

Lernbuch: Elastostatik

Technische Mechanik II

Vortragsskript für Webinar und Prüfungsvorbereitung

Dr.-Ing. Kevin Suta

Version 2026

Basierend auf:

Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder, Wolfgang A. Wall

„Technische Mechanik Band 2: Elastostatik“

Springer Vieweg (verwendet: 9. Auflage 2007 sowie 14. Auflage 2021)

Ergänzend: Gross, Ehlers, Wriggers, Schröder, Müller

„Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 2 – Elastostatik, Hydrostatik“

12. Auflage, Springer Vieweg 2017, ISBN 978-3-662-53674-2

Mit herzlichem Dank an:

Prof. Dr.-Ing. Johannes Wandering (Hochschule München) für seine frei zugänglichen Vorlesungsunterlagen zur Technischen Mechanik 2, die als Inspiration für die Beispiele zur Biegelinie gedient haben.

WICHTIG!

Dieses Skript dient als Lernhilfe und fasst die wesentlichen Inhalte der Elastostatik (Festigkeitslehre) zusammen. Es ersetzt nicht das eigenständige Durcharbeiten von Aufgaben und Lehrbüchern. Für ein tiefes Verständnis ist das aktive Mitrechnen unerlässlich!

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	2
1.1. Was ist Elastostatik?	2
1.2. Grundannahmen der linearen Elastostatik	2
1.3. Der rote Faden: von der Last zur Dimensionierung	3
1.4. Überblick über dieses Skript	3
2. Spannung und Dehnung – die Grundgrößen	3
2.1. Warum reicht die Schnittgröße nicht aus?	4
2.2. Normalspannung und Schubspannung	4
2.3. Dehnung, Querkontraktion und Schubverzerrung	5
2.4. Das Hookesche Gesetz	6
2.5. Der Zugversuch und das Spannungs-Dehnungs-Diagramm	6
2.6. Wärmedehnung	7
2.7. Zusammenfassung Kapitel 2	8
3. Zug und Druck in Stäben	9
3.1. Der Einzelstab: Verlängerung und Dehnsteifigkeit	9
3.2. Veränderlicher Querschnitt oder veränderliche Normalkraft	9
3.3. Statisch bestimmte und statisch unbestimmte Systeme	10
3.4. Wärmespannungen bei behinderter Ausdehnung	11
3.5. Zusammenfassung Kapitel 3	12
4. Der Spannungszustand	12
4.1. Spannungsvektor und Spannungstensor	13

4.2.	Der ebene Spannungszustand	13
4.3.	Koordinatentransformation	13
4.4.	Hauptspannungen und Hauptrichtungen	14
4.5.	Maximale Schubspannung	14
4.6.	Der Mohrsche Spannungskreis	14
4.7.	Der dünnwandige Kessel	15
4.8.	Festigkeitshypothesen	15
4.9.	Zusammenfassung Kapitel 4	17
5.	Flächenträgheitsmomente	17
5.1.	Wozu Flächenträgheitsmomente?	17
5.2.	Wiederholung: Flächenschwerpunkt	17
5.3.	Definition der Flächenträgheitsmomente	18
5.4.	Trägheitsmomente einfacher Querschnitte	18
5.5.	Der Satz von Steiner (Parallelverschiebung)	18
5.6.	Widerstandsmoment	19
5.7.	Hauptträgheitsmomente	19
5.8.	Zusammengesetzte Querschnitte – Schritt für Schritt	19
5.9.	Zusammenfassung Kapitel 5	22
6.	Balkenbiegung	22
6.1.	Gerade Biegung und die Bernoulli-Hypothese	22
6.2.	Die Biegenormalspannung	23
6.3.	Die Differentialgleichung der Biegelinie	23
6.4.	Randbedingungen	24
6.5.	Lösung durch Integration – der allgemeine Weg	25
6.6.	Balken mit außermittiger Einzellast – bereichsweise Integration	26
6.7.	Superpositionsprinzip und Biegelinientafel	27
6.8.	Statisch unbestimmter Balken: direkte Integration	28
6.9.	Schubspannungen im Balken	29
6.10.	Schiefe Biegung	30
6.11.	Biegung mit Zug/Druck und der Kern des Querschnitts	30
6.12.	Temperaturbelastung beim Balken	31
6.13.	Zusammenfassung Kapitel 6	31
7.	Statisch unbestimmte Systeme und Verträglichkeit	31
7.1.	Was bedeutet statisch unbestimmt?	32
7.2.	Das Lösungsprinzip: Grundsystem und 1-System	32
7.3.	Beispiel: Kragträger mit elastischer Pendelstütze	32
7.4.	Thermische Zwängung	34
7.5.	Zusammenfassung Kapitel 7	34
8.	Torsion	34
8.1.	Grundlagen der Torsion	35
8.2.	Die kreiszylindrische Welle	35
8.3.	Dünnwandige geschlossene Profile: die Bredtschen Formeln	36
8.4.	Dünnwandige offene Profile	37
8.5.	Vergleich: offen gegen geschlossen	37
8.6.	Zusammenfassung Kapitel 8	38
9.	Knickung und Stabilität	38
9.1.	Was ist Knicken?	38
9.2.	Die Eulersche Knickkraft	38
9.3.	Die vier Euler-Fälle	39

9.4. Schlankheitsgrad und Grenzen der Euler-Theorie	39
9.5. Zusammenfassung Kapitel 9	40
10. Energiemethoden	40
10.1. Arbeit und Formänderungsenergie	40
10.2. Der Satz von Castigliano	41
10.3. Das Prinzip der virtuellen Kräfte	41
10.4. Energiemethoden bei statisch unbestimmten Systemen	42
10.5. Zusammenfassung Kapitel 10	42
11. Große Prüfungsaufgaben (Altklausuren)	43
11.1. Altklausur 1: Dach als schräger Balken	43
11.2. Altklausur 2: Dünnwandiges Torsionsprofil	45
12. Formelsammlung	47
12.1. Spannung, Dehnung, Werkstoff	47
12.2. Zug und Druck im Stab	47
12.3. Spannungszustand	47
12.4. Flächenträgheitsmomente	47
12.5. Balkenbiegung	48
12.6. Torsion	48
12.7. Knickung	48
12.8. Energiemethoden	48
13. Hinweise zur Prüfungsvorbereitung	48
13.1. Der universelle Lösungsweg	49
13.2. Typische Fehlerquellen	49
13.3. Was du auswendig können solltest	49
13.4. Lernplan in vier Schritten	49
A. Biegelinientafel	51

1 Einführung

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Erklären, was Elastostatik ist und wie sie sich von der Statik unterscheidet
- Die beiden zentralen Fragen jeder Festigkeitsrechnung benennen (Festigkeit und Steifigkeit)
- Die Grundannahmen der linearen Elastostatik nennen und ihre Bedeutung erklären
- Den roten Faden von der Belastung bis zur Dimensionierung nachvollziehen

1.1 Was ist Elastostatik?

In der Statik (Technische Mechanik I) hast du Körper als **starr** betrachtet. Du hast Lagerreaktionen, Schnittgrößen und Gleichgewichte berechnet – aber nie gefragt, was *im Inneren* des Materials passiert. Genau hier setzt die **Elastostatik** an, die auch **Festigkeitslehre** genannt wird.

Die **Elastostatik** untersucht das Gleichgewicht **verformbarer (elastischer) Körper** unter äußeren Lasten. Sie beantwortet, welche **Spannungen** im Material entstehen und wie stark sich das Bauteil **verformt**.

Jedes reale Bauteil gibt unter Last ein wenig nach. Eine Brücke senkt sich, wenn ein LKW darüberfährt; eine Welle verdreht sich unter einem Antriebsmoment; ein Regalbrett biegt sich unter dem Gewicht der Bücher durch. Die Statik sagt dir, *ob* das System im Gleichgewicht ist. Die Elastostatik sagt dir, *ob es das auch aushält*.

Die zwei Kernfragen jeder Festigkeitsrechnung:

1. **Festigkeit:** Sind die Spannungen klein genug, dass das Bauteil nicht bricht oder bleibend verformt wird? (Spannungsnachweis: $\sigma \leq \sigma_{zul}$)
2. **Steifigkeit:** Sind die Verformungen klein genug, dass das Bauteil seine Funktion erfüllt? (Verformungsnachweis: z. B. $w \leq w_{zul}$)

Warum beide Fragen wichtig sind

Ein Hallenträger darf nicht brechen (Festigkeit) – aber er darf sich auch nicht so stark durchbiegen, dass die Decke darunter Risse bekommt oder Türen klemmen (Steifigkeit). Beide Nachweise müssen erfüllt sein, und oft ist die Steifigkeit das strengere Kriterium.

1.2 Grundannahmen der linearen Elastostatik

Die gesamte „klassische“ Elastostatik, wie wir sie hier behandeln, beruht auf drei Annahmen. Sie machen die Rechnung überhaupt erst handhabbar – du solltest sie immer im Hinterkopf behalten.

1. **Linear-elastisches Materialverhalten (Hookesches Gesetz):** Spannung und Dehnung sind proportional. Nach Entlastung geht der Körper vollständig in seine Ausgangsform zurück – es bleibt keine Verformung.
2. **Kleine Verformungen:** Die Verschiebungen und Dehnungen sind so klein, dass wir die Gleichgewichtsbedingungen am **unverformten** System aufstellen dürfen.

3. **Superpositionsprinzip:** Weil alles linear ist, dürfen wir Teillösungen einfach addieren. Die Wirkung mehrerer Lasten ist die Summe der Einzelwirkungen.

WICHTIG!

Das Superpositionsprinzip ist eine der mächtigsten Werkzeuge der Elastostatik. Es erlaubt uns, komplizierte Lastfälle in einfache Standardfälle zu zerlegen, jeden einzeln zu lösen und am Ende zu addieren. Wir nutzen es bei der Biegelinie, bei statisch unbestimmten Systemen und bei den Energieverfahren.

1.3 Der rote Faden: von der Last zur Dimensionierung

Fast jede Aufgabe der Elastostatik folgt demselben Ablauf. Es lohnt sich, ihn von Anfang an zu verinnerlichen:

1. **Schnittgrößen bestimmen** – mit den Methoden aus der Statik (Normalkraft N , Querkraft Q , Biegemoment M , Torsionsmoment M_T).
2. **Querschnittswerte berechnen** – Fläche A , Flächenträgheitsmoment I , Widerstandsmoment W , Torsionsträgheitsmoment I_T .
3. **Spannungen berechnen** – aus Schnittgrößen und Querschnittswerten ($\sigma = N/A$, $\sigma = M/W$, $\tau = M_T/W_T$ usw.).
4. **Verformungen berechnen** – Stabverlängerung, Durchbiegung, Verdrillung.
5. **Nachweise führen** – Spannungen und Verformungen mit zulässigen Werten vergleichen.

Elastostatik baut auf der Statik auf

Ohne saubere Schnittgrößen aus der Statik geht in der Elastostatik nichts. Wenn du beim Freischneiden oder bei den Gleichgewichtsbedingungen unsicher bist, wiederhole zuerst die entsprechenden Kapitel der Statik.

1.4 Überblick über dieses Skript

Wir gehen den Stoff in einer Reihenfolge durch, die aufeinander aufbaut:

- **Kapitel 2-3:** Die Grundgrößen Spannung und Dehnung, das Hookesche Gesetz und der einfachste Fall – Zug und Druck im Stab.
- **Kapitel 4:** Spannungszustand, Hauptspannungen, Mohrscher Kreis, Festigkeitshypothesen.
- **Kapitel 5:** Flächenträgheitsmomente – die Querschnittswerte, die wir für die Biegung brauchen.
- **Kapitel 6:** Die Balkenbiegung mit der Differentialgleichung der Biegelinie – das Herzstück der Elastostatik.
- **Kapitel 7:** Statisch unbestimmte Systeme und Verträglichkeitsbedingungen.
- **Kapitel 8-10:** Torsion, Knickung und die Energiemethoden.
- **Kapitel 11-13:** Zwei vollständig gerechnete Altklausuraufgaben, eine kompakte Formelsammlung und Hinweise zur Prüfungsvorbereitung.

2 Spannung und Dehnung – die Grundgrößen

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Normalspannung und Schubspannung definieren und berechnen
- Dehnung, Querkontraktion und Schubverzerrung unterscheiden
- Das Hookesche Gesetz anwenden und die Materialkonstanten E , G , ν erklären
- Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Zugversuchs deuten
- Wärmedehnungen berücksichtigen

2.1 Warum reicht die Schnittgröße nicht aus?

Aus der Statik kennst du die Normalkraft N in einem Stab. Doch $N = 5 \text{ kN}$ allein sagt nichts darüber aus, ob der Stab hält. Eine dicke Stahlstange trägt diese Kraft mühelos, ein dünner Draht reißt. Entscheidend ist nicht die Kraft selbst, sondern wie sie sich auf die Querschnittsfläche **verteilt**. Diese flächenbezogene Größe ist die **Spannung**.

2.2 Normalspannung und Schubspannung

Schneiden wir einen Zugstab senkrecht durch, verteilt sich die innere Kraft gleichmäßig über die Schnittfläche A . Die Kraft pro Fläche, die **senkrecht** auf der Schnittfläche steht, nennen wir Normalspannung.

Normalspannung (senkrecht zur Schnittfläche):

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$\sigma > 0$ bedeutet Zug, $\sigma < 0$ bedeutet Druck.

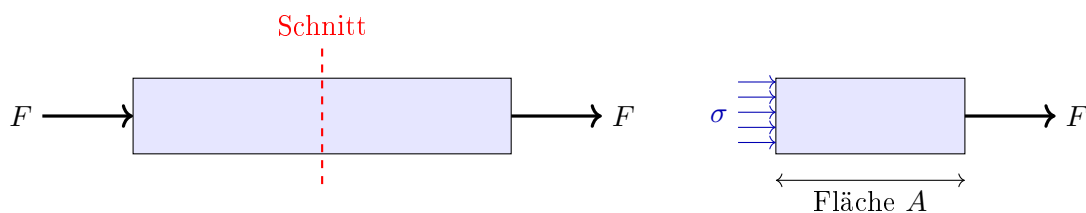


Abbildung 1: Schnittprinzip am Zugstab: Die innere Kraft $N = F$ verteilt sich als Normalspannung $\sigma = N/A$ über die Schnittfläche.

Wirkt die Kraft dagegen **parallel** (tangential) zur Schnittfläche, sprechen wir von der **Schubspannung**:

Schubspannung (tangential zur Schnittfläche), als Mittelwert:

$$\tau = \frac{Q}{A}$$

mit der Querkraft Q bzw. der Schubkraft.

Einheiten der Spannung

Spannung ist Kraft pro Fläche:

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad 1 \text{ MPa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 10^6 \text{ Pa}.$$

In der Praxis rechnet man fast immer in $\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$, weil Bauteilmaße in mm und Kräfte in N angegeben werden.

2.3 Dehnung, Querkontraktion und Schubverzerrung

Unter Last verformt sich der Körper. Bezieht man die Längenänderung $\Delta\ell$ auf die Ausgangslänge ℓ_0 , erhält man die **Dehnung**:

(Längs-)Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$$

Sie ist dimensionslos (oft in % oder ‰ angegeben). $\varepsilon > 0$: Verlängerung, $\varepsilon < 0$: Verkürzung.

Ein Zugstab wird nicht nur länger, sondern gleichzeitig dünner. Diese **Querkontraktion** beschreibt die Querdehnung ε_q . Ihr Verhältnis zur Längsdehnung ist eine Materialkonstante (siehe unten).

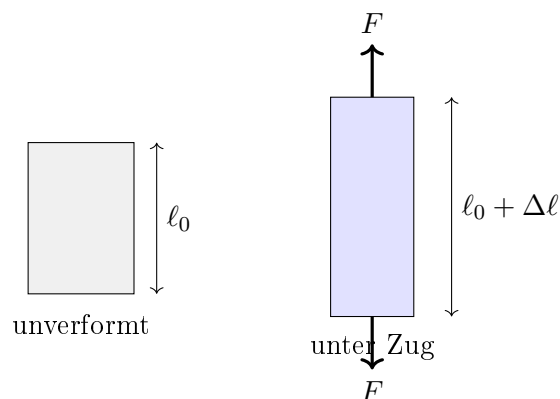


Abbildung 2: Längsdehnung und Querkontraktion: Der Stab wird länger und gleichzeitig schmaler.

Neben der Dehnung gibt es die **Schubverzerrung** (Gleitung) γ . Sie beschreibt die Winkeländerung eines ursprünglich rechtwinkligen Elements unter Schubbelastung und wird im Bogenmaß angegeben.

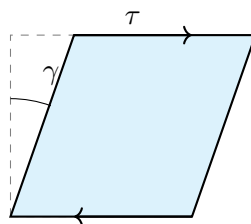


Abbildung 3: Schubverzerrung γ : Die Schubspannung τ verzerrt das rechtwinklige Element zum Parallelogramm.

2.4 Das Hookesche Gesetz

Bei kleinen Belastungen sind Spannung und Dehnung **proportional**. Das ist der Kern der linearen Elastostatik.

Hookesches Gesetz für Normal- und Schubbeanspruchung:

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$\tau = G \gamma$$

- E : **Elastizitätsmodul** (Maß für die Steifigkeit; große Werte = steifes Material)
- G : **Schubmodul** (Steifigkeit gegen Schubverformung)

Die Querkontraktionszahl (Poissonzahl) ν verknüpft Quer- und Längsdehnung:

Querkontraktionszahl (Poissonzahl):

$$\nu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_\ell}$$

Das Minuszeichen sorgt dafür, dass ν positiv ist (Querschnitt schnürt ein, während der Stab sich verlängert). Für Metalle gilt $\nu \approx 0,3$.

Die drei Konstanten sind nicht unabhängig. Für isotrope Werkstoffe gilt:

Zusammenhang zwischen E , G und ν :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Typische Werkstoffkennwerte

Werkstoff	E in N/mm ²	α_T in 1/K
Stahl	$2,1 \cdot 10^5$	$12 \cdot 10^{-6}$
Gusseisen	$1,0 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$0,7 \cdot 10^5$	$23 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$1,2 \cdot 10^5$	$16 \cdot 10^{-6}$
Beton	$0,3 \cdot 10^5$	$10 \cdot 10^{-6}$

Werte nach Gross et al. (TM 2). Für Stahl folgt mit $\nu = 0,3$: $G = \frac{2,1 \cdot 10^5}{2 \cdot 1,3} \approx 0,81 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

2.5 Der Zugversuch und das Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Woher kennt man E , die Streckgrenze und die Festigkeit eines Werkstoffs? Aus dem **Zugversuch**: Ein genormter Probestab wird langsam gedehnt, dabei werden Kraft und Verlängerung gemessen und in ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm umgerechnet.

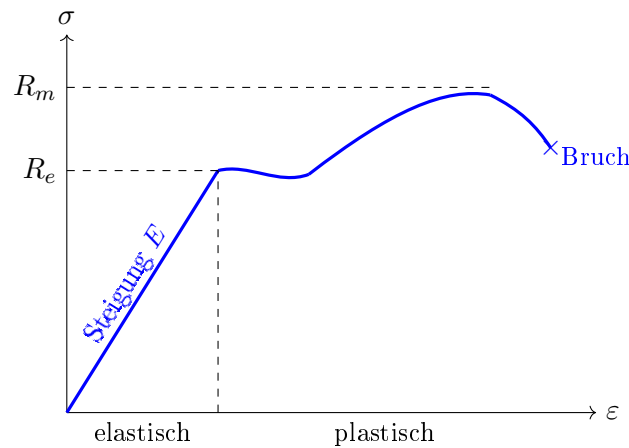


Abbildung 4: Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines zähen Werkstoffs (z.B. Baustahl). Im elastischen Bereich gilt die Hooke-Gerade mit der Steigung E .

- **Hookescher Bereich:** Gerade mit Steigung E . Hier gilt $\sigma = E\varepsilon$. Nach Entlastung verschwindet die Verformung vollständig.
- **Streckgrenze R_e :** Ab hier beginnt das Material zu „fließen“. Es bleibt eine plastische (bleibende) Verformung.
- **Zugfestigkeit R_m :** Die höchste ertragbare Spannung. Danach schnürt sich die Probe ein und bricht.

WICHTIG!

In der gesamten Elastostatik bewegen wir uns **links** von der Streckgrenze – im elastischen Bereich. Beim Festigkeitsnachweis fordern wir mit einem Sicherheitsbeiwert S :

$$\sigma_{\text{vorh}} \leq \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S}.$$

2.6 Wärmedehnung

Erwärmung dehnt einen Körper aus, auch ganz ohne mechanische Last. Diese Wärmedehnung ist proportional zur Temperaturänderung ΔT :

Wärmedehnung:

$$\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T$$

mit dem Wärmeausdehnungskoeffizienten α_T (siehe Tabelle oben).

Wirken Last und Temperatur gleichzeitig, addieren sich die Dehnungsanteile (Superposition):

Gesamtdehnung aus Spannung und Temperatur:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T$$

Schlüsselidee Wärmespannung

Kann sich ein erwärmter Körper **frei** ausdehnen, entstehen keine Spannungen – nur Dehnung. Wird die Ausdehnung jedoch **behindert** (z. B. durch feste Lager), entstehen erhebliche innere Spannungen. Mehr dazu in Kapitel 3.

Spannung und Dehnung im Zugstab

Ein Rundstab aus Stahl ($E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$) mit Durchmesser $d = 20 \text{ mm}$ und Länge $\ell_0 = 2 \text{ m}$ wird mit $F = 60 \text{ kN}$ auf Zug belastet. Gesucht: Spannung σ und Verlängerung $\Delta\ell$.

Lösung

1. Querschnittsfläche:

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (20 \text{ mm})^2 = 314,2 \text{ mm}^2.$$

2. Normalspannung:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{60\,000 \text{ N}}{314,2 \text{ mm}^2} = 190,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 190,9 \text{ MPa}.$$

3. Dehnung (Hooke):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{190,9}{2,1 \cdot 10^5} = 9,09 \cdot 10^{-4}.$$

4. Verlängerung:

$$\Delta\ell = \varepsilon \ell_0 = 9,09 \cdot 10^{-4} \cdot 2000 \text{ mm} = 1,82 \text{ mm}.$$

Plausibilität: knapp 2 mm auf 2 m – klein, wie es die Annahme kleiner Verformungen verlangt.

Mini-Aufgabe

Ein Aluminiumstab ($E = 0,7 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\alpha_T = 23 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$) der Länge $\ell_0 = 1,5 \text{ m}$ wird um $\Delta T = 40 \text{ K}$ erwärmt und kann sich frei ausdehnen. Wie groß ist die Längenänderung?

Lösung

Frei dehnbar $\Rightarrow$ keine Spannung, nur Wärmedehnung:

$$\Delta\ell = \alpha_T \Delta T \ell_0 = 23 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 1500 \text{ mm} = 1,38 \text{ mm}.$$

2.7 Zusammenfassung Kapitel 2

Das Wichtigste aus Kapitel 2

- **Normalspannung** $\sigma = N/A$ (senkrecht), **Schubspannung** $\tau = Q/A$ (tangential). Einheit $\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$.
- **Dehnung** $\varepsilon = \Delta\ell/\ell_0$ (dimensionslos), **Schubverzerrung** γ (Winkeländerung).
- **Hooke:** $\sigma = E\varepsilon$, $\tau = G\gamma$, mit $G = E/[2(1 + \nu)]$ und $\nu \approx 0,3$ für Metalle.
- **Zugversuch:** elastischer Bereich (Hooke-Gerade), Streckgrenze R_e , Zugfestigkeit R_m .
- **Wärmedehnung** $\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T$; gesamt $\varepsilon = \sigma/E + \alpha_T \Delta T$.

3 Zug und Druck in Stäben

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Die Verlängerung eines Stabes aus Normalkraft, Länge und Dehnsteifigkeit berechnen
- Stäbe mit veränderlichem Querschnitt oder veränderlicher Normalkraft behandeln
- Statisch bestimmte von statisch unbestimmten Stabsystemen unterscheiden
- Statisch unbestimmte Systeme mit einer Verträglichkeitsbedingung lösen
- Wärmespannungen bei behinderter Ausdehnung berechnen

3.1 Der Einzelstab: Verlängerung und Dehnsteifigkeit

Ein **Stab** ist ein Bauteil, das nur in Längsrichtung belastet wird (Zug oder Druck). Wir kombinieren jetzt die drei Bausteine aus Kapitel 2 zu einer einzigen Formel für die Verlängerung.

Herleitung

Spannung: $\sigma = N/A$. Hooke: $\varepsilon = \sigma/E$. Dehnung: $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$.

Gleichsetzen liefert $\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{N}{EA}$ und damit die Stabverlängerung.

Verlängerung eines Stabes (konstantes N , A , E):

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA}$$

Das Produkt EA heißt **Dehnsteifigkeit**. Je größer EA , desto weniger gibt der Stab nach.

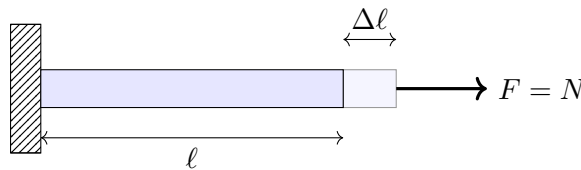


Abbildung 5: Stabverlängerung unter Zugkraft. Die Dehnsteifigkeit EA bestimmt, wie stark der Stab nachgibt.

3.2 Veränderlicher Querschnitt oder veränderliche Normalkraft

Ändern sich N oder A entlang des Stabes (z. B. Stufenstab, konischer Stab, Eigengewicht), darf man nicht mehr mit einer einzigen Formel rechnen. Man summiert die Beiträge über die Stablänge:

Allgemeine Stabverlängerung:

$$\Delta\ell = \int_0^\ell \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

Bei einem **Stufenstab** (abschnittsweise konstant) wird das Integral zur Summe:

$$\Delta\ell = \sum_i \frac{N_i \ell_i}{E_i A_i}.$$

Stufenstab unter Zug

Ein zweistufiger Stahlstab ($E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$) wird mit $F = 40 \text{ kN}$ gezogen. Abschnitt 1: $\ell_1 = 600 \text{ mm}$, $A_1 = 400 \text{ mm}^2$. Abschnitt 2: $\ell_2 = 400 \text{ mm}$, $A_2 = 200 \text{ mm}^2$. Gesucht: Gesamtverlängerung.

Lösung

In beiden Abschnitten wirkt dieselbe Normalkraft $N = F = 40\,000 \text{ N}$ (Reihenschaltung). Die Verlängerungen addieren sich:

$$\Delta\ell = \frac{N\ell_1}{EA_1} + \frac{N\ell_2}{EA_2} = \frac{40\,000 \cdot 600}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 400} + \frac{40\,000 \cdot 400}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 200}.$$

$$\Delta\ell = 0,286 \text{ mm} + 0,381 \text{ mm} = 0,667 \text{ mm}.$$

Der dünnere Abschnitt 2 trägt trotz kürzerer Länge mehr zur Verlängerung bei – kleinere Fläche bedeutet größere Dehnung.

3.3 Statisch bestimmte und statisch unbestimmte Systeme

Bei einem **statisch bestimmten** Stabsystem reichen die Gleichgewichtsbedingungen aus, um alle Stabkräfte zu bestimmen. Die Verformungen berechnet man anschließend stabweise mit $\Delta\ell = N\ell/(EA)$.

Ein System ist **statisch unbestimmt**, wenn es mehr unbekannte Lager- bzw. Stabkräfte gibt, als Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen. Die fehlenden Gleichungen liefert die **Verträglichkeit (Kompatibilität)**: Die Verformungen müssen geometrisch zusammenpassen.

Lösungsrezept für statisch unbestimmte Stabsysteme

1. Gleichgewichtsbedingungen aufstellen (reichen nicht aus).
2. Verträglichkeitsbedingung formulieren: Welche Verformung ist geometrisch vorgegeben (meist Null)?
3. Verformungen über $\Delta\ell = N\ell/(EA)$ einsetzen $\Rightarrow$ Zusatzgleichung.
4. Gleichungssystem lösen.

Beidseitig eingespannter Stab

Ein Stab (Länge ℓ , Dehnsteifigkeit EA) ist zwischen zwei starren Wänden eingespannt. Im Punkt C, im Abstand a von der linken Wand A (und b von der rechten Wand B, $a + b = \ell$), greift eine Kraft F in Längsrichtung an. Gesucht: die Wandreaktionen.

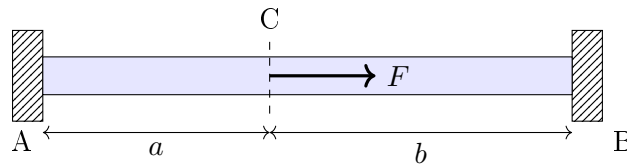


Abbildung 6: Beidseitig eingespannter Stab mit Längskraft F – einfach statisch unbestimmt.

Lösung

Gleichgewicht: Mit den Reaktionen R_A (links) und R_B (rechts) gilt

$$R_A + R_B = F. \quad (1)$$

Das ist nur eine Gleichung für zwei Unbekannte – einfach statisch unbestimmt.

Verträglichkeit: Wir lösen gedanklich die rechte Wand und betrachten R_B als überzählige (redundante) Größe. Der Punkt B darf sich nicht verschieben.

- Kraft F allein dehnt nur den Abschnitt AC; B verschiebt sich um $u_B^{(F)} = \frac{F a}{EA}$.
- Reaktion R_B allein staucht den ganzen Stab; B verschiebt sich um $u_B^{(R)} = -\frac{R_B \ell}{EA}$.

Da B fest ist:

$$u_B^{(F)} + u_B^{(R)} = 0 \Rightarrow \frac{F a}{EA} - \frac{R_B \ell}{EA} = 0 \Rightarrow R_B = F \frac{a}{\ell}. \quad (2)$$

Ergebnis: Aus (1) folgt

$$R_B = F \frac{a}{\ell}, \quad R_A = F \frac{b}{\ell}.$$

Kontrolle: Greift F in der Mitte an ($a = b = \ell/2$), trägt jede Wand die halbe Kraft. Plausibel.

3.4 Wärmespannungen bei behinderter Ausdehnung

Jetzt wird die in Kapitel 2 angekündigte Schlüsselidee konkret. Ein Stab, der sich frei ausdehnen darf, bleibt spannungsfrei. Wird die Ausdehnung aber durch Lager **behindert**, entstehen große innere Spannungen.

Eingespannter Stab unter Erwärmung

Ein Stab (Länge ℓ , Fläche A , Modul E , Wärmeausdehnungskoeffizient α_T) ist zwischen zwei starren Wänden fest eingespannt und wird um ΔT erwärmt. Gesucht: die entstehende innere Kraft und Spannung.

Lösung

Die Gesamtdehnung muss null sein, weil die Wände keine Längenänderung zulassen. Mit dem Superpositionsansatz aus Kapitel 2 ($\varepsilon = \sigma/E + \alpha_T \Delta T$):

$$\varepsilon = \frac{F_T}{EA} + \alpha_T \Delta T = 0 \Rightarrow F_T = -EA \alpha_T \Delta T.$$

Das Minuszeichen zeigt: Es entsteht eine **Druckkraft**. Die Spannung beträgt

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A} = -E \alpha_T \Delta T.$$

Zahlenbeispiel (Stahl, $\Delta T = 50 \text{ K}$):

$$\sigma_T = -2,1 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = -126 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = -126 \text{ MPa}.$$

Bemerkenswert: 126 MPa Druckspannung allein durch 50 K Erwärmung – und das völlig unabhängig von Länge und Querschnitt! Deshalb baut man Dehnfugen in Brücken und Schienen ein.

Achtung!

Die Wärmespannung $\sigma_T = -E\alpha_T\Delta T$ hängt **nicht** von der Stablänge oder der Querschnittsfläche ab. Ein häufiger Denkfehler ist, sie „herauskürzen“ zu wollen. Bei behinderter Dehnung zählt nur das Material (E , α_T) und die Temperaturänderung.

Mini-Aufgabe

Drei parallele Stäbe tragen gemeinsam eine starre Platte mit der Last F . Warum ist dieses System im Allgemeinen statisch unbestimmt, und welche Verträglichkeitsbedingung verwendest du?

Lösung

Drei unbekannte Stabkräfte stehen nur zwei Gleichgewichtsbedingungen gegenüber (Kräftesumme vertikal und Momentensumme) – also einfach statisch unbestimmt. Verträglichkeit: Bleibt die Platte starr und waagerecht, müssen die Verlängerungen der Stäbe linear zusammenpassen (gleiche Absenkung bei gleicher Anordnung bzw. lineare Verteilung über die Plattenbreite).

3.5 Zusammenfassung Kapitel 3

Das Wichtigste aus Kapitel 3

- **Stabverlängerung:** $\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA}$; allgemein $\Delta\ell = \int_0^\ell \frac{N(x)}{EA(x)} dx$.
- **Dehnsteifigkeit** EA : großer Wert = steifer Stab.
- **Statisch bestimmt:** Stabkräfte aus Gleichgewicht; Verformungen danach.
- **Statisch unbestimmt:** Gleichgewicht + **Verträglichkeit** (geometrische Zusatzbedingung).
- **Wärmespannung** bei behinderter Dehnung: $\sigma_T = -E\alpha_T\Delta T$ (unabhängig von ℓ und A).

4 Der Spannungszustand

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Den Spannungstensor aufstellen und den ebenen Spannungszustand beschreiben
- Spannungen auf beliebig geneigte Schnitte transformieren

- Hauptspannungen und Hauptrichtungen berechnen
- Den Mohrschen Spannungskreis konstruieren und ablesen
- Spannungen im dünnwandigen Kessel bestimmen
- Mit Festigkeitshypothesen eine Vergleichsspannung berechnen

4.1 Spannungsvektor und Spannungstensor

Im Zugstab war die Spannung einfach: eine Normalspannung in Stabrichtung. Im allgemeinen Fall hängt die Spannung aber von der **Orientierung** der Schnittfläche ab. An ein und demselben Punkt misst man auf verschiedenen Schnittebenen verschiedene Spannungen.

Schneidet man ein kleines Würfелеlement heraus, wirken auf jeder Fläche eine Normalspannung und zwei Schubspannungen. Alle zusammen bilden den **Spannungstensor**:

Spannungstensor (räumlich):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Wegen des **Momentengleichgewichts** am Element ist der Tensor symmetrisch: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ (Satz von der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen).

4.2 Der ebene Spannungszustand

In sehr vielen technischen Problemen (dünne Scheiben, Bleche, Oberflächen) liegt ein **ebener Spannungszustand** (ESZ) vor. Dann verschwinden alle Spannungen mit Index z , und übrig bleiben σ_x , σ_y und τ_{xy} .

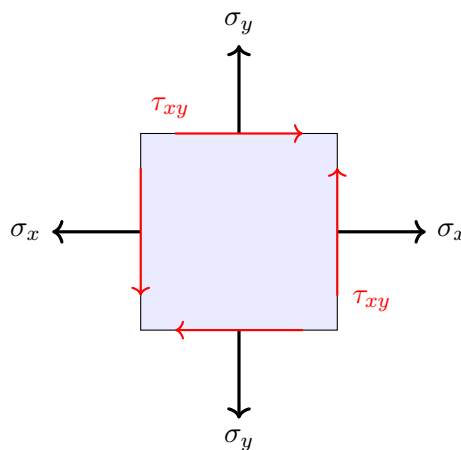


Abbildung 7: Ebener Spannungszustand am Element: σ_x , σ_y und die zugeordneten Schubspannungen τ_{xy} .

4.3 Koordinatentransformation

Wie groß sind die Spannungen auf einer um den Winkel φ gedrehten Schnittfläche? Das beantwortet die Transformation. Sie ist die Grundlage für Nachweis und Dimensionierung, weil ein Bruch oft auf einer geneigten Ebene auftritt.

Transformationsgleichungen (Drehung um den Winkel φ):

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{\eta} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

Invariante

Die Summe der Normalspannungen bleibt bei jeder Drehung gleich:

$$\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const.}$$

Eine schnelle Kontrolle für jede Transformationsrechnung.

4.4 Hauptspannungen und Hauptrichtungen

Es gibt eine ausgezeichnete Drehlage, in der die Schubspannung verschwindet und die Normalspannungen ihre Extremwerte annehmen. Diese Extremwerte sind die **Hauptspannungen** σ_1 und σ_2 .

Hauptspannungen:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Hauptrichtung φ^* :

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

In den Hauptrichtungen ist $\tau = 0$. Die beiden Hauptrichtungen stehen senkrecht aufeinander.

4.5 Maximale Schubspannung

Die größte Schubspannung tritt unter 45° zu den Hauptrichtungen auf und ist gerade der Radius des Mohrschen Kreises:

Maximale Schubspannung:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

4.6 Der Mohrsche Spannungskreis

Der **Mohrsche Kreis** ist die grafische Darstellung aller Spannungszustände an einem Punkt. Er macht Hauptspannungen, Hauptrichtungen und maximale Schubspannung auf einen Blick sichtbar.

Konstruktion des Mohrschen Kreises

1. Achsen: σ waagrecht, τ senkrecht.
2. Punkte eintragen: (σ_x, τ_{xy}) und $(\sigma_y, -\tau_{xy})$.
3. Diese beiden Punkte verbinden – der Schnittpunkt mit der σ -Achse ist der Mittelpunkt $M = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$.

4. Kreis um M durch die beiden Punkte schlagen. Radius $R = \tau_{\max}$.
5. Schnittpunkte mit der σ -Achse: σ_1 (rechts) und σ_2 (links).

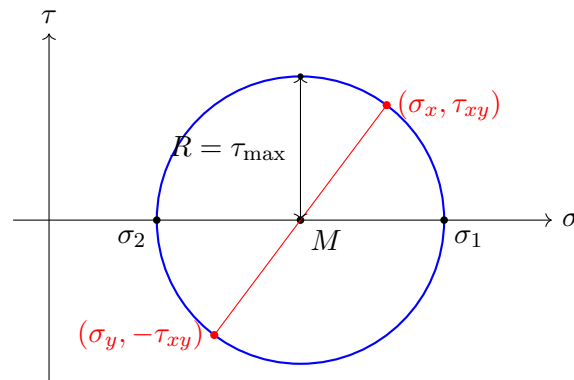


Abbildung 8: Mohrscher Spannungskreis. Mittelpunkt M auf der σ -Achse, Radius $R = \tau_{\max}$; die Hauptspannungen sind die Schnittpunkte mit der σ -Achse.

4.7 Der dünnwandige Kessel

Ein praktisch wichtiger ebener Spannungszustand entsteht im **dünnwandigen Druckbehälter** (Rohr, Tank, Gasflasche) unter Innendruck p . Bei dünner Wand ($t \ll r$) darf man die Spannung als gleichmäßig über die Wanddicke annehmen.

Zylinderkessel (Innendruck p , Radius r , Wanddicke t):

$$\sigma_t = \frac{pr}{t} \quad (\text{Umfangs-/Tangentialspannung}), \quad \sigma_x = \frac{pr}{2t} \quad (\text{Längsspannung}).$$

Kugelkessel:

$$\sigma = \frac{pr}{2t} \quad (\text{in allen Richtungen gleich}).$$

Der Zylinder reißt längs

Beim Zylinderkessel ist die Umfangsspannung doppelt so groß wie die Längsspannung ($\sigma_t = 2\sigma_x$). Deshalb platzen Würste und Rohre entlang einer **Längsnaht** – die Umfangsspannung ist maßgebend.

4.8 Festigkeitshypothesen

Materialkennwerte (Streckgrenze, Zugfestigkeit) stammen aus dem **einachsigen** Zugversuch. Im Bauteil herrscht aber meist ein mehrachsiger Spannungszustand. Eine **Festigkeitshypothese** rechnet den mehrachsigen Zustand in eine einzige **Vergleichsspannung** σ_v um, die man direkt mit σ_{zul} vergleichen kann.

Gestaltänderungsenergiehypothese (von Mises) – Standard für zähe Werkstoffe:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}.$$

Häufiger Sonderfall (nur eine Normalspannung σ und eine Schubspannung τ , z. B. Biegung + Torsion):

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Die drei klassischen Hypothesen

- **Normalspannungshypothese (NH):** $\sigma_v = \sigma_1$. Für spröde Werkstoffe (Gusseisen, Keramik).
- **Schubspannungshypothese (Tresca):** $\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_{\max}$. Konservativ.
- **Gestaltänderungshypothese (von Mises):** siehe oben. Für zähe Werkstoffe (Stahl), am gebräuchlichsten.

Hauptspannungen und Mohrscher Kreis

In einem Blech (ebener Spannungszustand) sind bekannt: $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = 30$ MPa, $\tau_{xy} = 10$ MPa. Gesucht: Größe und Richtung der Hauptspannungen sowie $\tau_{\max}$.

Lösung

Mittelpunkt und Radius:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{20 + 30}{2} = 25 \text{ MPa},$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 11,18 \text{ MPa}.$$

Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = 25 + 11,18 = 36,18 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 25 - 11,18 = 13,82 \text{ MPa}.$$

Hauptrichtung:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 10}{20 - 30} = -2 \Rightarrow \varphi_1^* = 58,28^\circ, \quad \varphi_2^* = 148,28^\circ.$$

$\sigma_1 = 36,18$ MPa wirkt in Richtung $\varphi_1^* = 58,28^\circ$. **Maximale Schubspannung:**

$$\tau_{\max} = R = 11,18 \text{ MPa}.$$

Kontrolle der Invariante: $\sigma_1 + \sigma_2 = 50 = \sigma_x + \sigma_y$. Passt.

Mini-Aufgabe

Ein Zylinderkessel hat den Innenradius $r = 500$ mm, die Wanddicke $t = 8$ mm und den Innendruck $p = 1,2$ MPa. Wie groß sind Umfangs- und Längsspannung?

Lösung

$$\sigma_t = \frac{pr}{t} = \frac{1,2 \cdot 500}{8} = 75 \text{ MPa}, \quad \sigma_x = \frac{pr}{2t} = 37,5 \text{ MPa}.$$

Die Umfangsspannung ist maßgebend.

4.9 Zusammenfassung Kapitel 4

Das Wichtigste aus Kapitel 4

- Spannungstensor symmetrisch ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$); ebener Spannungszustand: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.
- **Hauptspannungen** $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm R$ mit $R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$.
- **Hauptrichtung** $\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$; in Hauptrichtung $\tau = 0$.
- **Mohrscher Kreis**: Mittelpunkt σ_M , Radius $R = \tau_{\max}$.
- **Kessel**: Zylinder $\sigma_t = pr/t$, $\sigma_x = pr/(2t)$; Kugel $\sigma = pr/(2t)$.
- **von Mises**: $\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ (Sonderfall) bzw. $\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}$.

5 Flächenträgheitsmomente

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Den Flächenschwerpunkt zusammengesetzter Querschnitte berechnen
- Axiale Flächenträgheitsmomente, Deviationsmoment und polares Moment definieren
- Die Trägheitsmomente einfacher Querschnitte aus der Tabelle anwenden
- Den Satz von Steiner zur Achsverschiebung einsetzen
- Widerstandsmomente bestimmen und zusammengesetzte Querschnitte behandeln

5.1 Wozu Flächenträgheitsmomente?

Für Zug und Druck genügt die Querschnittsfläche A . Bei der Biegung (Kapitel 6) reicht das nicht: Ein Lineal lässt sich hochkant kaum, flach aber leicht durchbiegen – bei **gleicher** Fläche. Was zählt, ist die **Verteilung** der Fläche um die Biegeachse. Genau das misst das **Flächenträgheitsmoment**.

5.2 Wiederholung: Flächenschwerpunkt

Den Schwerpunkt kennst du aus der Statik. Hier nur die Arbeitsformeln, die wir gleich brauchen.

Flächenschwerpunkt einer zusammengesetzten Fläche:

$$y_S = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}, \quad z_S = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i}.$$

Kontinuierlich: $y_S = \frac{1}{A} \int y \, dA$.

Methode der negativen Flächen

Aussparungen (Bohrungen, Löcher) zählt man als **negative** Teilflächen. Eine gelochte Scheibe ist „Vollfläche minus Lochfläche“. Das spart das Aufteilen in viele kleine Reststücke.

5.3 Definition der Flächenträgheitsmomente

Axiale Flächenträgheitsmomente (Bezug auf y - bzw. z -Achse):

$$I_y = \int z^2 dA, \quad I_z = \int y^2 dA.$$

Deviationsmoment (Zentrifugalmoment):

$$I_{yz} = - \int y z dA.$$

Polares Flächenträgheitsmoment (Bezug auf den Ursprung):

$$I_p = \int r^2 dA = I_y + I_z.$$

Vorzeichen merken

I_y , I_z und I_p sind **immer positiv** (Quadrate im Integranden). Nur das Deviationsmoment I_{yz} kann positiv, negativ oder null sein. Bei **Symmetrie** (mindestens eine Symmetrieachse) gilt $I_{yz} = 0$.

5.4 Trägheitsmomente einfacher Querschnitte

Diese Werte solltest du parat haben (Herleitung über das Integral, Ergebnisse zum Nachschlagen):

Querschnitt	I_y (Schwerachse)	W_y	I_p
Rechteck (b breit, h hoch)	$\frac{b h^3}{12}$	$\frac{b h^2}{6}$	$\frac{b h}{12}(h^2 + b^2)$
Vollkreis (Radius R , $d = 2R$)	$\frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi R^4}{2}$
Kreisring (R_a , R_i)	$\frac{\pi}{4}(R_a^4 - R_i^4)$	$\frac{\pi}{4} \frac{R_a^4 - R_i^4}{R_a}$	$\frac{\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4)$
Dreieck (Basis b , Höhe h)	$\frac{b h^3}{36}$	–	–

Warum die Höhe so wichtig ist

Beim Rechteck geht die Höhe h mit der **dritten Potenz** ein ($I_y = b h^3 / 12$). Doppelte Höhe bedeutet achtfache Biegesteifigkeit! Deshalb baut man Balken immer „hochkant“. Die Breite hilft nur linear.

5.5 Der Satz von Steiner (Parallelverschiebung)

Die Tabellenwerte gelten für Achsen **durch den Schwerpunkt**. Liegt die Bezugsachse woanders (was bei zusammengesetzten Querschnitten die Regel ist), korrigiert der Satz von Steiner.

Satz von Steiner (Verschiebung von der Schwerachse um den Abstand d):

$$I = I_S + d^2 A$$

Für die einzelnen Größen (Schwerachse mit Index S , verschobene Achse ohne):

$$I_y = I_{yS} + z_S^2 A, \quad I_z = I_{zS} + y_S^2 A, \quad I_{yz} = I_{yzS} - y_S z_S A.$$

Achtung!

Der Steiner-Anteil $d^2 A$ ist **immer positiv** und wird nur **addiert**, wenn man von der Schwerachse weggeht. Umgekehrt (von einer beliebigen Achse zur Schwerachse) wird er subtrahiert. Verwende Tabellenwerte nie blind – prüfe immer, auf welche Achse sie sich beziehen.

5.6 Widerstandsmoment

Für den Spannungsnachweis bei Biegung braucht man nicht I selbst, sondern das **Widerstandsmoment**:

Widerstandsmoment:

$$W = \frac{I}{z_{\max}}$$

mit $z_{\max}$ = größter Randfaseraabstand von der Schwer-/Neutralachse. Damit wird die maximale Biegespannung $\sigma_{\max} = M/W$ (Kapitel 6).

5.7 Hauptträgheitsmomente

Wie bei den Spannungen gibt es eine ausgezeichnete Drehlage, in der das Deviationsmoment verschwindet und die axialen Momente Extremwerte annehmen – die **Hauptträgheitsmomente**. Die Formeln sind völlig analog zum Mohrschen Spannungskreis:

Hauptträgheitsmomente:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}, \quad \tan 2\varphi^* = \frac{2 I_{yz}}{I_y - I_z}.$$

Hat der Querschnitt eine Symmetrieachse, sind die Symmetrieachsen bereits die Hauptachsen ($I_{yz} = 0$), und man braucht diese Formeln nicht.

5.8 Zusammengesetzte Querschnitte – Schritt für Schritt

Rezept für I und W eines zusammengesetzten Querschnitts

1. Querschnitt in Teilflächen A_i zerlegen, Schwerpunkt jeder Teilfläche bestimmen.
2. Gesamtschwerpunkt berechnen $\Rightarrow$ Lage der Neutralachse.
3. Für jede Teilfläche $I_{S,i}$ um deren eigene Schwerachse (Tabelle).
4. Steiner: $I_i = I_{S,i} + d_i^2 A_i$ (Abstand d_i = Teilschwerpunkt zur Gesamtneutralachse).
5. Aufsummieren: $I = \sum I_i$.
6. $z_{\max}$ bestimmen, dann $W = I/z_{\max}$.

Flächenträgheitsmoment eines Dreiecks

Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Basis $b = 6a$ (entlang y) und die Höhe $h = 3a$ (entlang z). Bestimme I_y um die Grundseite und um die Schwerachse.

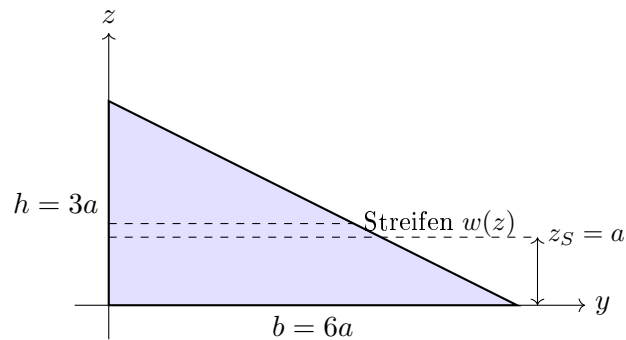


Abbildung 9: Rechtwinkliges Dreieck. Integration über waagerechte Streifen der Breite $w(z) = b(1 - z/h)$.

Lösung

Trägheitsmoment um die Grundseite ($z = 0$). Ein waagerechter Streifen in Höhe z hat die Breite $w(z) = b(1 - z/h)$:

$$I_{y,\text{Basis}} = \int_0^h z^2 w(z) dz = b \int_0^h z^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = b \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4h} \right]_0^h = \frac{bh^3}{12}.$$

Mit $b = 6a$, $h = 3a$:

$$I_{y,\text{Basis}} = \frac{6a(3a)^3}{12} = \frac{6a \cdot 27a^3}{12} = \frac{162}{12}a^4 = \frac{27}{2}a^4 = 13,5a^4.$$

Trägheitsmoment um die Schwerachse (Steiner rückwärts). Der Schwerpunkt liegt bei $z_S = h/3 = a$, die Fläche ist $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 3a = 9a^2$:

$$I_{yS} = I_{y,\text{Basis}} - z_S^2 A = \frac{27}{2}a^4 - a^2 \cdot 9a^2 = \frac{27}{2}a^4 - 9a^4 = \frac{9}{2}a^4 = 4,5a^4.$$

Das bestätigt den Tabellenwert $I_{yS} = bh^3/36 = 6a \cdot 27a^3/36 = \frac{9}{2}a^4$.

Schwerpunkt, I und W eines T-Profiles

Ein T-Profil besteht aus einem Flansch (oben, $b_1 = 120$ mm breit, $t_1 = 20$ mm hoch) und einem Steg (unten, $t_2 = 20$ mm breit, $h_2 = 100$ mm hoch). Gesucht: Schwerpunktlage, I_y um die Schwerachse und W .

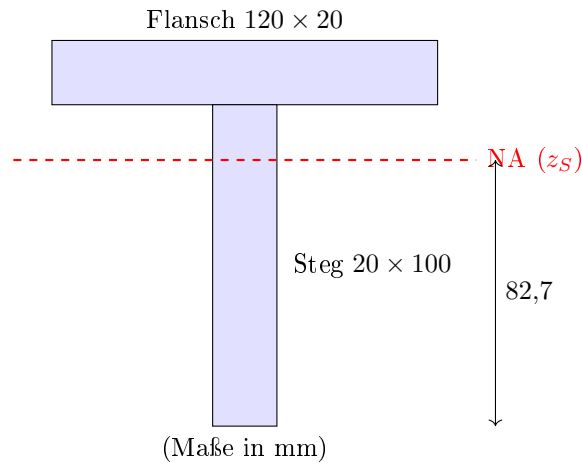


Abbildung 10: T-Profil aus Flansch und Steg. Die Neutralachse (NA) liegt im Gesamtschwerpunkt.

Lösung

1. Teilflächen und deren Schwerpunkte (Bezug: Unterkante des Stegs):

$$A_1 = 120 \cdot 20 = 2400 \text{ mm}^2, \quad y_1 = 100 + \frac{20}{2} = 110 \text{ mm (Flansch)},$$

$$A_2 = 20 \cdot 100 = 2000 \text{ mm}^2, \quad y_2 = \frac{100}{2} = 50 \text{ mm (Steg)}.$$

2. Gesamtschwerpunkt:

$$A = 4400 \text{ mm}^2, \quad y_S = \frac{2400 \cdot 110 + 2000 \cdot 50}{4400} = \frac{364\,000}{4400} = 82,7 \text{ mm}.$$

3. Eigenträgheitsmomente:

$$I_{S,1} = \frac{120 \cdot 20^3}{12} = 0,08 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, \quad I_{S,2} = \frac{20 \cdot 100^3}{12} = 1,667 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

4. Steiner-Anteile ($d_1 = 110 - 82,7 = 27,3$; $d_2 = 82,7 - 50 = 32,7$):

$$I_1 = 0,08 \cdot 10^6 + 2400 \cdot 27,3^2 = 1,865 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$I_2 = 1,667 \cdot 10^6 + 2000 \cdot 32,7^2 = 3,809 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

5. Gesamtträgheitsmoment:

$$I_y = I_1 + I_2 = 5,67 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

6. Widerstandsmoment. Größter Randabstand ist die Unterkante: $z_{\max} = 82,7 \text{ mm}$ (Oberkante nur $120 - 82,7 = 37,3 \text{ mm}$):

$$W = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{5,67 \cdot 10^6}{82,7} = 6,86 \cdot 10^4 \text{ mm}^3.$$

Mini-Aufgabe

Eine quadratische Scheibe ($200 \times 200 \text{ mm}$) hat ein zentrisches kreisrundes Loch ($d = 100 \text{ mm}$). Wie groß ist I_y um die Schwerachse (Methode der negativen Flächen)?

Lösung

Vollquadrat minus Kreis, beide um dieselbe (zentrische) Schwerachse:

$$I_y = \frac{200 \cdot 200^3}{12} - \frac{\pi (50)^4}{4} = 133,3 \cdot 10^6 - 4,91 \cdot 10^6 = 128,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

Das Loch in der Mitte schwächt die Biegesteifigkeit nur wenig, weil dort wenig Material zur Steifigkeit beiträgt (kleiner Abstand zur Achse).

5.9 Zusammenfassung Kapitel 5

Das Wichtigste aus Kapitel 5

- **Schwerpunkt:** $y_S = \sum A_i y_i / \sum A_i$; Aussparungen negativ zählen.
- **Definitionen:** $I_y = \int z^2 dA$, $I_z = \int y^2 dA$, $I_{yz} = - \int yz dA$, $I_p = I_y + I_z$.
- **Tabelle:** Rechteck $bh^3/12$, Kreis $\pi R^4/4$, Dreieck $bh^3/36$ (Schwerachse).
- **Steiner:** $I = I_S + d^2 A$ (Anteil immer positiv beim Wegrücken von der Schwerachse).
- **Widerstandsmoment:** $W = I/z_{\max}$.
- **Höhe zählt kubisch** – Profile hochkant einbauen.

6 Balkenbiegung

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Die Biegenormalspannung $\sigma = M/I \cdot z$ berechnen und maximale Spannungen bestimmen
- Die Differentialgleichung der Biegelinie herleiten und verstehen
- Randbedingungen korrekt zuordnen und die Biegelinie durch Integration bestimmen
- Standardlastfälle und das Superpositionsprinzip anwenden
- Schubspannungen, schiefe Biegung und kombinierte Beanspruchung behandeln

6.1 Gerade Biegung und die Bernoulli-Hypothese

Wird ein Balken quer zu seiner Achse belastet, biegt er sich durch. Auf der einen Seite der Querschnitt werden die Fasern gedehnt (Zug), auf der anderen gestaucht (Druck). Dazwischen liegt eine Faser, die ihre Länge behält – die **neutrale Faser**. Sie verläuft durch den Flächenschwerpunkt.

Bernoulli-Hypothese: Querschnitte, die vor der Verformung eben und senkrecht zur Balkenachse stehen, bleiben auch nach der Verformung eben und senkrecht zur (verformten) Balkenachse.

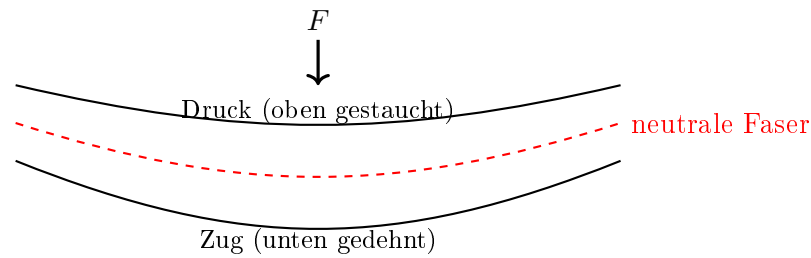


Abbildung 11: Reine Biegung: obere Fasern gestaucht, untere gedehnt; dazwischen die spannungsfreie neutrale Faser durch den Schwerpunkt.

6.2 Die Biegenormalspannung

Aus der Bernoulli-Hypothese folgt, dass die Dehnung linear über die Querschnittshöhe verläuft: null in der neutralen Faser, maximal an den Rändern. Mit dem Hookeschen Gesetz wird auch die Spannung linear verteilt.

Biegenormalspannung (gerade Biegung):

$$\sigma(z) = \frac{M_y}{I_y} z$$

z ist der Abstand von der neutralen Achse. Die Spannung ist null in der neutralen Faser und am Rand am größten.

Maximale Biegespannung am Rand ($z = z_{\max}$):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{I_y} z_{\max} = \frac{M_y}{W_y}.$$

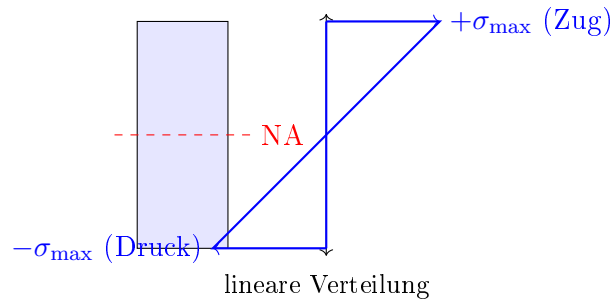


Abbildung 12: Lineare Spannungsverteilung über die Querschnittshöhe. Am Rand treten die größten Spannungen auf.

6.3 Die Differentialgleichung der Biegelinie

Die **Biegelinie** $w(x)$ beschreibt die Durchbiegung des Balkens an jeder Stelle x . Sie ist das zentrale Werkzeug, um Verformungen zu berechnen. Wir leiten ihre Differentialgleichung aus drei bekannten Beziehungen her.

Herleitung

Die Krümmung der Biegelinie hängt mit dem Moment zusammen (Momenten-Krümmungs-Beziehung):

$$M(x) = -EI w''(x).$$

Aus der Statik kennst du die Beziehungen zwischen Streckenlast, Querkraft und Moment:

$$Q(x) = M'(x), \quad q(x) = -Q'(x).$$

Zweimal ableiten und einsetzen:

$$q = -Q' = -M'' = -(-EI w'')'' = EI w''''.$$

Differentialgleichung der Biegelinie (4. Ordnung):

$$EI w''''(x) = q(x)$$

Mit den abgeleiteten Größen:

$$EI w''(x) = -M(x), \quad EI w'''(x) = -Q(x).$$

Vorzeichen und Bedeutung der Ableitungen

w ist die Durchbiegung, w' die Neigung (Biegewinkel). Über $EI w'' = -M$ und $EI w''' = -Q$ sind alle vier Ableitungen von w physikalisch belegt. Die Biegesteifigkeit EI bestimmt, wie stark sich der Balken durchbiegt: großes EI = steifer Balken.

6.4 Randbedingungen

Die DGL 4. Ordnung erfordert **vier Randbedingungen**, um die vier Integrationskonstanten festzulegen. Welche das sind, hängt von der Lagerung ab.

Lagertyp	Bedingung 1	Bedingung 2
Feste Einspannung	$w = 0$	$w' = 0$
Gelenkiges Lager (Los-/Festlager)	$w = 0$	$M = 0$ ($w'' = 0$)
Freies Ende	$M = 0$ ($w'' = 0$)	$Q = 0$ ($w''' = 0$)
Parallelführung (Schiebehülse)	$w' = 0$	$Q = 0$ ($w''' = 0$)

Geometrische und statische Randbedingungen

Die Bedingungen sind von zweierlei Art:

- **Geometrische** (kinematische) Randbedingungen betreffen **Verschiebung und Neigung** (w und w'). Sie folgen daraus, was die Lagerung festhält.
- **Statische** Randbedingungen betreffen die **Schnittgrößen** ($M \sim w''$ und $Q \sim w'''$). Sie folgen aus freien oder belasteten Rändern.

Jede Lagerung liefert genau zwei Bedingungen; an den beiden Rändern zusammen also die vier für die DGL 4. Ordnung.

Achtung!

Die häufigste Fehlerquelle bei der Biegelinie sind **falsche oder unvollständige Randbedingungen**. Zeichne immer eine Skizze, markiere jedes Lager und überlege Bedingung für Bedingung, was dort vorgegeben ist (Durchbiegung, Neigung, Moment oder Querkraft).

6.5 Lösung durch Integration – der allgemeine Weg

Rezept Biegelinie

1. DGL aufstellen: $EI w'''' = q(x)$ (bzw. $EI w'' = -M(x)$, falls $M(x)$ schon bekannt).
2. Mehrfach integrieren bis $w(x)$, dabei Integrationskonstanten $C_1 \dots C_4$ mitführen.
3. Randbedingungen einsetzen $\Rightarrow$ Konstanten bestimmen.
4. Ergebnis auswerten: maximale Durchbiegung, Neigung, Schnittgrößen.

Kragträger mit Einzelkraft am freien Ende

Ein einseitig eingespannter Balken (Länge L , Biegesteifigkeit EI) trägt am freien Ende die Kraft F . Gesucht: Biegelinie $w(x)$ und maximale Durchbiegung.

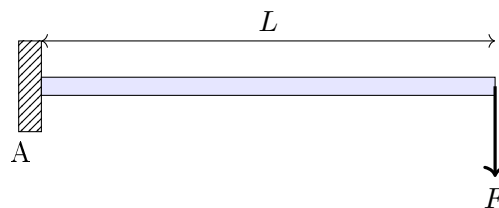


Abbildung 13: Kragträger mit Einzelkraft am freien Ende.

Lösung

Im lastfreien Bereich ($0 < x < L$) gilt $EI w'''' = 0$. Viermal integrieren:

$$EI w'''' = 0, \quad EI w''' = C_1, \quad EI w'' = C_1 x + C_2, \quad EI w' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$EI w = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Randbedingungen. Einspannung bei $x = 0$: $w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$; $w'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$. Freies Ende bei $x = L$: $M(L) = -EI w''(L) = 0 \Rightarrow C_1 L + C_2 = 0$; und $Q(L) = -EI w'''(L) = F \Rightarrow C_1 = -F$. Daraus $C_2 = -C_1 L = FL$.

$$EI w(x) = -F \frac{x^3}{6} + FL \frac{x^2}{2} = \frac{F}{6} (3Lx^2 - x^3).$$

$$w(x) = \frac{F}{6EI} (3Lx^2 - x^3)$$

Maximale Durchbiegung am freien Ende ($x = L$):

$$w_{\max} = w(L) = \frac{F}{6EI} (3L^3 - L^3) = \frac{FL^3}{3EI}.$$

Einfeldträger mit konstanter Streckenlast

Ein beidseitig gelenkig gelagerter Balken (Länge L , EI) trägt die konstante Streckenlast q . Gesucht: maximale Durchbiegung in der Mitte.

Lösung

DGL $EI w'''' = q$. Viermal integrieren:

$$EI w = \frac{q x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Randbedingungen. Gelenkige Lager bei $x = 0$ und $x = L$: $w(0) = 0$, $w(L) = 0$, $M(0) = 0$, $M(L) = 0$ (also $w''(0) = w''(L) = 0$). Aus $w''(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$; $w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$. Aus $w''(L) = 0$: $qL^2/2 + C_1 L = 0 \Rightarrow C_1 = -qL/2$. Aus $w(L) = 0$: $C_3 = qL^3/24$.

$$w(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x).$$

Maximum in der Mitte ($x = L/2$):

$$w_{\max} = \frac{5 q L^4}{384 EI}.$$

6.6 Balken mit außermittiger Einzellast – bereichsweise Integration

Greift eine Einzelkraft *innerhalb* des Feldes an, hat das Biegemoment dort einen Knick. Eine einzige Funktion $w(x)$ reicht dann nicht mehr – man teilt den Balken in **zwei Bereiche** und verbindet die Teillösungen über **Übergangsbedingungen**. Dieser Aufgabentyp ist klausurtypisch.

Einfeldträger mit Einzelkraft bei $x = a$

Ein beidseitig gelenkig gelagerter Balken (Lager A bei $x = 0$, Lager B bei $x = 3a$, Biegesteifigkeit EI) trägt die Einzelkraft F im Abstand a von A. Gesucht: Biegelinie und Durchbiegung $w(a)$ am Kraftangriffspunkt.

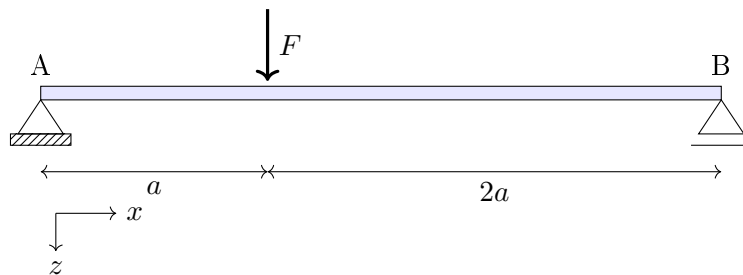


Abbildung 14: Einfeldträger der Spannweite $3a$ mit Einzelkraft F im Abstand a vom linken Lager.

Lösung

Lagerreaktionen (Momentengleichgewicht um A bzw. B):

$$A = F \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3} F, \quad B = F \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} F.$$

Biegemomente in den zwei Bereichen:

Bereich I ($0 \leq x \leq a$): $M_I = Ax = \frac{2}{3}Fx$, Bereich II ($a \leq x \leq 3a$): $M_{II} = \frac{2}{3}Fx - F(x-a)$.

Mit $EI w'' = -M$ je Bereich zweimal integrieren (eigene Konstanten):

$$EI w_I = -\frac{F}{9}x^3 + C_1x + C_2, \quad EI w_{II} = -\frac{F}{9}x^3 + \frac{F}{6}(x-a)^3 + C_3x + C_4.$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$w_I(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0; \quad w'_I(a) = w'_{II}(a) \Rightarrow C_1 = C_3; \quad w_I(a) = w_{II}(a) \Rightarrow C_4 = 0.$$

$$w_{II}(3a) = 0: -\frac{F}{9}(3a)^3 + \frac{F}{6}(2a)^3 + 3a C_3 = 0 \Rightarrow -3Fa^3 + \frac{4}{3}Fa^3 + 3a C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{5}{9}Fa^2.$$

Also $C_1 = C_3 = \frac{5}{9}Fa^2$. **Durchbiegung am Kraftangriffspunkt** ($x = a$):

$$w(a) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{F}{9}a^3 + \frac{5}{9}Fa^2 \cdot a \right) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{4Fa^3}{9} = \boxed{\frac{4Fa^3}{9EI}}.$$

Übergangsbedingungen nicht vergessen

Bei bereichsweiser Integration entstehen **pro Bereich zwei** Konstanten. Die fehlenden Gleichungen liefern die **Übergangsbedingungen** am Trennpunkt: w und w' sind dort stetig (das Biegemoment ohnehin). Eine kompaktere Schreibweise sind die **Föppl-Klammern** (Macaulay-Notation) $\langle x-a \rangle^n$, die genau diese Stetigkeit automatisch sicherstellen.

6.7 Superpositionsprinzip und Biegelinientafel

Weil das System linear ist, darf man komplizierte Lasten in Standardfälle zerlegen, jeden einzeln lösen und die Durchbiegungen **addieren**. Für die Standardfälle gibt es Tafeln – man muss nicht jedes Mal die DGL lösen.

Biegelinientafel – die wichtigsten Standardfälle

Lastfall	maßgebende Durchbiegung
Kragträger, Einzelkraft F am Ende ($x = L$)	$\frac{FL^3}{3EI}$
Kragträger, Einzelkraft F bei $x = a$ (an der Kraft)	$\frac{Fa^3}{3EI}$
Kragträger, Streckenlast q	$\frac{qL^4}{8EI}$
Kragträger, Endmoment M_0	$\frac{M_0L^2}{2EI}$
Einfeldträger, Einzelkraft F in der Mitte	$\frac{FL^3}{48EI}$
Einfeldträger, Einzelkraft F bei a ($b = L - a$, an der Kraft)	$\frac{Fa^2b^2}{5qL^4}$
Einfeldträger, Streckenlast q	$\frac{384EI}{5qL^4}$
Einfeldträger, Endmoment M_0 (an einem Ende)	$\frac{384EI}{9\sqrt{3}EI}$

Die **vollständige Biegelinientafel** mit den kompletten $w(x)$ -Funktionen und den Verdrehungen findest du im **Anhang** am Ende des Skripts.

Superposition: Streckenlast und Einzellast

Derselbe Einfeldträger (Spannweite $3a$) wie im vorigen Beispiel trägt nun *gleichzeitig* eine konstante Streckenlast q_0 über die volle Länge und die Einzelkraft F bei $x = a$. Gesucht: Durchbiegung $w(a)$.

Lösung

Beide Lastfälle einzeln auswerten und addieren. Streckenlast aus $w(x) = \frac{q}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$ mit $L = 3a$, $x = a$; Einzelkraft aus dem vorigen Beispiel:

$$w_1(a) = \frac{q_0}{24EI}(a^4 - 6a^4 + 27a^4) = \frac{22q_0a^4}{24EI} = \frac{11q_0a^4}{12EI}, \quad w_2(a) = \frac{4Fa^3}{9EI}.$$

Überlagern:

$$w(a) = w_1(a) + w_2(a) = \frac{11q_0a^4}{12EI} + \frac{4Fa^3}{9EI}.$$

Tabellenwerte verstehen, nicht nur ablesen

In Klausur und Praxis sind Biegelinietafeln meist zugelassen. Trotzdem musst du wissen, wie diese Formeln aus der DGL entstehen, und mindestens zwei Standardfälle vollständig herleiten können. Die Herleitung wird häufig geprüft.

6.8 Statisch unbestimmter Balken: direkte Integration

Die DGL der Biegelinie löst auch **statisch unbestimmte** Balken direkt – ohne separate Verträglichkeitsrechnung. Die „fehlende“ Gleichung steckt bereits in den Randbedingungen.

Eingepannt-gestützter Balken unter Gleichlast

Ein Balken (Länge L , EI) ist bei A fest eingespannt und bei B gelenkig gestützt (Loslager). Er trägt die konstante Streckenlast q . Gesucht: Auflagerkraft in B und Einspannmoment in A.

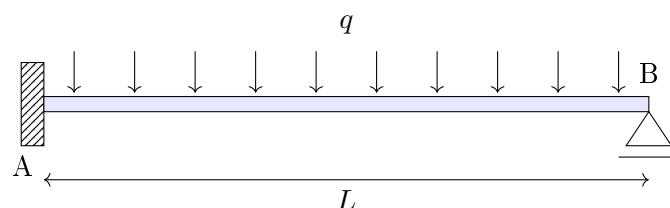


Abbildung 15: Eingepannt-gestützter Balken (Kragträger mit Stütze) unter konstanter Streckenlast – einfach statisch unbestimmt.

Lösung

DGL $EI w'''' = q$, viermal integriert:

$$EI w = \frac{q x^4}{24} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Randbedingungen. Einspannung A: $w(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$, $w'(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$. Loslager B: $w(L) = 0$ und $M(L) = 0$ (also $w''(L) = 0$).

$$w''(L) = 0 : \frac{qL^2}{2} + c_1L + c_2 = 0, \quad w(L) = 0 : \frac{qL^4}{24} + c_1\frac{L^3}{6} + c_2\frac{L^2}{2} = 0.$$

Lösen:

$$c_1 = -\frac{5}{8}qL, \quad c_2 = \frac{1}{8}qL^2.$$

Reaktionen aus $Q = -EI w''' = -(qx + c_1)$ und $M = -EI w''$:

$$B = \frac{3}{8}qL, \quad A = \frac{5}{8}qL, \quad M_A = \frac{1}{8}qL^2.$$

Kontrolle: $A + B = qL$ (gesamte Last). Plausibel.

Zwei Wege zum selben Ziel

Dasselbe Problem lässt sich auch mit Superposition und Verträglichkeit (Kapitel 7) oder mit den Energiemethoden (Kapitel 10) lösen. Die direkte Integration ist hier am schnellsten, weil eine Streckenlast über die ganze Länge wirkt.

6.9 Schubspannungen im Balken

Bei der Biegung treten neben den Normalspannungen auch **Schubspannungen** auf, verursacht durch die Querkraft Q . Sie sind null an den Rändern und maximal in der neutralen Faser.

Schubspannung im Balken:

$$\tau(z) = \frac{Q S(z)}{I_y b(z)}$$

mit dem **statischen Moment** $S(z)$ der Fläche oberhalb (bzw. unterhalb) der betrachteten Faser und der Breite $b(z)$ an dieser Stelle.

Maximale Schubspannung typischer Querschnitte

- **Rechteck:** $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A}$ (parabolische Verteilung, $1,5 \times$ Mittelwert).
- **Vollkreis:** $\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{A}$.

Schubspannung im Rechteckbalken

Ein Rechteckbalken ($b = 40 \text{ mm}$, $h = 120 \text{ mm}$) überträgt die Querkraft $Q = 30 \text{ kN}$. Wie groß ist die maximale Schubspannung?

Lösung

$$A = b h = 40 \cdot 120 = 4800 \text{ mm}^2, \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{30\,000}{4800} = 9,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Zum Vergleich: Bei einem typischen Biegeträger ist die Biegenormalspannung meist deutlich größer als die Schubspannung. Deshalb dominiert bei schlanken Balken die Biegung, der Schub wird oft vernachlässigt.

6.10 Schiefe Biegung

Von **schiefer Biegung** spricht man, wenn das Biegemoment nicht in einer Hauptachsenebene wirkt, also gleichzeitig M_y und M_z auftreten. Die Spannungen aus beiden Anteilen überlagern sich.

Spannung bei schiefer Biegung (Hauptachsen y, z):

$$\sigma(y, z) = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y.$$

Die **neutrale Achse** (Linie mit $\sigma = 0$) ist gegenüber den Hauptachsen geneigt. Aus $\sigma = 0$ folgt ihre Steigung:

$$\frac{z}{y} = \frac{M_z I_y}{M_y I_z}.$$

Achtung!

Ist das Deviationsmoment $I_{yz} \neq 0$ (unsymmetrischer Querschnitt), musst du **zuerst** auf die Hauptachsen transformieren (Kapitel 5), bevor du die obige Formel anwenden darfst. Bei symmetrischen Querschnitten sind die Symmetrieachsen bereits Hauptachsen.

6.11 Biegung mit Zug/Druck und der Kern des Querschnitts

Greift zusätzlich zur Biegung eine Normalkraft an (oder wirkt eine außermittige Längskraft), überlagern sich konstante Normalspannung und lineare Biegespannung.

Kombinierte Normalspannung (Zug/Druck + Biegung):

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z.$$

Außermittige Normalkraft (Exzentrizität e): $M = N e$, also

$$\sigma(z) = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e z A}{I_y} \right).$$

Der Kern des Querschnitts

Der **Kern** ist der Bereich um den Schwerpunkt, in dem eine Druck-Normalkraft angreifen darf, ohne dass **irgendwo** Zugspannungen entstehen. Wichtig für Werkstoffe, die keinen Zug vertragen (Beton, Mauerwerk, Boden).

- **Rechteck** ($b \times h$): Kern ist eine Raute mit den Halbachsen $h/6$ und $b/6$ (bekannt als „Drittel-Regel“: die Kraft muss im mittleren Drittel liegen).
- **Vollkreis** (Durchmesser d): Kern ist ein Kreis mit Radius $d/8$.

Kombinierte Beanspruchung: Zug und Biegung

Ein Rechteckquerschnitt ($b = 50 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$) wird durch $N = 80 \text{ kN}$ (Zug) und $M = 2 \text{ kNm}$ belastet. Gesucht: maximale Spannung.

Lösung

$$A = 50 \cdot 100 = 5000 \text{ mm}^2, \quad W = \frac{bh^2}{6} = \frac{50 \cdot 100^2}{6} = 83\,333 \text{ mm}^3.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{80\,000}{5000} + \frac{2,0 \cdot 10^6}{83\,333} = 16,0 + 24,0 = 40,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Am gegenüberliegenden Rand: $\sigma_{\min} = 16,0 - 24,0 = -8,0 \text{ N/mm}^2$ (Druck). Die Biegung überlagert die gleichmäßige Zugspannung.

6.12 Temperaturbelastung beim Balken

Ein **Temperaturunterschied** zwischen Ober- und Unterseite ($\Delta T = T_u - T_o$) krümmt den Balken, auch ohne mechanische Last. Bei linearem Verlauf über die Höhe h entsteht eine Krümmung:

$$w'' = -\frac{\alpha_T \Delta T}{h}.$$

Bei **statisch bestimmten** Systemen führt das nur zu Verformungen (keine Spannungen). Bei **statisch unbestimmten** Systemen entstehen zusätzlich Zwängungsspannungen – mehr dazu in Kapitel 7.

6.13 Zusammenfassung Kapitel 6

Das Wichtigste aus Kapitel 6

- **Biegespannung:** $\sigma = \frac{M_y}{I_y} z$, maximal $\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$.
- **DGL der Biegelinie:** $EI w'''' = q$, mit $EI w'' = -M$, $EI w''' = -Q$.
- **Vier Randbedingungen** aus der Lagerung; sorgfältig zuordnen.
- **Standardfälle** (Tafel): Kragträger $FL^3/3EI$, Einfeldträger mittig $FL^3/48EI$, Gleichlast $5qL^4/384EI$.
- **Schubspannung:** $\tau = QS/(Ib)$; Rechteck $\tau_{\max} = \frac{3}{2}Q/A$.
- **Schiefe Biegung:** $\sigma = M_y z/I_y - M_z y/I_z$; **kombiniert:** $\sigma = N/A \pm M/W$; **Kern** Rechteck $h/6$, Kreis $d/8$.

7 Statisch unbestimmte Systeme und Verträglichkeit

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Den Grad der statischen Unbestimmtheit eines Systems bestimmen
- Das Lösungsprinzip aus Grundsystem (0-System) und 1-System anwenden
- Verträglichkeitsbedingungen (Kompatibilität) formulieren und einsetzen
- Statisch unbestimmte Balkensysteme mit Superposition lösen

7.1 Was bedeutet statisch unbestimmt?

In Kapitel 3 hast du das Prinzip schon bei Stäben kennengelernt. Es gilt genauso für Balken: Sobald es **mehr** unbekannte Lagerreaktionen als Gleichgewichtsbedingungen gibt, reicht die Statik allein nicht aus.

Ein ebenes System ist n -fach **statisch unbestimmt**, wenn die Zahl der unbekannten Lager- und Verbindungsreaktionen die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen um n übersteigt. Die n fehlenden Gleichungen liefert die **Verträglichkeit**: Die Verformungen müssen geometrisch zusammenpassen.

Typische statisch unbestimmte Systeme

- Durchlaufträger über mehr als zwei Stützen
- Beidseitig eingespannter Balken
- Eingespannter Balken mit zusätzlichem Lager oder elastischer Stütze

7.2 Das Lösungsprinzip: Grundsystem und 1-System

Die eleganteste Methode nutzt das Superpositionsprinzip. Man entfernt gedanklich die „überzählige“ Bindung und ersetzt sie durch ihre unbekannte Reaktionskraft X .

Rezept für statisch unbestimmte Systeme

1. **Grundsystem (0-System)**: Eine überzählige Bindung lösen, sodass ein statisch bestimmtes System entsteht. Verformung unter der äußeren Last berechnen.
2. **1-System**: Dasselbe Grundsystem nur mit der unbekannten Reaktion X belasten. Verformung in Abhängigkeit von X berechnen.
3. **Verträglichkeit**: Die tatsächliche Verformung an der Stelle der gelösten Bindung ist vorgegeben (meist null). Beide Anteile überlagern und gleichsetzen.
4. **Auflösen** nach X , dann übrige Größen bestimmen.

7.3 Beispiel: Kragträger mit elastischer Pendelstütze

Balken mit elastischem Pendelstab

Ein in A fest eingespannter Balken (Länge ℓ , Biegesteifigkeit EI) trägt die konstante Streckenlast q_0 . Am freien Ende B wird er durch einen elastischen Pendelstab (Dehnsteifigkeit EA , Länge a) abgestützt. Gesucht: die Stabkraft S .

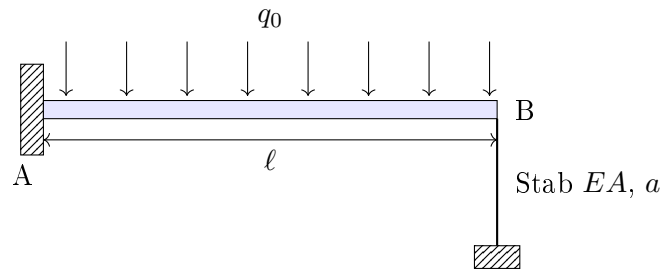


Abbildung 16: Eingespannter Balken unter Streckenlast, am freien Ende durch einen elastischen Pendelstab gestützt – einfach statisch unbestimmt.

Lösung

Grundsystem (0-System): Wir entfernen den Stab. Übrig bleibt ein Kragträger unter q_0 . Seine Durchbiegung am freien Ende (nach unten, Biegelinientafel):

$$w_B^{(0)} = \frac{q_0 \ell^4}{8EI}.$$

1-System: Derselbe Kragträger, aber nur mit der (noch unbekannten) Stabkraft $X = S$ nach oben am Ende B:

$$w_B^{(1)} = -\frac{X \ell^3}{3EI} \quad (\text{Anhebung}).$$

Verformung des Stabes: Der Stab trägt die Kraft X und verkürzt sich um

$$\Delta a = \frac{X a}{EA}.$$

Verträglichkeit: Die Absenkung des Balkenendes muss gleich der Stabverkürzung sein (Balkenende und Stabkopf bleiben verbunden):

$$w_B^{(0)} + w_B^{(1)} = \Delta a \Rightarrow \frac{q_0 \ell^4}{8EI} - \frac{X \ell^3}{3EI} = \frac{X a}{EA}.$$

Auflösen nach X :

$$\frac{q_0 \ell^4}{8EI} = X \left(\frac{\ell^3}{3EI} + \frac{a}{EA} \right) \Rightarrow X = \frac{\frac{q_0 \ell^4}{8EI}}{\frac{\ell^3}{3EI} + \frac{a}{EA}}.$$

In übersichtlicher Form (Ausklammern von $\ell^3/3EI$ im Nenner):

$$S = X = \frac{3 q_0 \ell}{8} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3 a I}{A \ell^3}}.$$

Plausibilität: Ist der Stab sehr steif ($EA \rightarrow \infty$, also $a I/(A \ell^3) \rightarrow 0$), trägt er fast die gesamte Auflagerlast eines starren Lagers: $S \rightarrow \frac{3}{8} q_0 \ell$ – genau die Lagerkraft des Durchlaufträgers „eingespannt–gelenkig“. Ist der Stab sehr weich ($EA \rightarrow 0$), geht $S \rightarrow 0$, und der Kragträger trägt allein.

7.4 Thermische Zwängung

Auch Temperaturänderungen erzeugen in statisch unbestimmten Systemen **Zwängungsspannungen**. Das Prinzip ist dasselbe: Die behinderte Wärmedehnung liefert die Verträglichkeitsbedingung.

Verträglichkeit – die Leitidee

Alle Verformungen im System müssen „zusammenpassen“: keine Lücken, keine Überschneidungen. An einem festen Lager ist die Verschiebung null; an einer elastischen Stütze gleich deren Nachgiebigkeit; bei behinderter Wärmedehnung gleich der verhinderten Längenänderung. Diese geometrische Aussage ist die zusätzliche Gleichung.

Mini-Aufgabe

Warum entsteht bei einem *statisch bestimmten* Balken durch gleichmäßige Erwärmung keine Spannung, bei einem *statisch unbestimmten* aber doch?

Lösung

Ein statisch bestimmtes System kann sich frei verformen – die Wärmedehnung wird durch Verschiebung der Lager „aufgenommen“, ohne Zwang. Beim statisch unbestimmten System verhindern die überzähligen Bindungen die freie Dehnung; es entstehen innere Zwängungskräfte und damit Spannungen.

7.5 Zusammenfassung Kapitel 7

Das Wichtigste aus Kapitel 7

- **Statisch unbestimmt:** mehr Reaktionen als Gleichgewichtsbedingungen.
- **Lösung:** Grundsystem (0-System) + 1-System (mit Unbekannter X) + Verträglichkeit.
- **Verträglichkeit:** geometrische Zusatzbedingung (Verformung an der gelösten Bindung vorgegeben).
- **Superposition** der Teillösungen ist erlaubt, weil das System linear ist.
- **Thermische Zwängung** entsteht nur bei statisch unbestimmten Systemen.

8 Torsion

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Schubspannung und Verdrillung einer kreiszylindrischen Welle berechnen
- Die Bredtschen Formeln für dünnwandige geschlossene Profile anwenden
- Dünnwandige offene Profile behandeln und den Schubfluss erklären
- Geschlossene und offene Profile bezüglich Torsionssteifigkeit vergleichen

8.1 Grundlagen der Torsion

Torsion ist die Drehbeanspruchung eines Stabes durch ein Moment M_T um seine Längsachse. Typisch bei Antriebswellen, Achsen und Schrauben. Im Querschnitt entstehen **Schubspannungen**, und der Stab **verdrillt** sich um den Winkel ϑ .

8.2 Die kreiszylindrische Welle

Beim Kreisquerschnitt bleiben die Querschnitte eben (kein Verwölben). Die Schubspannung wächst linear vom Mittelpunkt nach außen.

Schubspannung (Kreisquerschnitt):

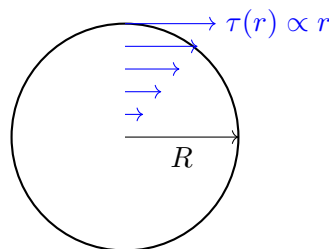
$$\tau(r) = \frac{M_T}{I_p} r, \quad \tau_{\max} = \frac{M_T}{I_p} R = \frac{M_T}{W_T}.$$

Verdrillung (Verdrehwinkel über die Länge L):

$$\vartheta = \frac{M_T L}{G I_p}.$$

Querschnittswerte:

$$\text{Vollwelle: } I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}, \quad W_T = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi d^3}{16}; \quad \text{Hohlwelle: } I_p = \frac{\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4).$$



τ wächst linear von 0 (Mitte) bis $\tau_{\max}$ (Rand)

Abbildung 17: Lineare Schubspannungsverteilung im Kreisquerschnitt unter Torsion.

Warum Rohre so effizient sind

Material in der Nähe der Achse trägt kaum zur Torsionssteifigkeit bei (kleiner Hebelarm r). Deshalb sind **Rohre** bei Torsion sehr effizient: Das Material sitzt dort, wo es wirkt – weit außen.

Torsion einer Vollwelle

Eine Vollwelle (Durchmesser $d = 40$ mm, Länge $L = 1$ m, $G = 80$ GPa) überträgt $M_T = 500$ Nm. Gesucht: maximale Schubspannung und Verdrillung.

Lösung

Querschnittswerte:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (40)^4}{32} = 2,513 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 = 2,513 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4,$$

$$W_T = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi (40)^3}{16} = 1,257 \cdot 10^4 \text{ mm}^3.$$

Schubspannung:

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T} = \frac{500 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{1,257 \cdot 10^4 \text{ mm}^3} = 39,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Verdrillung:

$$\vartheta = \frac{M_T L}{G I_p} = \frac{500 \cdot 1}{80 \cdot 10^9 \cdot 2,513 \cdot 10^{-7}} = 0,0249 \text{ rad} = 1,42^\circ.$$

8.3 Dünnwandige geschlossene Profile: die Bredtschen Formeln

Bei dünnwandigen geschlossenen Profilen (Rohre, Kastenprofile) verteilt sich die Schubspannung näherungsweise gleichmäßig über die Wanddicke. Es gelten die **Bredtschen Formeln**.

1. Bredtsche Formel (Schubspannung):

$$\tau = \frac{M_T}{2 t A_m}$$

mit der Wanddicke t und der von der **Profilmittellinie** eingeschlossenen Fläche A_m .

2. Bredtsche Formel (Verdrillung):

$$\vartheta = \frac{M_T L}{4 A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t} \xrightarrow{t=\text{const}} \vartheta = \frac{M_T L u}{4 A_m^2 G t},$$

mit der Mittellinien-Umfangslänge u .

Der Schubfluss

Das Produkt aus Schubspannung und Wanddicke heißt **Schubfluss**:

$$T = \tau t = \frac{M_T}{2 A_m} = \text{const.}$$

Anschaulich „fließt“ das Torsionsmoment als konstanter Schubfluss einmal um den Querschnitt. Bei dünneren Wänden ist die Spannung dort entsprechend höher.

Geschlossenes Rechteckrohr unter Torsion

Ein dünnwandiges Rechteckrohr (Außenmaße $b = 60 \text{ mm}$, $h = 40 \text{ mm}$, Wanddicke $t = 2 \text{ mm}$, Länge $L = 1 \text{ m}$, $G = 80 \text{ GPa}$) überträgt $M_T = 400 \text{ Nm}$. Gesucht: Schubspannung und Verdrillung.

Lösung

Mittellinienmaße (jeweils um t verkleinert): $b_m = 58 \text{ mm}$, $h_m = 38 \text{ mm}$.

$$A_m = b_m h_m = 58 \cdot 38 = 2204 \text{ mm}^2 = 2,204 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2,$$

$$u = 2(b_m + h_m) = 2(58 + 38) = 192 \text{ mm} = 0,192 \text{ m}.$$

1. Bredt – Schubspannung:

$$\tau = \frac{M_T}{2 t A_m} = \frac{400}{2 \cdot 0,002 \cdot 2,204 \cdot 10^{-3}} = 45,4 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 45,4 \text{ MPa}.$$

2. Bredt – Verdrillung:

$$\vartheta = \frac{M_T L u}{4 A_m^2 G t} = \frac{400 \cdot 1 \cdot 0,192}{4 \cdot (2,204 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,002} = 0,0247 \text{ rad} = 1,42^\circ.$$

8.4 Dünnwandige offene Profile

Wird das Profil aufgeschnitten (offenes Profil, z.B. U-, L-, I-Profil), bricht die Torsionssteifigkeit dramatisch ein. Statt eines umlaufenden Schubflusses bildet sich in jedem Wandabschnitt ein eigener, gegenläufiger Schubspannungsverlauf.

Offenes dünnwandiges Profil:

$$I_T = \frac{1}{3} \sum_i \ell_i t_i^3, \quad \tau_{\max} = \frac{M_T t_{\max}}{I_T}, \quad \vartheta = \frac{M_T L}{G I_T}.$$

ℓ_i und t_i sind Länge und Dicke der einzelnen Wandabschnitte.

Offenes U-Profil unter Torsion

Ein offenes U-Profil (Schenkellänge $h = 60 \text{ mm}$, Stegbreite $b = 30 \text{ mm}$, Wanddicke $t = 3 \text{ mm}$, $L = 1 \text{ m}$, $G = 80 \text{ GPa}$) überträgt $M_T = 10 \text{ Nm}$. Gesucht: $\tau_{\max}$ und ϑ .

Lösung

Gesamte Mittellinienlänge $\sum \ell_i = 2h + b = 150 \text{ mm}$, konstante Dicke $t = 3 \text{ mm}$:

$$I_T = \frac{1}{3} \sum \ell_i t_i^3 = \frac{1}{3} (150)(3)^3 = 1350 \text{ mm}^4 = 1,35 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4.$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_T t_{\max}}{I_T} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 3}{1350} = 22,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\vartheta = \frac{M_T L}{G I_T} = \frac{10 \cdot 1}{80 \cdot 10^9 \cdot 1,35 \cdot 10^{-9}} = 0,093 \text{ rad} = 5,3^\circ.$$

Schon bei diesem kleinen Moment dreht sich das offene Profil um $5,3^\circ$ – ein Vielfaches dessen, was ein geschlossenes Profil zeigen würde.

8.5 Vergleich: offen gegen geschlossen

Geschlossen ist um Größenordnungen steifer

Für ein dünnwandiges Kreisrohr (Radius r , Wanddicke t) ist das Verhältnis der Torsionssteifigkeiten

$$\frac{I_{T,\text{geschlossen}}}{I_{T,\text{offen}}} = 3 \left(\frac{r}{t} \right)^2.$$

Bei $r/t = 20$ ist das geschlossene Profil also rund **1200-mal** steifer! Praktische Folge: Offene dünnwandige Profile nie auf reine Torsion auslegen. Wenn nötig, durch ein Schweißblech „schließen“.

Achtung!

Die Bredtschen Formeln gelten **nur** für dünnwandige, **geschlossene** Profile mit (näherungsweise) konstanter Wanddicke. Wende sie niemals auf offene Profile an – dort gilt $I_T = \frac{1}{3} \sum \ell_i t_i^3$. Prüfe immer zuerst: Ist der Querschnitt geschlossen?

8.6 Zusammenfassung Kapitel 8

Das Wichtigste aus Kapitel 8

- **Kreiswelle:** $\tau_{\max} = M_T/W_T$, $\vartheta = M_T L/(GI_p)$, $I_p = \pi d^4/32$, $W_T = \pi d^3/16$.
- **Bredt (geschlossen):** $\tau = M_T/(2tA_m)$, $\vartheta = \frac{M_T L}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}$; Schubfluss $T = M_T/(2A_m)$.
- **Offen:** $I_T = \frac{1}{3} \sum \ell_i t_i^3$, $\tau_{\max} = M_T t_{\max}/I_T$.
- **Geschlossen** $\gg$ **offen:** Steifigkeitsverhältnis $\sim 3(r/t)^2$.

9 Knickung und Stabilität

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Den Unterschied zwischen Festigkeits- und Stabilitätsversagen erklären
- Die Eulersche Knickkraft berechnen
- Die vier Euler-Fälle und ihre Knicklängen zuordnen
- Den Schlankheitsgrad bestimmen und die Grenzen der Euler-Theorie einschätzen

9.1 Was ist Knicken?

Ein schlanker Druckstab versagt oft nicht durch zu hohe Spannung, sondern durch **plötzliches seitliches Ausweichen** – das **Knicken**. Das ist ein **Stabilitätsproblem**: Unterhalb einer kritischen Last ist die gerade Lage stabil; bei Überschreiten weicht der Stab schlagartig aus.

Achtung!

Knicken ist **kein** Festigkeitsversagen! Es tritt häufig auf, während die Spannungen noch weit **unter** der Streckgrenze liegen. Ein reiner Spannungsnachweis übersieht die Knickgefahr – bei Druckstäben immer zusätzlich auf Knicken prüfen.

9.2 Die Eulersche Knickkraft

Leonhard Euler bestimmte die kritische Last, bei der ein idealer, gerader Druckstab seitlich ausweicht.

Eulersche Knickkraft:

$$F_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 E I}{L_K^2}$$

mit der **Knicklänge** $L_K = \beta L$. Maßgebend ist das **kleinste** Flächenträgheitsmoment $I_{\min}$ (der Stab knickt um die „weiche“ Achse).

9.3 Die vier Euler-Fälle

Der Knicklängenbeiwert β hängt von der Lagerung ab:

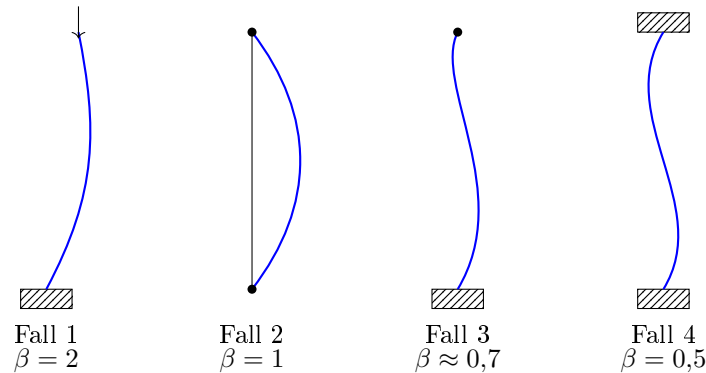


Abbildung 18: Die vier Euler-Fälle mit ihren Knicklängenbeiwerten β (Knicklänge $L_K = \beta L$).

Lagerung	β	L_K
eingespannt – frei	2	$2L$
beidseitig gelenkig (Grundfall)	1	L
eingespannt – gelenkig	$\approx 0,7$	$0,7 L$
beidseitig eingespannt	0,5	$0,5 L$

Einspannung hilft enorm

Die Knickkraft geht mit $1/L_K^2$. Eine beidseitige Einspannung ($\beta = 0,5$) verkürzt die Knicklänge auf die Hälfte und vervierfacht damit die Knicklast gegenüber dem gelenkigen Grundfall. Gute Lagerung ist beim Knicken oft wirksamer als mehr Material.

9.4 Schlankheitsgrad und Grenzen der Euler-Theorie

Schlankheitsgrad:

$$\lambda = \frac{L_K}{i}, \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} \text{ (Trägheitsradius).}$$

Die Euler-Formel gilt nur für **schlanke** Stäbe (großes λ), bei denen die kritische Spannung unter der Proportionalitätsgrenze bleibt. Für gedrungene Stäbe (kleines λ) versagt das Material vorher plastisch – dort gelten andere Ansätze (z. B. Tetmajer).

Knicklast einer Stütze

Eine Stahlstütze (quadratischer Vollquerschnitt $a = 50 \text{ mm}$, Länge $L = 3 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$) ist beidseitig gelenkig gelagert. Gesucht: Knicklast und Schlankheitsgrad.

Lösung

Querschnittswerte:

$$I = \frac{a^4}{12} = \frac{50^4}{12} = 5,21 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 = 5,21 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4, \quad A = a^2 = 2500 \text{ mm}^2.$$

Knicklast (Fall 2, $L_K = L = 3 \text{ m}$):

$$F_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 EI}{L_K^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 5,21 \cdot 10^{-7}}{3^2} = 1,20 \cdot 10^5 \text{ N} = 120 \text{ kN}.$$

Schlankheitsgrad:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{5,21 \cdot 10^5}{2500}} = 14,4 \text{ mm}, \quad \lambda = \frac{L_K}{i} = \frac{3000}{14,4} = 208.$$

$\lambda = 208$ ist sehr groß – die Stütze ist schlank, die Euler-Theorie ist anwendbar.

9.5 Zusammenfassung Kapitel 9

Das Wichtigste aus Kapitel 9

- **Knicken** = Stabilitätsversagen, oft unterhalb der Streckgrenze.
- **Euler:** $F_{\text{krit}} = \pi^2 EI / L_K^2$, mit kleinstem I .
- **Knicklänge** $L_K = \beta L$: $\beta = 2; 1; 0,7; 0,5$ für die vier Fälle.
- **Schlankheit** $\lambda = L_K / i$, $i = \sqrt{I/A}$; Euler nur für schlanke Stäbe.

10 Energiemethoden

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Die Formänderungsenergie für Stab, Balken und Welle aufstellen
- Verschiebungen mit dem Satz von Castigliano berechnen
- Das Prinzip der virtuellen Kräfte (Einheitslastverfahren) anwenden
- Statisch unbestimmte Systeme mit Energiemethoden lösen

10.1 Arbeit und Formänderungsenergie

Verformt sich ein elastischer Körper, speichert er die verrichtete Arbeit als **Formänderungsenergie** U . Bei linear-elastischem Verhalten ist sie gleich der Fläche unter der Kraft-Weg-Linie, also $U = \frac{1}{2} F \cdot \delta$.

Formänderungsenergie der Grundbeanspruchungen:

$$\text{Stab (Zug/Druck): } U = \int \frac{N^2}{2EA} dx,$$

$$\text{Balken (Biegung): } U = \int \frac{M^2}{2EI} dx,$$

$$\text{Welle (Torsion): } U = \int \frac{M_T^2}{2GI_T} dx,$$

$$\text{Querkraft (Schub): } U = \int \frac{Q^2}{2GA_S} dx.$$

10.2 Der Satz von Castigliano

Satz von Castigliano: Die Ableitung der Formänderungsenergie nach einer äußeren Kraft F ergibt die Verschiebung δ an deren Angriffspunkt (in Kraftrichtung):

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F}, \quad \varphi = \frac{\partial U}{\partial M}.$$

Kragträger-Durchbiegung mit Castigliano

Bestimme die Durchbiegung am freien Ende eines Kragträgers (Länge L , EI) unter der Endkraft F .

Lösung

Biegemoment $M(x) = -F(L - x)$, also $M^2 = F^2(L - x)^2$:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{F^2}{2EI} \int_0^L (L - x)^2 dx = \frac{F^2}{2EI} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{F^2 L^3}{6EI}.$$

Castigliano:

$$w_{\text{Ende}} = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{FL^3}{3EI}.$$

Das bestätigt den Tafelwert aus Kapitel 6.

10.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte

Das **Prinzip der virtuellen Kräfte** (auch Einheitslastverfahren) ist das vielseitigste Werkzeug zur Verschiebungsberechnung. Idee: Man bringt am gesuchten Punkt eine **virtuelle Einheitslast** an und integriert das Produkt der realen und der virtuellen Schnittgrößen.

Prinzip der virtuellen Kräfte:

$$f_i = \int \frac{N \bar{N}}{EA} dx + \int \frac{M \bar{M}}{EI} dx + \int \frac{Q \bar{Q}}{GA_S} dx + \int \frac{M_T \bar{M}_T}{GI_T} dx.$$

Größen ohne Querstrich: aus der **realen** Belastung. Größen mit Querstrich: aus der **virtuellen Einheitslast** (Kraft $\bar{F} = 1$ für eine Verschiebung, Moment $\bar{M} = 1$ für eine Verdrehung) am gesuchten Punkt.

Bei Biegung dominiert das M -Integral

Bei schlanken Balken sind die Anteile aus N und Q meist vernachlässigbar klein. In der Praxis reduziert sich das Prinzip der virtuellen Kräfte oft auf das eine Integral $\int \frac{M\bar{M}}{EI} dx$.

Für die häufig auftretenden $M\bar{M}$ -Integrale gibt es **Koppeltafeln** (Integraltafeln). Die wichtigsten Einträge für einen Bereich der Länge ℓ :

M - und $\bar{M}$ -Verlauf über ℓ	$\int_0^\ell M \bar{M} dx$
beide konstant ($c, \bar{c}$)	$\ell c \bar{c}$
konstant $c \times$ Dreieck $\bar{c}$	$\frac{1}{2} \ell c \bar{c}$
zwei Dreiecke, Spitze am selben Ende	$\frac{1}{3} \ell c \bar{c}$
zwei Dreiecke, Spitzen an verschiedenen Enden	$\frac{1}{6} \ell c \bar{c}$
Parabel (Scheitel c) $\times$ konstant $\bar{c}$	$\frac{2}{3} \ell c \bar{c}$

Kragträger-Durchbiegung mit virtueller Kraft

Berechne erneut die Enddurchbiegung des Kragträgers (Endkraft F) – diesmal mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte.

Lösung

Reales Moment: $M(x) = -F(L - x)$ (Dreieck, Spitze an der Einspannung). **Virtuelle Einheitskraft** $\bar{F} = 1$ am Ende: $\bar{M}(x) = -(L - x)$ (Dreieck, gleiche Form). Beide Dreiecke haben die Spitze am selben Ende, daher (Koppeltafel, $\frac{1}{3}\ell c\bar{c}$ mit $c = FL$, $\bar{c} = L$):

$$w_{\text{Ende}} = \int_0^L \frac{M \bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} L (FL)(L) = \frac{FL^3}{3EI}.$$

Gleiches Ergebnis wie mit Castigliano und der DGL – drei Wege, ein Resultat.

10.4 Energiemethoden bei statisch unbestimmten Systemen

Auch statisch unbestimmte Systeme lassen sich elegant lösen: Man wählt die überzählige Größe X als Unbekannte und fordert mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte, dass die Verschiebung an der gelösten Bindung null ist (Kraftgrößenverfahren). Das liefert direkt die Bestimmungsgleichung für X .

10.5 Zusammenfassung Kapitel 10

Das Wichtigste aus Kapitel 10

- **Formänderungsenergie:** $U = \int \frac{M^2}{2EI} dx$ (Biegung), analog für N , M_T , Q .
- **Castigliano:** $\delta = \partial U / \partial F$, $\varphi = \partial U / \partial M$.
- **Virtuelle Kräfte:** $f = \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \dots$ (reale $\times$ virtuelle Schnittgrößen).
- **Koppeltafeln** sparen die Integration der $M\bar{M}$ -Produkte.
- Anwendbar auf Durchbiegungen *und* statisch unbestimmte Systeme.

11 Große Prüfungsaufgaben (Altklausuren)

Lernziele

Hier rechnen wir zwei umfangreiche Altklausuraufgaben vollständig durch. Sie verbinden mehrere Kapitel und zeigen, wie eine echte Prüfungsaufgabe Schritt für Schritt gelöst wird.

11.1 Altklausur 1: Dach als schräger Balken

Aufgabenstellung

Das Dach einer Laderampe wird als Balken mit T-Profil modelliert. Der Balken ist in A fest eingespannt (im Winkel $\beta = 45^\circ$) und am Punkt B durch einen elastischen Pendelstab (Querschnitt A_S , Modul E_S , Wärmekoeffizient α_S) gestützt. Eine vertikale Streckenlast q_0 wirkt auf den Balken; ihre Komponente in Balkenlängsrichtung darf vernachlässigt werden. Der Balken besteht aus einem Werkstoff mit E und $\alpha_D = 0$.

Gegeben: q_0 , ℓ , a (Profilmaß), $\beta = 45^\circ$, E , E_S , A_S , α_S , ΔT .

Gesucht: (a) Flächenschwerpunkt des T-Profiles, (b) Flächenträgheitsmomente I_y , I_z , I_{yz} , (c) Zerlegung der Streckenlast, (d) Verträglichkeitsbedingung, (e) Durchbiegung an B (Superposition), (f) Stabkraft S .

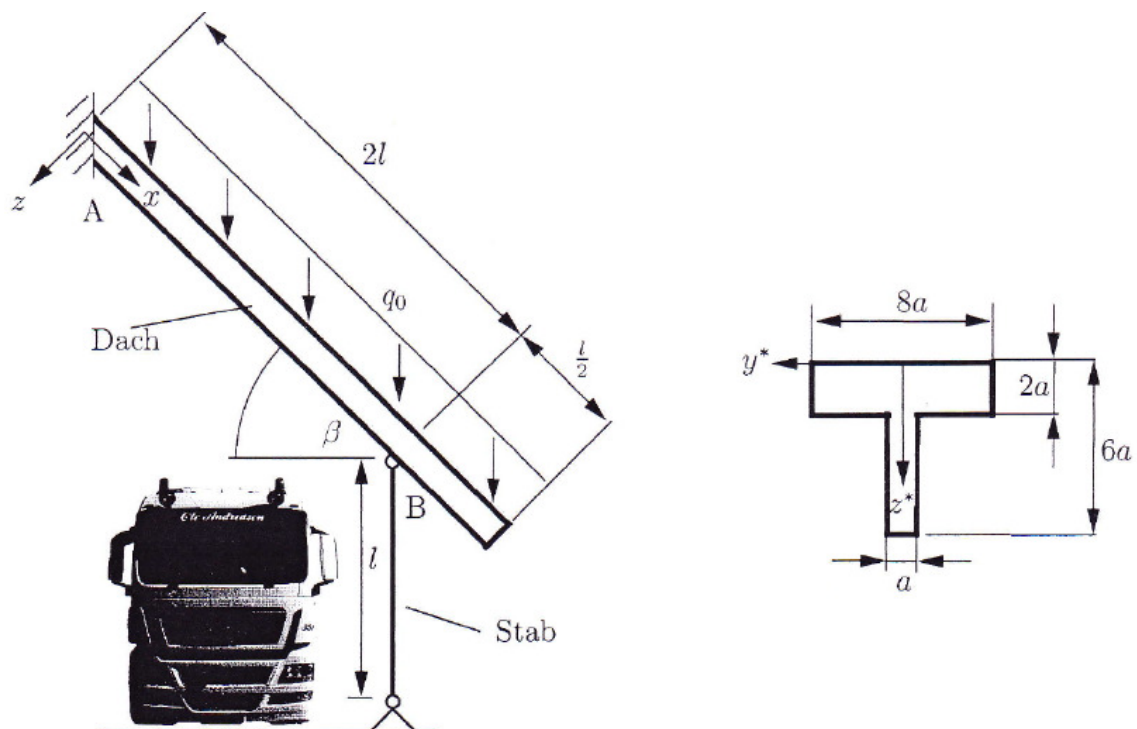


Abbildung 19: System der Altklausur: Das Dach (Länge $\frac{5}{2}\ell$) ist in A unter $\beta = 45^\circ$ eingespannt und in B durch den Pendelstab gestützt; es trägt die Streckenlast q_0 . Rechts der T-Profil-Querschnitt aus Gurt ($8a \times 2a$) und Steg ($a \times 4a$), Gesamthöhe $6a$.

(a) Flächenschwerpunkt. Wir teilen in Gurt (oben) und Steg (unten), Bezug Oberkante ($z = 0$ oben):

$$\text{Gurt: } A_2 = 8a \cdot 2a = 16a^2, \quad z_2 = a;$$

$$\text{Steg: } A_1 = a \cdot 4a = 4a^2, \quad z_1 = 2a + 2a = 4a.$$

$$z_S = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \frac{4a^2 \cdot 4a + 16a^2 \cdot a}{20a^2} = \frac{32a^3}{20a^2} = \frac{8}{5}a = 1,6a.$$

Wegen Symmetrie: $y_S = 0$. Schwerpunkt $S(0, \frac{8}{5}a)$ (von der Oberkante).

(b) Flächenträgheitsmomente (Schwerachse durch S). Eigenanteile $bh^3/12$ plus Steiner. Abstände zur Schwerachse: $d_1 = 4a - \frac{8}{5}a = \frac{12}{5}a$ (Steg), $d_2 = \frac{8}{5}a - a = \frac{3}{5}a$ (Gurt).

$$I_y = \underbrace{\frac{a(4a)^3}{12}}_{16a^4/3} + 4a^2 \left(\frac{12}{5}a\right)^2 + \underbrace{\frac{8a(2a)^3}{12}}_{16a^4/3} + 16a^2 \left(\frac{3}{5}a\right)^2 = \frac{32}{3}a^4 + \frac{576}{25}a^4 + \frac{144}{25}a^4.$$

$$I_y = \frac{592}{15}a^4 \approx 39,5a^4.$$

Für die vertikale Achse (Symmetrieachse, kein Steiner in y):

$$I_z = \frac{4a \cdot a^3}{12} + \frac{2a(8a)^3}{12} = \frac{a^4}{3} + \frac{256a^4}{3} = \frac{257}{3}a^4 \approx 85,7a^4.$$

Da die z -Achse Symmetrieachse ist, gilt $I_{yz} = 0$ (Hauptachsen).

(c) Zerlegung der Streckenlast. Die vertikale Last q_0 zerlegt sich am um β geneigten Balken in eine Komponente quer zur Balkenachse und eine längs. Nur die Querkomponente biegt den Balken:

$$q_{\perp} = q_0 \cos \beta, \quad q_{\parallel} = q_0 \sin \beta \text{ (vernachlässigt)}.$$

Für $\beta = 45^\circ$: $q_{\perp} = q_0/\sqrt{2}$.

Annahmen zur Geometrie (Bereinigung der Aufgabe)

Die Vortragsfassung dieser Aufgabe war an einigen Stellen uneinheitlich. Für eine widerspruchsfreie Rechnung legen wir fest: Der Balken ist ein Kragträger der Gesamtlänge $L = \frac{5}{2}\ell$, die Pendelstütze greift bei $x_B = 2\ell$ an, der Pendelstab hat die Länge ℓ , und die Absenkung von B projiziert sich mit $\cos \beta$ auf die Stabachse. Der Stab steht unter Zug (Vorzeichen des Temperaturterms folgt daraus).

(d) Verträglichkeitsbedingung. Balkenende B und Stabkopf bleiben verbunden: Die auf die Stabachse projizierte Absenkung von B ist gleich der Stabverlängerung aus Kraft und Temperatur:

$$w_B \cos \beta = \underbrace{\frac{S \ell}{E_S A_S}}_{\text{Kraft}} + \underbrace{\alpha_S \Delta T \ell}_{\text{Temperatur}}.$$

(e) Durchbiegung an B durch Superposition. Wir zerlegen den Kragträger (Länge $L = \frac{5}{2}\ell$, Biegesteifigkeit EI mit $I = I_y$) in zwei Lastfälle und überlagern.

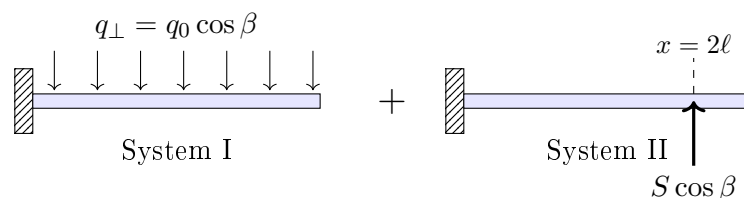


Abbildung 20: Superposition für Altklausur 1: Kragträger unter $q_{\perp}$ (System I) überlagert mit der aufwärts gerichteten Stabkraftkomponente $S \cos \beta$ am Stützpunkt (System II).

- aus $q_{\perp}$, ausgewertet bei $x = 2\ell$ mit $w_q(x) = \frac{q_{\perp}}{24EI}x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)$:

$$w_q(2\ell) = \frac{q_{\perp}}{24EI}(2\ell)^2(4\ell^2 - 4 \cdot \frac{5}{2}\ell \cdot 2\ell + 6 \cdot \frac{25}{4}\ell^2) = \frac{q_{\perp}}{24EI} \cdot 4\ell^2 \cdot \frac{43}{2}\ell^2 = \frac{43 q_{\perp} \ell^4}{12EI};$$

- aus der (aufwärts gerichteten) Stabkraftkomponente $S \cos \beta$ bei $x = 2\ell$, Punktlast auf Kragträger $w = Px_B^3/(3EI)$:

$$w_S(2\ell) = \frac{S \cos \beta (2\ell)^3}{3EI} = \frac{8 S \cos \beta \ell^3}{3EI}.$$

Netto-Durchbiegung (mit $q_\perp = q_0 \cos \beta$):

$$w_B = \frac{43 q_0 \cos \beta \ell^4}{12EI} - \frac{8 S \cos \beta \ell^3}{3EI}.$$

(f) **Stabkraft.** Einsetzen in die Verträglichkeit (d) und Multiplikation mit $\cos \beta$:

$$\frac{43 q_0 \cos^2 \beta \ell^4}{12EI} - \frac{8 S \cos^2 \beta \ell^3}{3EI} = \frac{S \ell}{E_S A_S} + \alpha_S \Delta T \ell.$$

Nach S auflösen und durch ℓ kürzen:

$$S = \frac{\frac{43 q_0 \cos^2 \beta \ell^3}{12EI} - \alpha_S \Delta T}{\frac{8 \cos^2 \beta \ell^2}{3EI} + \frac{1}{E_S A_S}}$$

Mit $\beta = 45^\circ$ ($\cos^2 \beta = \frac{1}{2}$) und $I = \frac{592}{15} a^4$:

$$S = \frac{\frac{43 q_0 \ell^3}{24EI} - \alpha_S \Delta T}{\frac{4 \ell^2}{3EI} + \frac{1}{E_S A_S}}.$$

Kontrolle

Dimensionen: Zähler dimensionslos (z.B. $q_0 \ell^3/EI \rightarrow (\text{N/m}) \text{m}^3/(\text{N m}^2) = 1$ und $\alpha_S \Delta T$ dimensionslos), Nenner in $1/\text{N}$ (ℓ^2/EI und $1/E_S A_S$), also S in N. Erwärmung ($\Delta T > 0$) verkleinert bei diesem Vorzeichen die erforderliche Stabkraft.

11.2 Altklausur 2: Dünnwandiges Torsionsprofil

Aufgabenstellung

Ein halbkreisförmiges, dünnwandiges, **geschlossenes** Profil (Wanddicke $\delta \ll r$, Radius r , Länge ℓ) ist fest eingespannt und wird exzentrisch durch eine Querkraft F und eine Längskraft $2F$ belastet. Die Kraft F erzeugt am Profil ein Torsionsmoment $M_T = F r$.

Gegeben: $r, \ell, F, E, \nu, A_{\text{Profil}}, I_y, z_S$, zulässige Verdrehung φ_{zul} .

Gesucht: (a) minimale Wandstärke δ_{min} , damit $\varphi \leq \varphi_{\text{zul}}$, (b) maximale Schubspannung τ_{max} aus Torsion, (c) größte Vergleichsspannung σ_v (Gestaltänderungshypothese), (d) Verdrehung φ_{Riss} nach Aufreißen (offenes Profil), (e) maximale Schubspannung τ_{Riss} im offenen Profil.

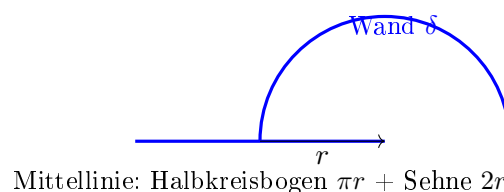


Abbildung 21: Halbkreisförmiges dünnwandiges geschlossenes Profil. Die Mittellinie besteht aus Bogen (πr) und Durchmesser ($2r$).

(a) Minimale Wandstärke. Verdrehung des geschlossenen Profils: $\varphi = M_T \ell / (G I_T)$ mit $G = E/[2(1+\nu)]$, $M_T = Fr$. Die eingeschlossene Fläche und das Umlaufintegral:

$$A_m = \frac{\pi}{2} r^2, \quad \oint \frac{ds}{t} = \frac{1}{\delta} \left(\underbrace{2r}_{\text{Sehne}} + \underbrace{\pi r}_{\text{Bogen}} \right) = \frac{r(2+\pi)}{\delta}.$$

Damit das Torsionsträgheitsmoment (2. Bredt):

$$I_T = \frac{4A_m^2}{\oint ds/t} = \frac{4 \left(\frac{\pi}{2} r^2 \right)^2 \delta}{r(2+\pi)} = \frac{\pi^2 r^3 \delta}{2+\pi}.$$

Einsetzen in φ und Bedingung $\varphi \leq \varphi_{\text{zul}}$:

$$\varphi = \frac{Fr \ell (2+\pi)}{G \pi^2 r^3 \delta} = \frac{F \ell (2+\pi)}{G \pi^2 r^2 \delta} \leq \varphi_{\text{zul}} \Rightarrow \boxed{\delta_{\min} = \frac{F \ell (2+\pi)}{\pi^2 r^2 G \varphi_{\text{zul}}}}.$$

(b) Maximale Schubspannung aus Torsion (1. Bredt):

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{2 A_m \delta_{\min}} = \frac{Fr}{2 \cdot \frac{\pi}{2} r^2 \delta_{\min}} = \frac{F}{\pi r \delta_{\min}}.$$

$\delta_{\min}$ aus (a) eingesetzt:

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{\pi r G \varphi_{\text{zul}}}{\ell (2+\pi)}}.$$

(c) Vergleichsspannung. Am Einspannquerschnitt liefern Längskraft und Biegung die Normalspannung mit $N = 2F$ und $M = F \ell$. Mit dem gefährdeten Randfaseraabstand z_0 gilt

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A_{\text{Profil}}} + \frac{M}{I_y} z_0 = \frac{2F}{A_{\text{Profil}}} + \frac{F \ell z_0}{I_y}.$$

Gestaltänderungshypothese (von Mises) mit der Torsionsschubspannung $\tau = \tau_{\max}$:

$$\boxed{\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3 \tau_{\max}^2}}.$$

(d) Nach Aufreißen – offenes Profil. Reißt das Profil auf, gilt das Torsionsträgheitsmoment des **offenen** Profils:

$$\bar{I}_T = \frac{1}{3} (\text{Mittellinienlänge}) \delta_{\min}^3 = \frac{1}{3} r(2+\pi) \delta_{\min}^3.$$

Neue Verdrehung (mit $M_T = Fr$, r kürzt sich):

$$\varphi_{\text{Riss}} = \frac{M_T \ell}{G \bar{I}_T} = \frac{3 F \ell}{G (2+\pi) \delta_{\min}^3}.$$

(e) Schubspannung im offenen Profil:

$$\tau_{\text{Riss}} = \frac{M_T \delta_{\min}}{\bar{I}_T} = \frac{3F}{(2+\pi) \delta_{\min}^2}.$$

Achtung!

Der Vergleich (a)/(b) mit (d)/(e) zeigt die Kernaussage: Durch das Aufreißen steigt die Verdrehung um den Faktor $\sim (r/\delta_{\min})^2$ und die Schubspannung drastisch an. Ein dünnwandiges Profil verliert beim Öffnen fast seine gesamte Torsionssteifigkeit – ein klassisches Prüfungs- und Konstruktionsthema.

12 Formelsammlung

Die wichtigsten Formeln im Überblick – zum schnellen Nachschlagen.

12.1 Spannung, Dehnung, Werkstoff

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{N}{A} \quad (\text{Normalspannung}), & \tau &= \frac{Q}{A} \quad (\text{Schubspannung}) \\ \varepsilon &= \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \quad (\text{Dehnung}), & \gamma & \quad (\text{Schubverzerrung}) \\ \sigma &= E \varepsilon, & \tau &= G \gamma \\ \nu &= -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_\ell}, & G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \varepsilon_T &= \alpha_T \Delta T, & \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T\end{aligned}$$

12.2 Zug und Druck im Stab

$$\Delta \ell = \frac{N \ell}{EA}, \quad \Delta \ell = \int_0^\ell \frac{N(x)}{EA(x)} dx, \quad \sigma_T = -E \alpha_T \Delta T \quad (\text{behinderte Dehnung}).$$

12.3 Spannungszustand

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, & \tan 2\varphi^* &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \\ \tau_{\max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, & \sigma_x + \sigma_y &= \text{const} \\ \text{Kessel (Zyl.): } \sigma_t &= \frac{pr}{t}, \quad \sigma_x = \frac{pr}{2t}, & \text{Kugel: } \sigma &= \frac{pr}{2t} \\ \sigma_v &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (\text{von Mises, Sonderfall})\end{aligned}$$

12.4 Flächenträgheitsmomente

$$\begin{aligned}I_y &= \int z^2 dA, & I_z &= \int y^2 dA, & I_{yz} &= -\int yz dA, & I_p &= I_y + I_z \\ \text{Rechteck: } I_y &= \frac{bh^3}{12}, & \text{Kreis: } I &= \frac{\pi R^4}{4}, & \text{Dreieck: } I_S &= \frac{bh^3}{36}, & W &= \frac{I}{z_{\max}} \\ \text{Steiner: } I &= I_S + d^2 A.\end{aligned}$$

12.5 Balkenbiegung

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{M_y}{I_y} z, & \sigma_{\max} &= \frac{M}{W}, & EI w'''' &= q \\ EI w'' &= -M, & EI w''' &= -Q, & \tau &= \frac{Q S}{I b} \\ \text{Kragträger (F): } w_{\max} &= \frac{FL^3}{3EI}; & \text{Einfeldträger (F mittig): } &\frac{FL^3}{48EI}; & \text{Gleichlast: } &\frac{5qL^4}{384EI}.\end{aligned}$$

12.6 Torsion

$$\begin{aligned}\text{Kreis: } \tau_{\max} &= \frac{M_T}{W_T}, & \vartheta &= \frac{M_T L}{GI_p}, & I_p &= \frac{\pi d^4}{32}, & W_T &= \frac{\pi d^3}{16} \\ \text{Bredt (geschl.): } \tau &= \frac{M_T}{2tA_m}, & \vartheta &= \frac{M_T L}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}, & T &= \frac{M_T}{2A_m} \\ \text{offen: } I_T &= \frac{1}{3} \sum \ell_i t_i^3, & \tau_{\max} &= \frac{M_T t_{\max}}{I_T}\end{aligned}$$

12.7 Knickung

$$F_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 EI}{L_K^2}, \quad L_K = \beta L \quad (\beta = 2; 1; 0,7; 0,5), \quad \lambda = \frac{L_K}{i}, \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}.$$

12.8 Energiemethoden

$$\begin{aligned}U &= \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int \frac{N^2}{2EA} dx + \int \frac{M_T^2}{2GI_T} dx, & \delta &= \frac{\partial U}{\partial F}. \\ f &= \int \frac{M \bar{M}}{EI} dx + \int \frac{N \bar{N}}{EA} dx + \int \frac{M_T \bar{M}_T}{GI_T} dx \quad (\text{Prinzip der virtuellen Kräfte}).\end{aligned}$$

13 Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

Lernziele

Hier findest du Strategien, typische Fehlerquellen und einen Lernplan für die Prüfung.

13.1 Der universelle Lösungsweg

Vorgehen bei (fast) jeder Aufgabe

1. **Skizze und Freikörperbild.** Alle Kräfte, Momente, Lager und Maße eintragen.
2. **Schnittgrößen** aus der Statik (N , Q , M , M_T).
3. **Querschnittswerte** (A , I , W , I_p , I_T).
4. **Spannungen** berechnen und ggf. zur Vergleichsspannung zusammenfassen.
5. **Verformungen** (Stab, Biegelinie, Verdrillung).
6. **Nachweise** gegen zulässige Werte; Plausibilität prüfen.

13.2 Typische Fehlerquellen

Achtung!

- **Einheiten:** mm und N konsequent halten ($\Rightarrow$ Spannung in $\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$). $1 \text{ kNm} = 10^6 \text{ Nmm}$.
- **Achslage** bei I und W : Tabellenwerte gelten für Schwerachsen – Steiner nicht vergessen.
- **Randbedingungen** der Biegelinie: vier Stück, sauber zuordnen.
- **Bredt nur geschlossen:** Bei offenen Profilen $I_T = \frac{1}{3} \sum \ell_i t_i^3$.
- **Knicken** ist Stabilität, nicht Festigkeit – separat prüfen.
- **Vorzeichen** bei Momenten und beim Deviationsmoment.

13.3 Was du auswendig können solltest

Pflichtwissen

- Hauptspannungsformel und Mohrscher Kreis.
- I und W für Rechteck und Kreis; Satz von Steiner.
- Herleitung der Biegelinien-DGL und mindestens zwei Standardfälle.
- Bredtsche Formeln; Unterschied offen/geschlossen.
- Eulersche Knickkraft und die vier Knicklängenbeiwerte.
- Prinzip der virtuellen Kräfte mit den wichtigsten Koppeltafel-Einträgen.

13.4 Lernplan in vier Schritten

1. **Verstehen:** Jedes Kapitel einmal aktiv durcharbeiten, die Herleitungen nachvollziehen.
2. **Üben:** Die Beispiele selbst nachrechnen, ohne auf die Lösung zu schauen.
3. **Anwenden:** Die beiden Altklausuren aus Kapitel 11 komplett selbst lösen.
4. **Prüfen:** Mit der Formelsammlung als einziger Hilfe weitere Aufgaben unter Zeitdruck rechnen.

WICHTIG!

Elastostatik lernt man nicht durch Lesen, sondern durch Rechnen. Wer die Standardaufgaben (Schwerpunkt, I/W , Biegelinie, Torsion, Knickung, virtuelle Kräfte) sicher beherrscht, hat den Großteil jeder Klausur in der Hand. Viel Erfolg!

Biegelinientafel

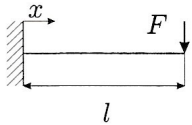
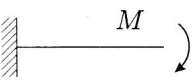
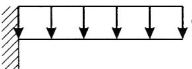
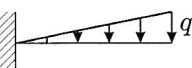
	Gleichung der Biegelinie (x vom linken Auflager aus)	Durchbiegung	Verdrehungen $\varphi(x) = -w'(x)$
	$w = \frac{F}{6EI} (3lx^2 - x^3)$	$w(l) = w_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI}$	$\varphi(l) = -\frac{Fl^2}{2EI}$
	$w = \frac{M}{2EI} x^2$	$w(l) = w_{\max} = \frac{Ml^2}{2EI}$	$\varphi(l) = -\frac{Ml}{EI}$
	$w = \frac{q}{24EI} (6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4)$	$w(l) = w_{\max} = \frac{ql^4}{8EI}$	$\varphi(l) = -\frac{ql^3}{6EI}$
	$w = \frac{q_0}{120EI} (20l^3x^2 - 10l^2x^3 + x^5)$	$w(l) = w_{\max} = \frac{11q_0l^4}{120EI}$	$\varphi(l) = -\frac{q_0l^3}{8EI}$

Tabelle 2: Biegelinien und Verformungen von Balken ($EI = \text{konst.}$)

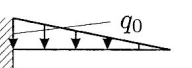
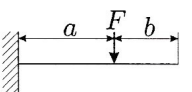
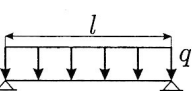
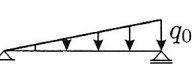
	Gleichung der Biegelinie (x vom linken Auflager aus)	Durchbiegung	Verdrehungen $\varphi(x) = -w'(x)$
	$w = \frac{q_0}{120EI} (10l^3x^2 - 10l^2x^3 + 5lx^4 - x^5)$	$w(l) = w_{\max} = \frac{q_0l^4}{30EI}$	$\varphi(l) = -\frac{q_0l^3}{24EI}$
	$w = \frac{F}{6EI} (3ax^2 - x^3), 0 \leq x \leq a$ $w = \frac{F}{6EI} (3a^2x - a^3), a \leq x \leq l$	$w(a) = \frac{Fa^3}{3EI}$ $w(l) = \frac{F}{6EI} (3la^2 - a^3)$	$\varphi(a) = -\frac{Fa^2}{2EI}$ $\varphi(l) = -\frac{Fa^2}{2EI}$
	$w = \frac{q}{24EI} (l^3x - 2lx^3 + x^4)$	$w\left(\frac{l}{2}\right) = w_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}$	$\varphi(l) = -\varphi(0) = \frac{ql^3}{24EI}$
	$w = \frac{q_0}{360EI} (7l^4x - 10l^2x^3 + 3x^5)$	$w\left(\frac{l}{2}\right) = 0.00651 \frac{q_0l^4}{EI}$ $w_{\max} = 0.00652 \frac{q_0l^4}{EI}$ bei $x_m = 0.5193l$	$\varphi(0) = -\frac{7q_0l^3}{360EI}$ $\varphi(l) = \frac{q_0l^3}{45EI}$

Tabelle 2: Fortsetzung – Biegelinien und Verformungen von Balken ($EI = \text{konst.}$)

Gleichung der Biegelinie
(x vom linken Auflager aus)

Durchbiegung

Verdrehungen
 $\varphi(x) = -w'(x)$



$$w = \frac{Ml}{6EI}(l^2x - x^3)$$

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Ml^2}{16EI}$$

$$w_{\max} = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$$

$$\text{bei } x_m = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

$$\varphi(0) = -\frac{Ml}{6EI}$$

$$\varphi(l) = \frac{Ml}{3EI}$$

für $0 \leq x \leq a$

$$w = \frac{M}{6EI}[(6al - 3a^2 - 2l^2)x - x^3]$$

für $a \leq x \leq \frac{l}{2}$

$$w = \frac{M}{6EI}[3l^2 - (3a^2 + 2l^2)x + 3lx^2 - x^3]$$

$$w(a) = \frac{M}{3EI}(3a^2l - 2a^3 - l^2a)$$

$$\varphi(0) = -\frac{M}{6EI} \cdot (6al - 3a^2 - 2l^2)$$

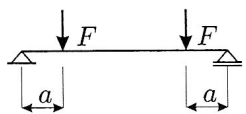
$$\varphi(l) = \frac{M}{6EI}(l^2 - 3a^2)$$

Tabelle 2: Fortsetzung – Biegelinien und Verformungen von Balken ($EI = \text{konst.}$)

Gleichung der Biegelinie
(x vom linken Auflager aus)

Durchbiegung

Verdrehungen
 $\varphi(x) = -w'(x)$



für $0 \leq x \leq a$

$$w = \frac{F}{6EI}(3alx - 3a^2x - x^3)$$

für $a \leq x \leq \frac{l}{2}$

$$w = \frac{F}{6EI}(3alx - 3ax^2 - a^2)$$

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = w_{\max}$$

$$= \frac{Fa}{24EI}(3l^2 - 4a^2)$$

$$\varphi(l) = -\varphi(0) = \frac{Fa}{2EI}(l - a)$$

$$\varphi(a) = -\frac{Fa}{2EI}(l - 2a)$$

für $0 \leq x \leq a$

$$w = \frac{Fb}{6EI}l^2x - b^2x - x^3$$

für $a \leq x \leq \frac{l}{2}$

$$w = \frac{Fb}{6EI}\left[\frac{l}{b}(x - a)^3 + (l^2 - b^2)x - x^3\right]$$

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Fb}{48EI}(3l^2 - 4b^2)$$

$$w_{\max} = \frac{Fb}{9\sqrt{3}EI}(l^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{bei } x_m = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}, (a > b)$$

$$\varphi(0) = -\frac{Fab}{6EI}l(l + b)$$

$$\varphi(l) = \frac{Fab}{6EI}l(l + a)$$

Tabelle 2: Fortsetzung – Biegelinien und Verformungen von Balken ($EI = \text{konst.}$)