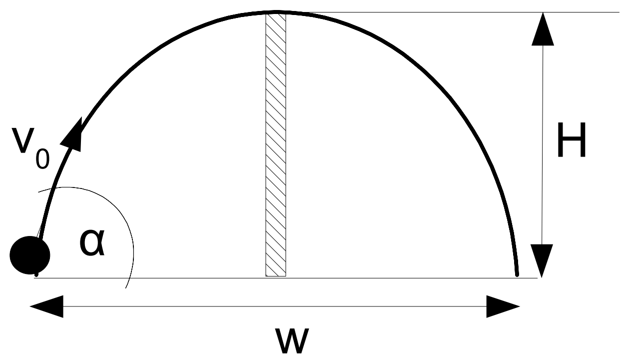
Webinar: Dynamik
Thema: Kinematik eines Massenpunktes

Aufgabe: Schiefer Wurf

Ein Ball wird unter einem Winkel α mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 35 m/s vom Boden über eine Mauer der Höhe H = 10 m geworfen.

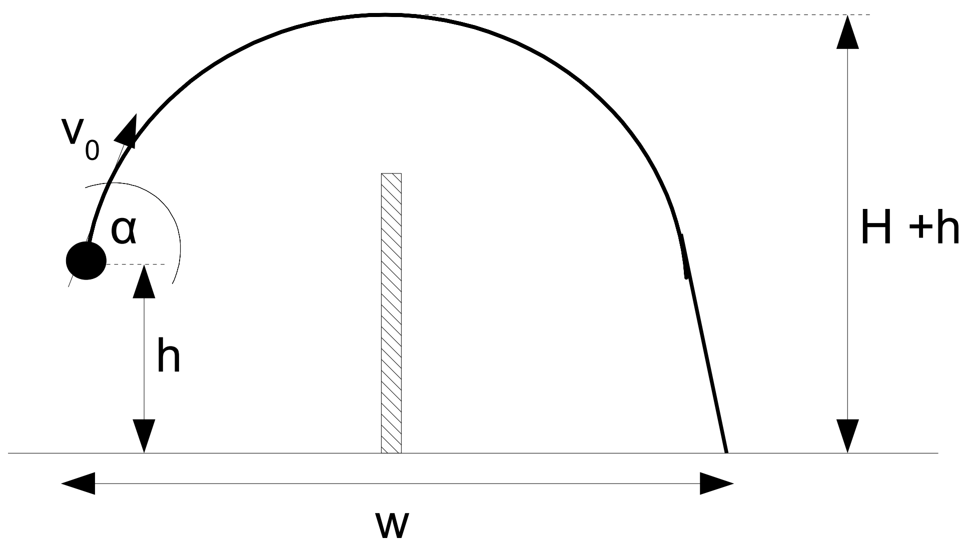


a) Bestimme den Abwurfwinkel **α** bei dem die Bahn der Kugel in der Höhe **H** eine waagerechte Tangente aufweist!

b) Bestimme die Wurfdauer für den in a) bestimmten Abwurfwinkel!

c) Bestimme die die Wurfweite w für den in a) bestimmten Abwurfwinkel!

Der Ball wird nun aus einer anderen Höhe y = h = 7m abgeworfen. Damit sind Steighöhe und Fallhöhe nicht mehr identisch.



c) Bestimme die Wurfweite des Balls, für den in a) bestimmten Abwurfwinkel.

Lösung:

Schiefer Wurf:

Wir zerlegen die Bewegung in x- und y-Richtung.

Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt v_0. Wir zerlegen zunächst die Anfangsgeschwindigkeit in ihre x- und y- Komponente:

$$v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin(\alpha)$$

Als nächstes müssen wir herausfinden ob Beschleunigungen in x- und y- Richtung auftreten. In y-Richtung ist die Erdbeschleunigung gegeben (vertikal nach unten gerichtet):

$$a_y = -g$$

In x-Richtung tritt keine Beschleunigung auf:

$$a_x = 0$$

Wir betrachten als nächstes beiden Bewegungen separat. In y-Richtung ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (konstante Beschleunigung) gegeben, in x-Richtung eine gleichförmige Bewegung (konstante Geschwindigkeit).

a) Lösung Aufgabenteil a)

Bei y = H soll der Ball waagerecht zur Bahnkurve fliegen. Damit ist die Geschwindigkeit in y-Richtung gleich soll, denn der Geschwindigkeitsvektor liegt immer tangential an der Bahnkurve. Ist dieser waagerecht, so ist v = vx und damit vy = 0. Wir betrachten also zunächst die y-Richtung und stellen hier die Bewegungsgleichungen auf:

Y-Richtung

Wir verwenden den Zusammenhang:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Trennen die Veränderlichen:

$$dv_y = a_y \, dt$$

Setzen die Integrale und berücksichtigen die Grenzen:

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int_0^t a_y \, dt$$

mit

$$a_y = -g$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int_0^t -g \, dt$$

Integration führt zu:

$$v_y - v_{0y} = -g t$$

Einsetzen von der Anfangsgeschwindigkeit:

$$v_y - v_0 \sin(\alpha) = -g t$$

Auflösen nach v_y:

$$v_y = v_0 \sin(\alpha) - g t$$

Das ist die Geschwindigkeitsgleichung für die y-Richtung des Balls in Abhängigkeit von t.

Die Aufgabenstellung lautet aber, dass der Winkel in Abhängigkeit von der Höhe h, also dem Weg, gegeben werden soll und nicht von der Zeit. Als nächstes müssen wir die Wegfunktion der y-Richtung bestimmen. Es gilt:

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$dy = v_y \, dt$$

Intergale und Grenzen:

$$\int_0^y dy = \int_0^t v_y \, dt$$

Einsetzen von v_y:

$$\int_0^y dy = \int_0^t (v_0 \sin(\alpha) - g\,t)\,dt$$

Integrieren:

$$y = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Was genau passiert nun, wenn der Ball eine waagerechte Tangente an der Bahnkurve bildet? Der Geschwindigkeitsvektor liegt immer tangential an der Bahnkurve. Wenn also die Tangente und damit auch der Geschwindigkeitsvektor waagerecht sind, dann gibt es nur noch eine horizontale Geschwindigkeitskomponente und die vertikale Geschwindigkeitskomponente wird null. Wir können also die ermittelte Geschwindikeitsfunktion für die y-Richtung (vertikale Richtung) gleich Null setzen und nach t auflösen:

$$v_y = v_0 \sin(\alpha) - g\,t = 0$$

$$t = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Wir wollen nun den Winkel bestimmen damit der Ball seine maximale Höhe y = H erreicht. Wir setzen also y = H:

$$H = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Und setzen die Gleichung t dort ein, die uns anzeigt, dass hier die Geschwindigkeit in y-Richtung gleich Null ist:

$$H = v_0 \sin(\alpha) \cdot \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{g^2}$$

Kürzen der Gleichung:

$$H = \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g}$$

Auflösen nach α:

$$H \cdot 2 \cdot g = v_0^2 \sin(\alpha)^2$$

$$\frac{H \cdot 2 \cdot g}{v_0^2} = \sin(\alpha)^2$$

$$\sin(\alpha)^2 = \frac{H \cdot 2 \cdot g}{v_0^2}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{H \cdot 2 \cdot g}}{v_0}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{H \cdot 2 \cdot g}}{v_0}\right)$$

Wir können als nächstes die Werte einsetzen und erhalten:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{10m \cdot 2 \cdot 9{,}81\, m/s^2}}{35\, m/s}\right)$$

$$\alpha = 23{,}6°$$

Der Abwurf muss mit einem Winkel von 23,6° erfolgen, damit in der Höhe H = 10m die Wurfbahn des Balls eine waagerechte Tangente aufweist.

b) Lösung Aufgabenteil b

Als nächstes wollen wir die Dauer $t = T$ des Wurfs berechnen. Fällt der Ball wieder auf den Boden auf, so ist $y = 0$. Wir können also die Wegfunktion in y-Richtung gleich Null setzen und nach t auflösen:

$$0 = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$T = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Einsetzen der Werte führt zu:

$$T = \frac{2 \cdot 35\, m/s \cdot \sin(23{,}6°)}{9{,}81\, m/s^2}$$

$$T = 2{,}857\, s$$

b) Lösung Aufgabenteil c

Als nächstes wollen wir die Wurfweite bestimmen.

Dafür benötigen wir die Bewegung in x-Richtung. Hierbei handelt es sich um eine gleichförmige Bewegung, d.h. der Ball fliegt in x-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit.

$$v_{0x} = v_x = v_0 \cos(\alpha)$$

Da hier keine Beschleunigung auftritt ist die Anfangsgeschwindigkeit gleich der Gesamtgeschwindigkeit des Balls in x-Richtung. Diese ist konstant und damit unabhängig von der Zeit.

Als nächstes benötigen wir die Wegfunktion in x-Richtung:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Wir trennen die Veränderlichen:

$$dx = v_x \, dt$$

Intergale und Grenzen:

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_x \, dt$$

Einsetzen von vx:

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cos(\alpha) \, dt$$

Intergale auflösen:

$$x = v_0 \cos(\alpha) t$$

Dies ist die Wegfunktion des Balls in x-Richtung in Abhängigkeit von der Zeit t. Wir wollen die Wurfweite bestimmen. Der Ball landet am Ende wieder auf dem Boden bei y = 0. Wir können also die Wegfunktion der y-Richtung gleich Null setzen und nach t auflösen. Das haben wir bereits im Aufgabenteil b) gemacht:

$$t = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Wir setzen nun in die Wegfunktion in x-Richtung die Zeit t einsetzen:

$$x = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$w = 35\,m/s \cdot \cos(23{,}6°) \cdot 2{,}857\,s$$

$$w = 91{,}63\,m$$

Sind keine Werte in der Aufgabenstellung gegeben, so ergibt sich die Formel:

$$t = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

in die Wegfunktion der x-Richtung eingesetzt werden. Somit wird t aus der Gleichung eliminiert:

$$x = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$x = v_0 \cos(\alpha) \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$x = \frac{v_0^2}{g} 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

Es gilt:

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

Und damit:

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

Lösung Aufgabenteil d)

Wir wollen die Wurfweite berechnen. Dazu benötigen wir die Wegfunktion in x-Richtung und zusätzlich die Wegfunktion in y-Richtung.

Wir beginnen mit der Wegfunktion in x-Richtung:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Wir trennen die Veränderlichen:

$$dx = v_x \, dt$$

Intergale und Grenzen:

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_x \, dt$$

Einsetzen von v_x:

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cos(\alpha) \, dt$$

Intergale auflösen:

$$x = v_0 \cos(\alpha) t$$

Dies ist die Wegfunktion des Balls in x-Richtung in Abhängigkeit von der Zeit t.

Wir benötigen als nächstes die Wegfunktion in y-Richtung um die Zeit t zu elimieren:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Wir trennen die Veränderlichen:

$$dv_y = a_y \, dt$$

$$dv_y = -g \, dt$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int_0^t -g \, dt$$

$$v_y - v_{0y} = -g t$$

$$v_y = v_0 \sin(\alpha) - g t$$

Die Geschwindigkeitsformel ist unverändert. Wir betrachten die Wegfunktion in y-Richtung.

Intergale und Grenzen:

$$\int_h^y dy = \int_0^t v_y \, dt$$

Einsetzen von vx:

$$\int_h^y dy = \int_0^t (v_0 \sin(\alpha) - g t) \, dt$$

Intergale auflösen:

$$y - h = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 + h$$

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Abwurfhöhe hier mitberücksichtigt werden muss. Wir wissen das der y-Wert Null wird, wenn der Wurf beendet ist:

$$0 = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 + h$$

Hierbei handelt es sich um eine quadratische Gleichung. Wir können die p/q-Formel anwenden, müssen aber zunächst die Formel in die Folgende Form bringen:

$at^2 + bt + c$ wobei a = 1 sein muss

$$0 = t^2 - \frac{2 v_0 \sin(\alpha) t}{g} - \frac{2h}{g}$$

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin(\alpha) t}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\alpha) t}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}$$

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

Hieraus kann die Wurfzeit bestimmt werden. Die Wurfweite ergibt sich durch einsetzen von t in die Wegfunktion in x-Richtung:

$$x = v_0 \cos(\alpha)\left[\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}\right]$$

$$x = v_0 \cos(\alpha)\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \pm v_0 \cos(\alpha)\sqrt{\frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} ¿$$

$$x = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \pm v_0 \cos(\alpha)\sqrt{\frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

Einsetzen der Werte führt dann zu:

$$x = \frac{35^2 \sin(2 \cdot 23{,}6°)}{2 \cdot 9{,}81} \pm 35 \cos(23{,}6°)\sqrt{\frac{35^2 \sin(23{,}6°)^2}{9{,}81^2} + \frac{2 \cdot 7}{9{,}81}}$$

$$x_{1,2} = 45{,}8114 \pm 32{,}0727 \cdot 1{,}862$$

$$x_1 = 45{,}8114 + 32{,}0727 \cdot 1{,}862 = 105{,}53\,\mathrm{m}$$

$$x_2 = 45{,}8114 - 32{,}0727 \cdot 1{,}862 = -13{,}91\,\mathrm{m}$$

Dabei ist x_2 die Strecke **vor** dem tatsächlichen Abwurfort in x-Richtung, wenn bei einer Höhe von y = 0 abgeworfen wird.

Die Wurfweite ist hier x_1 = 105,53 m!

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Wurfweite je größer ist desto höher der Abwurfort liegt.

Die Höhe hat von y= 0 ausgehen ist jetzt gegeben mit:

$$H + h = \text{gesamte Höhe}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g}$$

$$H + h = \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g} + h$$

$$H + h = \frac{35^2 \sin(23{,}6)^2}{2 \cdot 9{,}81} + 7 = 17$$

Also $H + h = 10m + 7m$

Die Höhe H ist hier 10 m, weil von demselben Abwurfwinkel ausgegangen wird. Bei einem anderen Abwurfwinkel ändert sich natürlich auch die Höhe H.