sowie das Deviationsmoment I_{yz} berechnet werden.

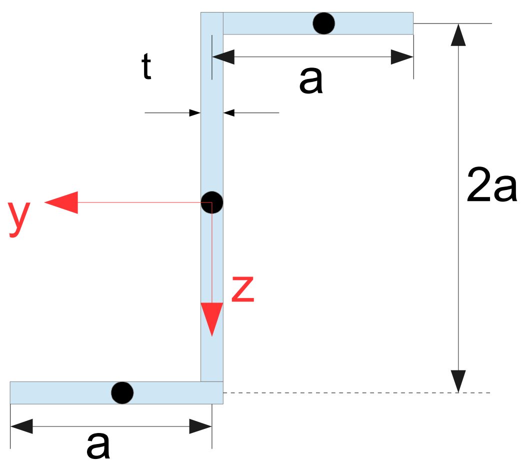
Die Flächenträgheitsmomente können mit dem Satz von Steiner berechnet werden, da es sich bei dem S-Profil um ein zusammengesetztes Profil handelt:

$$I_y = \sum (I_{yi} + z_i^2 \cdot A_i)$$

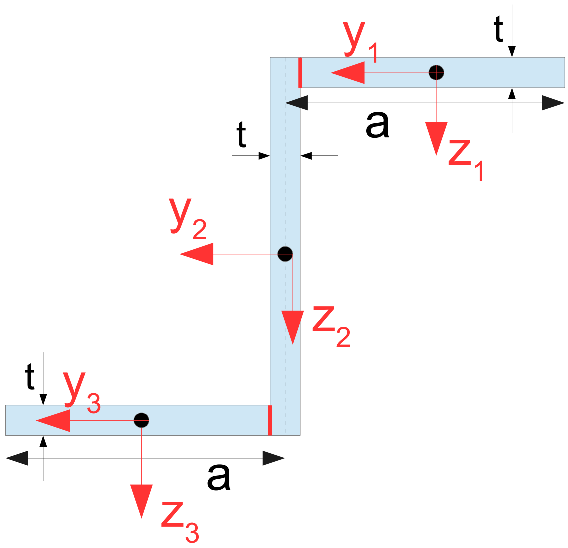
$$I_z = \sum (I_{zi} + y_i^2 \cdot A_i)$$

$$I_{yz} = \sum (I_{yzi} - y_i z_i \cdot A_i)$$

Es wird zunächst das S-Profil in 3 Rechtecke zerlegt, für welche der Schwerpunkt bestimmt werden muss. Der Schwerpunkt eines Rechtecks befindet sich immer in der Mitte der Fläche. Die y-z-Achse fällt mit dem Schwerpunkt des mittleren Rechtecks zusammen.



Der nächste Schritt ist nun die Bestimmung der Flächenträgheitsmomente der Teilflächen bezüglich ihrer Schwerpunktachse. Das obige Rechteck wird bis zur roten Line betrachtet. Die Breite beträgt demnach a – t/2. Genau dasselbe gilt für die Breite des unteren Rechtecks. Die Höhe des mittleren Rechtecks beträgt dann 2a + t/2 + t/2, weil die Höhe von 2a nur bis zur Mitte des oberen und unteren Rechtecks gilt.



Die Flächenträgheitsmomente für ein Rechteck bezüglich der Schwerpunktachsen werden bestimmt zu: Senkrechte Seite hoch 3, parallele Seite einfach. Multiplikation der beiden Werte und Division durch 12.

$$I_{y1}=\frac{t^3\cdot(a-t/2)}{12} \quad I_{y2}=\frac{(2a+t/2+t/2)^3 t}{12} \quad I_{y3}=\frac{t^3(a-t/2)}{12}$$

$$I_{z1}=\frac{(a-t/2)^3 t}{12} \quad I_{z2}=\frac{(t)^3(2a+t/2+t/2)}{12} \quad I_{z3}=\frac{(a-t/2)^3 t}{12}$$

Für die Schwerachsen wird für jedes Rechteck das Deviationsmoment Null, da mindestens eine der Schwereachse (hier: beide) Symmetrieachsen darstellen bezüglich der Teilflächen:

$$I_{yz1}=I_{yz2}=I_{yz3}=0$$

Merke:

$t \ll a$

Alle Terme mit $n > 1$ für t^n fallen demnach raus.

Ausmultiplizieren der Klammern und dann alle Terme mit n > 1 für t^n elimieren. Es verbleibt:

$$I_{y1} = 0 \qquad I_{y2} = \frac{8a^3 t}{12} \qquad I_{y3} = 0$$

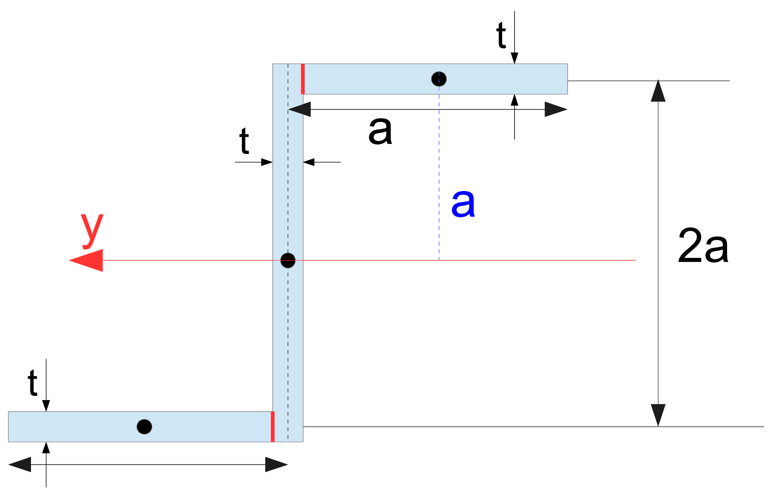
$$I_{z1} = \frac{a^3 t}{12} \qquad I_{z2} = 0 \qquad I_{z3} = \frac{a^3 t}{12}$$

Flächenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse

Es kann als nächstes der Satz von Steiner angewandt werden. Für das Flächenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse werden die Abstände in z-Richtung von der y-Achse des Ursprungskoordinatensystems hin zum Schwerpunkt der betrachteten Teilfläche benötigt.

$$I_y = \sum \left(I_{yi} + z_i^2 \cdot A_i \right)$$

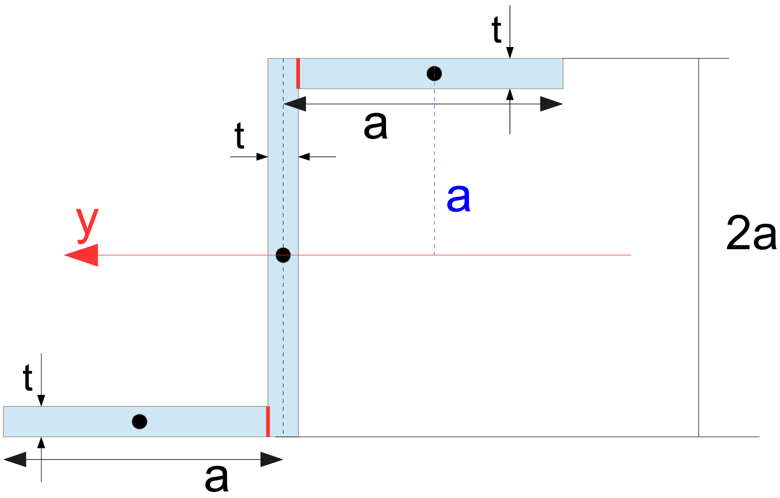
Es wird zunächst der Abstand vom oberen Rechteck zur y-Achse betrachtet:



Der Abstand von der Mitte des oberen Rechtecks zur Mitte des unteren Rechtecks beträgt 2a. Da sich das Koordinatensystem im Schwerpunkt des mittleren Rechtecks befindet beträgt der Abstand:

$$z_1 = \frac{2a}{2} = a$$

Der Schwerpunkt des mittleren Rechtecks liegt in der Mitte, also muss die halbe Höhe herangezogen werden. Es kann auch der gesamte Abstand herangezogen werden:



$$z_1 = \frac{2a + t/2 + t/2}{2} - t/2 = a$$

Die -t/2 müssen abgezogen werden, weil der Abstand im Schwerpunkt des oberen Rechtecks beginnt und nicht am oberen Rand.

Der Abstand vom Schwerpunkt des mittleren Rechtecks zur y-Achse ist null, da diese durch den den Schwerpunkt verläuft.

$$z_2 = 0$$

Der Abstand des unteren Rechtecks zur y-Achse beträgt:

$$z_2 = \frac{2a + t/2 + t/2}{2} - t/2 = a$$

Die **Flächen** A_i der drei Rechtecke sind ($t << a$):

$$A_1 = t \cdot (a - t/2) = t \cdot a$$

$$A_2 = t \cdot (2a + t/2 + t/2) = t \cdot 2a$$

$$A_3 = t \cdot (a - t/2) = t \cdot a$$

Alle Terme für t^n mit $n > 1$ fallen heraus.

Flächenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse

Es kann nun der Satz von Steiner angewandt werden um das Flächenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse für das gesamte Profil zu bestimmen:

$$I_y = \sum (I_{yi} + z_i^2 \cdot A_i)$$

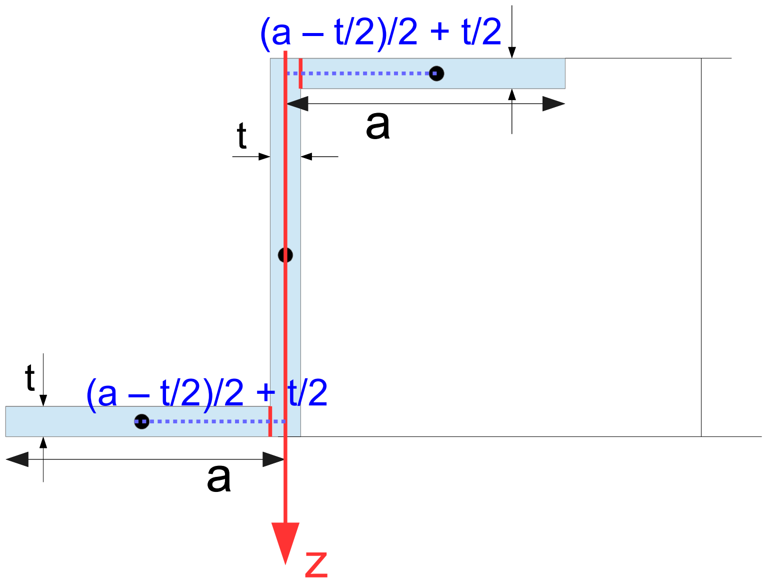
$$I_y = (0 + a^2 \cdot t \cdot a) + (\frac{8a^3 t}{12} + 0 \cdot t \cdot 2a) + (0 + a^2 \cdot t \cdot a)$$

$$I_y = (a^2 \cdot t \cdot a) + (\frac{8a^3 t}{12}) + (a^2 \cdot t \cdot a)$$

$$I_y = 2 t a^3 + \frac{8a^3 t}{12}$$

$$I_y = \frac{8a^3 t}{3}$$

Flächenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse



Die Abstände sind:

$$z_1 = \frac{(a - \frac{t}{2})}{2} + \frac{t}{2} = \frac{a}{2} + \frac{t}{4} \qquad z_2 = 0 \qquad z_3 = \frac{(a - \frac{t}{2})}{2} + \frac{t}{2} = \frac{a}{2} + \frac{t}{4}$$

Es kann als nächstes das Flächenträgheitsmoment des gesamten Profils bezüglich der z-Achse bestimmt werden:

$$I_z = \sum (I_{zi} + y_i^2 \cdot A_i)$$

$$I_z = \left(\frac{a^3 t}{12} + \left(\frac{a}{2} + \frac{t}{4}\right)^2 \cdot t \cdot a\right) + (0 + 0 \cdot 2a\,t) + \left(\frac{a^3 t}{12} + \left(\frac{a}{2} + \frac{t}{4}\right)^2 \cdot t \cdot a\right)$$

Merke: Auflösung der Klammer mittels binomischer Formel

Es gilt wieder t << a:

$$I_z = \frac{2a^3 t}{3}$$

Bestimmung des Deviationsmoments

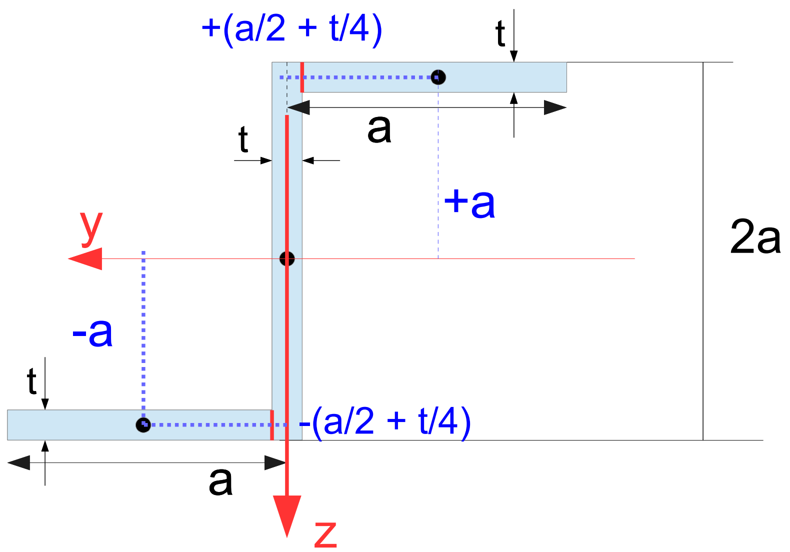
Merke: Da die y-z-Achsen des gesamten Profils keine Symmetrieachsen darstellen, fällt das Deviationsmoment nicht raus.

Die Deviationsmomente der einzelnen Teilrechtecke bezüglich ihrer Schwereachsen sind null. Aber der Satz von Steiner, also der Abstand in y-Richtung und z-Richtung zum Ausgangskoordinatensystem muss berücksichtigt werden.

Bei den Flächenträgheitsmomenten konnte der Abstand als Betrag angesehen werden, weil dieser innerhalb der Gleichung quadriert wird. Allerdings muss beim Deviationsmoment der Abstand in negative und positive Achsenrichtung zusätzlich berücksichtigt werden.

$$I_{yz} = \sum (I_{yzi} - y_i z_i \cdot A_i)$$

Abstände in y-und z-Richtung bei den einzelnen Rechtecken (es können die obigen Abstände übernommen werden, allerdings mit Berücksichtigung der Richtung):



$$y_1 = +\left(\frac{a}{2} + \frac{t}{2}\right)$$

$$z_1 = +a$$

$$y_2 = z_2 = 0$$

$$y_3 = -\left(\frac{a}{2} + \frac{t}{2}\right)$$

$$z_3 = -a$$

Es wird als nächstes das Deviationsmoment für das obige Profil bestimmt:

$$I_{yz}=(0-a\cdot(\frac{a}{2}+\frac{t}{2})\cdot t\cdot a)+(0-0\cdot 2a\cdot t)+(0-(-a)\cdot(-\frac{a}{2}-\frac{t}{2})\cdot t\cdot a)$$

$$I_{yz}=-\frac{a^3 t}{2}-\frac{a t^2}{2}-\frac{a^3 t}{2}-\frac{t^2 a}{2}$$

Es gilt wieder t << a:

$$I_{yz}=-a^3 t$$

Bestimmung der Hauptachsen

Nachdem nun alle Werte für die Bestimmung der Hauptachsen gegeben sind, können diese aus der folgenden Gleichung bestimmt werden:

$$I_{1/2}=\frac{I_y+I_z}{2}\pm\sqrt{(\frac{I_y-I_z}{2})^2+I_{yz}^2}$$

$$I_{1/2}=\frac{\frac{8a^3 t}{3}+\frac{2a^3 t}{3}}{2}\pm\sqrt{(\frac{\frac{8a^3 t}{3}-\frac{2a^3 t}{3}}{2})^2+(a^3 t)^2}$$

$$I_{1/2}=\frac{5}{3}a^3 t\pm\sqrt{2(a^3 t)^2}$$

$$I_1=\frac{5}{3}a^3 t+\sqrt{2}a^3 t=3{,}08\,a^3 t$$

$$I_2=\frac{5}{3}a^3 t-\sqrt{2}a^3 t=0{,}25\,a^3 t$$

Bestimmung der Hauptrichtung

$$\tan(2\alpha)=\frac{2I_{yz}}{I_y-I_z}$$

$$\alpha=\tan^{-1}(\frac{2\cdot(-a^3 t)}{\frac{8a^3 t}{3}-\frac{2a^3 t}{3}})$$

$$2\alpha = \tan^{-1}(1) = -45°$$

$$\alpha = \tan^{-1}(1) = -22{,}5°$$

Um herauszufinden zu welcher Hauptachse dieser Winkel gehört, verwendet man die Formeln für die Koordinatentransformation und setzt dort den Winkel ein:

$$I_\eta = \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{1}{2}(I_y - I_z)\cos(2\alpha) + I_{yz}\sin(2\alpha)$$

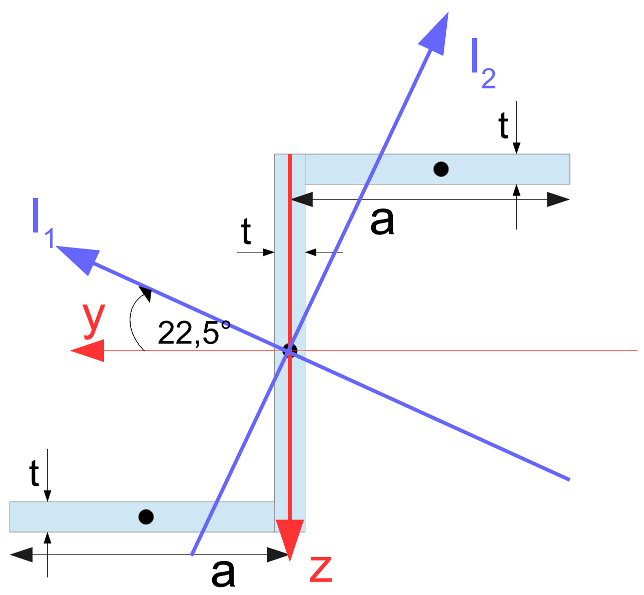
$$I_\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}a^3 t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{6}{3}a^3 t\right)\cos(2\cdot(-22{,}5°)) - a^3 t \sin(2\cdot(-22{,}5°))$$

$$I_\eta = \frac{5}{3}a^3 t + a^3 t\cos(-45°) - a^3 t \sin(-45°)$$

$$I_\eta = \frac{5}{3}a^3 t + a^3 t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a^3 t \frac{\sqrt{2}}{2}$$

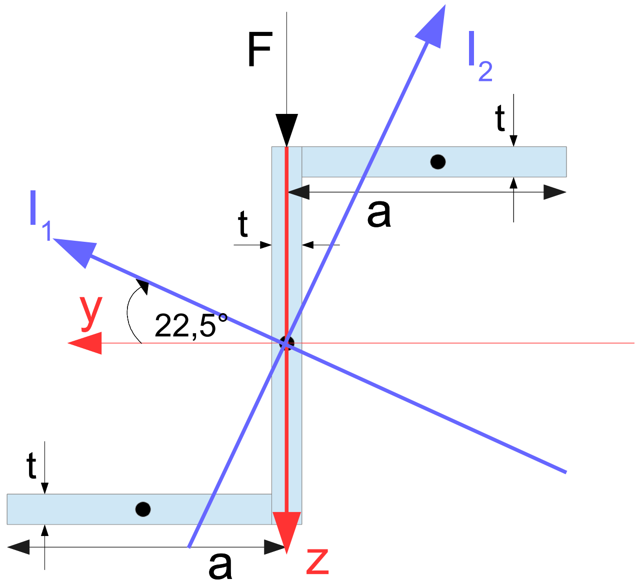
$$I_\eta = 3{,}08\, a^3 t = I_1$$

Bei einer Drehung des Ausgangskoordinatensystems um -22,5° (negativer Winkel = negative Drehrichtung) ergibt sich die Hauptachse I_1. Die Hauptachse I_2 liegt senkrecht auf I_1, deshalb ergibt sich für I_2 ein Winkel von -22,5° + 90° = 67,5° (positive Drehrichtung).



Merke: Ein positiver Winkel bedeutet eine positive Drehrichtung (Linksdrehung).
Ein negativer Winkel bedeutet eine negative Drehrichtung (Rechtsdrehung).

Nachdem die beiden Hauptachsen bestimmt worden sind und die dazugehörige Hauptrichtung kann man nun auch deutlich erkennen, dass die in z-Richtung angreifende Kraft nicht in Richtung einer der Hauptachsen angreift. Es liegen demnach Momente um beide Hauptachsen vor --> Zweiachsige Biegung.



Bestimmung der Biegelinie

Die Formel für die Bestimmung der Biegelinie bei schiefer Biegung sind:

$$Ev''=\frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$Ew''=\frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

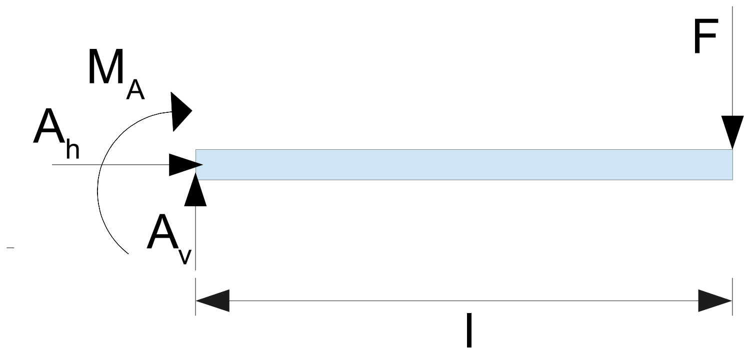
Es handelt sich hierbei um die Durchbiegung **v** in y-Richtung und die Durchbiegung **w** in z-Richtung.

Bevor die Biegelinie bestimmt werden kann, müssen zunächst die Momente M_z und M_y bestimmt werden.

Da nur eine Kraft in z-Richtung angreift, existiert nur ein Moment um die y-Achse. $M_z = 0$.

Moment um die y-Achse

Lagerkräfte bestimmen:



Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: A_h = 0$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: A_v - F = 0$$

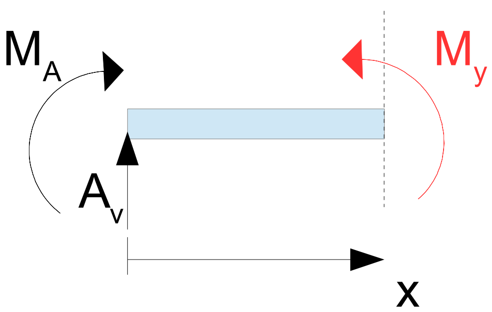
$$A_v = F$$

Momentengleichgewichtsbedingung um A:

$$-M_A - F \cdot l = 0$$

$$M_A = -F \cdot l$$

Nachdem nun die Lagerreaktionen bestimmt sind kann als nächstes ein Schnitt durch das Bauteil durchgeführt werden, um das Moment um die y-Achse zu bestimmen:



Momentengleichgewichtsbedingung (Bezugspunkt ist der Schnitt):

$$M_y - M_A - A_v \cdot x = 0$$

Einsetzen der Werte:

$$M_y - (-Fl) - F \cdot x = 0$$

Auflösen nach M_y:

$$M_y = (-Fl) + F \cdot x$$

$$\boxed{M_y = F(x - l)}$$

Durchbiegung in y-Richtung

Es kann als nächstes die Durchbiegung bestimmt werden:

$$Ev'' = \frac{-F(x-l) \cdot (-a^3 t)}{\frac{8}{3} a^3 t \cdot \frac{2}{3} a^3 t - (a^3 t)^2} \qquad Ev'' = \frac{F(x-l) \cdot a^3 t}{\frac{16}{9} a^6 t^2 - a^6 t^2}$$

$$Ev'' = \frac{F(x-l) \cdot a^3 t}{\frac{7}{9} a^6 t^2} \qquad Ev'' = \frac{F(x-l)}{\frac{7}{9} a^3 t}$$

$$Ev'' = \frac{9}{7} \frac{F(x-l)}{a^3 t}$$

Es folgt die 1. Integration:

$$Ev' = \frac{9}{7a^3 t} \int (Fx - Fl)\,dx$$

$$\boxed{Ev' = \frac{9}{7a^3 t} \cdot \left(\frac{1}{2} Fx^2 - Flx\right) + C_1}$$ 1. Ableitung der Durchbiegung

Es folgt die 2. Integration:

$$Ev' = \frac{9}{7a^3 t} \cdot \int \left(\frac{1}{2} Fx^2 - Flx\right) dx + \int C_1\,dx$$

$$\boxed{Ev = \frac{9}{7a^3 t} \cdot \left(\frac{1}{6}Fx^3 - \frac{1}{2}F l x^2\right) + C_1 x + C_2}$$ Durchbiegung

Nachdem nun die Integration durchgeführt wurde, können als nächstes die Integrationskonstanten bestimmt werden. Es gilt für die feste Einspannung:

Randbedingung: Feste Einspannung v = 0 v' = 0

Die feste Einspannung ist gegeben bei **x = 0**, hier ist die Durchbiegung v = 0 und die erste Ableitung ebenfalls v' = 0. Mittels dieser Randbedingungen ist es nun möglich die Integrationskonstanten zu bestimmen.

Als erstes setzen wir v = 0 für x =0:

$$E \cdot 0 = \frac{9}{7a^3 t} \cdot \left(\frac{1}{6}F \cdot 0^3 - \frac{1}{2}F l \cdot 0^2\right) + C_1 \cdot 0 + C_2 \quad C_2 = 0$$

Danach betrachten wird die 1. Ableitung der Durchbiegung v' und setzen v' = 0 für x = 0:

$$E \cdot 0 = \frac{9}{7a^3 t} \cdot \left(\frac{1}{2}F \cdot 0^2 - F l \cdot 0\right) + C_1 \quad C_1 = 0$$

Die Durchbiegung ergibt sich also zu:

$$Ev = \frac{9}{7a^3 t} \cdot \left(\frac{1}{6}Fx^3 - \frac{1}{2}F l x^2\right)$$

$$\boxed{Ev = \frac{9F}{7a^3 t} \cdot \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}l x^2\right)}$$

Aufgrund dessen, dass l > x gilt:

$$\boxed{\frac{1}{6}x^3 < \frac{1}{2}l x^2}$$

Die Durchbiegung in y-Richtung ist demnach negativ. Das bedeutet, dass die Durchbiegung in Richtung der negative y-Achse erfolgt!

Durchbiegung in z-Richtung

$$Ew''=\frac{M_z I_{yz}-M_y I_z}{I_y I_z-I_{yz}^2}$$

$$Ew''=\frac{-F(x-l)\cdot\frac{2}{3}a^3 t}{\frac{8}{3}a^3 t\frac{\cdot 2}{3}a^3 t-(-a^3 t)^2}$$

$$Ew''=\frac{-F(x-l)\cdot\frac{2}{3}a^3 t}{\frac{16}{9}a^6 t^2-a^6 t^2}$$

$$Ew''=\frac{-F(x-l)\cdot\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}a^3 t}$$

$$\boxed{Ew''=\frac{-6F(x-l)}{7a^3 t}}$$

Es folgt die 1. Integration:

$$Ew'=-\frac{6}{7a^3 t}\int(Fx-Fl)dx$$

$$Ew'=-\frac{6}{7a^3 t}\cdot\left(\frac{1}{2}Fx^2-Flx\right)+C_3$$ 1.Ableitung der Durchbiegung

Es folgt die 2. Integration:

$$Ew=-\frac{6}{7a^3 t}\cdot\int\left(\frac{1}{2}Fx^2-Flx\right)dx+\int C_3\,dx$$

$$Ew=-\frac{6}{7a^3 t}\cdot\left(\frac{1}{6}Fx^3-\frac{1}{2}Flx^2\right)+C_3x+C_4$$ Durchbiegung

Es werden als nächstes die Integrationskonstanten aus den Randbedingungen bestimmt:

Randbedingung: Feste Einspannung w = 0 w' = 0

Wir betrachten zunächst w' = 0 für x = 0:

$$E \cdot 0 = -\frac{6}{7a^3 t} \cdot \left(\frac{1}{2} F \cdot 0^2 - Fl \cdot 0\right) + C_3 \qquad C_3 = 0$$

Danach betrachten wird w = 0 für x = 0:

$$E \cdot 0 = -\frac{6}{7a^3 t} \cdot \left(\frac{1}{6} F \cdot 0^3 - \frac{1}{2} Fl \cdot 0^2\right) + 0 \cdot 0 + C_4 \qquad C_4 = 0$$

Die Durchbiegung in z-Richtung ergibt sich durch:

$$Ew = -\frac{6}{7a^3 t} \cdot \left(\frac{1}{6} F x^3 - \frac{1}{2} Fl x^2\right)$$

$$\boxed{Ew = -\frac{6F}{7a^3 t} \cdot \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} l x^2\right)}$$

Da x < l wird der rechte Term in der Klammer größer als der linke Term. Die gesamte Gleichung wird demnach positiv. Die Durchbiegung erfolgt in Richtung der positiven z-Achse.