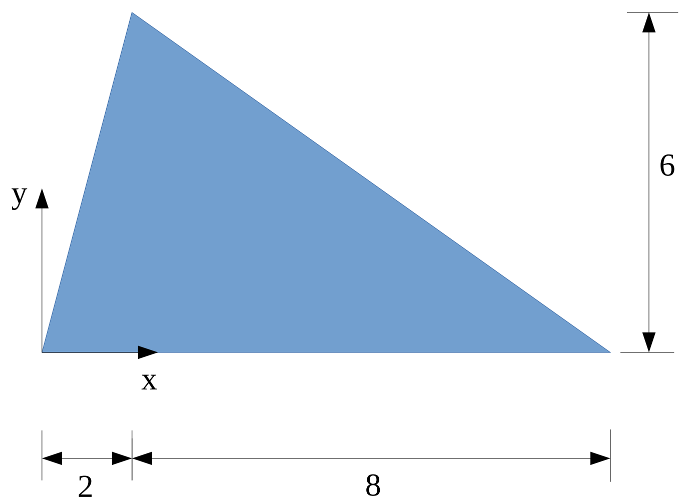
Lösungen zum Crashkurs: Statik – Teil 1
Thema: Gleichgewichtsbedingungen, Schnittgrößen und Flächenschwerpunkte

Aufgabe zum Flächenschwerpunkt



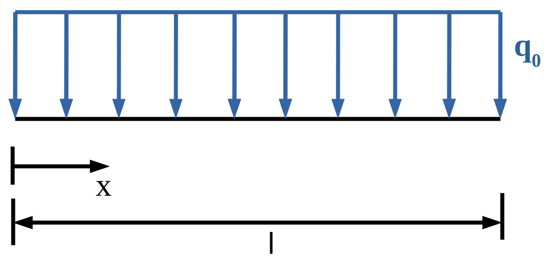
Gebe die Schwerpunktkoordinaten für das oben dargestellte Profil bzgl. des eingezeichneten Koordinatensystems an!

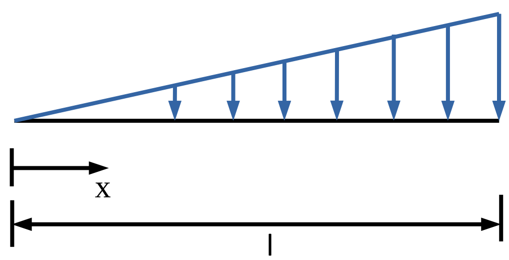
*In dieser Aufgabe zeige ich zwei Möglichkeiten zur Berechnung des Schwerpunktes auf. Einmal verwende ich die blaue Fläche, indem ich diese in Teilflächen zerlegen. Zum anderen betrachten wir ein gesamtes Quadrat der Länge 8*4 und ziehen die Aussparungen (ebenfalls in Teilflächen zerlegt) von diesem Quadrat ab. Die zweite Berechnung soll aufzeigen, wie mit Aussparungen gerechnet wird.*

Verwendete Formeln:

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} \qquad y_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

Aufgabe zur Streckenlast (Resultierende und Angriffspunkt)





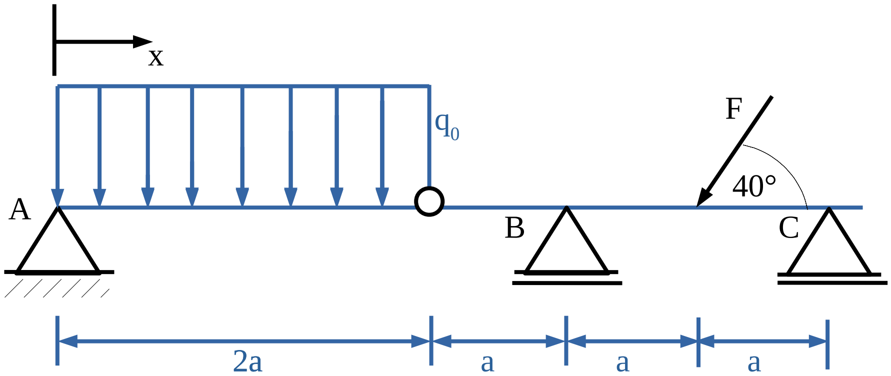
Bestimme für jeden belasteten Träger die Resultierende R der Streckenlast sowie ihren Angriffspunkt x_R.

Diese Aufgabe soll euch aufzeigen, wie ihr mit Streckenlasten umgehen müsst, wenn ihr z.B. Auflagerkräfte berechnen sollt. In diesem Fall muss die Streckenlast zu einer Resultierenden zusammengefasst werden, die dann in die Gleichgewichtsbedingungen eingeht. Für die Momentengleichgewichtsbedingung muss zusätzlich die Lage der Resultierenden bekannt sein, um den Hebelarm bestimmen zu können.

Ich zeige euch außerdem, wie ihr die Resultierende und die Lage der Resultierenden mittels Integration von q(x) ermittelt.

Hinweis: Parabelförmige Streckenlast in der Mitschrift - PDF

Aufgabe zur Kräftezerlegung, Auflagerkräften und Schnittgrößen



Das skizzierte System ist durch eine konstante Streckenlast q(x) und eine Einzelkraft F belastet.

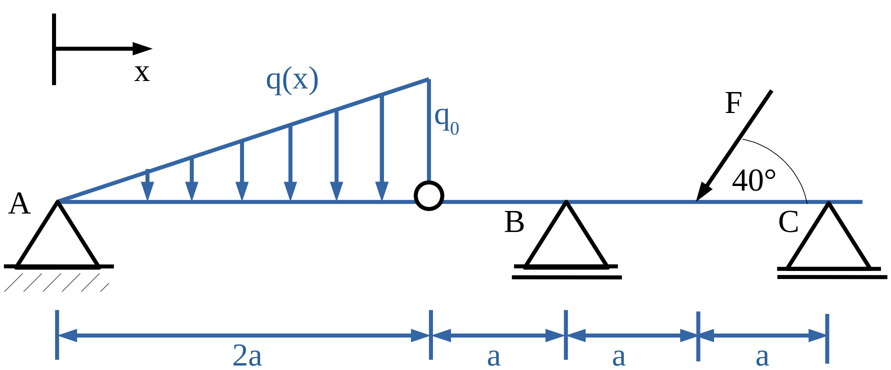
Gegeben: a, q_0, F = q_0 a

a) Berechne die Auflagerkräfte!

- Bilde die Resultierende der Streckenlast sowie den Angriffspunkt!
- Führe die Kräftezerlegung durch!
- Berechne die Auflagerkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen!

b) Bestimme die Schnittgrößenverläufe für das gesamte System.

Das System wird nun durch eine lineare Streckenlast belastet.

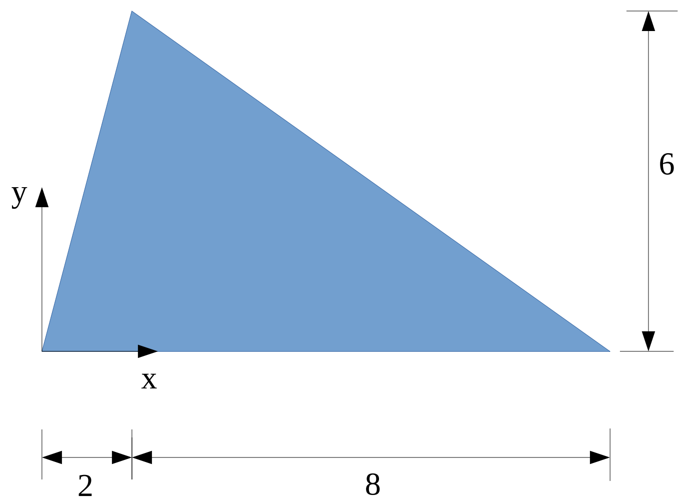


a) Berechne die Auflagerkräfte!

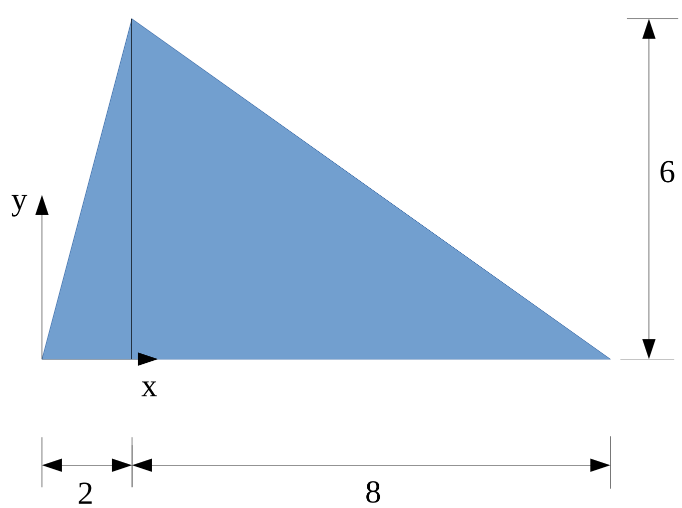
b) Bestimme die Schnittgrößenverläufe für das gesamte System.

Diese Aufgabe soll euch zeigen, wie ihr die Streckenlasten zur Berechnung von Auflagerkräften berücksichtigt, wie ihr Schnittgrößen mit und ohne Streckenlasten berechnet sowie die Kräftezerlegung durchführt.

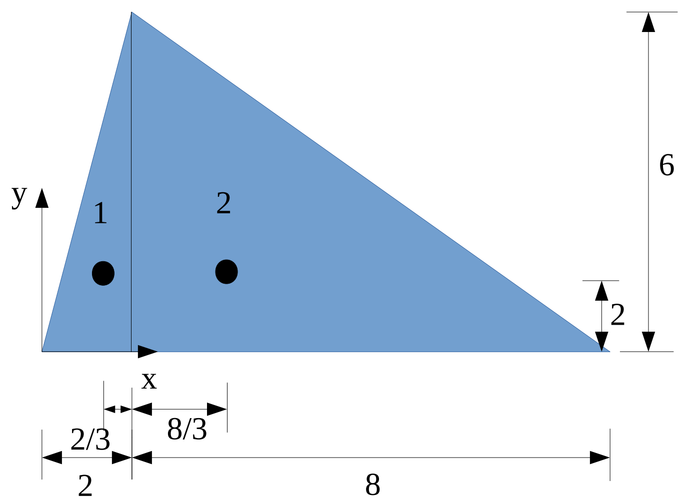
Lösung Aufgabe 1)



1. In Teilflächen mit **bekannter Schwerpunktlage** zerlegen:



Wir haben das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, für welche die Schwerpunktlage bekannt ist. Vom rechten Winkel ausgehend liegt der Schwerpunkt eines Dreiecks bei 1/3 der Länge und bei 1/3 der Höhe.



Als nächstes können wir mit der Berechnung beginnen. Die Formel zur Berechnung eines Schwerpunktes für zusammengesetzte Fläche ist:

Verwendete Formeln:

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} \qquad y_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

Wir beginnen mit dem Schwerpunkt in x-Richtung:

Fläche 1: Rechtwinkliges Dreieck

x_1 = Abstand vom Koordinatenursprung hin zum Schwerpunkt der 1. Fläche in x-Richtung

$$x_1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

A_1 = Flächeninhalt der 1. Flächeninhalt

$$A_1 = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Fläche 2: Rechtwinkliges Dreieck

x_2 = Abstand vom Koordinatenursprung hin zum Schwerpunkt der 2. Fläche in x-Richtung

$$x_2 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

A_2 = Flächeninhalt der 2. Flächeninhalt

$$A_2 = 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 24$$

Anwendung der Formel:

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 6 + \frac{14}{3} \cdot 24}{6 + 24} = 4$$

Als nächsten betrachten wir den Abstand des Schwerpunktes der Gesamtfläche vom Koordinatenursprung in y-Richtung.

y_1 = Abstand vom Koordinatenursprung hin zum Schwerpunkt der 1. Fläche in y-Richtung

$$y_1 = 2$$

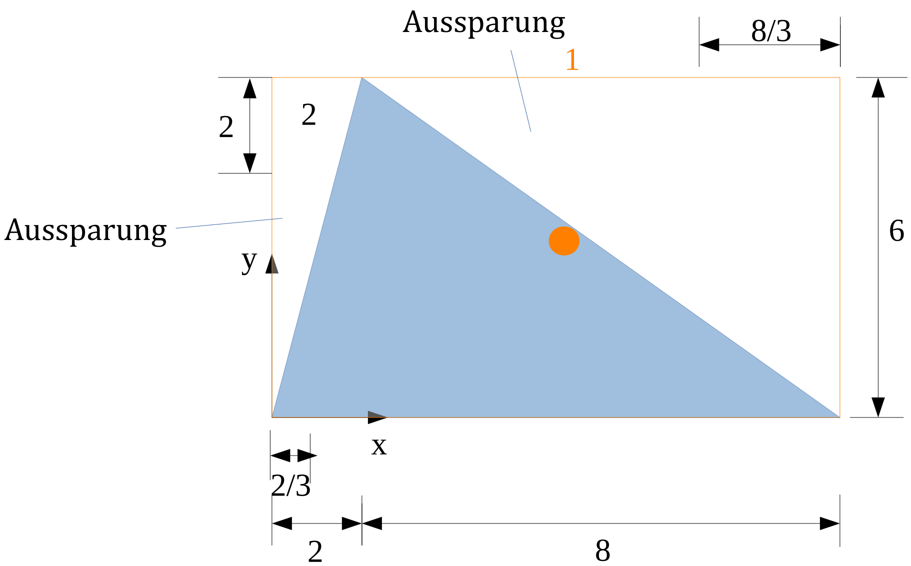
y_2 = Abstand vom Koordinatenursprung hin zum Schwerpunkt der 2. Fläche in y-Richtung

$$y_2 = 2$$

Anwendung der Formel:

$$y_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{2 \cdot 6 + 2 \cdot 24}{6 + 24} = 2$$

Alternative Berechnung über Aussparung:



Berechnung der Gesamtfläche (Quadrat) und Subtraktion der Aussparungen.

Fläche 1 – **Gesamtfläche Quadrat**

x_1 = Abstand vom Koordinatenursprung zum Schwerpunkt der Gesamtfläche in x-Richtung

Der Schwerpunkt eines Rechtecks liegt in der Mitte:

$$x_1 = 5$$

$$A_1 = 10 \cdot 6 = 60$$

Fläche 2 – Dreieckige Fläche

x_2 = Abstand vom Koordinatenursprung zum Schwerpunkt der 2.Fläche in x-Richtung

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Fläche 3 – Dreieckige Fläche

x_3 = Abstand vom Koordinatenursprung zum Schwerpunkt der 3.Fläche in x-Richtung

$$x_3 = 10 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}$$

$$A_3 = 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 24$$

Anwenden der Formel:

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2 - x_3 A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{5 \cdot 60 - \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{22}{3} \cdot 24}{60 - 6 - 24} = 4$$

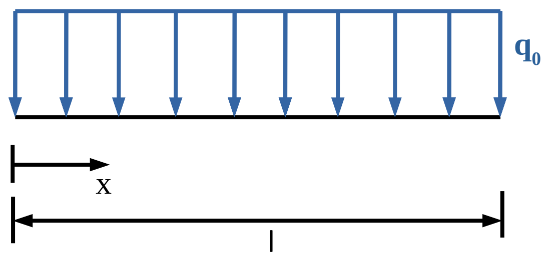
Für die Schwerpunktlage in y-Richtung gilt:

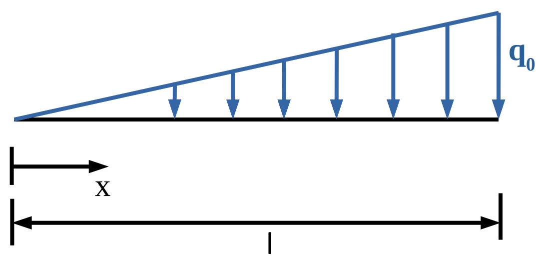
$$y_1 = 3$$

$$y_2 = y_3 = 4$$

$$y_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2 - y_3 A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{3 \cdot 60 - 4 \cdot 6 - 4 \cdot 24}{60 - 6 - 24} = 2$$

Lösung Aufgabe 2





Die Resultierende kann über zwei Wege ermittelt werden: Flächeninhalt der gegebenen Streckenlast (sofern bekannt) oder Integration von q(x).

Der Angriffspunkt der Resultierenden der Streckenlast liegt im Schwerpunkt der Fläche. Der Schwerpunkt ist entweder bekannt oder kann über die Integration bestimmt werden.

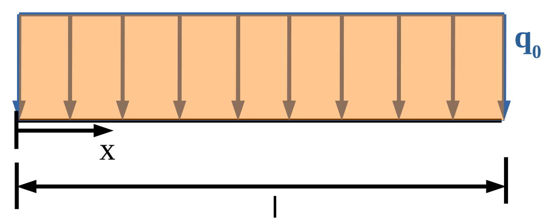
Variante 1 - Flächeninhalt und bekannter Schwerpunkt

Für bekannte Flächen (rechteckige Streckenlast, dreieckige Streckenlast) kann die Resultierende einfach ermittelt werden, indem der Flächeninhalt berechnet wird.

Rechteckige Streckenlast = rechteckige Fläche

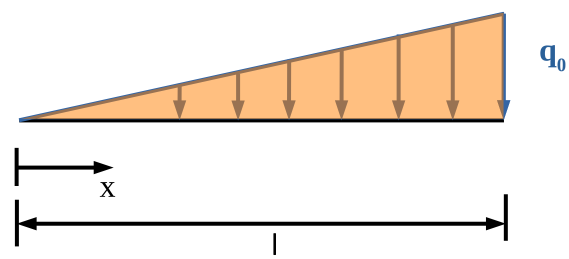
Fläche Rechteck = Höhe mal Breite

$$R = q_0 \cdot l$$



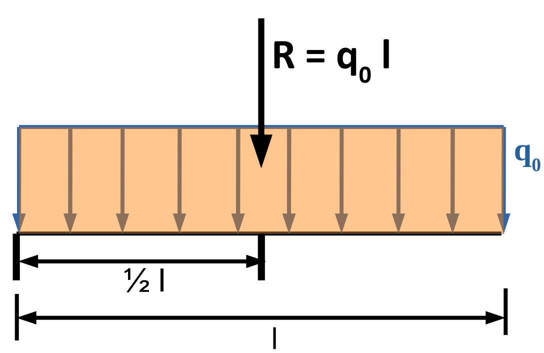
Fläche Dreieck = Höhe mal Breite durch zwei

$$R = \frac{q_0 \cdot l}{2}$$

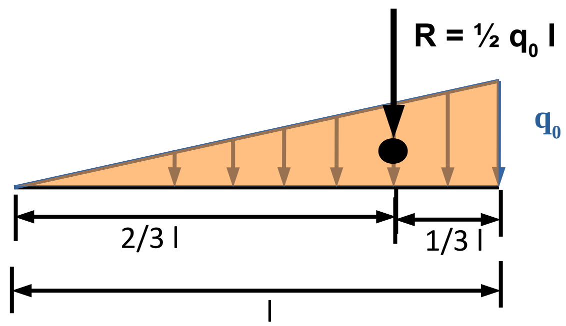


Die Resultierende einer Streckenlast greift immer im Schwerpunkt der Fläche an. Für Rechteck und Dreieck sollte die Schwerpunktlage bekannt sein.

Schwerpunkt Rechteck = mittig



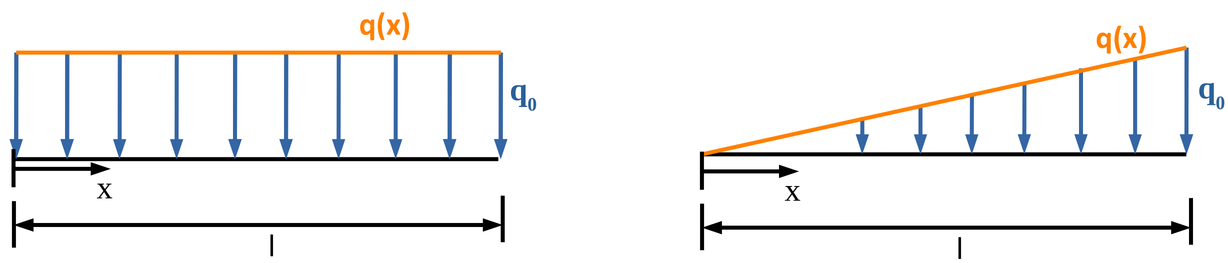
Schwerpunkt Dreieck = vom rechten Winkel ausgehend bei 1/3 der Länge



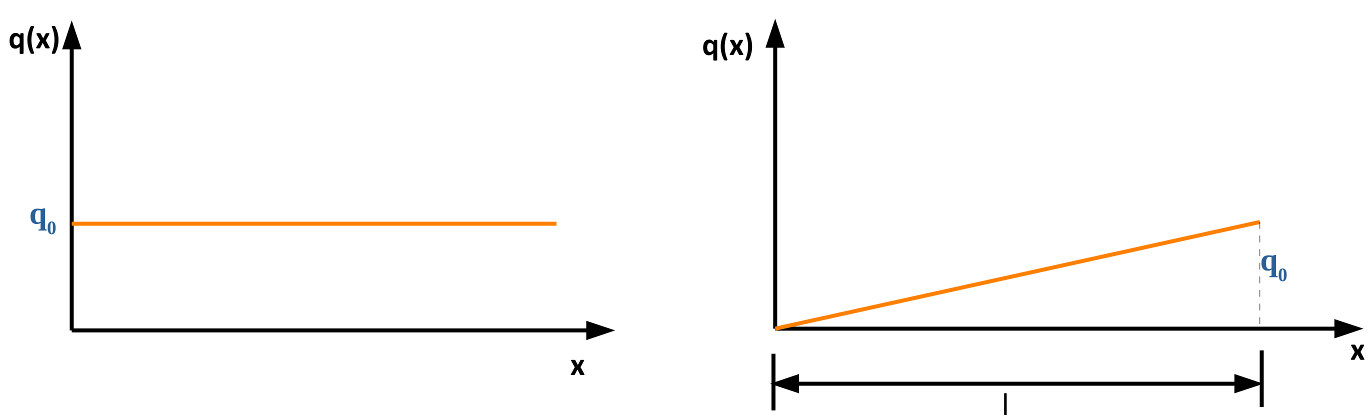
Variante 2 – Resultierende und Schwerpunkt über Integration

Diese Variante ist – einmal angewendet – relativ einfach und unkompliziert und kann auch auch Streckenlasten mit Flächen angewendet werden, die nicht bekannt sind.

Zunächst benötigen wir hier die Funktion q(x). Diese können wir erhalten, wenn wir ein Koordinatensystem hinzuziehen:



Der Balkenanfang ist dabei der Koordinatenursprung:



Als nächstes kann für lineare Funktionen die Geradengleichung herangezogen werden:

$$q(x) = mx + b$$

m = Steigung
b = Beginn der Funktion auf der y-Achse

Für die linke Funktion gilt:

$$b = q_0$$

$$m = 0$$

Und damit:

$$q(x) = q_0$$

Für die rechte Funktion gilt:

$$b = 0$$

$m = \frac{q_0}{l}$ l-Schritte in x-Richtung (Nenner), q_0-Schritte in y-Richtung (Zähler). Beide positiv, weil Schritte in positive Achsenrichtungen.

Und damit:

$$q(x) = \frac{q_0}{l} x$$

Resultierende mittels Integration bestimmen

Nachdem die Funktionen q(x) ermittelt sind, können wir die Resultierende bestimmen, indem wir diese nach dx integrieren:

$R = \int q(x)\,dx$ Das Integral spiegelt nichts anderes als den Flächeninhalt wieder.

Die Streckenlast wirkt von x = 0 bis x = l, dies sind auch die Grenzen:

$$R = \int_0^l q(x)\,dx$$

Integration für die **rechteckige Streckenlast** durchführen:

$$R = \int_0^l q_0 \, dx = [q_0 \cdot x]_0^l = q_0 \cdot l - q_0 \cdot 0 = q_0 \cdot l$$

Die rechteckige Streckenlast mit konstantem q_0 hat also eine Resultierende von:

$$R = q_0 \cdot l$$

Integration für die **dreieckige Streckenlast** durchführen:

$$R = \int_0^l \frac{q_0}{l} x \; dx = \frac{q_0}{l} \int_0^l x \; dx = \frac{q_0}{l} \cdot \left[\frac{1}{2} x^2\right]_0^l = \frac{q_0}{l} \cdot \left[\frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{2} 0^2\right] = \frac{1}{2} q_0 l$$

Der Schwerpunkt der Streckenlasten ist der Angriffspunkt der Resultierenden und kann ebenfalls mittels Integration bestimmt werden:

$$x_R = \frac{\int_0^l q(x) x \, dx}{\int_0^l q(x) \, dx}$$

Der Nenner ist hierbei die Resultierende, die wir bereits oben berechnet haben

Wir berechnen also noch den Zähler:

$$\int_0^l q(x) x \, dx = \int_0^l q_0 x \, dx = \left[q_0 \frac{1}{2} x^2\right]_0^l = \frac{1}{2} q_0 l^2$$

Rechteckige Streckenlast

$$\int_0^l q(x) x \, dx = \int_0^l \frac{q_0}{l} x^2 dx = \frac{q_0}{l} \cdot \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^l = \frac{1}{3} q_0 l^2$$

Dreieckige Streckenlast

Anwendung der Formel:

$$x_R = \frac{\frac{1}{2} q_0 l^2}{q_0 l} = \frac{1}{2} l$$

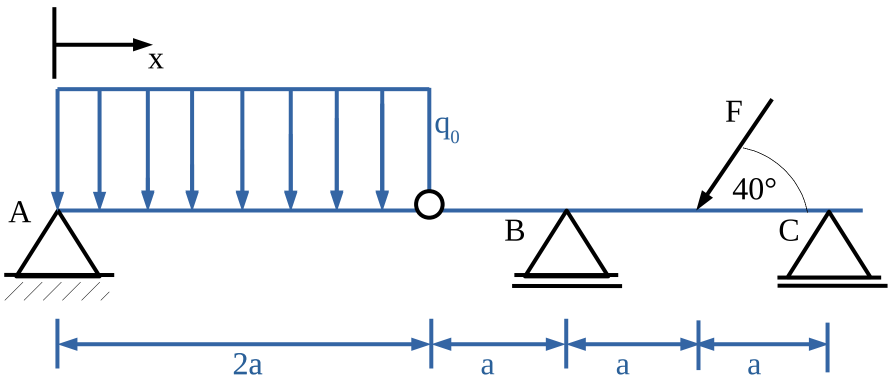
Schwerpunkt der rechteckigen Streckenlast

$$x_R = \frac{\frac{1}{3} q_0 l^2}{\frac{1}{2} q_0 l} = \frac{2}{3} l$$

Schwerpunkt der dreieckigen Streckenlast

Lösung Aufgabe 3

Aufgabe zur Kräftezerlegung, Auflagerkräften und Schnittgrößen



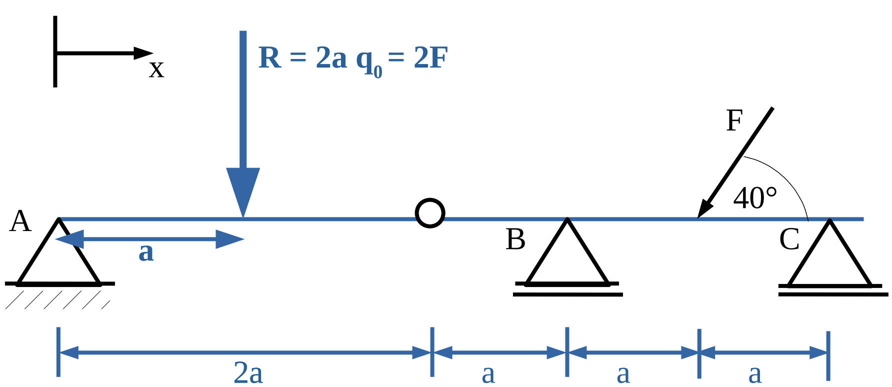
Das skizzierte System ist durch eine konstante Streckenlast q(x) und eine Einzelkraft F belastet.

a) Berechne die Auflagerkräfte!

- Bilde die Resultierende der Streckenlast sowie den Angriffspunkt!

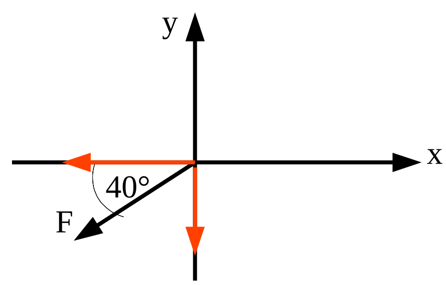
$R = 2a \cdot q_0 = 2F$ Flächeninhalt rechteckige Fläche

$x_R = a$ Schwerpunkt liegt in der Mitte, von x-ausgehend bei x =a



- Führe die Kräftezerlegung durch!

Die Kraft F liegt im 3. Quadranten. Damit zeigt die x-Komponente in Richtung der negativen x-Achse und die y-Komponente in Richtung der negativen y-Achse.



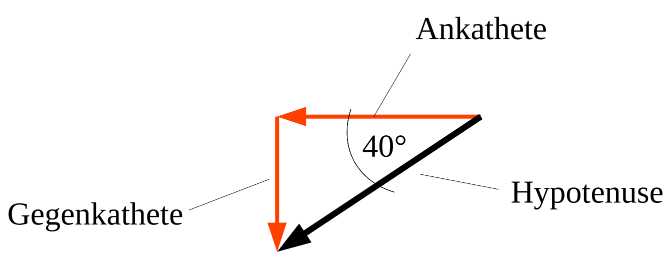
Kraftkomponente in x-Richtung liegt am Winkel, ist also die Ankathete und damit wird der Kosinus verwendet:

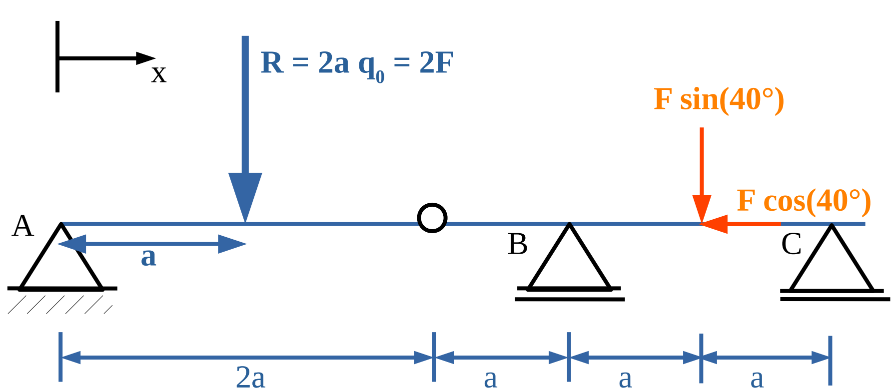
$F\cos(40°)$ Betrag der Kraftkomponente in x-Richtung

Kraftkomponente in y-Richtung liegt nicht am Winkel, ist also die Gegenkathete und damit wird der Sinus verwendet:

$F\sin(40°)$ Betrag der Kraftkomponente in y-Richtung

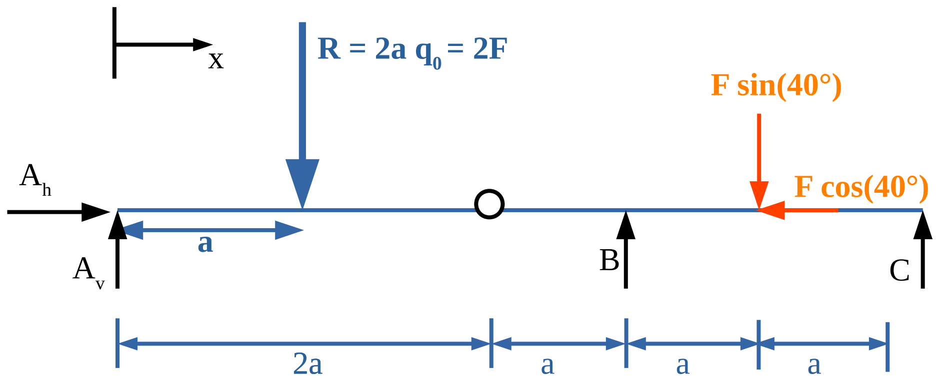
Zur Veranschaulichung von Ankathete und Gegenkathete kann die grafische Vektoraddition der beiden Komponenten durchgeführt werden, die Resultierende ist dann die Kraft F:





- Berechne die Auflagerkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen!

Zunächst benötigen wir den Freischnitt:



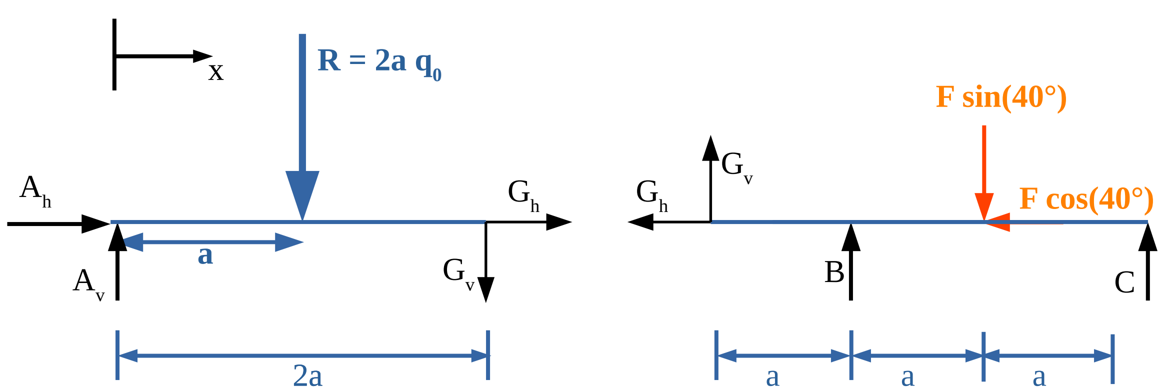
Als nächstes können wir die Auflagerkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen:

$\rightarrow: A_h - F\cos(40°) = 0$

$A_h = F\cos(40°)$

$\uparrow: A_v + B + C - R - F\sin(40°) = 0$ **Zu viele Unbekannte**

Auch bei de Momentengleichgewichtsbedingung werden mindestens zwei Unbekannte anfallen. Wir haben also 4 Unbekannte und drei Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem gegeben. Da aber ein Gelenk vorhanden ist, können wir das System in zwei Teilsysteme zerlegen und für jedes Teilsystem die drei Gleichgewichtsbedingungen anwenden.



Linkes Teilsystem:

Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: A_h + G_h = 0$$

$$G_h = -A_h = -F\cos(40°)$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: A_v - G_v - R = 0$$

Momentengleichgewichtsbedingung um A oder G (hier A):

$$-R \cdot a - G_v \cdot 2a = 0$$

$$G_v = \frac{-R}{2} = -F \qquad \textbf{|mit R = 2F}$$

Anwendung der vertikalen Gleichgewichtsbedingung führt uns auf A_v:

$$A_v = G_v + R = -F + 2F = F$$

Rechtes Teilsystem:

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: G_v + B + C - F\sin(40°) = 0$$

Momentengleichgewichtsbedingung um B oder C (hier C):

$$-G_v \cdot 3a - B \cdot 2a + F\sin(40°) \cdot a = 0 \qquad \text{|nach B auflösen}$$

$$B\,2a = -G_v \cdot 3a + F\sin(40°) \cdot a \qquad \text{| durch 2a teilen}$$

$$B = -\frac{3}{2}G_v + \frac{1}{2}F\ \sin(40°) \qquad \text{|Einsetzen von } G_v = -F$$

$$B = \frac{3}{2}F + \frac{1}{2}F\ \sin(40°)$$

$$B = F\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sin(40°)\right) = 1{,}82\ F$$

Aus der vertikalen Gleichgewichtsbedingung können wir C berechnen:

$$C = -G_v - B + F\sin(40°)$$

$$C = F - 1{,}82\,F + F\sin(40°) = F(1 - 1{,}82 + \sin(40°)) = -0{,}18\ F$$

Es ergeben sich die folgenden Lagerkräfte:

$$A_h = F\cos(40°)$$

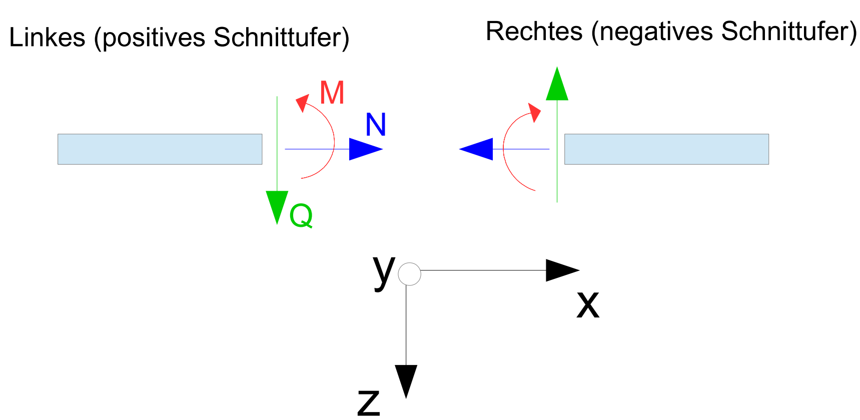
$$A_v = F$$

$$B = 1{,}82\,F$$

$$C = -0{,}18\,F$$

b) Schnittgrößen

Danach können die Schnittgrößen berechnet werden. Hierzu betrachten wir zunächst das linke und rechte Schnittufer:



Am linken (positiven) Schnittufer zeigen die Schnittgrößen in positive Achsenrichtung in Bezug auf das obige x,y,z-Koordinatensystem. Das Moment ist am linken Schnittufer ein linksdrehendes Moment, welches in der Physik als positives Moment definiert ist. Am rechten (negativen)

Schnittufer zeigen die Schnittgrößen in negative Achsenrichtung. Das Moment ist hierbei ein rechtsdrehendes Moment.
Es werden Schnitte durchgeführt bei:

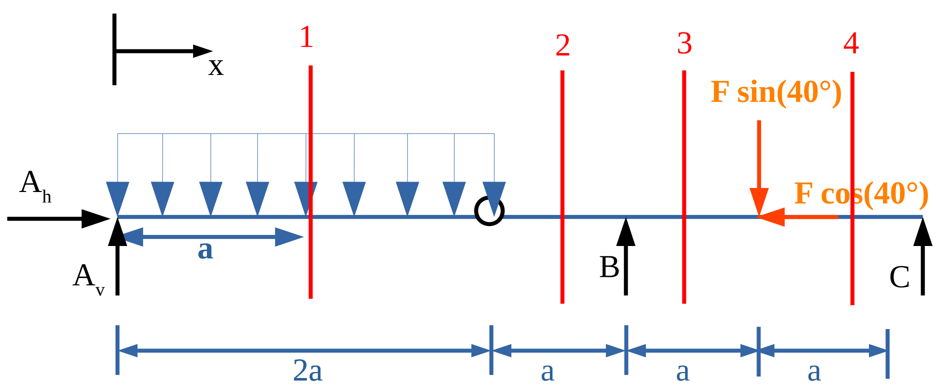
Statische Unstetigkeiten

- Einzellasten,
- Knicke in Streckenlasten.

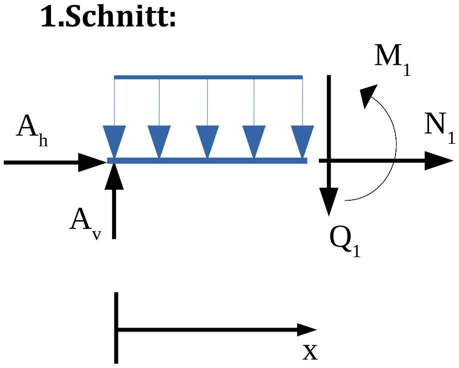
Geometrische Unstetigkeiten

- Knicke der Balkenachse, (z.B. Rahmen)

Schnitte:



1.Schnitt:



Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Schnittgrößen.

Normalkraft

$\rightarrow: A_h + N_1 = 0$

$\boxed{N_1 = -A_h = -F\cos(40°)}$ Normalkraftverlauf für den 1. Bereich (0 <= x <= 2a)

Querkraft

Mit Integral:

Für die Querkraft wird das Integral $\int q(x)dx$ verwendet. Das Vorzeichen ist entsprechend der Richtung der Streckenlast anzugeben.

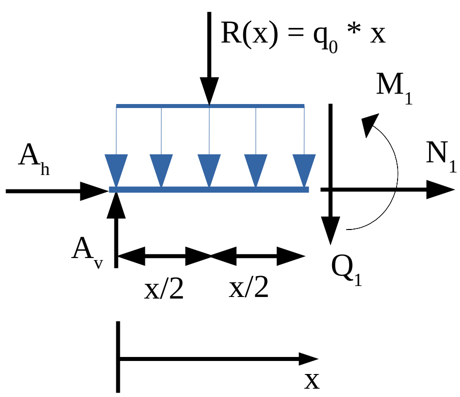
Für eine rechteckige Streckenlast gilt q(x) = q_0.

$\uparrow: A_v - Q_1 - \int_0^x q_0 \, dx = 0$ Resultierende der Streckenlast als Integral

$Q_1 = A_v - \int_0^x q_0 \, dx = A_v - q_0 \cdot x$ |Integral auflösen

Ohne Integral:

Ohne Integral bilden wir die Resultierende der Teilstreckenlast mit der Länge x und der Höhe q_0. Der Angriffspunkt ist im Schwerpunkt der Teilstreckenlast, bei der Hälfte der Länge (die Länge ist hier x). Der Angriffspunkt wird aber erst für die Momentengleichgewichtsbedingung relevant.



$\uparrow: A_v - Q_1 - R(x) = 0$

$Q_1 = A_v - q_0 \cdot x$

Einsetzen von A_v = F:

$\boxed{Q_1 = F - q_0 \cdot x}$ Querkraftverlauf für den 1. Bereich (0 <= x <= 2a)

<u>Moment</u>

Mit Integral

Für das Schnittmoment wird das Integral $\int \int q(x)\,dx\,dx$ verwendet. Das Vorzeichen ist entsprechend der Drehrichtung der Streckenlast auf den Schnitt zu wählen.

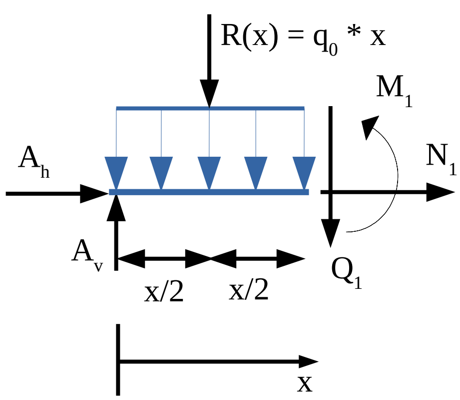
Für eine rechteckige Streckenlast gilt $q(x) = q_0$.

$$\uparrow: -A_v \cdot x + \int_0^x \int q_0\,dx\,dx + M_1 = 0$$ Resultierende der Streckenlast als Integral

$$M_1 = A_v \cdot x - \int_0^x \left[\int q_0 dx\right] dx = A_v \cdot x - \int_0^x [q_0 \cdot x]\,dx$$ |1. Integral (inneres) auflösen

$$M_1 = A_v \cdot x - \int_0^x q_0 \cdot x\,dx = A_v \cdot x - \frac{1}{2} q_0 \cdot x^2$$ |2. Integral auflösen und Grenzen einsetzen

Ohne Integral



Ohne Integral bilden wir das Moment auf den Schnitt, indem wir die Teilresultierende R(x) mit ihrem Hebelarm multiplizieren. Dieser beträgt x/2:

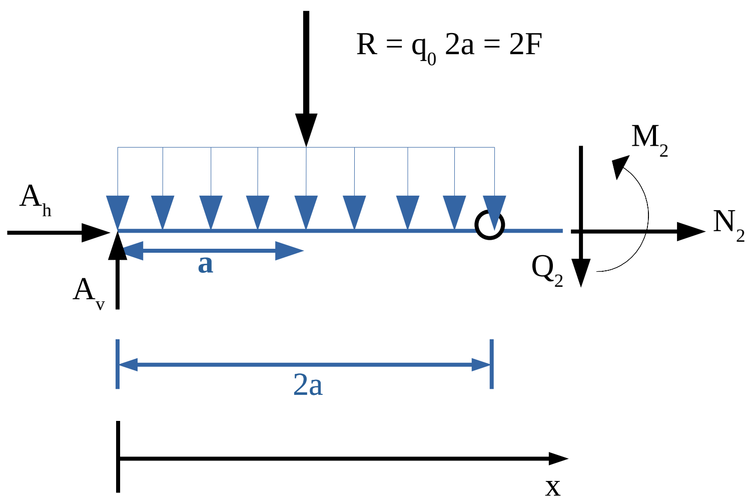
$$\uparrow: -A_v \cdot x + R(x) \cdot \frac{x}{2} + M_1 = 0$$ $|R(x) = q_0\,x$

$$-A_v \cdot x + q_0 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_1 = 0$$

$$M_1 = A_v \cdot x - \frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 \qquad |A_v = F$$

$$\boxed{M_1 = F \cdot x - \frac{1}{2} q_0 \cdot x^2}$$ Momentenverlauf für den 1. Bereich (0 <= x <= 2a)

Die Schnittgrößen für den 1. Schnitt sind bestimmt. Wir betrachten als nächstes den **zweiten Schnitt (linkes Schnittufer).**



Normalkraft

$$\rightarrow: A_h + N_2 = 0$$

$$\boxed{N_2 = -A_h = -F\cos(40°)}$$ Normalkraftverlauf für den 2. Bereich (2a <= x <= 3a)

Querkraft

$$\uparrow: A_v - R - Q_2 = 0$$

$$\boxed{Q_2 = A_v - R = F - 2F = -F}$$ Querkraftverlauf für den 2. Bereich (2a <= x <= 3a)

Moment

$$-A_v \cdot x + R \cdot (x-a) + M_2 = 0$$

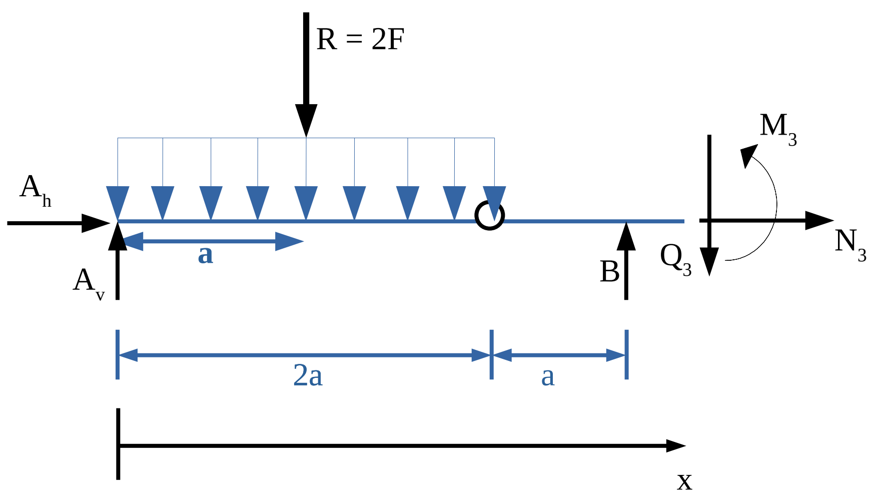
$$M_2 = A_v \cdot x - R \cdot (x-a)$$

$$M_2 = F \cdot x - 2F \cdot (x-a)$$

$$M_2 = F \cdot x - 2F \cdot x + 2F \cdot a$$

$\boxed{M_2 = -F \cdot x + 2F\ a}$ Momentenverlauf für den 2. Bereich (2a <= x <= 3a)

Als nächstes betrachten wir den **3. Schnitt** und wählen das **linke Schnittufer** aus.



Normalkraft

$$\rightarrow: A_h + N_3 = 0$$

$\boxed{N_3 = -A_h = -F\cos(40°)}$ Normalkraftverlauf für den 3. Bereich (3a <= x <= 4a)

Querkraft

$$\uparrow: A_v - R + B - Q_3 = 0$$

$\boxed{Q_3 = A_v - R + B = F - 2F + 1{,}82\,F = 0{,}82\,F}$ Querkraftverlauf für den 3. Bereich (3a <= x <= 4a)

Moment

$$-A_v \cdot x + R \cdot (x-a) - B \cdot (x-3a) + M_3 = 0$$

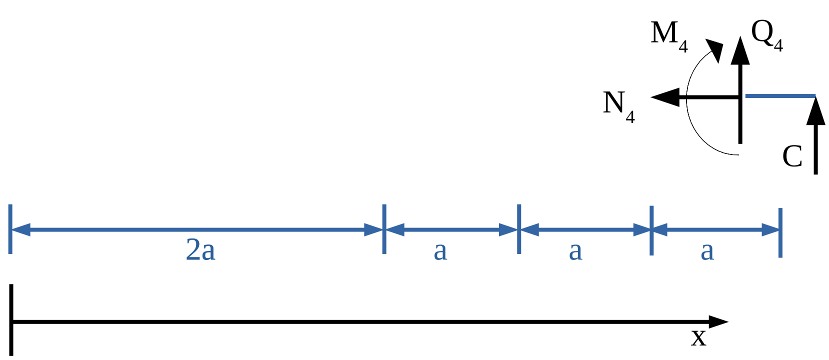
$$M_3 = A_v \cdot x - R(x-a) + B \cdot (x-3a) \quad |A_v = F, R = 2F, B = 1{,}82\,F$$

$$M_3 = F \cdot x - 2F(x-a) + 1{,}82\,F \cdot (x-3a)$$

$$M_3 = F \cdot x - 2Fx + 2Fa + 1{,}82\,F \cdot x - 1{,}82\,F \cdot 3a$$

$\boxed{M_3 = 0{,}82\,F \cdot x - 3{,}46\,Fa}$ Momentenverlauf für den 3. Bereich (3a <= x <= 4a)

Wir betrachten als nächstes den **4. Schnitt** und das **rechte Schnittufer.**



Normalkraft

$$\rightarrow: -N_4 = 0$$

$\boxed{N_4 = 0}$ Normalkraftverlauf für den 4. Bereich (4a <= x <= 5a)

Querkraft

$$\uparrow: C + Q_4 = 0$$

$\boxed{Q_4 = -C = 0{,}18\,F}$ Querkraftverlauf für den 4. Bereich (4a <= x <= 5a)

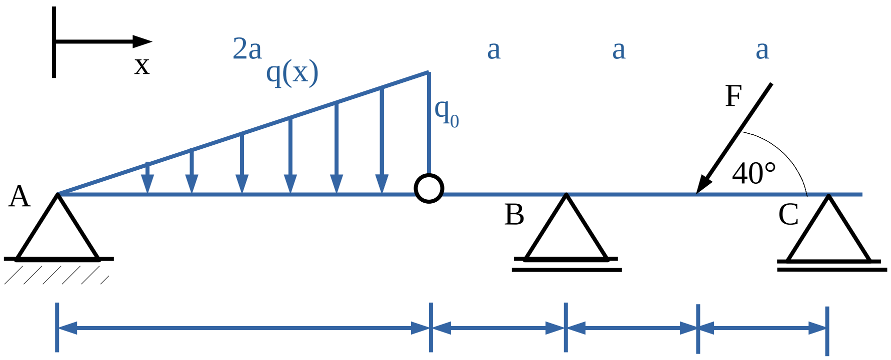
Moment

$$-M_4 + C \cdot (5a - x) = 0$$

$$M_4 = -0{,}18F \cdot (5a - x) = -0{,}9Fa + 0{,}18F \cdot x$$

$\boxed{M_4 = 0{,}18F \cdot x - 0{,}9Fa}$ Momentenverlauf für den 4. Bereich (4a <= x <= 5a)

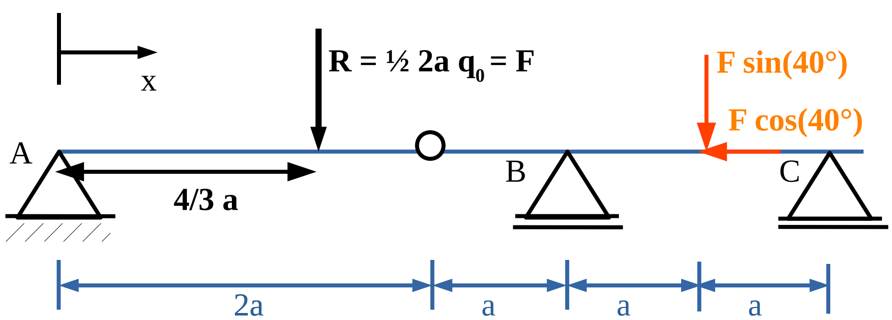
Lösung zur Aufgabe 3 – Teil 2



Bilde die Resultierende der Streckenlast sowie den Angriffspunkt!

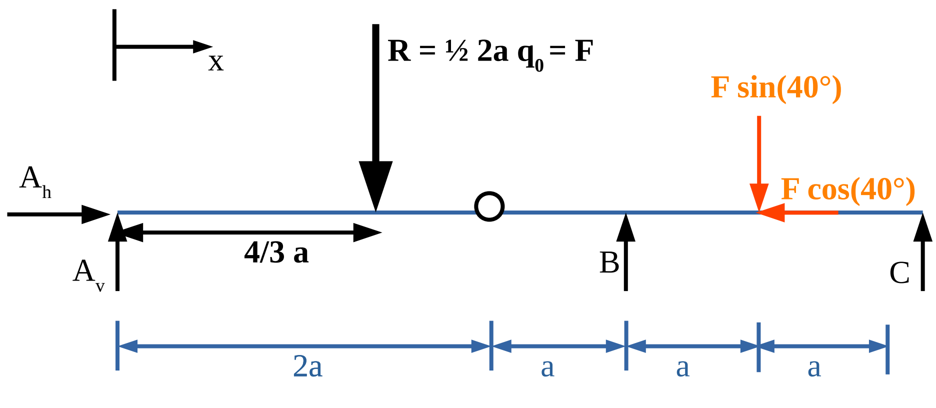
$R = \frac{1}{2} 2\,a \cdot q_0 = q_0\,a = F$ Flächeninhalt dreieckige Fläche

$x_R = \frac{2}{3} 2\,a = \frac{4}{3} a$ Schwerpunkt Rechteck von Balkenanfang ausgehend (Beginn x-Achse)



- Berechne die Auflagerkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen!

Zunächst benötigen wir den Freischnitt:



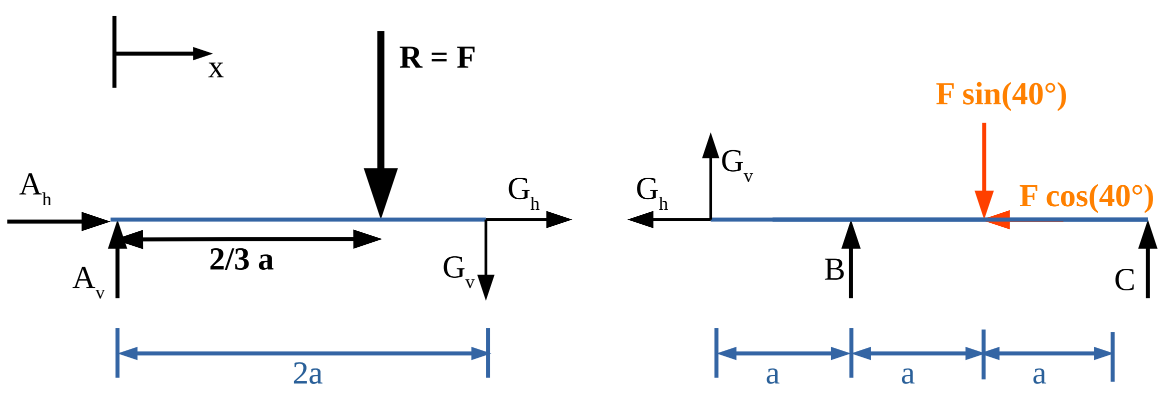
Als nächstes können wir die Auflagerkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen:

$\rightarrow: A_h - F\cos(40°) = 0$

$A_h = F\cos(40°)$

$\uparrow: A_v + B + C - R - F\sin(40°) = 0$ **Zu viele Unbekannte**

Betrachtung der **Teilsysteme:**



Linkes Teilsystem:

Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$\rightarrow: A_h + G_h = 0$

$G_h = -A_h = -F\cos(40°)$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$\uparrow: A_v - G_v - R = 0$

Momentengleichgewichtsbedingung um A oder G (hier A):

$-R \cdot \frac{4}{3}a - G_v \cdot 2a = 0$

$\boxed{G_v = -\frac{2}{3}F}$ **|mit R = F**

Anwendung der vertikalen Gleichgewichtsbedingung führt uns auf A_v:

$\boxed{A_v = G_v + R = -\frac{2}{3}F + F = \frac{1}{3}F}$

Rechtes Teilsystem:

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$\uparrow: G_v + B + C - F\sin(40°) = 0$

Momentengleichgewichtsbedingung um B oder C (hier C):

$-G_v \cdot 3a - B \cdot 2a + F\sin(40°) \cdot a = 0$ |nach B auflösen

$B\,2a = -G_v \cdot 3a + F\sin(40°) \cdot a$ | durch 2a teilen

$B = -\frac{3}{2}G_v + \frac{1}{2}F\sin(40°)$ |Einsetzen von $G_v = -2/3\ F$

$$B = F + \frac{1}{2} F \sin(40°)$$

$$B = 1{,}32\,F$$

Aus der vertikalen Gleichgewichtsbedingung können wir C berechnen:

$$C = -G_v - B + F\sin(40°)$$

$$C = \frac{2}{3}F - 1{,}32\,F + F\sin(40°) = F\left(\frac{2}{3} - 1{,}32 + \sin(40°)\right) = -0{,}01\,F$$

Es ergeben sich die folgenden Lagerkräfte (auf 2 Nachkommastellen gerundet):

$$A_h = F\cos(40°)$$

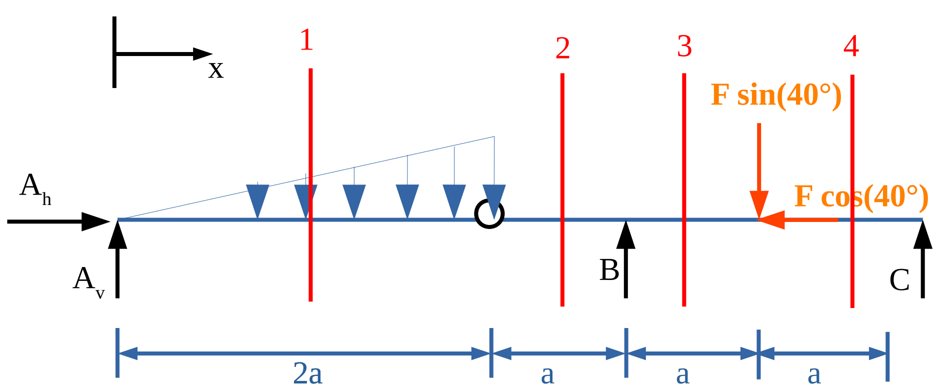
$$A_v = \frac{2}{3}F$$

$$B = 1{,}32\,F$$

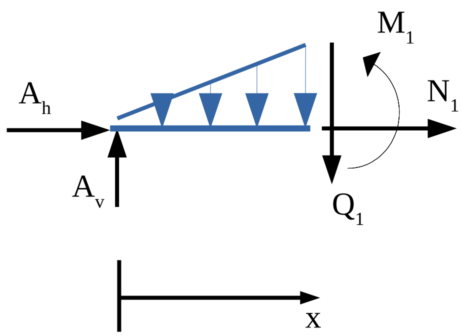
$$C = -0{,}01\,F$$

<u>Schnittgrößen:</u>

Schnitte:



1.Schnitt:



Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Schnittgrößen.

Normalkraft

$\rightarrow: A_h + N_1 = 0$

$\boxed{N_1 = -A_h = -F\cos(40°)}$ Normalkraftverlauf für den 1. Bereich (0 <= x <= 2a)

Querkraft

Mit Integral:

Für die Querkraft wird das Integral $\int q(x)dx$ verwendet. Das Vorzeichen ist entsprechend der Richtung der Streckenlast anzugeben.

Für eine rechteckige Streckenlast gilt q(x) = q_0 x/l. Hier ist l = 2a.

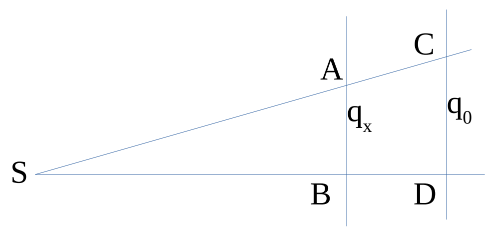
$\uparrow: A_v - Q_1 - \int_0^x q_0 \frac{x}{2a}\, dx = 0$ Resultierende der Streckenlast als Integral

$Q_1 = A_v - \int_0^x \frac{q_0}{2a} x\, dx = A_v - \frac{q_0}{4a} x^2$ |Integral auflösen

Ohne Integral:

Wir müssen in diesem Fall den Strahlensatz anwenden, denn hier ist die Höhe des Kraftpfeils nicht bekannt.

Strahlensatz: Es verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die ihnen entsprechenden, vom Scheitel S aus gemessenen Strecken auf jeweils derselben Geraden .



$|AB| = q_x (\text{gesucht})$ — Teilstreckenlast

$|SB| = x$

$|CD| = q_0$ — Ausgangsstreckenlast

$|SD| = 2a$

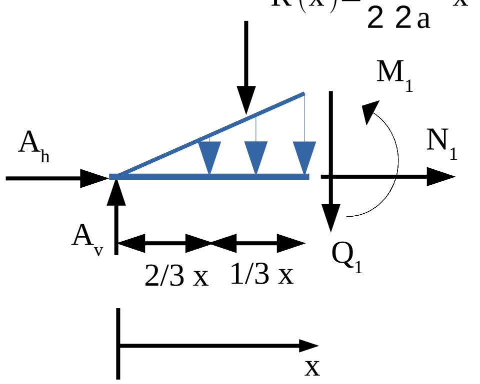
Strahlensatz:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|SB|}{|SD|} \quad \rightarrow \quad \frac{q_x}{q_0} = \frac{x}{2a} \quad \rightarrow \quad q_x = \frac{q_0}{2a} x$$

Wir haben mit q_x die Höhe der Teilstreckenlast bestimmt. Es kann dann der Flächeninhalt (=Resultierende) der dreieckigen Streckenlast wie folgt berechnet werden (Höhe mal Länge durch 2).

$$R = \frac{1}{2} q_x \cdot x = \frac{1}{2} \frac{q_0}{2a} \cdot x^2$$

$$R(x) = \frac{1}{2} \frac{q_0}{2a} \cdot x^2$$



$$\uparrow : A_v - Q_1 - R(x) = 0$$

$$Q_1 = A_v - \frac{1}{2} \frac{q_0}{2a} \cdot x^2 = A_v - \frac{q_0}{4a} \cdot x^2$$

Einsetzen von $A_v = 2/3\ F$:

$\boxed{Q_1 = \frac{2}{3}F - \frac{q_0}{4a} \cdot x^2}$ Querkraftverlauf für den 1. Bereich (0 <= x <= 2a)

Moment

Mit Integral

Für das Schnittmoment wird das Integral $\int \int q(x)\ dx\ dx$ verwendet. Das Vorzeichen ist entsprechend der Drehrichtung der Streckenlast auf den Schnitt zu wählen.

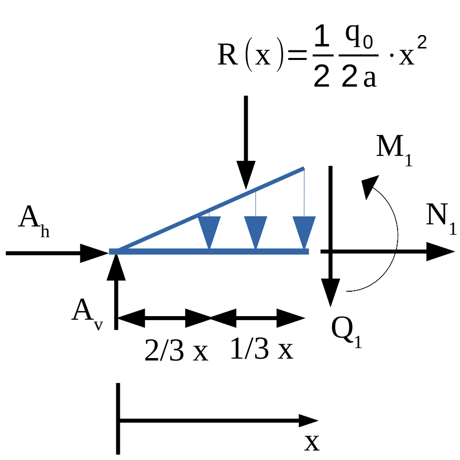
Für eine rechteckige Streckenlast gilt q(x) = q_0 x/l. Hier ist l = 2a.

$$\uparrow : -A_v \cdot x + \int_0^x \int \frac{q_0}{2a} x\ dx\ dx + M_1 = 0$$ Resultierende der Streckenlast als Integral

$$M_1 = A_v \cdot x - \int_0^x \left[\int \frac{q_0}{2a} x\ dx\right] dx = A_v \cdot x - \int_0^x \left[\frac{q_0}{4a} x^2\right] dx$$ |1. Integral (inneres) auflösen

$$M_1 = A_v \cdot x - \int_0^x \frac{q_0}{4a} x^2\ dx = A_v \cdot x - \frac{q_0}{12a} \cdot x^3$$ |2. Integral auflösen und Grenzen einsetzen

Ohne Integral



Ohne Integral bilden wir das Moment auf den Schnitt, indem wir die Teilresultierende R(x) mit ihrem Hebelarm multiplizieren. Dieser beträgt 1/3 x:

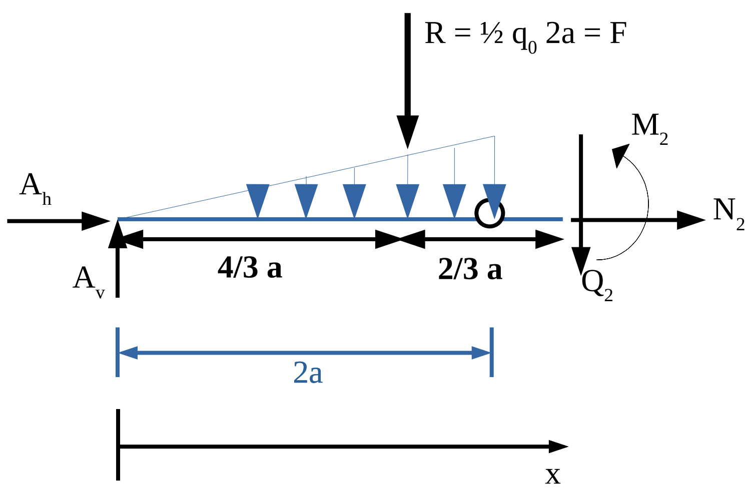
$\uparrow: -A_v \cdot x + R(x) \cdot \frac{x}{3} + M_1 = 0 \qquad | \quad R(x) = \frac{1}{2}\frac{q_0}{2a} \cdot x^2$

$-A_v \cdot x + \frac{q_0}{4a} \cdot x^2 \cdot \frac{x}{3} + M_1 = 0$

$M_1 = A_v \cdot x - \frac{q_0}{12a} \cdot x^3 \qquad | \ A_v = 2/3\ F$

$\boxed{M_1 = \frac{2}{3} F \cdot x - \frac{q_0}{12a} \cdot x^3}$ Momentenverlauf für den 1. Bereich (0 <= x <= 2a)

Die Schnittgrößen für den 1. Schnitt sind bestimmt. Wir betrachten als nächstes den **zweiten Schnitt (linkes Schnittufer).**



Normalkraft

$\rightarrow: A_h + N_2 = 0$

$\boxed{N_2 = -A_h = -F\cos(40°)}$ Normalkraftverlauf für den 2. Bereich (2a <= x <= 3a)

Querkraft

$\uparrow: A_v - R - Q_2 = 0 \qquad | A_v = 2/3\ F,\ R = F$

$\boxed{Q_2 = A_v - R = \frac{2}{3}F - F = -\frac{1}{3}F}$ Querkraftverlauf für den 2. Bereich (2a <= x <= 3a)

Moment

$$-A_v \cdot x + R \cdot \left(x - \frac{4}{3}a\right) + M_2 = 0$$

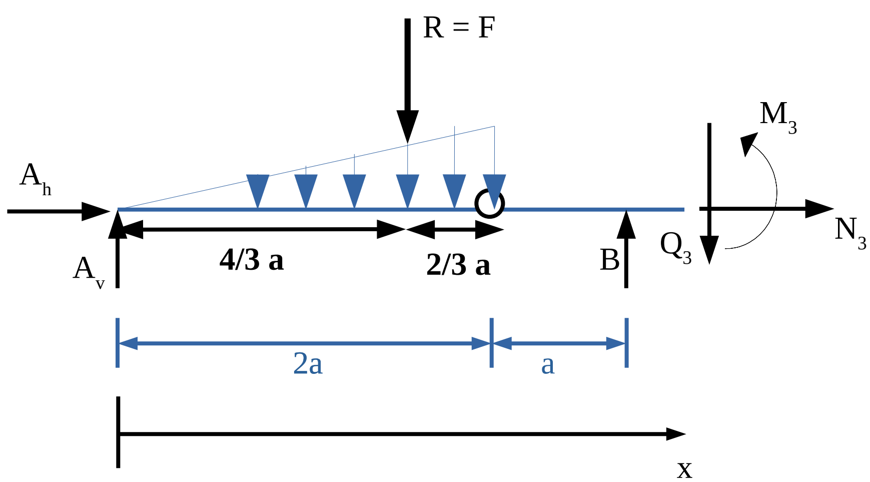
$$M_2 = A_v \cdot x - R \cdot \left(x - \frac{4}{3}a\right)$$

$$M_2 = \frac{2}{3}F \cdot x - F \cdot \left(x - \frac{4}{3}a\right)$$

$$M_2 = \frac{2}{3}F \cdot x - F \cdot x + F \cdot \frac{4}{3}a$$

$\boxed{M_2 = -\frac{1}{3}F \cdot x + \frac{4}{3}F\,a}$ Momentenverlauf für den 2. Bereich (2a <= x <= 3a)

Als nächstes betrachten wir den **3. Schnitt** und wählen das **linke Schnittufer** aus.



Normalkraft

$\rightarrow: A_h + N_3 = 0$

$\boxed{N_3 = -A_h = -F\cos(40°)}$ Normalkraftverlauf für den 3. Bereich (3a <= x <= 4a)

Querkraft

$\uparrow: A_v - R + B - Q_3 = 0$ |mit A_v = 2/3 F, R = F, B = 1,32 F

$$\boxed{Q_3 = A_v - R + B = \frac{2}{3}F - F + 1{,}32\,F = 0{,}99\,F}$$

Querkraftverlauf für den 3. Bereich (3a <= x <= 4a)

Moment

$$-A_v \cdot x + R \cdot \left(x - \frac{4}{3}a\right) - B \cdot (x - 3a) + M_3 = 0$$

$$M_3 = A_v \cdot x - R\left(x - \frac{4}{3}a\right) + B \cdot (x - 3a)$$ |A_v = 2/3 F, R = F, B = 1,32 F

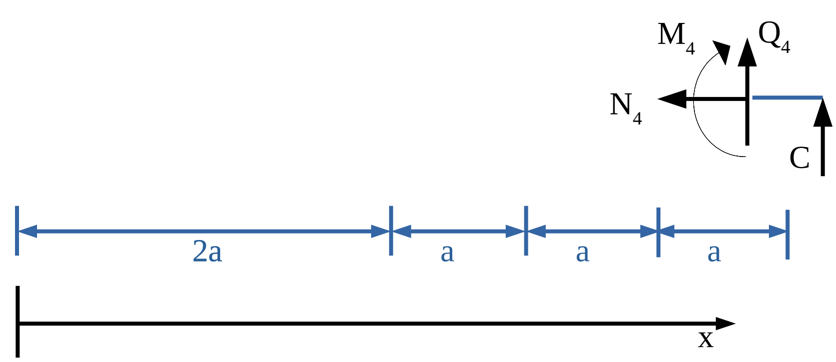
$$M_3 = \frac{2}{3}F \cdot x - F\left(x - \frac{4}{3}a\right) + 1{,}32\,F \cdot (x - 3a)$$

$$M_3 = \frac{2}{3}F \cdot x - F \cdot x + \frac{4}{3}F\,a + 1{,}32\,F \cdot x - 3{,}96\,F\,a$$

$$\boxed{M_3 = 0{,}99\,F \cdot x - 2{,}63\,F a}$$

Momentenverlauf für den 3. Bereich (3a <= x <= 4a)

Wir betrachten als nächstes den **4. Schnitt** und das **rechte Schnittufer.**



Normalkraft

$\rightarrow: -N_4 = 0$

$\boxed{N_4 = 0}$ Normalkraftverlauf für den 4. Bereich (4a <= x <= 5a)

Querkraft

$\uparrow: C + Q_4 = 0$

$\boxed{Q_4 = -C = 0{,}01\,F}$ Querkraftverlauf für den 4. Bereich (4a <= x <= 5a)

Moment

$-M_4 + C \cdot (5\,a - x) = 0$

$M_4 = -0{,}01\,F \cdot (5\,a - x) = -0{,}05\,F\,a + 0{,}01\,F \cdot x$

$\boxed{M_4 = 0{,}01\,F \cdot x - 0{,}05\,F\,a}$ Momentenverlauf für den 4. Bereich (4a <= x <= 5a)