

Technische Mechanik II - Elastostatik (Grundlagen)

Kevin Suta

- 1 Grundlagen der Elastostatik
 - Spannung und Dehnung
 - Hauptspannungen und Mohrscher Kreis
 - Schwerpunktbestimmung
 - Flächenträgheitsmoment
- 2 Satz von Steiner
 - Beispielaufgaben Schwerpunktbestimmung und Flächenträgheitsmoment
- 3 Statisch unbestimmte Systeme
 - Kombinierte Beanspruchung
- 4 Balkentheorie
 - Herleitung
 - Randbedingungen
 - Beispiele
 - Superpositionsprinzip
 - Aufgaben zur Balkentheorie
 - Verträglichkeitsbedingungen (Kompatibilität)



- 5 Altklausuraufgabe 1
 - Zusammenfassung Biegelinie
- 6 Grundlagen Torsion
 - Torsion geschlossener dünnwandiger Profile
 - Torsion offener dünnwandiger Profile
- 7 Altklausuraufgabe 2
 - Zusammenfassung Torsion dünnwandiger Profile
- 8 Stabilität und Knickung
- 9 Energieverfahren
 - Prinzip der virtuellen Kräfte
- 10 Zusammenfassung



- Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., Wall, W. A., Bonet, J.: *Technische Mechanik 2 – Elastostatik*, 14. Auflage, Springer Vieweg, 2021.
- Wriggers, P., Nackenhorst, U.: *Technische Mechanik kompakt*, 2. Auflage, Teubner, 2010.
- Beer, F.P., Johnston, E.R.: *Mechanics of Materials*, 7th Edition, McGraw-Hill, 2015.



- Die Elastostatik beschäftigt sich mit dem Gleichgewicht elastischer Körper unter äußeren Kräften bei kleinen Verformungen.
- **Grundannahmen:**
 - Lineares, reversibles Materialverhalten (Hooke'sches Gesetz)
 - Kleine Verschiebungen und Dehnungen
 - Überlagerungsprinzip gilt
- **Anwendungsgebiete:** Bauteildesign, Brückenbau, Maschinenbau, Materialwissenschaften



- **Normalspannung:** $\sigma = \frac{F}{A}$
- **Schubspannung:** $\tau = \frac{F_S}{A}$
- **Dehnung:** $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$
- **Schubverzerrung:** $\gamma = \frac{\Delta x}{h}$
- **Spannungs- und Dehnungsverteilungen** sind inhomogen bei zusammengesetzten Belastungen
- **Einheit:** $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$



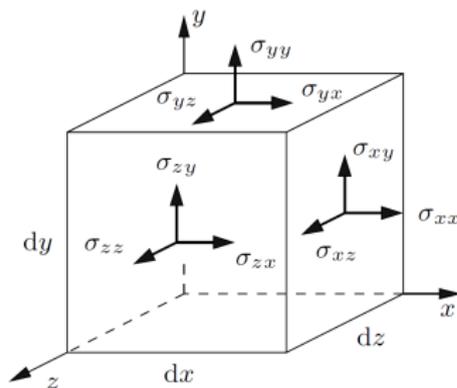
- **Linear-elastisches Verhalten:** Spannung ist proportional zur Dehnung
- **Normalspannung:** $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- **Schubspannung:** $\tau = G \cdot \gamma$
- **Materialkonstanten:**
 - Elastizitätsmodul E (Steifigkeit des Materials)
 - Schubmodul G (Verformung bei Schub)
 - Querkontraktionszahl ν (Poissonzahl): $\nu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_\ell}$
- **Gültigkeit:** Nur für den elastischen Bereich (keine bleibende Verformung)



- **Spannung als Tensor:** σ_{ij} beschreibt alle Normal- und Schubspannungen auf einem Raumelement
- **Spannungstensor (3D):**

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- **Dehnungstensor:** Analog, beschreibt alle Komponenten der Verformung



- **Transformation:** Spannungen auf beliebig geneigten Flächen bestimmen
- **Transformationsgleichung:**

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

- **Schubspannung:**

$$\tau_n = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

- Wichtig für Nachweis und Dimensionierung



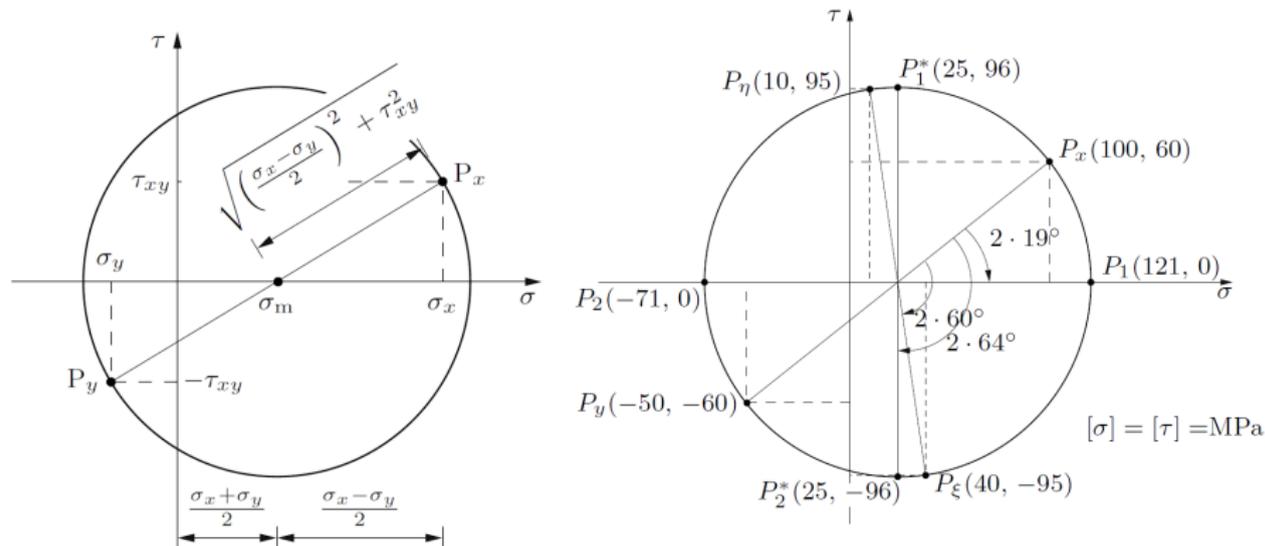
- **Hauptspannungen:** Extremwerte der Normalspannung, Schubspannung = 0
- **Berechnung:**

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- **Mohr'scher Spannungskreis:** Grafische Darstellung aller Spannungszustände an einem Punkt
- Schnelle Ermittlung von Hauptspannungen/-richtungen

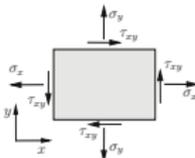


Mohr'scher Spannungskreis



Aufgabe 1.1 In einem Blech seien die Spannungen σ_x , σ_y , τ_{xy} bekannt. Gesucht sind die Größe und die Richtung der Hauptspannungen.

Geg.: $\sigma_x = 20 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 30 \text{ MPa}$,
 $\tau_{xy} = 10 \text{ MPa}$.



A1.1

Lösung Wir gehen zunächst analytisch vor. Die Hauptspannungen errechnen sich aus

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 25 \pm \sqrt{25 + 100} = 25 \pm 11,18$$

zu

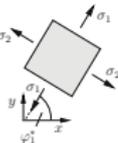
$$\underline{\underline{\sigma_1 = 36,18 \text{ MPa}}}, \quad \underline{\underline{\sigma_2 = 13,82 \text{ MPa}}}.$$

Für die Hauptspannungsrichtungen erhält man aus

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -2$$

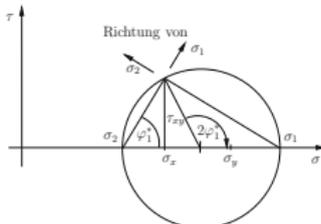
die Ergebnisse

$$\underline{\underline{\varphi_1^* = 58,28^\circ}}, \quad \underline{\underline{\varphi_2^* = 148,28^\circ}}.$$



Zur Verdeutlichung ist es zweckmäßig, das durch die Hauptspannungen belastete Element zu skizzieren.

Man kann die Aufgabe auch grafisch mit Hilfe des MOHR'schen Kreises lösen:



Maßstab: 10 MPa



Man liest ab:

$$\sigma_1 \cong 36,5 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 \cong 14 \text{ MPa},$$

$$\varphi_1^* \cong 59^\circ.$$

- **Schwerpunkt** (bzw. Flächenschwerpunkt) ist der "Mittelpunkt" einer Fläche
- Für regelmäßige Querschnitte (Rechteck, Kreis) direkt ablesbar; für zusammengesetzte Flächen mit Integralen oder Summen
- **Koordinaten:**

$$x_S = \frac{1}{A} \int_A x dA \quad y_S = \frac{1}{A} \int_A y dA$$



- **Ziel:** Der Schwerpunkt ist der "Mittelpunkt" einer Fläche – also der Punkt, an dem die gesamte Fläche gedanklich „konzentriert“ werden könnte.

- **Diskrete Flächen:**

- Für n Einzelflächen A_i an den Koordinaten x_i gilt:

$$x_S = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

- **Bedeutung:** Flächen „mit mehr Gewicht“ (größer A_i) ziehen den Schwerpunkt stärker in ihre Richtung.

- **Kontinuierliche Fläche:**

- Die Summe wird zum Integral über die gesamte Fläche:

$$x_S = \frac{1}{A} \int_A x dA$$

- $x dA$ ist das "momentane Flächenstück" an der Stelle x ; das Integral summiert alle diese Beiträge.

- **Anschaulich:**

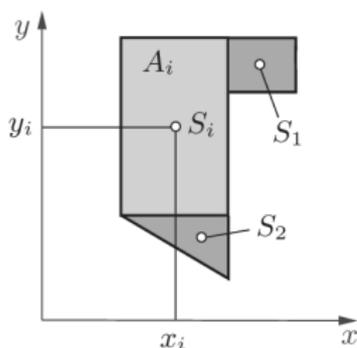
- Die Formel berechnet das „gewichtete Mittel“ aller Flächenpunkte.
- Der Nenner A sorgt dafür, dass das Ergebnis immer innerhalb der Fläche liegt.



- 1. Fläche in Teilflächen zerlegen (A_i)
- 2. Schwerpunkte (x_i, y_i) jeder Teilfläche bestimmen
- 3. Gesamtfläche $A = \sum A_i$ berechnen
- 4. Schwerpunktkoordinaten:

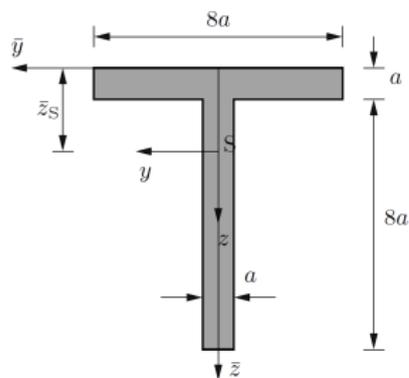
$$x_S = \frac{\sum A_i x_i}{A} \quad y_S = \frac{\sum A_i y_i}{A}$$

- Tipp:** Negative Flächen (z. B. Aussparungen) mit negativem Vorzeichen berücksichtigen!



Beispiel: Schwerpunkt eines T-Profiles

- **Gegeben:** T-Profil aus zwei Rechtecken
- 1. Teilflächen: A_1, A_2 ; Schwerpunkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
- 2. $A = A_1 + A_2$
- 3. $y_S = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A}$
- **Ergebnis:** y_S gibt Abstand des Schwerpunkts zur Bezugsachse

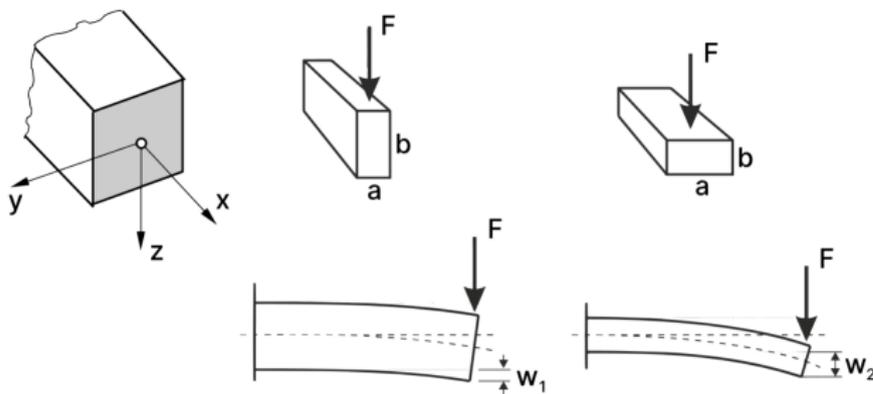


- **Flächenträgheitsmoment I :** Maß für die "Biegesteifigkeit" eines Querschnitts um eine Achse

- **Formel:**

$$I_y = \int_A y^2 dA \quad I_z = \int_A z^2 dA$$

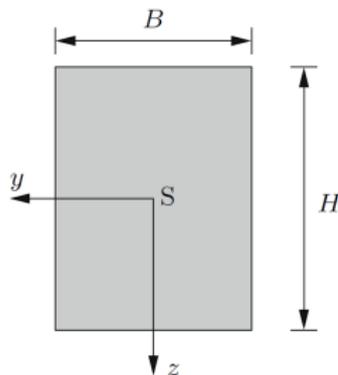
- **Bedeutung:** Je größer I , desto "biegesteifer" das Bauteil
- **Praxis:** Wird im Biegemoment verwendet: $\sigma_{max} = \frac{M}{I} \cdot y_{max}$



- Höhe h , Breite b , Bezug zur Mittelachse:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

- **Vergleich:** h geht mit dritter Potenz ein \rightarrow Höhe wichtiger als Breite!
- **Praxis:** Balkenprofile immer "hochkant" für maximale Steifigkeit!



- **Vollkreis, Radius r :**

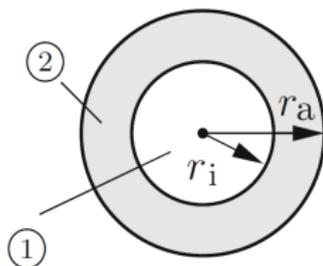
$$I = \frac{\pi}{4} r^4$$

- **Kreisring (Rohr):**

$$I = \frac{\pi}{4} (r_a^4 - r_i^4)$$

r_a : Außenradius, r_i : Innenradius

- **Praxis:** Rohre sehr effizient, da viel Material in den Randbereich gelegt werden kann!



- **Anwendung:** Flächenträgheitsmoment um eine parallele Achse, die durch den Schwerpunkt verschoben ist

- **Formeln:**

$$I_{\bar{y}} = I_y + \bar{z}_S^2 A,$$

$$I_{\bar{z}} = I_z + \bar{y}_S^2 A,$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} - \bar{y}_S \bar{z}_S A.$$

I_S : Flächenträgheitsmoment um die Schwerpunktsachse

A : Flächeninhal,

\bar{y}_S, \bar{z}_S : Relativ verschobene Schwerpunktstellen

$\bar{y}_S^2 A, \bar{z}_S^2 A$ sind sog. STEINER-Anteile

- **Praxis:** Zwingend nötig bei zusammengesetzten oder exzentrischen Querschnitten!
- **Tipp:** Nie "I" aus Tabellen ohne Nachdenken übernehmen – immer auf Achsenlage achten!



- **Definition:**

$$W = \frac{I}{y_{max}}$$

y_{max} : maximaler Abstand von der Neutralachse zum Rand

- **Bedeutung:** Maß für die Fähigkeit des Querschnitts, Biegemomente aufzunehmen, bevor Fließen auftritt

- **Berechnung für Rechteck:**

$$W = \frac{bh^2}{6}$$

- **Berechnung für Vollkreis:**

$$W = \frac{\pi R^4}{4 R} = \frac{\pi R^3}{4}$$



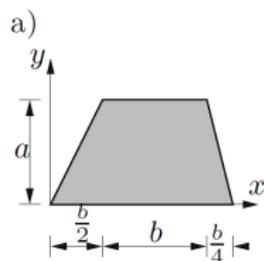
- 1. Querschnitt in Teilflächen zerlegen, Schwerpunkt jeder Teilfläche bestimmen
- 2. I_S jeder Teilfläche um deren Schwerpunkt berechnen (Tabellenwerte)
- 3. Steiner-Satz anwenden: $I = I_S + Ad^2$ (für jede Teilfläche, mit d = Schwerpunktdistanz)
- 4. Gesamt- I : Summe aller Teilflächen
- 5. y_{max} bestimmen (meist von Neutralachse bis Rand)
- 6. Widerstandsmoment: $W = \frac{I}{y_{max}}$
- **Tipp:** Bei Aussparungen/Bohrungen: Flächen und I negativ zählen!



Beispielaufgabe: Schwerpunktbestimmung bei zusammengesetzten Körpern

Aufgabe:

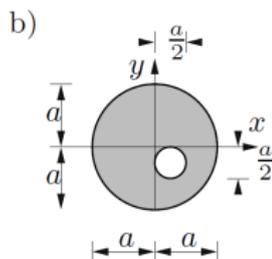
- Geben Sie die Schwerpunktkoordinaten (x_S und y_S) der folgenden Flächen an
- **Gegeben:** a, b



Lösung:

$$a) \quad x_S = \frac{41}{44} b, \quad y_S = \frac{5}{11} a$$

$$b) \quad x_S = -\frac{1}{60} a, \quad y_S = \frac{1}{60} a$$



1. Zerlegung in Teilflächen:

- Rechteck (Fläche 1): $A_1 = a \cdot b$
- Rechtes Dreieck (Fläche 2): $A_2 = \frac{a \cdot b/4}{2} = \frac{ab}{8}$
- Linkes Dreieck (Fläche 3): $A_3 = \frac{a \cdot b/2}{2} = \frac{ab}{4}$

2. Schwerpunkte der Teilflächen (relativ zum Koordinatenursprung):

Teilfläche	A_i	x_i	y_i
1	ab	$\frac{b}{2}$	$\frac{a}{2}$
2	$\frac{ab}{8}$	$b + \frac{b}{6}$	$\frac{a}{3}$
3	$\frac{ab}{4}$	$\frac{b}{6}$	$\frac{a}{3}$

Hinweis: Schwerpunkte der Dreiecke jeweils bei $1/3$ der Basis von der jeweiligen Ecke entfernt.



3. Gesamtschwerpunkt berechnen:

$$x_S = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad y_S = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

$$\sum A_i = ab + \frac{ab}{8} + \frac{ab}{4} = \frac{11ab}{8}$$

Einsetzen:

$$x_S = \frac{ab \frac{b}{2} + \frac{ab}{8} \left(b + \frac{b}{6}\right) + \frac{ab}{4} \cdot \frac{b}{6}}{\frac{11ab}{8}}$$

$$y_S = \frac{ab \frac{a}{2} + \frac{ab}{8} \frac{a}{3} + \frac{ab}{4} \frac{a}{3}}{\frac{11ab}{8}}$$

Vereinfachen ergibt:

$$x_S = \frac{41}{44}b, \quad y_S = \frac{5}{11}a$$



b) Schwerpunkt eines Kreisrings mit exzentrischem Loch

1. Teilflächen und Vorzeichen:

- Volle Kreisfläche (1): $A_1 = \pi a^2$, Schwerpunkt im Ursprung $(0, 0)$
- Kreisloch (2): $A_2 = -\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{\pi a^2}{4}$, Schwerpunkt bei $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

2. Schwerpunkte:

Teilfläche	A_i	x_i	y_i
1	πa^2	0	0
2	$-\frac{\pi a^2}{4}$	$\frac{a}{2}$	0



3. Gesamtschwerpunkt berechnen:

$$x_S = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 + \left(-\frac{\pi a^2}{4}\right) \frac{a}{2}}{\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{4}} = \frac{-\frac{\pi a^3}{8}}{\frac{3}{4} \pi a^2} = -\frac{1}{60} a$$
$$y_S = 0$$

Das Loch wird jetzt noch nach oben (y) verschoben: Schwerpunkt bei $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

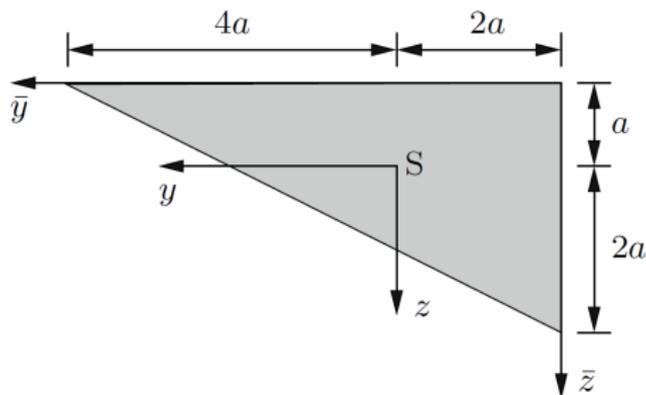
$$x_S = -\frac{1}{60} a, \quad y_S = \frac{1}{60} a$$

Die Rechnung für y_S läuft identisch mit y -Koordinate statt x -Koordinate.



Aufgabe:

- Berechnen Sie für den dargestellten Dreiecksquerschnitt die Flächenträgheitsmomente I_y und $I_{\bar{y}}$.
- Kontrollieren Sie den Zusammenhang der Flächenträgheitsmomente I_y und $I_{\bar{y}}$ mit Hilfe des Steinerschen Satzes.



Gegeben: $y = 2a - 2z$, $\bar{y} = 6a - 2\bar{z}$



- **Ziel:** Berechne das Flächenträgheitsmoment I_y eines rechtwinkligen Dreiecks um die y -Achse.
- **Dreiecksdaten:**
 - Höhe: a
 - Grundseite: $3a$
 - Hypotenuse als Gerade: $y = 2a - 2z$
- Das Flächenträgheitsmoment I_y misst die "Biegesteifigkeit" bezüglich der y -Achse:

$$I_y = \iint_A z^2 dA$$



1. Aufstellen der Integrationsgrenzen

- Das Dreieck wird mit z (horizontal, von $-a$ bis $2a$) und y (vertikal, von $-2a$ bis $2a - 2z$) beschrieben.
- Für einen festen Wert von z ist y von $-2a$ (Boden) bis zur Hypotenuse $y = 2a - 2z$ (oben).
- Integrationsgrenzen:**

$$-a \leq z \leq 2a, \quad -2a \leq y \leq 2a - 2z$$

- Doppelintegral:**

$$I_y = \int_{z=-a}^{2a} \int_{y=-2a}^{2a-2z} z^2 \, dy \, dz$$



2. Auswertung des Doppelintegrals

- Inneres Integral (über y):

$$\int_{y=-2a}^{2a-2z} z^2 dy = z^2 [y]_{y=-2a}^{y=2a-2z} = z^2(2a - 2z + 2a) = z^2(4a - 2z)$$

- Äußeres Integral (über z):

$$I_y = \int_{z=-a}^{2a} (4az^2 - 2z^3) dz$$

Jetzt die Stammfunktion:

$$\int 4az^2 dz = \frac{4a}{3}z^3, \quad \int 2z^3 dz = \frac{1}{2}z^4$$

Zusammen:

$$I_y = \left[\frac{4a}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^4 \right]_{z=-a}^{2a}$$



3. Einsetzen der Grenzen und Ergebnis

- Obere Grenze $z = 2a$:

$$\frac{4a}{3}(2a)^3 - \frac{1}{2}(2a)^4 = \frac{4a}{3} \cdot 8a^3 - \frac{1}{2} \cdot 16a^4 = \frac{32a^4}{3} - 8a^4$$

- Untere Grenze $z = -a$:

$$\frac{4a}{3}(-a)^3 - \frac{1}{2}(-a)^4 = \frac{4a}{3} \cdot (-a^3) - \frac{1}{2}a^4 = -\frac{4a^4}{3} - \frac{1}{2}a^4$$

- Gesamtes Ergebnis:

$$\begin{aligned} I_y &= \left(\frac{32a^4}{3} - 8a^4 \right) - \left(-\frac{4a^4}{3} - \frac{1}{2}a^4 \right) \\ &= \frac{32a^4}{3} - 8a^4 + \frac{4a^4}{3} + \frac{1}{2}a^4 \\ &= \left(\frac{32+4}{3} - 8 + \frac{1}{2} \right) a^4 = \left(\frac{36}{3} - 8 + \frac{1}{2} \right) a^4 \\ &= (12 - 8 + 0.5)a^4 = 4.5a^4 = \frac{9}{2}a^4 \end{aligned}$$



4. Flächenträgheitsmoment um die verschobene Achse (\bar{y})

- Mit dem Satz von Steiner verschieben wir die Achse:

$$I_{\bar{y}} = I_y + Ad^2$$

- $A = 3a^2$ (Dreiecksfläche), d ist der Abstand des Schwerpunkts zur neuen Achse (aus Konstruktion oder Nebenrechnung)
- Im Beispiel: $d = -a$, der Schwerpunkt liegt a links der neuen Achse.
- **Zusammen mit Zusatzterm:**

$$I_{\bar{y}} = \frac{9}{2}a^4 + (-a)^2 \left(\frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 3a \right) = \frac{27}{2}a^4$$



Mit den Geradengleichungen für die Hypotenuse:

$$y = 2a - 2z, \quad \bar{y} = 6a - 2\bar{z}$$

folgt

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA = \int_{-a}^{2a} \int_{-2a}^{2a-2z} z^2 dy dz = \int_{-a}^{2a} z^2 [y]_{-2a}^{2a-2z} dz \\ &= \int_{-a}^{2a} z^2 (2a - 2z + 2a) dz = \int_{-a}^{2a} z^2 (4a - 2z) dz \\ &= \int_{-a}^{2a} (4az^2 - 2z^3) dz \\ &= \left[\frac{4a}{3} z^3 - \frac{1}{2} z^4 \right]_{-a}^{2a} \\ &= \frac{9}{2} a^4 \end{aligned}$$



und

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= \int_A \bar{z}^2 dA = \int_0^{3a} \int_0^{6a-2\bar{z}} \bar{z}^2 d\bar{y} d\bar{z} \\ &= \int_0^{3a} \bar{z}^2 [\bar{y}]_0^{6a-2\bar{z}} d\bar{z} = \int_0^{3a} \bar{z}^2 (6a - 2\bar{z}) d\bar{z} \\ &= \int_0^{3a} (6a\bar{z}^2 - 2\bar{z}^3) d\bar{z} \\ &= \left[2a\bar{z}^3 - \frac{1}{2}\bar{z}^4 \right]_0^{3a} \\ &= \frac{27}{2}a^4 \end{aligned}$$

Aus den Steiner-Formeln folgt für $I_{\bar{y}}$ direkt:

$$I_{\bar{y}} = \frac{9}{2}a^4 + (-a)^2 \left(\frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 3a \right) = \frac{27}{2}a^4$$



- **Beispielaufgabe:** T-Profil aus zwei Rechtecken, Maße angeben
- 1. Schwerpunkt bestimmen (siehe frühere Folie)
- 2. I_S für beide Rechtecke um eigenen Schwerpunkt berechnen
- 3. Abstand d zur gemeinsamen Neutralachse bestimmen
- 4. Mit Steiner-Satz beide I auf Neutralachse beziehen, addieren
- 5. y_{max} : Abstand Neutralachse – Rand
- 6. $W = \frac{I}{y_{max}}$



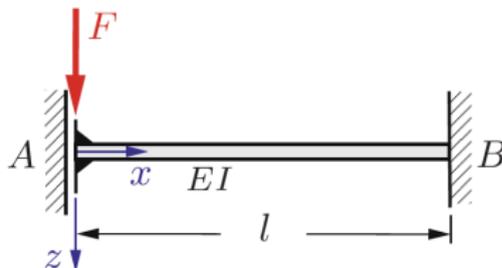
- Achslage prüfen: Immer Bezug auf die richtige Achse!
- Bei zusammengesetzten Profilen: Alle Teilflächen richtig mitzählen (Aussparungen negativ!)
- Bei Tabellenwerten: Prüfen, ob sie sich auf Schwerpunktsachse oder eine andere Achse beziehen
- y_{max} muss zum Extrempunkt des Querschnitts gehören, sonst stimmt W nicht
- **Tipp:** Immer am Bezugssystem der Aufgabe orientieren oder im Vorfeld festlegen!



- **Schwerpunkt:** Mittelwert der Flächenlage, bei komplexen Profilen über Teilflächen summieren
- **Flächenträgheitsmoment I :** Maß für Biegesteifigkeit, wächst stark mit Höhe/Abstand
- **Widerstandsmoment W :** Wichtiger Kennwert für Nachweis gegen Fließen/Bruch
- **Satz von Steiner:** Unerlässlich für zusammengesetzte Querschnitte oder verschobene Achsen
- **Prüfungstipp:** Schrittfolge auswendig – Fehler bei I und W kosten oft viele Punkte!



- **Definition:** Mehr unbekannte Lagerreaktionen als Gleichgewichtsbedingungen verfügbar
- **Lösung:** Ergänzende Gleichungen nötig – meist aus Verformungen (Kompatibilität)
- **Beispiele:** Durchlaufträger, Einspannung plus Lager, mehrfach gelagerte Achsen
- **Vorgehensweise:** Lagerkräfte und Schnittgrößen mit zusätzlicher Gleichung berechnen



- 1. Lagerreaktion(en) als Unbekannte ansetzen
- 2. Durch Gleichgewichtsgleichungen lösen, soweit möglich
- 3. **Kompatibilitätsbedingung:** Verformung an bestimmtem Punkt (z. B. Lager) muss Null oder vorgegeben sein
- 4. Zusätzliche Gleichung erhalten.
- 5. Lösung aller Unbekannten
- **Tipp:** Energieverfahren (Castigliano) oft sehr effizient!



- **Oft in der Praxis:** Überlagerung von Zug/Druck, Biegung und Torsion
- **Normalspannung:**

$$\sigma_{ges} = \sigma_{Zug} + \sigma_{Biegung} = \frac{F}{A} \pm \frac{My}{I}$$

- **Schubspannung:** Aus Torsion (τ_T) und ggf. Querkraft (τ_Q)
- **Vergleichsspannung (von Mises):**

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{ges}^2 + 3\tau_{ges}^2}$$

Für Festigkeitsnachweise wichtig!

- **Praxis:** Kombination z. B. Welle mit Zug- und Torsionsbeanspruchung



- **Gegeben:** Rundstab, $F = 10 \text{ kN}$, $M = 1 \text{ kNm}$, $M_T = 500 \text{ Nm}$, $d = 30 \text{ mm}$

- **Berechnung:**

- $\sigma_{Zug} = \frac{F}{A}$
- $\sigma_{Bieg} = \frac{Mr}{I}$
- $\tau_T = \frac{M_T r}{J}$
- $A = \frac{\pi}{4} d^2$, $I = \frac{\pi}{64} d^4$, $J = \frac{\pi}{32} d^4$

- **Vergleichsspannung:**

$$\sigma_v = \sqrt{(\sigma_{Zug} + \sigma_{Bieg})^2 + 3\tau_T^2}$$



- **Biegung:** Belastung quer zur Balkenachse führt zu Durchbiegung
- **Bernoulli-Hypothese:** Querschnitte bleiben eben und senkrecht
- **Biegemoment:** $M(x) = EI \cdot \kappa(x)$, mit Krümmung $\kappa(x)$
- **Flächenträgheitsmoment:** $I = \int y^2 dA$ (Querschnitt)



- **Ziel:** Bestimmung der Durchbiegung $w(x)$ eines Balkens
- **Grundlage:** $M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$
- **Gleichgewichtsbedingung:** $M''(x) = -q(x)$, $q(x)$: Linienlast
- **Gesamte DGL:**

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x)$$

- Randbedingungen notwendig (Lagerung!)



Beispielfälle:

- **Einspannung:** $w(0) = 0, w'(0) = 0$
- **Loslager:** $w(0) = 0, M(0) = 0$
- **Freies Ende:** $M(L) = 0, Q(L) = 0$
- Randbedingungen bestimmen die Integrationskonstanten
- **Prinzip:** Für jeden Lastfall und jede Lagerung neu aufstellen!



- **Ziel:** Beschreibung der Durchbiegung $w(x)$ eines Balkens unter Belastung
- Die Lösung der DGL der Biegelinie ist also eine Funktionsgleichung!
- Grundlage für die Dimensionierung vieler Maschinenbauteile (z. B. Wellen, Träger, Achsen)
- **Balkenannahmen:**
 - Schlanker, gerader Balken, nur kleine Verformungen
 - Linear-elastisches Materialverhalten (Hooke'sches Gesetz)
- **Wichtig:** Für fast jede reale Aufgabe braucht man die DGL der Biegelinie!



- Ausgangspunkt: **Momenten - Krümmung - Beziehung**

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

- **Querkraft - Moment - Beziehung:**

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

- **Belastung - Querkraft - Beziehung:**

$$q(x) = -\frac{dQ(x)}{dx}$$

- Kombiniert ergibt sich die **DGL 4. Ordnung:**

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x)$$

- E : Elastizitätsmodul, I : Flächenträgheitsmoment, $q(x)$: äußere Linienlast



- Zur eindeutigen Lösung werden 4 Randbedingungen benötigt (4. Ordnung)

- **Typische Lager:**

- **Gelenkiges Lager:** $w(0) = 0, M = 0$
- **Parallelführung:** $w'(0) = 0, Q = 0$
- **Freies Ende:** $M = 0, Q = 0$
- **Einspannung:** $w(0) = w'(0) = 0$

Tabellenübersicht typischer Randbedingungen:

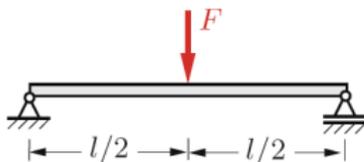
Lager	w	w'	M	Q
gelenkiges Lager 	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$
Parallelführung 	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0
Einspannung 	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
freies Ende 	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0



- 1. **Aufstellen der DGL:** $Elw^{(4)}(x) = q(x)$
- 2. **Mehrfaches Integrieren:** Bis $w(x)$ erhalten
- 3. **Bestimmen der Integrationskonstanten** mit den Randbedingungen
- 4. **Ergebnis interpretieren:** Max. Durchbiegung, Biegemoment, Schnittgrößen
- **Alternative:** Nutzung von Lösungstabellen für Standardfälle (Zeitersparnis!)



- Skizze: Lastfall 1 (Balken, L , Einzellast F in der Mitte)



- **DGL:** $EI w^{(4)}(x) = 0$ außerhalb der Last (für $x \neq L/2$)

- **Randbedingungen:**

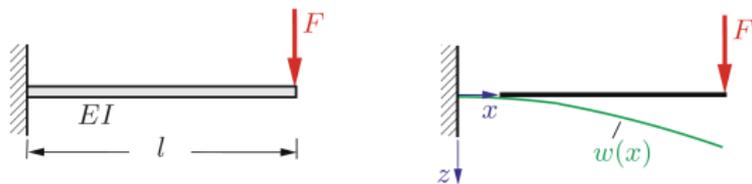
- $w(0) = 0$ (Lager links)
 - $w(L) = 0$ (Lager rechts)
 - $M(0) = 0$ (Lager links)
 - $M(L) = 0$ (Lager rechts)
- Lösung durch Integration und Anwendung der Bedingungen
 - **Maximale Durchbiegung:**

$$w_{max} = \frac{FL^3}{48EI}$$



Beispiel 2: Kragarm mit Einzelkraft F am freien Ende

- Skizze: Lastfall 2 (Kragarm, L , Einzelkraft F am freien Ende des Balkens)



- DGL:** $EI w^{(4)}(x) = 0$ für $0 < x < L$
- Randbedingungen:**
 - $w(0) = 0, w'(0) = 0$ (Einspannung)
 - $M(L) = 0, Q(L) = 0$ (freies Ende)
- Durchbiegung am freien Ende:**

$$w_{max} = \frac{FL^3}{3EI}$$



- **DGL:** $EIw^{(4)}(x) = 0$ für $0 < x < L$

- **Integrations Schritte:**

- $w'''(x) = C_1$
- $w''(x) = C_1x + C_2$
- $w'(x) = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$
- $w(x) = \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$

- **Randbedingungen:**

- $w(0) = 0, w'(0) = 0$ (Einspannung)
- $M(L) = -EIw''(L) = 0$ (freies Ende)
- $Q(L) = -EIw'''(L) = F$ (freies Ende)

- **Konstanten einsetzen, Gleichungen lösen** →

$$w(x) = \frac{F}{6EI}(3Lx^2 - x^3)$$

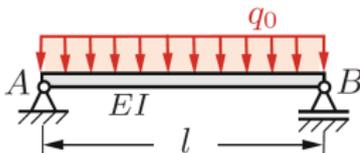
- **Durchbiegung am freien Ende:**

$$w_{max} = w(L) = \frac{FL^3}{3EI}$$



Beispiel 3: Gleichmäßig verteilte Last q auf einfach gestütztem Balken

- Skizze: Lastfall 3 (Balken, Länge L , $q = q_0$ konstant)



- DGL:** $EIw^{(4)}(x) = q$
- Randbedingungen:** wie bei Beispiel 1
- Maximale Durchbiegung:**

$$w_{max} = \frac{5qL^4}{384EI}$$

- Wichtig:** Diese Formel steht in jeder Formelsammlung, aber Herleitung zu kennen ist nicht verkehrt!



- **DGL:** $EIw^{(4)}(x) = q$

- **Allgemeine Lösung:**

$$w(x) = \frac{q}{24EI}x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

- **Randbedingungen:**

- $w(0) = 0, w(L) = 0$ (Lager)
- $M(0) = -EIw''(0) = 0$
- $M(L) = -EIw''(L) = 0$

- **Konstanten bestimmen und Ergebnis:**

$$w_{max} = \frac{5qL^4}{384EI}$$

- Siehe Formelsammlungen für weitere Lastfälle!

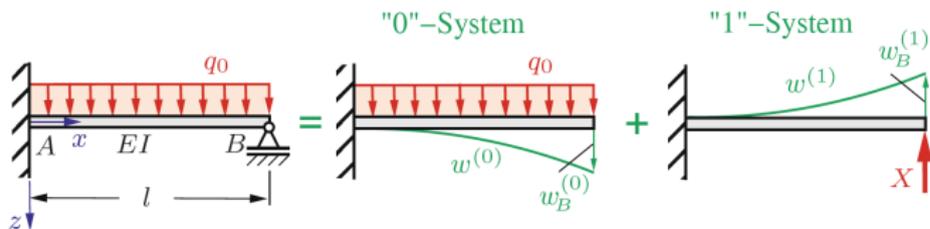


- **Für komplexe Belastungen:** Aufteilung in Einzellasten oder Standardfälle
- **Superposition:** Gesamtdurchbiegung = Summe der Einzeldurchbiegungen
- **Voraussetzung:** Lineares System (gilt in der Elastostatik)
- **Tipp:** Immer die Lager- und Randbedingungen für die Summe überprüfen!
- **Beispiel:** Kombination aus Einzellast und Gleichlast – beide Fälle separat berechnen, dann addieren



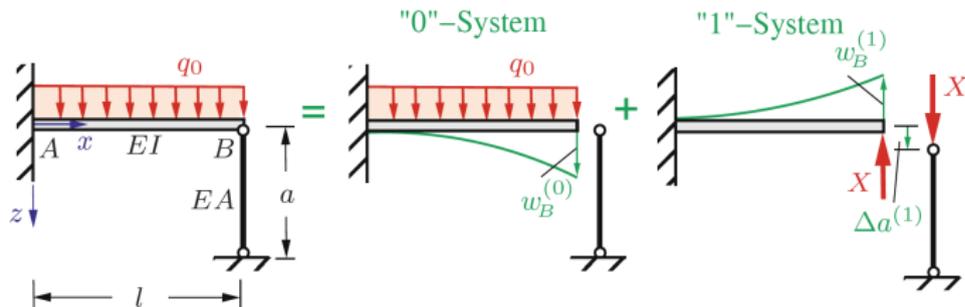
Superposition bei statisch unbestimmten Balkensystemen

- Bei statisch unbestimmten Systemen kann ein "0"-System (Grundsystem) gewählt werden.
- Beispiel: Ein einseitig eingespannter Balken (A fest), der auf einer Seite gelöst wird, indem die Einspannung durch eine gelenkige Lagerung ersetzt wird.
- Das reale System erhält man durch Überlagerung des Grundsystems mit einem "1"-System, in dem die gelöste Bindung durch ein Moment X ersetzt wird.



Beispiel: Balken mit elastischem Pendelstab

- Das rechte Ende des Balkens wird nun durch einen elastischen Pendelstab (Dehnsteifigkeit EA , Länge a) gehalten
- Gleiche Vorgehensweise wie zuvor: "0"-System und "1"-System.
- Der Stab ist unbelastet und erfährt eine Längenänderung $\Delta a^{(0)} = 0$ im Grundsystem, aber im "1"-System eine Kraft $X = S$.



- Im Gesamtsystem müssen die Verschiebungen von Balken und Stab am Punkt B übereinstimmen (Kompatibilität):

$$w_B = \Delta a$$

- Im Superpositionsansatz:

$$w_B^{(0)} + w_B^{(1)} = \Delta a^{(1)}$$

- Der Stab erfährt eine Verkürzung:

$$\Delta a^{(1)} = \frac{Xa}{EA}$$

- Kompatibilitätsgleichung:**

$$w_B^{(0)} + w_B^{(1)} = \frac{Xa}{EA}$$



- Mit den bekannten Werten:

$$w_B^{(0)} = \frac{q_0 \ell^4}{8EI}, \quad w_B^{(1)} = -\frac{X \ell^3}{3EI}$$

- Einsetzen in die Kompatibilitätsgleichung:

$$\frac{q_0 \ell^4}{8EI} - \frac{X \ell^3}{3EI} = \frac{Xa}{EA}$$

- Umstellen nach X :

$$\frac{q_0 \ell^4}{8EI} = X \left(\frac{\ell^3}{3EI} + \frac{a}{EA} \right)$$

$$X = \frac{q_0 \ell^4}{8EI} \cdot \frac{1}{\frac{\ell^3}{3EI} + \frac{a}{EA}}$$

- Endform:**

$$X = S = \frac{3q_0 \ell}{8} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3EIa}{EA\ell^3}}$$



- Die Gesamtbiegelinie ist die Summe der Teillösungen:

$$w(x) = w^{(0)}(x) + w^{(1)}(x)$$

- $w^{(0)}(x)$: Biegelinie des Balkens im Grundsystem unter Streckenlast, z.B.:

$$w^{(0)}(x) = \text{(siehe Formelsammlung, z.B. für gelenkig gelagerten Balken)}$$

- $w^{(1)}(x)$: Biegelinie infolge des eingeleiteten Momentes oder der Stabkraft X , ebenfalls aus Tabelle / Formelsammlung oder durch Lösung der Balken-DGL.
- Tipp:** Bei statisch unbestimmten Systemen immer Superposition + Kompatibilität verwenden!



- Falsche oder unvollständige Randbedingungen
- Verwechseln von Vorzeichen (insbesondere bei Momenten)
- Vergessen von Einheiten oder Flächenträgheitsmoment I
- Nichtbeachtung von Symmetrien (spart oft viel Rechenaufwand!)
- **Tipp:** Zur Not Skizzen anfertigen, Kräfte/Momente eintragen, Rechenschritte sauber dokumentieren!



- In Praxis und Klausur oft Tabellen für Standardbalkenformen und -belastungen zugelassen
- **Typische Quellen:** Formelsammlung Hütte, Dubbel, Springer-Taschenbuch, Internet (z. B. www.fernstudiumwb.de)
- **Software:** FTOOL, RSTAB, ANSYS, Matlab Symbolic Toolbox
- Wichtig: Tabellen verstehen, nicht nur ablesen!
- **Tipp:** Nachvollziehen, wie Tabellenformeln aus Grund-DGL abgeleitet werden!



- **Standardaufgaben:**

- Kragarm oder Balken mit Einzelkraft/Gleichlast
- Bestimmen von maximaler Durchbiegung, Lagerreaktionen, Momentenverlauf
- Angabe der Randbedingungen und vollständiger Lösungsweg!

- **Häufige Variationen:**

- Kombination von Einzellast und Gleichlast
- Querschnittswechsel, elastische Lagerung, Punktmomente
- Mehrfache Stützung (z. B. Durchlaufträger)

- **Tipp:** Auf vollständige Skizze, Einheiten und Rechenschritte achten!



- **Aufgabe:** Ein Balken der Länge $L = 2 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $I = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$ ist einseitig eingespannt. Am freien Ende wirkt eine Kraft $F = 5 \text{ kN}$. Bestimmen Sie die maximale Durchbiegung.

- **Lösung:**

- Ansatz: $w(x) = \frac{F}{6EI}(3Lx^2 - x^3)$

- $w_{max} = w(L) = \frac{FL^3}{3EI}$

- Werte einsetzen: $w_{max} = \frac{5\,000 \cdot (2)^3}{3 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \approx 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$

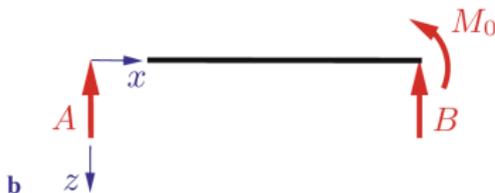
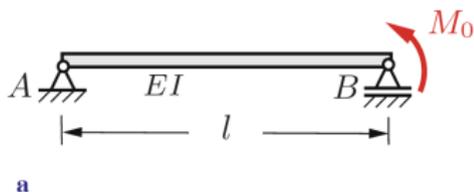
- **Tip:** Immer Plausibilitätscheck (Größenordnung!) machen



Beispiel: Gelenkig gelagerter Balken mit Endmoment

Aufgabe:

- Ein beidseitig gelenkig gelagerter Balken (Länge ℓ , Biegesteifigkeit EI) wird am rechten Ende mit einem Moment M_0 belastet.
- Wie groß ist die maximale Durchbiegung w_{\max} und an welcher Stelle tritt sie auf?



- Der Balken ist statisch bestimmt, daher folgt aus Gleichgewicht:

$$A = -B = \frac{M_0}{\ell}$$

- Der Momentenverlauf in Abhängigkeit von x (Abstand vom Lager A):

$$M(x) = x \cdot A = M_0 \frac{x}{\ell}$$



● **Grundgleichung:** $EI w''(x) = -M(x)$

● **Einsetzen:**

$$EI w''(x) = -M_0 \frac{x}{\ell}$$

● **Schrittweise Integration:**

$$EI w'(x) = -\frac{M_0}{2\ell} x^2 + C_1$$

$$EI w(x) = -\frac{M_0}{6\ell} x^3 + C_1 x + C_2$$



- **Randbedingungen:**

$$w(0) = 0 \implies C_2 = 0$$

$$w(l) = 0 \implies -\frac{M_0}{6l}l^3 + C_1l = 0$$

- **Lösung für C_1 :**

$$-\frac{M_0}{6}l^2 + C_1l = 0 \implies C_1 = \frac{M_0}{6}l$$

- **Endform der Biegelinie:**

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{M_0}{6l}x^3 + \frac{M_0}{6}lx \right]$$



- Vereinfachte Biegelinie:

$$w(x) = \frac{M_0 \ell^2}{6EI} \left[-\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{x}{\ell} \right]$$

- Die maximale Durchbiegung tritt auf, wo die Neigung $w'(x^*) = 0$:

$$w'(x) = \frac{M_0}{EI} \left[-\frac{x^2}{2\ell} + \frac{\ell}{6} \right]$$

$$-\frac{M_0}{2I} (x^*)^2 + \frac{M_0}{6} \ell = 0 \implies x^* = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$$



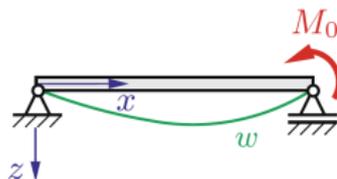
- Einsetzen der Extremstelle:

$$\begin{aligned}w_{\max} &= w\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right) = \frac{M_0\ell^2}{6EI} \left[-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \\ &= \frac{M_0\ell^2}{6EI} \left[-\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \frac{M_0\ell^2}{6EI} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}M_0\ell^2}{27EI}\end{aligned}$$

- Fazit:

$$w_{\max} = \frac{\sqrt{3}M_0\ell^2}{27EI}$$

an der Stelle $x^* = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$



- **Kompatibilität:** Alle Verformungen im System müssen „zusammenpassen“ – keine Lücken oder Überschneidungen
- **Typische Fälle:**
 - Feste Einspannung und Lager: Endverformung muss Null sein
 - Temperaturdehnung: Längenzunahme durch Erwärmung „blockiert“ → innere Kraft
- **Zusätzliche Gleichung für statisch unbestimmte Systeme**

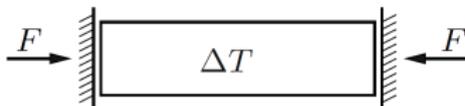


Beispiel: Thermische Dehnung mit Einspannung

- **Gegeben:** Stab der Länge L , Querschnitt A , E , temperaturbedingte Längenzunahme $\Delta L_{th} = \alpha L \Delta T$
- **Fest eingespannt:** Gesamtdehnung = 0, daher innere Druckkraft F_{th}
- **Gleichung:**

$$0 = \frac{F_{th}}{EA} + \alpha \Delta T$$

$$F_{th} = -EA\alpha\Delta T$$



- **Praxis:** Zwangsbedingungen führen zu zusätzlichen inneren Kräften – werden häufig in Prüfungen abgefragt!



Ausgangsbedingungen:

- Dach einer LKW-Laderampe mit angegebenem Profil unter Last
- modellhaft als Balken (E_D, I_D, α_D), fest eingespannt in A, unterstützt durch Stab (A_S, E_S, α_S) in B
- Balken unter Neigungswinkel $\beta = 45^\circ$ in der Wand eingespannt
- Streckenlast q , Anteile in Balkenlängsrichtung können vernachlässigt werden

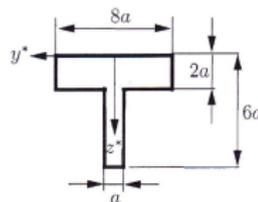
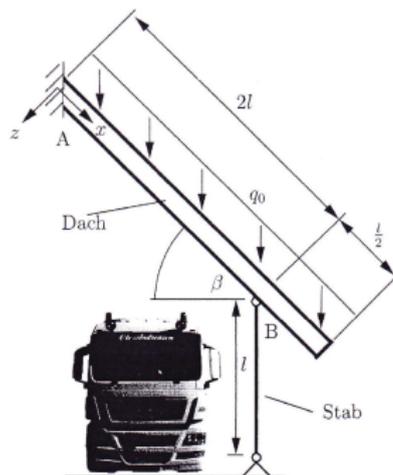
Gesucht:

- Flächenschwerpunkt des Profils
- Flächenträgheitsmomente I_y, I_z, I_{yz} (Schwerpunktkoordinatensystem)
- Zerlegung der Streckenlast q in Querrichtung und Längsrichtung
- Geometrische Verträglichkeitsbedingung für Längenänderung der Stabstütze und Absenkung von B
- Absenkung und Längenänderung in Abhängigkeit der Stabkraft S (Superpositionsprinzip)
- Berechnung der Stabkraft S



Gegeben:

- $q_0, \ell, a, \beta = 45^\circ$
- $E_D, \alpha_D = 0$
- A_S, E_S, α_S und ΔT



1a) Flächenschwerpunkt des T-Profiles

Zerlegung in Teilflächen:

- **Fläche 1 (Steg):** Breite a , Höhe $6a - 2a = 4a$, Fläche $4a^2$
- **Fläche 2 (Gurt):** Breite $8a$, Höhe $2a$, Fläche $16a^2$

Lage der Schwerpunkte:

- Bezug: Oberkante des Profils als $z = 0$
- Schwerpunkt Steg: $z_{s1} = 2a + 2a = 4a$
- Schwerpunkt Gurt: $z_{s2} = \frac{2a}{2} = a$



1a) Schwerpunktage berechnen (allgemeine Formeln)

Schwerpunktkoordinate z_S (von Unterkante):

$$z_S = \frac{A_1 z_{S1} + A_2 z_{S2}}{A_1 + A_2} = \frac{4a^2 \cdot 4a + 16a^2 \cdot a}{4a^2 + 16a^2} = \frac{16a^3 + 16a^3}{20a^2} = \frac{32a^3}{20a^2} = \frac{8}{5}a$$

Schwerpunkt in y -Richtung:

$$y_S = 0$$

(wegen Symmetrie)

Ergebnis:

$$S\left(0, \frac{8}{5}a\right)$$



1b) Flächenträgheitsmoment I_{y^*} (Satz von Steiner)

Für Rechteck um eigene Achse:

$$I_{y,\text{Rechteck}} = \frac{bh^3}{12}$$

Steinerscher Anteil:

$$I_{y^*} = \sum \left(\bar{I}_{y,i} + A_i(z_S - z_i)^2 \right)$$

Berechnung für beide Teilflächen:

- Steg: $\bar{I}_{y,1} = \frac{a \cdot (4a)^3}{12} = \frac{a \cdot 64a^3}{12} = \frac{16}{3} a^4$
- Gurt: $\bar{I}_{y,2} = \frac{8a \cdot (2a)^3}{12} = \frac{8a \cdot 8a^3}{12} = \frac{16}{3} a^4$



1b) I_{y^*} : Einsetzen der Steiner-Anteile

Steinersche Abstände:

$$(z_S - z_1) = \frac{8}{5}a - 4a = -\frac{12}{5}a$$

$$(z_S - z_2) = \frac{8}{5}a - a = -\frac{3}{5}a$$

Zusammengesetztes Flächenträgheitsmoment:

$$\begin{aligned} I_{y^*} &= \underbrace{\frac{16}{3}a^4}_{\text{Steg}} + 4a^2 \cdot \left(-\frac{12}{5}a\right)^2 + \underbrace{\frac{16}{3}a^4}_{\text{Gurt}} + 16a^2 \cdot \left(-\frac{3}{5}a\right)^2 \\ &= \frac{32}{3}a^4 + 4a^2 \cdot \frac{144}{25}a^2 + 16a^2 \cdot \frac{9}{25}a^2 \\ &= \frac{32}{3}a^4 + \frac{576}{25}a^4 + \frac{144}{25}a^4 \\ &= \frac{32}{3}a^4 + \frac{720}{25}a^4 = \frac{32}{3}a^4 + \frac{144}{5}a^4 \end{aligned}$$

Endergebnis (am besten so lassen):

$$I_{y^*} = \frac{592}{15}a^4$$



1b) Flächenträgheitsmoment I_z des T-Profiles (Hauptachse durch Schwerpunkt)

Für Rechtecke um die z-Achse:

$$I_{z,\text{Rechteck}} = \frac{hb^3}{12}$$

Berechnung für beide Teilflächen:

$$\bar{I}_{z1} = \frac{1}{12} \cdot 2a \cdot (8a)^3 = \frac{256}{3} a^4$$

$$\bar{I}_{z2} = \frac{1}{12} \cdot 4a \cdot a^3 = \frac{a^4}{3}$$

$$I_z = \bar{I}_{z1} + \bar{I}_{z2} = \frac{256}{3} a^4 + \frac{a^4}{3} = \frac{257}{3} a^4$$

Ergebnis:

$$I_z = \frac{257}{3} a^4$$



1c) Zerlegung der Streckenlast q

Gegeben:

- Streckenlast q wirkt senkrecht zur schiefen Dachfläche
- Dach ist um $\beta = 45^\circ$ geneigt

Zerlegung:

- **Quer zur Balkenachse (senkrecht):**

$$q_{\perp} = q_z = q \cdot \sin \beta$$

- **Entlang der Balkenachse (längs):**

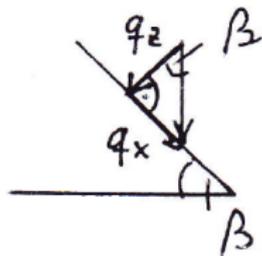
$$q_{\parallel} = q_x = q \cdot \cos \beta$$

- Für $\beta = 45^\circ$ gilt: $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

- **Ergebnisse:**

$$q_{\perp} = q_{\parallel} = \frac{q}{\sqrt{2}}$$

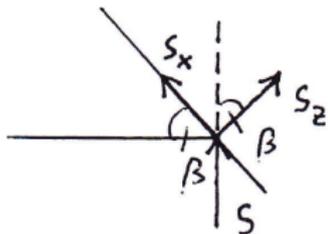
- In der Aufgabenstellung heißt es: "Anteile in Balkenlängsrichtung können vernachlässigt werden" \Rightarrow nur q_{\perp} relevant!



1c) und 1d) Stabkraft-Zerlegung & Kräfteskizze

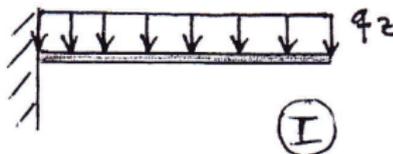
Zerlegung der Stabkraft:

- Stabkraft S wirkt entlang der Stabachse und kann in vertikale und horizontale Komponenten zerlegt werden (abhängig vom Stabwinkel).
- Relevant ist (meist) die Komponente senkrecht zur Balkenachse.

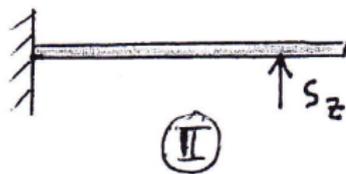


$$S_z = S \cos \beta$$
$$S_x = S \sin \beta$$

Kräfteskizze:



⊕

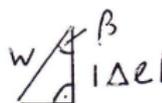


1d) Geometrische Verträglichkeitsbedingung

Bedingung:

- Absenkung w_{Ges} an der Stelle $2L$ ist gleich Superposition aus den Biegelinien von I und II.
- **Verträglichkeitsbedingung:**

$$w_{Ges}(2l) = w_I(2l) + w_{II}(2l) = w$$


$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{l \Delta \epsilon l}{w} \Leftrightarrow \underline{\underline{w \cdot \cos \beta = l \Delta \epsilon l}}$$

- Dabei ist:

$$\Delta l_S = \frac{S l}{A_S E_S} + \alpha_S \Delta T \cdot l$$

S : Stabkraft, A_S : Querschnittsfläche, E_S : Elastizitätsmodul,
 α_S : Temperaturdehnkoeffizient Stab, ΔT : Temperaturänderung



1e) Durchbiegung an B bei $x = 2l$ – Superposition, Werte aus Aufgabe

Dachmodell:

- Kragträgerlänge: $l_{\text{gesamt}} = \frac{5}{2}l$
- Stütze bei $x = 2l$
- Streckenlast $q_0 \cos \beta$ (nur Komponente senkrecht zum Dach wirksam)

Superpositionsprinzip:

- (I) Kragträger unter Streckenlast $q_0 \cos \beta$
- (II) Kragträger unter Gegenkraft $S \cos \beta$ bei $x = 2L$ (Stabkraft)

Biegelinien-Tafel:

- Durchbiegung an beliebigem Punkt x :

$$w^{(q)}(x) = \frac{q_0 \cos \beta}{24EI} x^2 [6l_{\text{Ges}}^2 - 4l_{\text{Ges}}x + x^2]$$

(hier: $l_{\text{Ges}} = \frac{5l}{2}$, $x = 2l$)

- Für Einzelkraft $S \cos \beta$ bei $x = 2l$:

$$w^{(S)}(2l) = -\frac{S \cos \beta}{6EI} (l_{\text{Ges}} - 2l)^2 (2l)$$



1e) Einsetzen der Werte und Endformel

Einsetzen in die Biegelinie für $x = 2\ell$, $I_{Ges} = \frac{5\ell}{2}$:

$$\begin{aligned}w^{(q)}(2\ell) &= \frac{q_0 \cos \beta}{24EI} (2\ell)^2 \left[6 \left(\frac{5\ell}{2} \right)^2 - 4 \left(\frac{5\ell}{2} \right) \cdot 2\ell + (2\ell)^2 \right] \\&= \frac{q_0 \cos \beta}{24EI} \cdot 4\ell^2 \left[6 \cdot \frac{25}{4} \ell^2 - 20\ell^2 + 4\ell^2 \right] \\&= \frac{q_0 \cos \beta}{24EI} \cdot 4\ell^2 \left[\frac{150}{4} \ell^2 - 20\ell^2 + 4\ell^2 \right] \\&= \frac{q_0 \cos \beta}{24EI} \cdot 4\ell^2 \left[\frac{75}{2} \ell^2 - 20\ell^2 + 4\ell^2 \right] \\&= \frac{q_0 \cos \beta}{24EI} \cdot 4\ell^2 \cdot \frac{43}{2} \ell^2 \\&= \frac{q_0 \cos \beta}{24EI} \cdot 86\ell^4\end{aligned}$$



Biegeliniertafelformel für Kragträger mit Einzelkraft F an Stelle a :

$$w(a) = \frac{Fa^3}{3EI}$$

Setze ein: $F = -S \cos \beta$, $a = 2\ell$

$$w_B^{(s)} = \frac{-S \cos \beta \cdot (2\ell)^3}{3EI} = -\frac{S \cos \beta \cdot 8\ell^3}{3EI}$$

$$w_B^{(s)} = -\frac{S \cos \beta}{3EI} \cdot 8\ell^3$$

$$\rightarrow w_B = \frac{q_0 \cos \beta}{24EI} \cdot 86\ell^4 - \frac{S \cos \beta}{3EI} \cdot 8\ell^3$$

Interpretation:

Diese Formel gilt, wenn wir die Durchbiegung an der Stelle a eines Kragträgers der Länge ℓ bestimmen und die Kraft F an der Stelle a angreift.



1f) Lösung der Stabkraft S (Superposition, Temperatur)

Verträglichkeitsbedingung:

$$w \cos \beta = \Delta \ell$$

Einsetzen der Ausdrücke:

$$\frac{q_0 \cos^2 \beta \cdot 86 \ell^4}{24EI} - \frac{S \cos^2 \beta \cdot 8 \ell^3}{3EI} = \frac{S \ell}{E_S A_S} - \alpha_S \Delta T \ell$$

Umstellen nach S :

$$S = \frac{\frac{q_0 \cos^2 \beta \cdot 43 \ell^3}{12EI} + \alpha_S \Delta T}{\frac{8 \ell^2 \cos^2 \beta}{3EI} + \frac{1}{E_S A_S}}$$

Legende:

- q_0 : Streckenlast, ℓ : Bezugsstrecke (Dach), E, I : Biegesteifigkeit Dach
- β : Dachneigung, S : Stabkraft, E_S : Elastizitätsmodul Stab
- A_S : Querschnitt Stab, α_S : Wärmedehnkoeffizient Stab, ΔT : Temperaturänderung



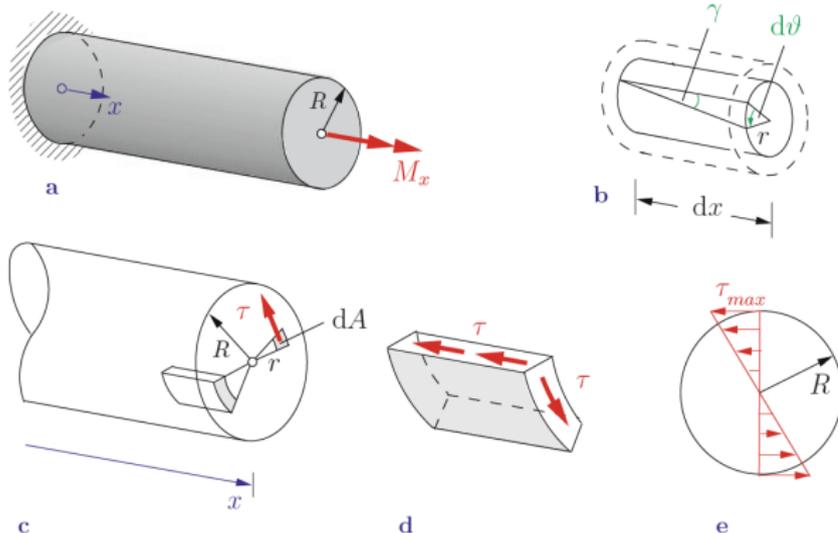
- Herleitung der DGL und Bedeutung jeder Ableitung verstehen
- Randbedingungen korrekt zuordnen und anwenden
- Mindestens zwei Standardfälle (Kragarm, einfach gestützter Balken) mit vollständigem Lösungsweg
- Superpositionsprinzip erklären und anwenden können
- Spezialfälle (z. B. Querschnittsänderung) einordnen können
- Fehlerquellen vermeiden: Einheiten, Vorzeichen, falsche Bedingungen!
- Notfallstrategie: Tabellenwerte gezielt einsetzen, aber Prinzip verstehen!



- DGL der Biegelinie ist zentrales Werkzeug der Balkentheorie
- Immer 4 Randbedingungen notwendig (Lagerungen genau analysieren!)
- Lösung häufig durch Tabellen/Software – Prinzip und Herleitung bleiben prüfungsrelevant!
- **Merke:** Für Klausur – Standardfälle mit Herleitung und Formeln beherrschen!



- **Torsion:** Drehbeanspruchung eines Stabs/Balkens durch ein Moment M_T
- Typisch bei Wellen, Antriebsachsen, Schrauben
- **Wirkung:** Es entsteht eine Schubspannung über den Querschnitt



- **Schubspannung:**

$$\tau(r) = \frac{M_T \cdot r}{I}$$

r : Abstand zur Mittelachse, J bzw. I : polares Flächenträgheitsmoment
 $I = \frac{\pi}{2} R^4$ für Vollquerschnitt, $I = \pi(R_A^4 - R_I^4)/2$ für Rohr

- **Maximalwert:** $r = R$ (Randfaser)

- **Verdrillung (Winkel):**

$$\varphi = \frac{M_T L}{GI}$$

L : Länge, G : Schubmodul

- **Praxis:** Immer auf zulässige Schubspannung und Verdrillung prüfen!



- **Beispiel:** Welle ($R = 2 \text{ cm}$, $L = 1 \text{ m}$, $M_T = 500 \text{ Nm}$, $G = 80 \text{ GPa}$)

- $J = \frac{\pi}{2} R^4 \approx 1,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$
- $\tau_{max} = \frac{M_T R}{J} \approx 9,9 \text{ MPa}$
- $\varphi = \frac{M_T L}{GJ} \approx 0,0062 \text{ rad} = 0,36^\circ$

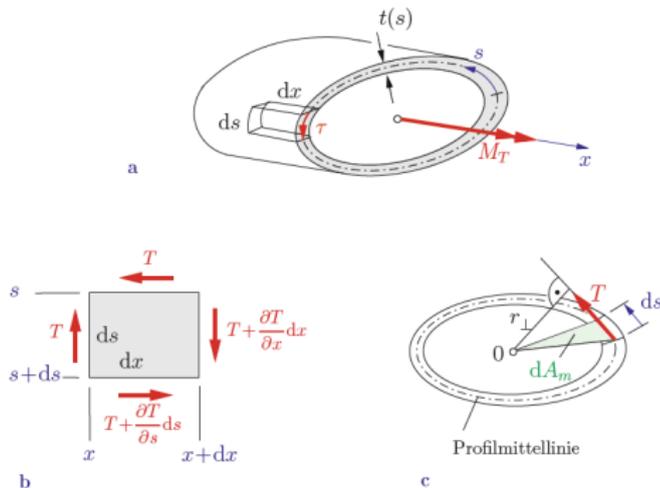
- **Tipp:**

- Wellen mit Nut, Absatz, Kerbe: Immer dort prüfen!
- Sicherheitsfaktor gegen Fließen/Bruch bei Schubspannung



Torsion dünnwandiger geschlossener Profile: Einführung

- **Typische Beispiele:** Rohre, Rechteckrohre, geschlossene Blechprofile, Luftfahrtprofile
- **Eigenschaft:** Sehr hohe Torsionssteifigkeit, günstige Schubspannungsverteilung
- **Bedingung:** Wanddicke $t \ll$ Profilabmessung, Querschnitt bleibt weitgehend unverformt

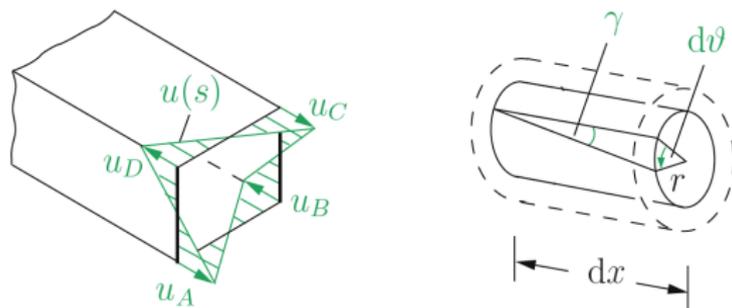


- **Bredt'sche Formel:**

$$\tau = \frac{M_T}{2tA_m}$$

M_T : Torsionsmoment, t : mittlere Wanddicke, A_m : eingeschlossene Fläche (mittlere Querschnittsfläche)

- **Voraussetzung:** Gleichmäßige Schubspannungsverteilung über den Umfang (nur bei dünnwandigen, geschlossenen Profilen!)
- **Praxis:** Bei mehreren Stegen/Teilflächen A_m als Summe nehmen
- **Bedeutung:** Sehr geringe Schubspannung bei großer eingeschlossener Fläche – daher Rohre sehr effektiv für Torsion!



- **Verdrillungswinkel bei dünnwandigem geschlossenem Profil:**

$$\vartheta = \frac{M_T L}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

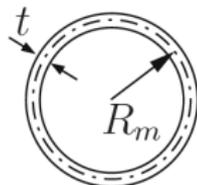
L : Länge, G : Schubmodul, ds : Umfangelement, t : Wanddicke (ggf. über Umfang variabel)

- **Vereinfachung bei konstanter Wanddicke:**

$$\vartheta = \frac{M_T L}{2GA_m t u}$$

u : Umfangslänge

- **Tipp:** $\oint \frac{ds}{t}$ = Integration entlang des geschlossenen Profils; bei konstantem t einfach u/t



Beispiel: Rechteckrohr unter Torsion

- **Gegeben:** Rechteckrohr, $b = 80 \text{ mm}$, $h = 40 \text{ mm}$, $t = 2 \text{ mm}$, $M_T = 500 \text{ Nm}$
- **Eingeschlossene Fläche:** $A_m = (b - t)(h - t) \approx 76 \times 36 \text{ mm}^2 = 2736 \text{ mm}^2 = 2,736 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
- **Schubspannung:**

$$\tau = \frac{500}{2 \cdot 0.002 \cdot 2.736 \cdot 10^{-3}} \approx 45.7 \text{ MPa}$$

- **Umfang:** $u = 2(b + h - 2t) \approx 2 \cdot (80 + 40 - 4) \text{ mm} = 232 \text{ mm} = 0.232 \text{ m}$
- **Verdrillung (bei $L = 1 \text{ m}$, $G = 80 \text{ GPa}$):**

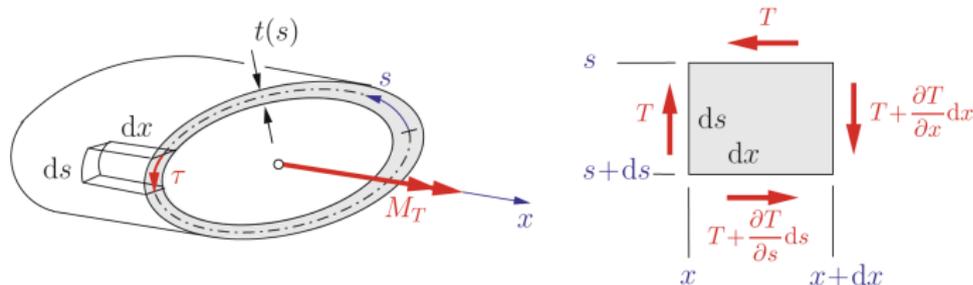
$$\vartheta = \frac{500 \cdot 1}{2 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 2.736 \cdot 10^{-3} \cdot 0.002 \cdot 0.232} \approx 0.005 \text{ rad} = 0.29^\circ$$



- **Schubfluss T :**

$$T = \tau \cdot t = \frac{M_T}{2A_m}$$

- T ist über den Umfang konstant (bei konstanter Wanddicke!)
- **Konstruktionstipp:** In der Konstruktion oft Schubfluss zur Bemessung von Nietreihen, Schweißnähten usw. genutzt
- **Anschaulich:** Bildlich gesprochen „fließt“ das Torsionsmoment als Schubfluss einmal um den ganzen Querschnitt



- **Schubspannung (maximal):**

$$\tau_{max} = \frac{3M_T}{ht^2}$$

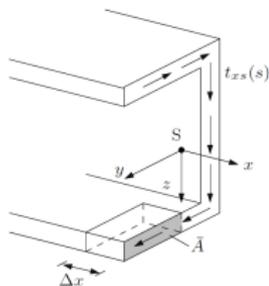
für U-Profil mit Schenkellänge h , Wanddicke t

- **Verdrillung (maximal):**

$$\vartheta = \frac{M_T L}{I_T G}$$

I_T : Torsionsträgheitsmoment, für einfache Profile tabelliert (z. B. I_T für U-Profil)

- **Praxis:** Vergleich zu geschlossenen Profilen – um mehrere Größenordnungen geringere Steifigkeit!



- **Geschlossen:** Hohe Torsionssteifigkeit, geringe Schubspannung, kleine Verdrillung (z. B. Rohr, Rechteckrohr)
- **Offen:** Sehr geringe Torsionssteifigkeit, sehr große Schubspannung & Verdrillung, Gefahr der Verwindung
- **Prüfungstipp:** Immer zuerst prüfen, ob der Querschnitt geschlossen ist!
- In der Praxis werden offene Profile selten auf reine Torsion beansprucht – Gefahr des Stabilitätsversagens!



Beispiel: Torsion an einem dünnwandigen Rechteckrohr (geschlossen)

- **Gegeben:** Rechteckrohr (geschlossen), Breite $b = 60$ mm, Höhe $h = 40$ mm, Wanddicke $t = 2$ mm, Länge $L = 1$ m, $M_T = 400$ Nm, $G = 80$ GPa
- **Gesucht:** Maximale Schubspannung τ , Verdrillung ϑ
- **1. Eingeschlossene Fläche (Mittellinie!):**

$$A_m = (b - t)(h - t) = 58 \times 38 \text{ mm}^2 = 2204 \text{ mm}^2 = 2.204 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

- **2. Umfang der Mittellinie:**

$$u = 2[(b - t) + (h - t)] = 2(58 + 38) \text{ mm} = 192 \text{ mm} = 0.192 \text{ m}$$

- **3. Schubspannung (Bredt):**

$$\tau = \frac{M_T}{2tA_m} = \frac{400}{2 \cdot 0.002 \cdot 2.204 \times 10^{-3}} \approx 45.4 \text{ MPa}$$



Beispiel: Torsion an einem dünnwandigen Rechteckrohr (geschlossen)

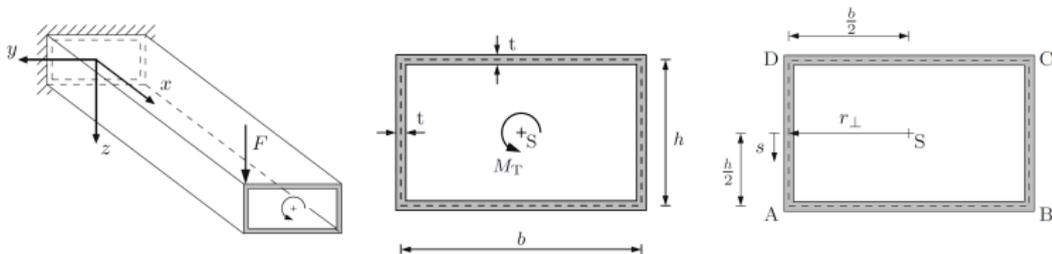
● 4. Verdrillung (Integration entlang Mittellinie!):

$$\vartheta = \frac{M_T L}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{u}{t} = \frac{0.192}{0.002} = 96$$

$$\vartheta = \frac{400 \cdot 1}{4 \cdot (2.204 \times 10^{-3})^2 \cdot 80 \times 10^9} \cdot 96 \approx 0.0027 \text{ rad} = 0.155^\circ$$

- **Hinweis:** Die Integrale laufen stets entlang der Mittellinie – bei variabler Wanddicke müssten einzelne Abschnitte separat integriert werden!



Beispiel: Torsion an einem dünnwandigen offenen U-Profil

- **Gegeben:** U-Profil, Schenkellänge $h = 60$ mm, Stegbreite $b = 30$ mm, Wanddicke $t = 2$ mm, Länge $L = 1$ m, $M_T = 120$ Nm, $G = 80$ GPa
- **Gesucht:** Maximale Schubspannung τ_{max} , Verdrillung ϑ
- **1. Integration über Teilquerschnitte (Mittellinie):**

Gesamte Mittellinienlänge: $u = 2h + b = 2 \cdot 60 + 30 = 150$ mm = 0.15 m

- **2. Torsionsträgheitsmoment I_T :**

$$I_T \approx \frac{1}{3} \sum \ell_i^3 t \quad (\text{für jeden Schenkel } \ell_i)$$

$$I_T \approx \frac{1}{3} [b^3 + 2h^3] t = \frac{1}{3} [(0.03)^3 + 2 \cdot (0.06)^3] \cdot 0.002 \approx 9.28 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

- **3. Maximale Schubspannung:**

$$\tau_{max} \approx \frac{M_T}{t \cdot \ell_{min}^2} \quad (\text{vereinfacht, } \ell_{min} = \text{kürzeste Mittellinie} = \text{Stegbreite})$$

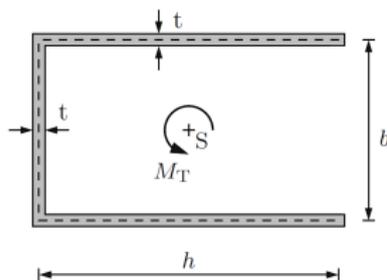
$$\tau_{max} \approx \frac{120}{0.002 \cdot (0.03)^2} \approx 66.7 \text{ MPa}$$



- **4. Verdrillung:**

$$\vartheta = \frac{M_T L}{G I_T} = \frac{120 \cdot 1}{9.28 \times 10^{-8} \cdot 80 \times 10^9} \approx 0.016 \text{ rad} = 0.92^\circ$$

- **Hinweis:** Die Berechnung erfordert das Summen/Integrale entlang der Mittellinienabschnitte jedes Querschnitts!



- Dünnwandige offene Profile niemals für große Torsionsbeanspruchung vorsehen!
- Offene Profile ggf. durch Schließen (Schweißblech, Steg) deutlich steifer machen!
- Immer auf Knick- und Beulgefahr achten (Stabilitätsproblem!)
- Prüfung: Immer kontrollieren, ob die Bredt'schen Formeln angewendet werden dürfen (nur bei geschlossenem, dünnwandigem Profil!)
- **Typische Fehler:** Wanddicke, Fläche, Umfang falsch eingesetzt; Offene Profile mit Bredt gerechnet (nicht zulässig!)



Ausgangsbedingungen:

- Halbkreisförmiges, dünnwandiges Profil ($\delta \ll r$), Länge l , Radius r
- Profil fest eingespannt, exzentrische Belastung durch F (senkrecht) und $2F$ (längs)
- Koordinatensystem im Schwerpunkt, bekannt: A_{Profil}, I_y
- z_s : Schwerpunktabstand, Material: E, ν

Gesucht:

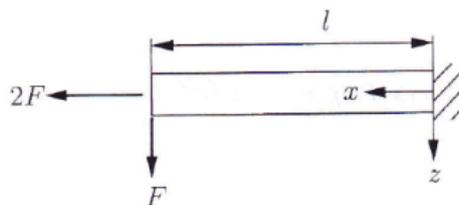
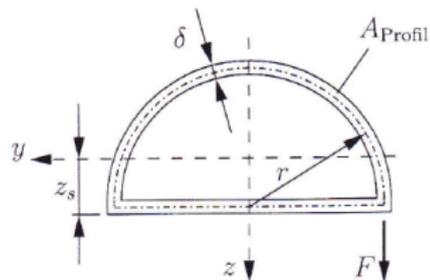
- Minimale Wandstärke δ_{\min} , sodass Verdrehung φ_{zul} nicht überschritten wird
- Maximale Schubspannung τ_{\max} infolge Torsion
- Größte Vergleichsspannung σ_v nach Gestaltänderungshypothese (Schubspannungen durch Querkraft vernachlässigen; Ort der max. Beanspruchung)
- Nach Aufreißen (offenes Profil): Neue Verdrehung φ_{Riss} bei $\delta = \delta_{\min}$
- Neue maximale Schubspannung τ_{Riss} bei offenem Profil



Altklausur-Aufgabe 2 – Dünnwandiges, geschlossenes Profil unter Torsion

Gegeben:

- $r, \ell, z_s, A_{\text{Profil}}, I_y, \varphi_{\text{zul}}, F, E, \nu$



2a) Minimale Wandstärke δ_{\min} bei vorgegebener Verdrehung

Torsionswinkel eines dünnwandig geschlossenen Profils:

$$\varphi = \frac{M_T \ell}{GI_T}$$

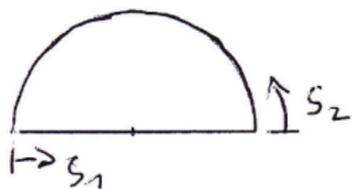
Mit:

- $M_T = F \cdot r$ (Torsionsmoment), $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (Schubmodul)
- $I_T = \frac{4A_m^2}{\int_c \frac{ds}{t(s)}}$ (Torsionsträgheitsmoment, $A_m = \frac{\pi r^2}{2}$ (eingeschlossene Fläche))

Für das Halbkreisprofil:

$$\oint_c \frac{ds}{t(s)} = \int_0^{2r} \frac{ds_1}{\delta} + \int_0^{\pi r} \frac{ds_2}{\delta} = \frac{r}{\delta}(2 + \pi)$$

$$I_T = \frac{\pi^2 r^3 \delta}{2 + \pi}$$



Randbedingung:

$$\varphi \leq \varphi_{\text{zul}} \Rightarrow \delta \geq \frac{Fr\ell(2+\pi)}{\pi^2 r^3 G \varphi_{\text{zul}}} \Rightarrow \boxed{\delta_{\min} = \frac{F\ell(2+\pi)}{\pi^2 r^2 G \varphi_{\text{zul}}}}$$



2b) Maximale Schubspannung τ_{\max} infolge Torsion

Bredtsche Formel für Schubspannung:

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{2A_m t_{\min}}$$

Einsetzen:

$$M_T = Fr, \quad A_m = \frac{\pi r^2}{2}, \quad t_{\min} = \delta_{\min}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Fr}{\pi r^2 \delta_{\min}}$$

Setze δ_{\min} aus 2a) ein:

$$\tau_{\max} = \frac{Fr}{\pi r^2} \cdot \frac{\pi^2 r^2 G \varphi_{\text{zul}}}{F \ell (2 + \pi)} = \frac{\pi r G \varphi_{\text{zul}}}{\ell (2 + \pi)}$$

Kurz:

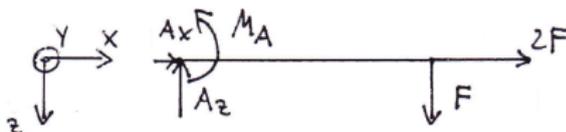
$$\tau_{\max} = \frac{\pi r G \varphi_{\text{zul}}}{\ell (2 + \pi)}$$



2c) Größte Vergleichsspannung σ_v nach von Mises

Schnittgrößen am Einspannquerschnitt:

FKB:



$$\sum F_x = 0: A_x = -2F$$

$$\sum F_z = 0: A_z = F$$

$$\sum M_A = 0: M_A = F\ell$$

Normalkraft und Moment:

$$N(x) = -A_x = 2F \quad M(x) = F(x - \ell)$$

Spannungsverteilung:

$$\sigma(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z + \frac{N(x)}{A}$$

Maximale Normalspannung am gefährdeten Punkt ($x = 0, z = z_0$):

$$\sigma_{\max} = \frac{-F\ell}{I_y} z_0 + \frac{2F}{A}$$



Vergleichsspannung (Gestaltänderungsenergiehypothese):

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau^2}$$

Mit:

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{\pi r G \varphi_{\text{zul}}}{\ell(2 + \pi)}$$

Kurz:

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{-F\ell}{I_y} z_0 + \frac{2F}{A}\right)^2 + 3 \left(\frac{\pi r G \varphi_{\text{zul}}}{\ell(2 + \pi)}\right)^2}$$



2d) Verdrehung φ_{Riss} nach Riss (offenes Profil)

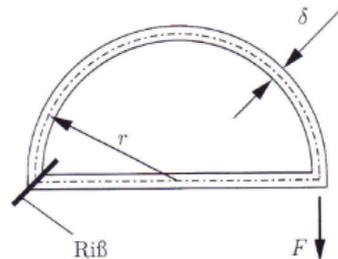
Das Profil ist nun durch einen Produktionsfehler rissbehaftet.

Für δ_{min} gilt:

$$\delta_{\text{min}} = \frac{F\ell(2 + \pi)}{\pi^2 r^2 G \varphi_{\text{zul}}}$$

Torsionsträgheitsmoment für offenen Querschnitt:

$$\bar{I}_T = \frac{\delta_{\text{min}}^3 r(2 + \pi)}{3}$$



Verdrehung nach Riss:

$$\varphi_{\text{Riss}} = \frac{M_T \ell}{G \bar{I}_T} = \frac{3F\ell}{G \cdot \delta_{\text{min}}^3 (2 + \pi)}$$

Alternative Schreibweise:

$$\varphi_{\text{Riss}} = \frac{3F\ell}{G \cdot \delta_{\text{min}}^3 (2 + \pi)}$$



Schubspannung bei offenem, dünnwandigem Profil:

$$\tau_{\text{max, Riss}} = \frac{3M_T}{(2 + \pi)r\delta_{\text{min}}^2} = \frac{3Fr}{(2 + \pi)r\delta_{\text{min}}^2} = \frac{3F}{(2 + \pi)\delta_{\text{min}}^2}$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{Riss}} = \frac{3F}{(2 + \pi)\delta_{\text{min}}^2}$$

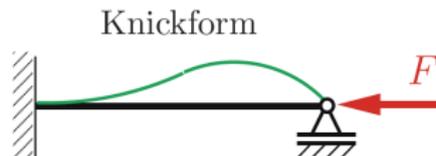
Hinweis: Nach Aufreißen ist die Schubspannung gegenüber dem geschlossenen Zustand stark erhöht!



- **Bredt'sche Formel:** Nur für dünnwandig, geschlossen und mit homogener Wanddicke
- **Geschlossene Profile:** Sehr hohe Torsionssteifigkeit, günstige Spannungsverteilung
- **Offene Profile:** Extrem torsionsweich, große Verdrehung – meiden bei Torsionsbelastung!
- **Prüfungstipp:** Typische Aufgabe: Unterschied, Anwendung, Beispielrechnung!
- **Checkliste:**
 - Ist das Profil geschlossen/dünnwandig?
 - Bredt'sche Formel anwenden?
 - Plausibilität der Ergebnisse prüfen!



- **Knickung:** Instabilitätsversagen von schlanken Stäben unter Druck
- **Praxis:** Typisch bei Säulen, Stützen, dünnen Zug- oder Druckstäben
- **Kennzeichen:** Plötzliche Auslenkung bei Überschreiten der kritischen Knickkraft



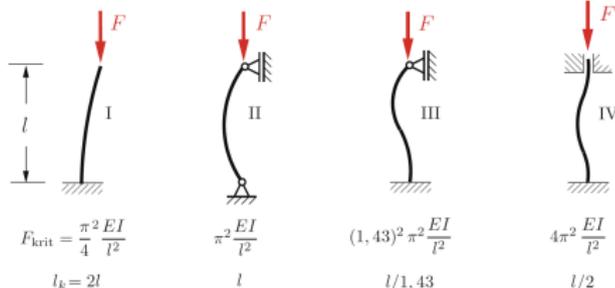
- **Formel für kritische Knickkraft:**

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

E : Elastizitätsmodul, I : Flächenträgheitsmoment, L : Stablänge, K : Knicklängenfaktor

- **Einfluss von Randbedingungen:**

- Beidseitig gelenkig: $K = 1$
- Einseitig eingesp., einseitig frei: $K = 2$
- Beidseitig eingespannt: $K = 0.5$
- Einseitig eingespannt, einseitig gelenkig: $K \approx 0.7$



Beispiel: Knickkraft einer schlanken Stütze

- **Gegeben:** Stütze $L = 2 \text{ m}$, $I = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$, $E = 210 \text{ GPa}$, beidseitig gelenkig
- **Berechnung:**

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{(2)^2} \approx 1.66 \cdot 10^5 \text{ N} = 166 \text{ kN}$$

- **Praxis:** Immer ausreichende Sicherheitsfaktoren gegen Knickung berücksichtigen!



- **Wichtige Parameter:** Schlankheit ($\lambda = L/i, i = \sqrt{I/A}$), Randbedingungen, Querschnittsform
- **Knicken ist Stabilitätsversagen, keine Festigkeit!** Versagen tritt oft unterhalb der Streckgrenze auf.
- **Prüfungstipp:** Immer Stablänge, Einspannung und Querschnitt beachten.

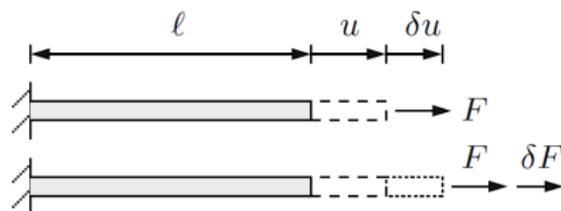


- **Grundidee:** Man "belastet" das System gedanklich (virtuell) mit einer zusätzlichen, kleinen Kraft oder einem Moment an der Stelle, wo man die Verschiebung (oder Verdrehung) berechnen möchte.

Prinzip der virtuellen Kräfte – Allgemeine Form

$$f_i = \int_l \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int_l \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \int_l \frac{Q\bar{Q}}{GA_S} dx + \int_l \frac{M_T\bar{M}_T}{GI_T} dx .$$

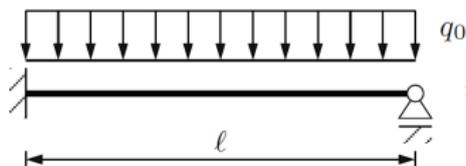
- Die Verschiebung / Verdrehung f_i an einer Stelle ist gleich der Arbeit, die eine virtuelle Kraft an genau dieser Stelle im verformten System verrichtet
- Anwendung: Berechnung von Durchbiegungen, Lagerkräften, statisch unbestimmten Systemen



Problem: Statisch unbestimmt gelagerter Balken unter Streckenlast q_0 .

Lösungsidee:

- System wird in zwei statisch bestimmte Teilsysteme zerlegt (Superposition).
- Verschiebung am Auflager B_v muss Null sein.
- Prinzip der virtuellen Kräfte bestimmt Auflagerreaktion.



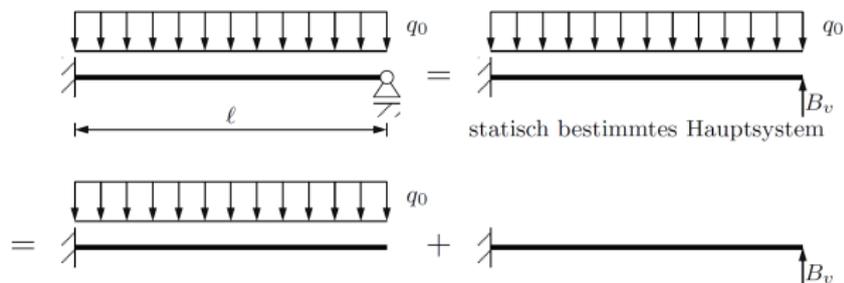
Superposition:

- Hauptsystem mit q_0 und festem Auflager B_v
- Zusatzsystem nur mit Auflagerkraft B_v

Virtuelle Kraft:

- Setze virtuelle Kraft δB_v am Auflager an.
- Berechne Momente für reale (M_{q_0}) und virtuelle ($M_{\delta B_v}$) Belastung:

$$M_{q_0}(x) = -\frac{1}{2}q_0x^2 \quad M_{\delta B_v}(x) = \delta B_v \cdot x$$



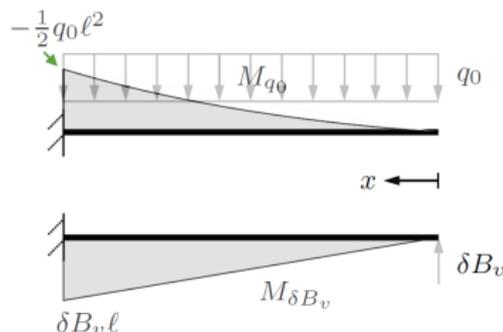
Momentenverläufe der Teilprobleme:

- **Reale Belastung:**

$$M_{q_0}(x) = -\frac{1}{2}q_0x^2$$

- **Virtuelle Kraft am Auflager:**

$$M_{\delta B_v}(x) = \delta B_v x$$



Beide Momente werden im Prinzip der virtuellen Kräfte miteinander multipliziert und über die Balkenlänge integriert.



Virtuelle Arbeit:

$$\delta B_V \cdot u_\ell(q_0) + \delta B_V \cdot \frac{q_0 \ell^4}{8EI} = 0$$
$$\Rightarrow u_\ell(q_0) = -\frac{q_0 \ell^4}{8EI}$$

Integralform:

$$\delta B_V u_\ell(q_0) = \int_0^\ell \frac{M_{\delta B_V} M_{q_0}}{EI} dx$$
$$= \int_0^\ell \frac{\delta B_V \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2} q_0 x^2\right)}{EI} dx = -\delta B_V \frac{q_0}{2EI} \int_0^\ell x^3 dx = -\delta B_V \frac{q_0 \ell^4}{8EI}$$



Verschiebung am Auflager B_V :

$$u_\ell(q_0) = -\frac{q_0 \ell^4}{8EI}$$

**Superponiere die Teilsysteme, sodass die Randbedingung ($u_\ell = 0$) erfüllt ist.
Prinzip der virtuellen Kräfte:**

- Virtuelle Arbeit der Auflagerkraft verschwindet \rightarrow Gleichung für B_V bestimmbar.
- Einfache Berechnung von Verschiebungen in statisch unbestimmten Systemen!



- **Aussage:** Die Ableitung der Gesamtenergie nach einer äußeren Kraft ergibt die zugehörige Verschiebung.

- **Formel:**

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F}$$

U : Elastische Energie, F : angreifende Kraft, δ : Verschiebung am Angriffspunkt

- **Beispiel:** Durchbiegung an beliebiger Stelle eines Balkens mit beliebiger Belastung
- **Vorteil:** Auch für komplexe Systeme und statisch unbestimmte Systeme geeignet!



- **Gegeben:** Balken, $M(x)$ bekannt, gesuchte Durchbiegung bei $x = a$
- **Elastische Energie:**

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

- **Durchbiegung:**

$$w(a) = \frac{\partial U}{\partial F}$$

- **Praxis:** Praktisch, wenn mehrere Kräfte/Momente wirken oder System statisch unbestimmt ist.



- Stabilität/Knickung: Kritische Last berechnen, Lagerung beachten
- Energieverfahren: Virtuelle Arbeit, Castigliano für Verschiebungen und Kräfte
- Statisch unbestimmte Systeme: Zusätzliche Bedingungen (Verformung, Kompatibilität)
- Kombinierte Beanspruchung: Spannungen überlagern, Vergleichsspannung für Nachweis
- Kompatibilitätsbedingungen: Thermische Dehnung, feste Lager, Montagefälle beachten
- **Prüfungstipp:** Immer alle Nebenbedingungen und Systemgrenzen sauber aufstellen!

