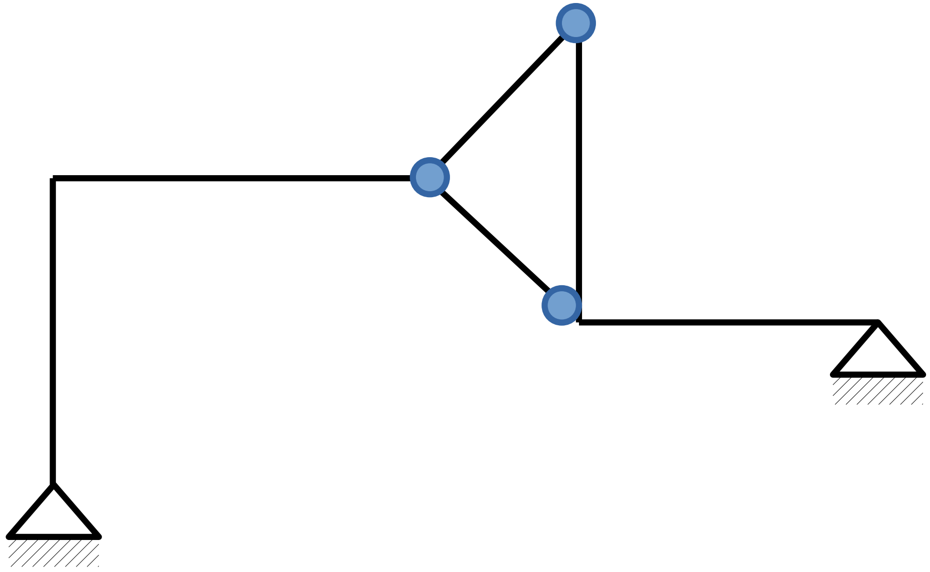
Statische Bestimmtheit

ingenieurkurse.de
Interaktive Online-Kurse



Statische Bestimmtheit

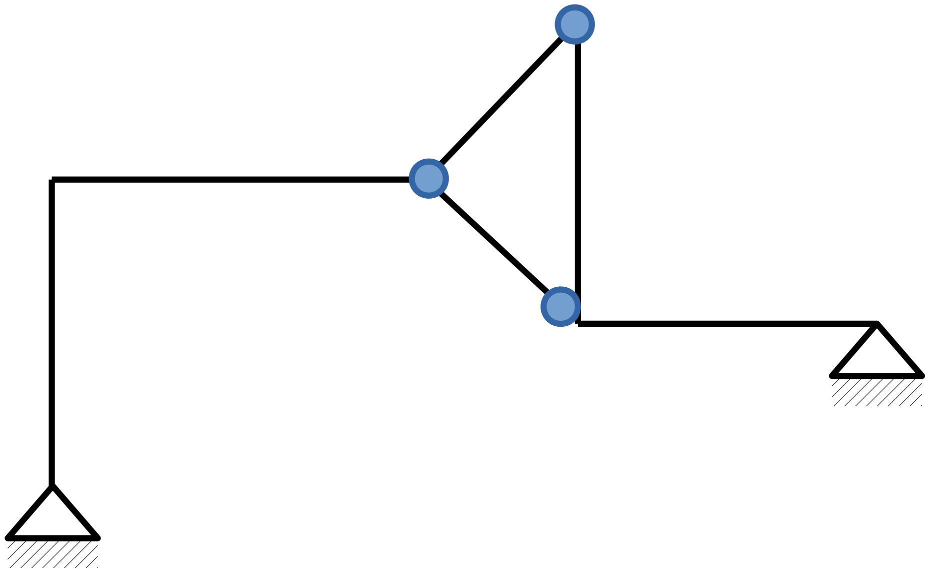
Die Abzählformel lautet:

$$f = a + z - 3n$$

In diesem System gilt:

$$f = 4 + 8 - 3 \cdot 4 = 0$$

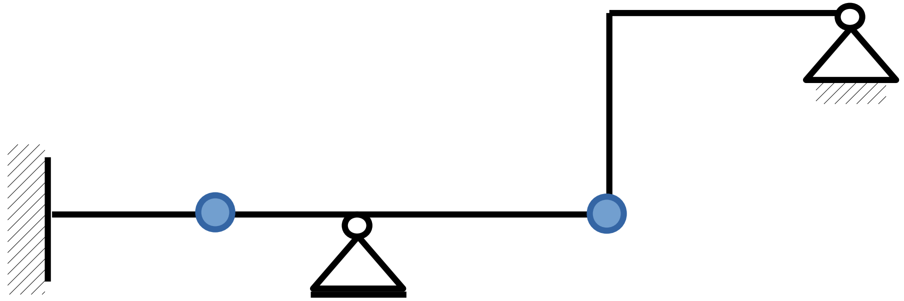
Das System ist statisch bestimmt!!



Statische Bestimmtheit

Die Abzählformel lautet:

$$f = a + z - 3n$$

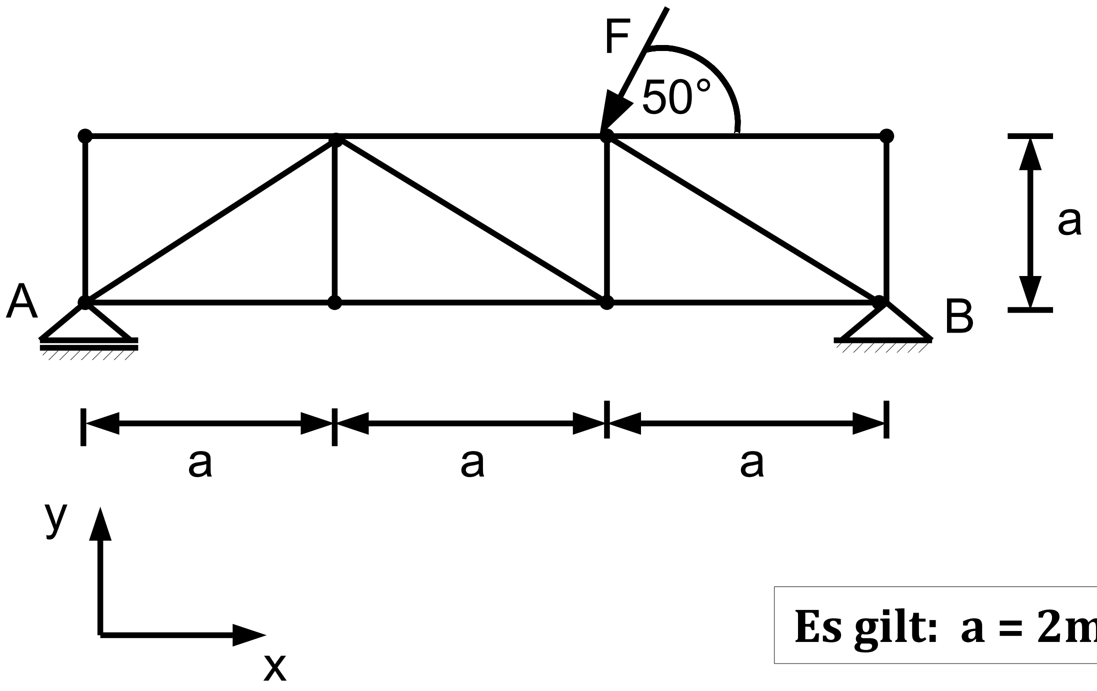


In diesem System gilt:

$$f = 6 + 4 - 3 \cdot 3 = -1$$

Das System ist statisch überbestimmt!
Es sind mehr unbekannte Kräfte gegeben (10) als Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen (9)!

Knotenpunktverfahren

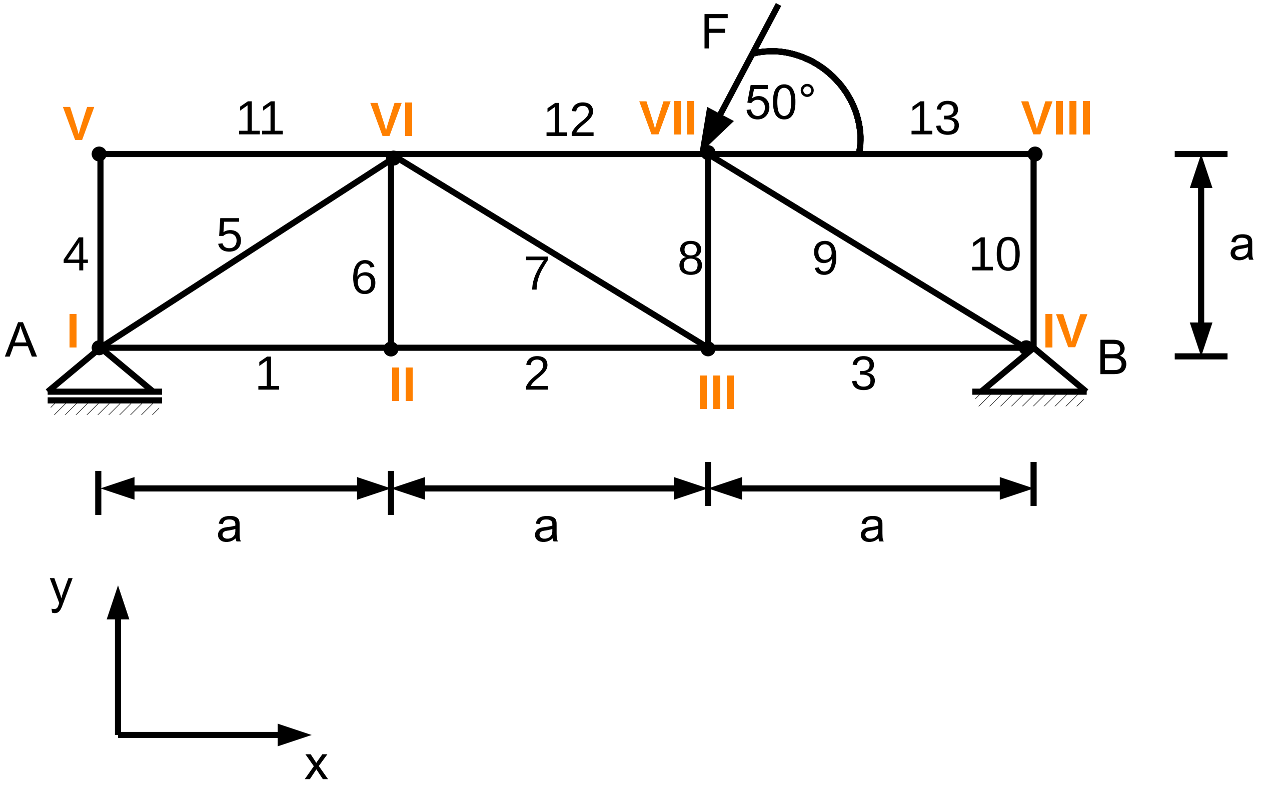


Es gilt: a = 2m, F = 20 kN

Knotenpunktverfahren: Statische Bestimmtheit

Knoten und Stäbe nummerieren!

Knoten mit römischen Zahlen!



Knotenpunktverfahren: Abzählformel

Abzählformel:

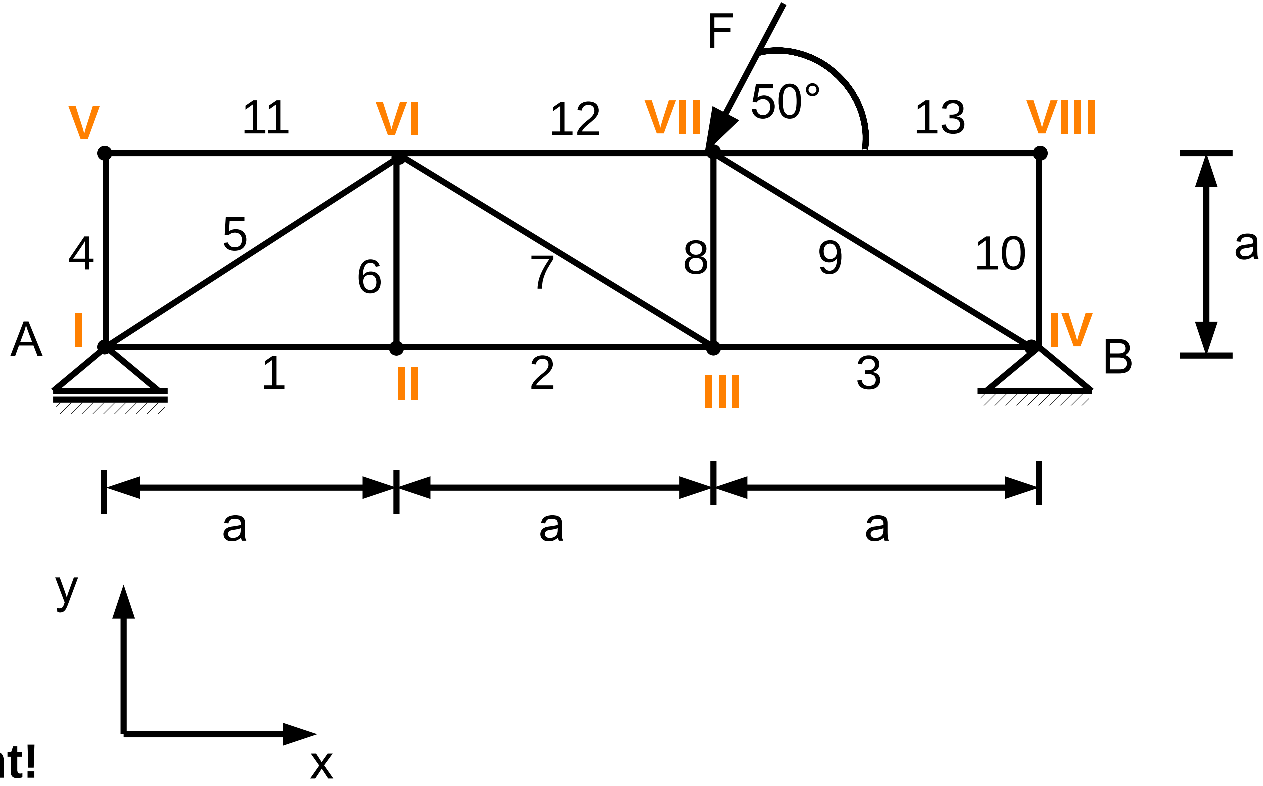
$$f = a + s - 2k$$

Für das gegebene Fachwerk:

$$f = 3 + 13 - 2 \cdot 8$$

$$f = 16 - 16 = 0$$

Das Fachwerk ist statisch bestimmt!

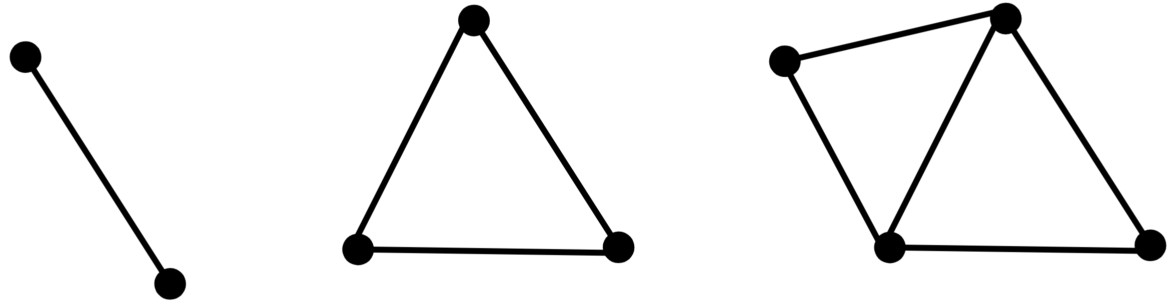


Knotenpunktverfahren:
1. Bildungsgesetz

$s = 1$
$k = 2$

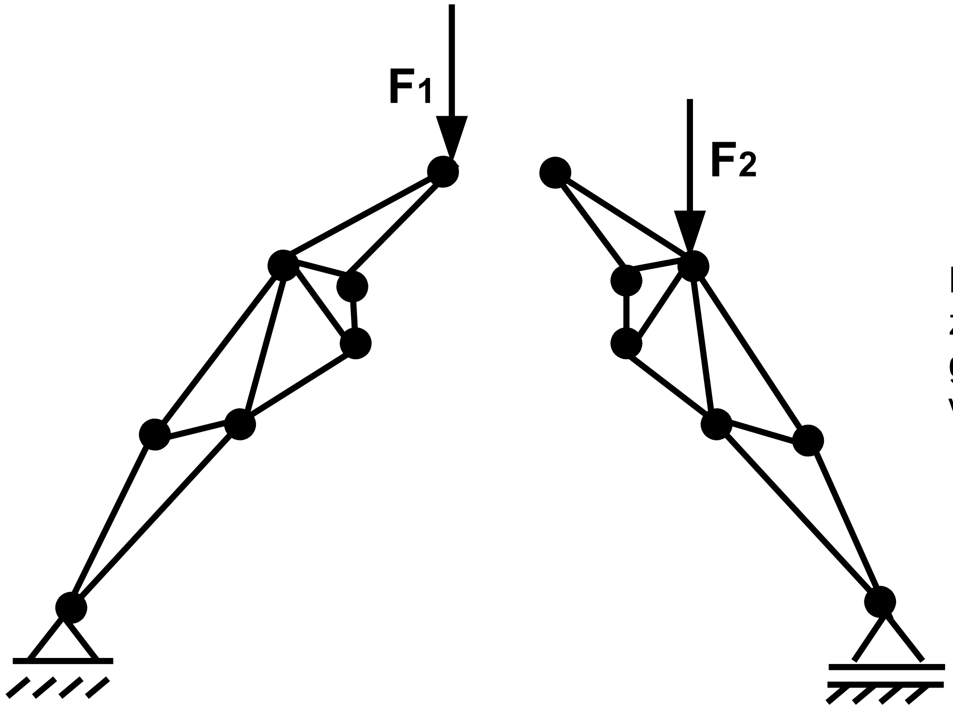
$s = 3$
$k = 3$

$s = 5$
$k = 4$

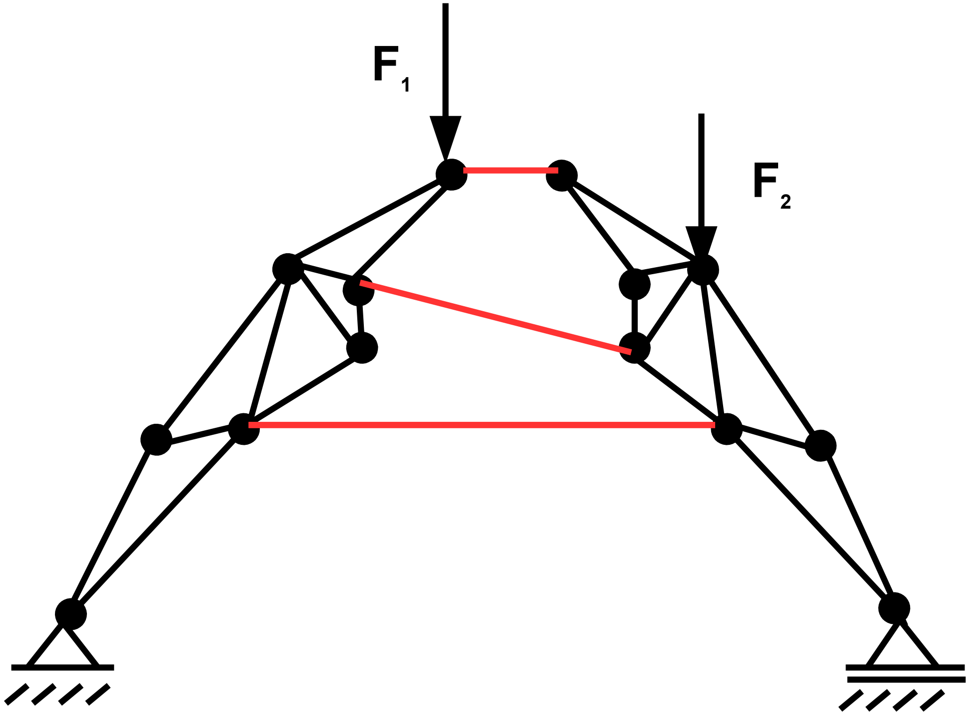


Ausgehend von einem Einzelstab wird ein neuer Knoten durch zwei Stäbe so angeschlossen, dass ein Dreieck entsteht. Dies kann beliebig fortgesetzt werden, solange die zwei neuen Stäbe nicht auf einer Geraden liegen.

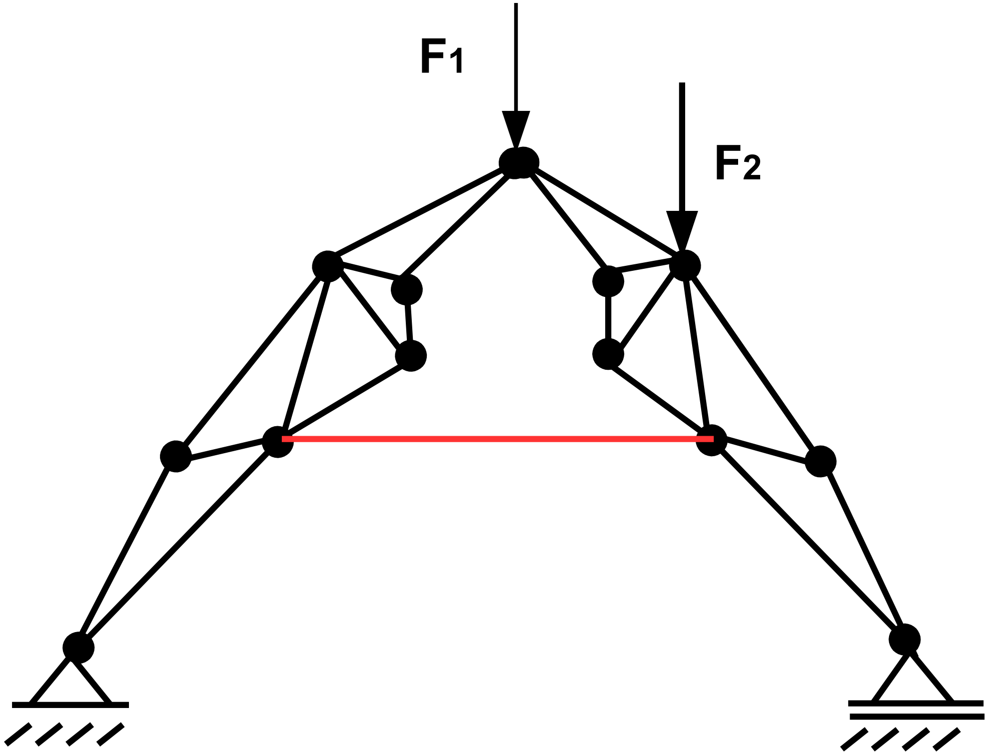
Knotenpunktverfahren: 2. Bildungsgesetz



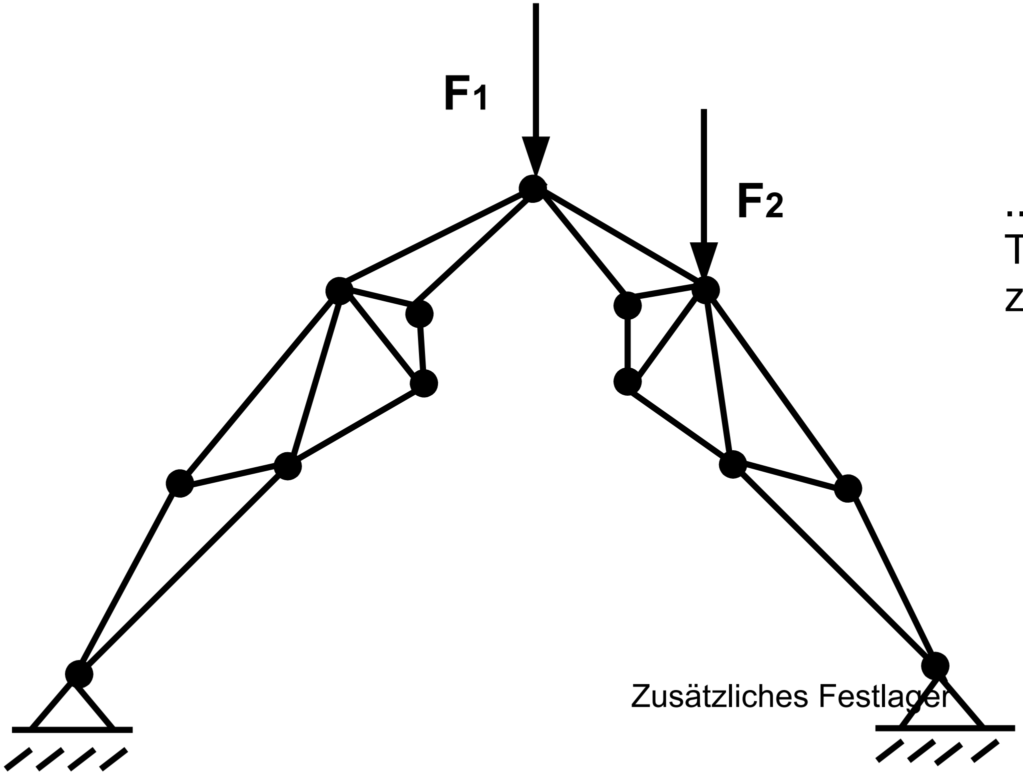
Bei diesem Bildungsgesetz werden zwei nach dem 1. Bildungsgesetz gebildete Fachwerke miteinander verbunden, durch...



...drei Stäbe, welche *nicht alle parallel* zueinander sind und sich in **keinem** Punkt schneiden.

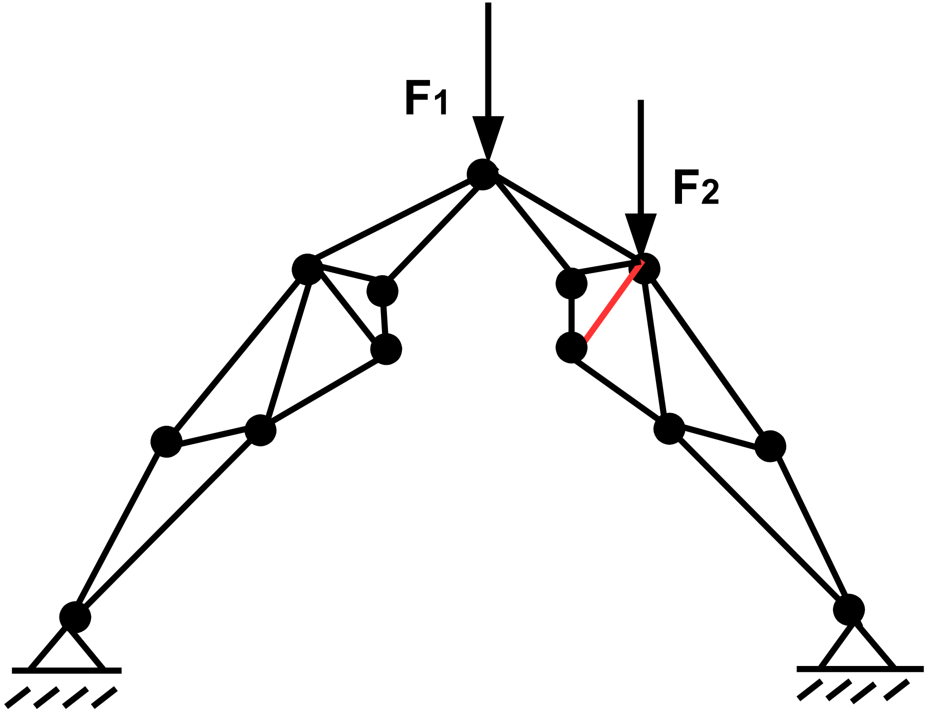


...einen *gemeinsamen* Knoten der beiden Teilfachwerke und einen Stab.

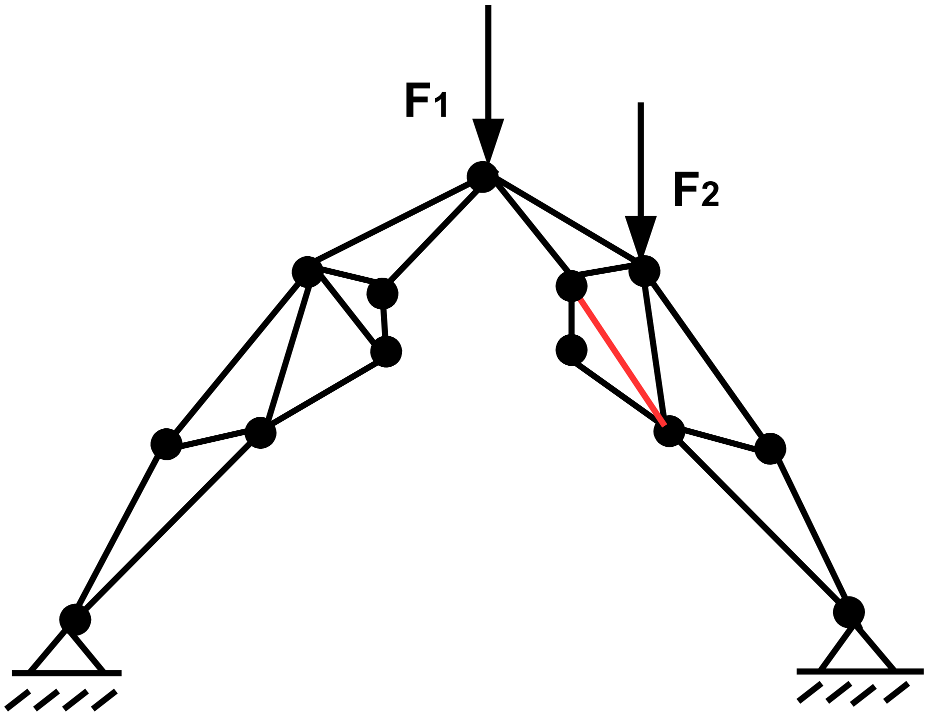


...einen *gemeinsamen* Knoten der beiden Teilfachwerke und Anbringung eines zusätzlichen Festlagers.

Knotenpunktverfahren:
3. Bildungsgesetz



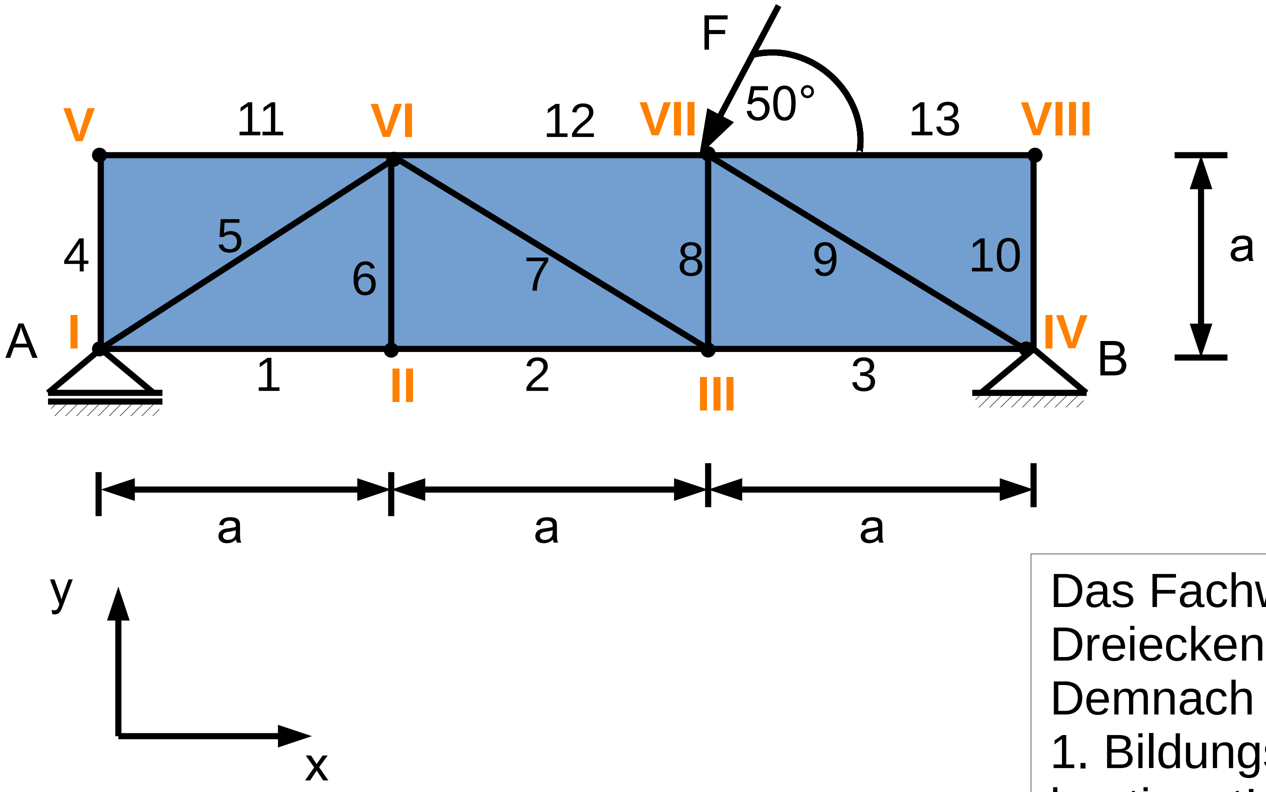
Wird aus einem Fachwerk, welches nach dem 1. oder 2. Bildungsgesetz aufgebaut ist, ein Stab so entfernt, dass das Fachwerk beweglich wird,...



...dann muss an einer anderen Stelle der Stab so eingefügt werden, dass das Fachwerk wieder starr wird.

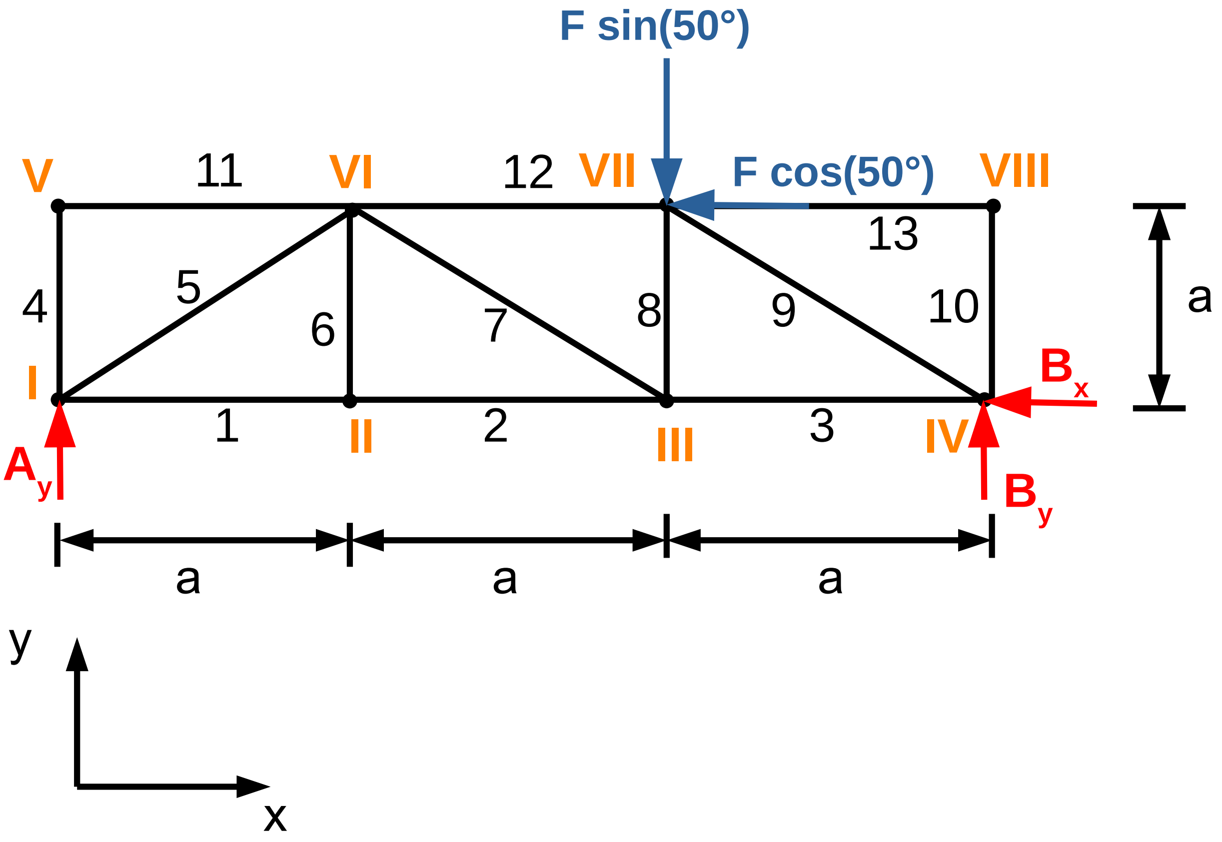
Anwendung des Bildungsgesetzes

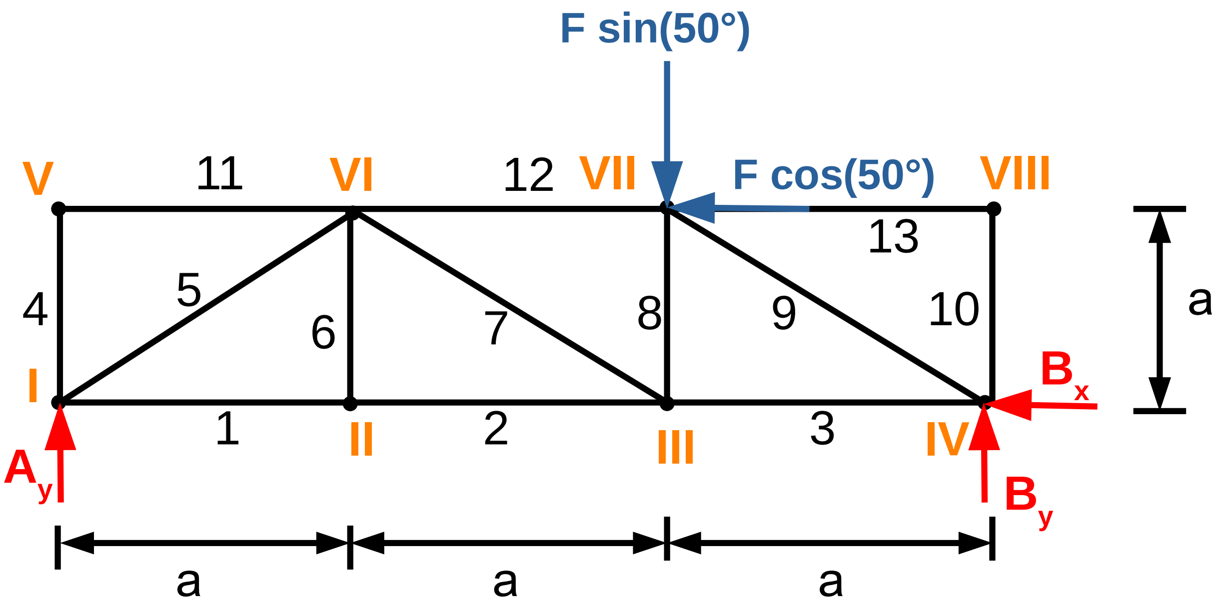
ingenieurkurse.de
Interaktive Online-Kurse



Das Fachwerk besteht aus Dreiecken (blau markiert). Demnach ist dieses nach dem 1. Bildungsgesetz statisch bestimmt!

Lagerkräfte bestimmen





Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: -B_x - F\cos(50°) = 0$$

$$B_x = -F\cos(50°)$$

$$\boxed{B_x = -12{,}86\,\mathrm{kN}}$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: A_y + B_y - F\sin(50°) = 0$$

$$B_y = F\sin(50°) - A_y$$

$$\boxed{B_y = 5{,}93\,\mathrm{kN}}$$

Momentengleichgewichtsbedingung um B:

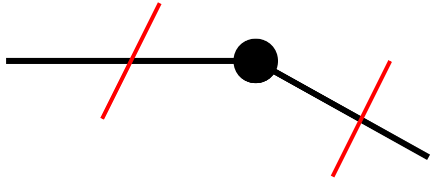
$$-A_y \cdot 3a + F\sin(50°) \cdot a + F\cos(50°) \cdot a = 0$$

$$A_y = \frac{1}{3} F\sin(50°) + \frac{1}{3} F\cos(50°)$$

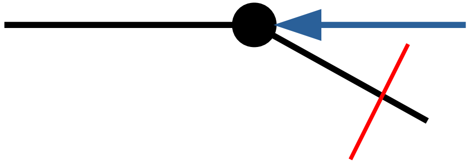
$$\boxed{A_y = 9{,}39\,\mathrm{kN}}$$

Nullstäbe

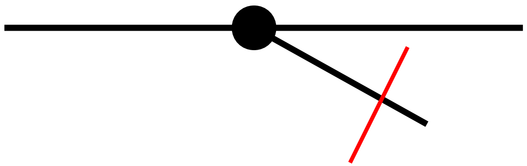
Regel 1: An einem **unbelasteten** Knoten sind nur **zwei** Stäbe angeschlossen, die nicht in die gleiche Richtung zeigen. -> Beide Stäbe sind Nullstäbe.



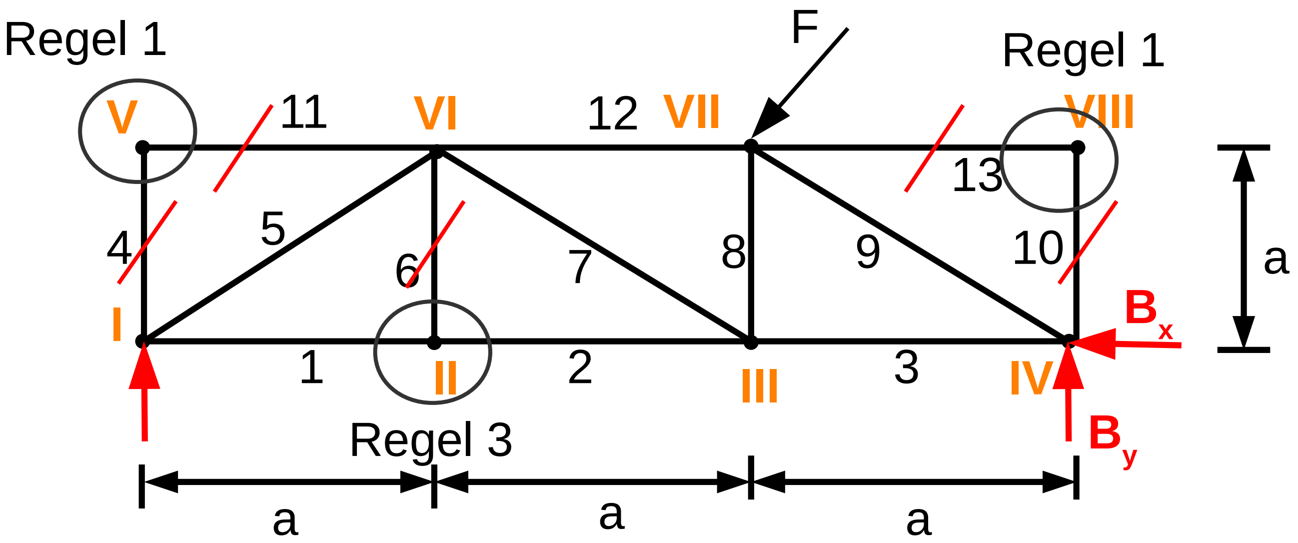
Regel 2: An einem **belasteten** Knoten sind nur **zwei** Stäbe angeschlossen und die äußere **resultierende Kraft** greift in Richtung des einen Stabes an, so ist der andere Stab ein Nullstab.

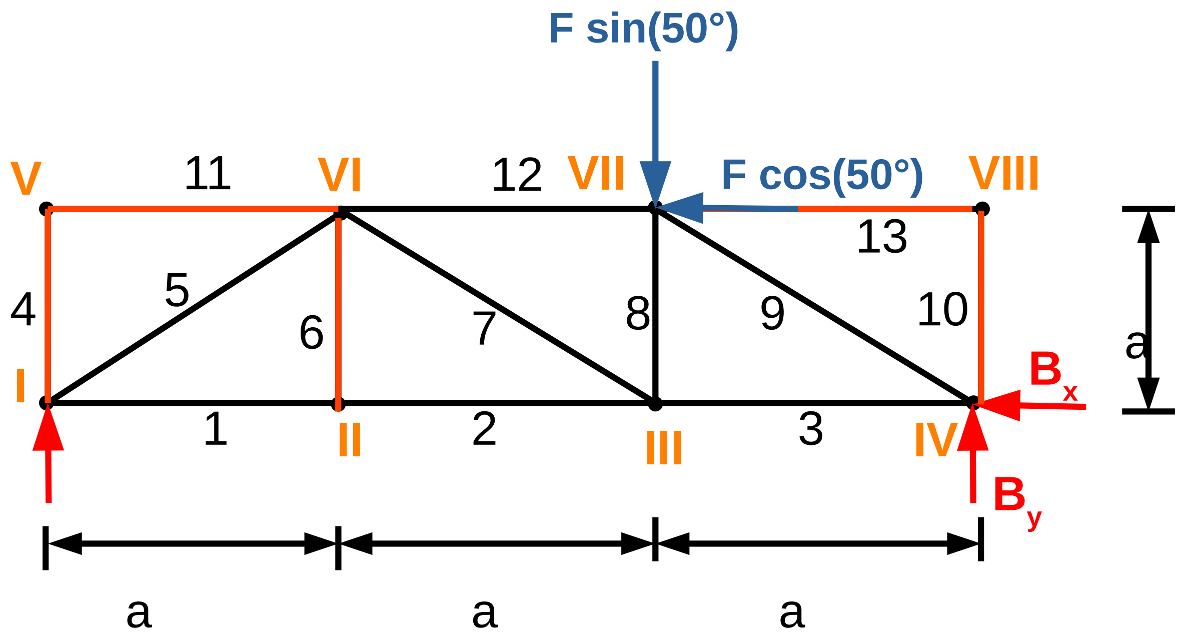


Regel 3: An einem **unbelasteten** Knoten sind **drei** Stäbe angeschlossen, von denen zwei in gleicher Richtung liegen, so ist der dritte Stab ein Nullstab.



Nullstäbe bestimmen





Orangene Stäbe = Nullstäbe!

Nullstäbe sind Stäbe, die keine Kräfte aufnehmen. Für diese Stabkräfte gilt S = 0! Wir müssen die Nullstäbe also nicht mehr berechnen!

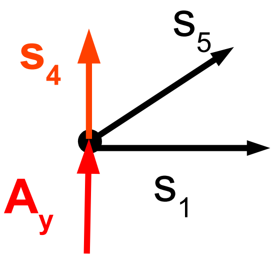
Stabkräfte mittels Knotenpunktverfahren

Für das Knotenpunktverfahren wird jeder Knoten freigeschnitten und die beiden Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der unbekannten Stäbkräfte angewandt.

→ Freischneiden von Knoten mit nicht mehr als zwei unbekannten Stabkräften!

Knoten I

ingenieurkurse.de
Interaktive Online-Kurse



$$\uparrow: A_y + S_5 \sin(45°) = 0$$

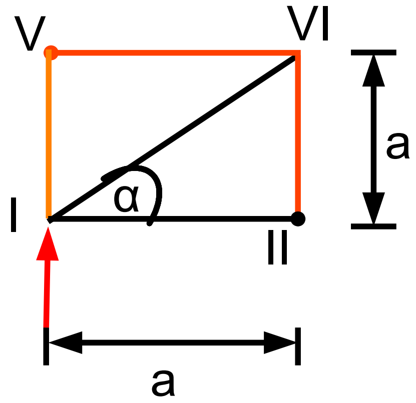
$$S_5 = -A_y \cdot \sin(45°) = -13{,}28\,\text{kN}$$

$$\boxed{\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\rightarrow: S_1 + S_5 \cos(45°) = 0$$

$$S_1 = -S_5 \cos(45°) = 9{,}39\,\text{kN}$$

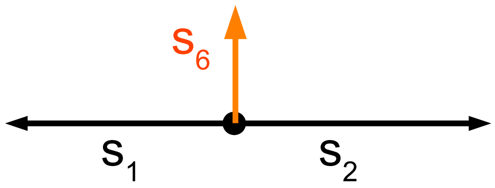
Trigonometrie:



$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{a}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a}{a}\right) = 45°$$

Knoten 2

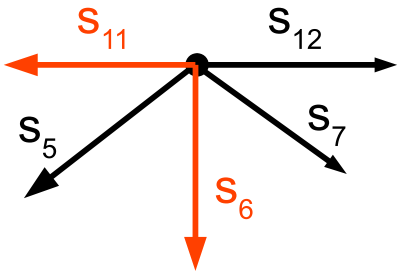


Berechnung von S_2:

$$\rightarrow: -S_1 + S_2 = 0$$

$$S_2 = S_1 = 9{,}39\,\mathrm{kN}$$

Knoten 6



$\uparrow: -S_5 \sin(45°) - S_7 \sin(45°) = 0$

$S_7 = -S_5 = -(-13{,}28\,\text{kN}) = 13{,}28\,\text{kN}$

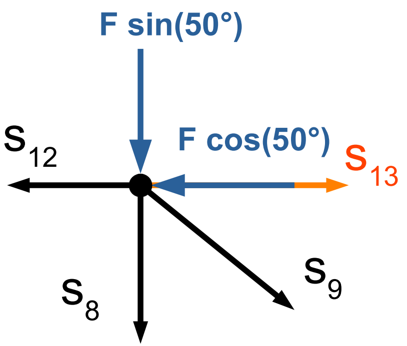
$\rightarrow: S_{12} - S_5 \cos(45°) + S_7 \cos(45°) = 0$

$S_{12} = S_5 \cos(45°) - S_7 \cos(45°)$

$S_{12} = -13{,}28\,\text{kN} \cos(45°) - 13{,}28\,\text{kN} \cos(45°) = -18{,}78\,\text{kN}$

S_7 und S_{12} sind unbekannt!

Knoten 7



S_8 und S_9 sind unbekannt!

$$\rightarrow: -S_{12} - F\cos(50°) + S_9\cos(45°) = 0$$

$$S_9 = \frac{S_{12} + F\cos(50°)}{\cos(45°)}$$

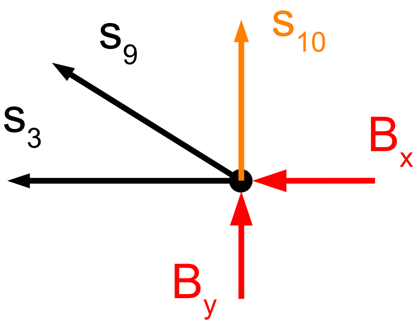
$$S_9 = \frac{-18{,}78\,\text{kN} + 20\,\text{kN}\cos(50°)}{\cos(45°)} = -8{,}38\,\text{kN}$$

$$\uparrow: -S_8 - F\sin(50°) - S_9\sin(45°) = 0$$

$$S_8 = -F\sin(50°) - S_9\sin(45°)$$

$$S_8 = -20\,\text{kN}\sin(50°) - (-8{,}38\,\text{kN})\sin(45°) = 9{,}40\,\text{kN}$$

Knoten 4



$$\rightarrow: -S_3 - B_x - S_9 \cos(45°) = 0$$

$$S_3 = -B_x - S_9 \cos(45°)$$

$$S_3 = -(-12{,}86\ \mathrm{kN}) - (-8{,}38\ \mathrm{kN})\cos(45°) = 18{,}79\ \mathrm{kN}$$

S_3 ist unbekannt!

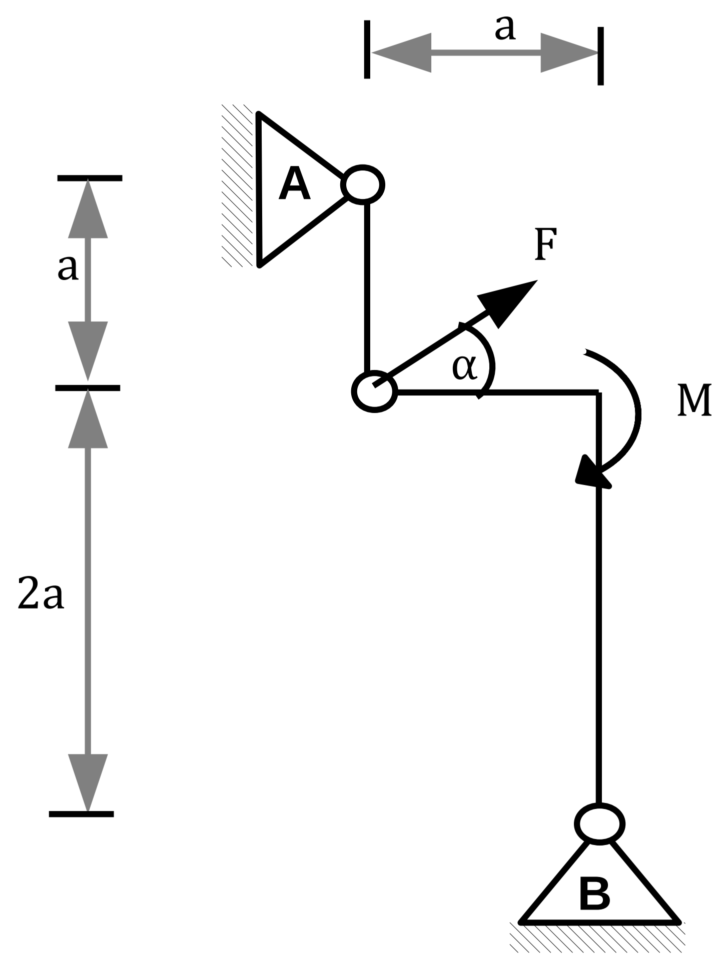
Übersicht: Stabkräfte

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13
9,39	9,39	18,79	0	-13,28	0	13,28	9,40	-8,38	0	0	-18,78	0

Positiv: Zugkräfte

Negativ: Druckkräfte

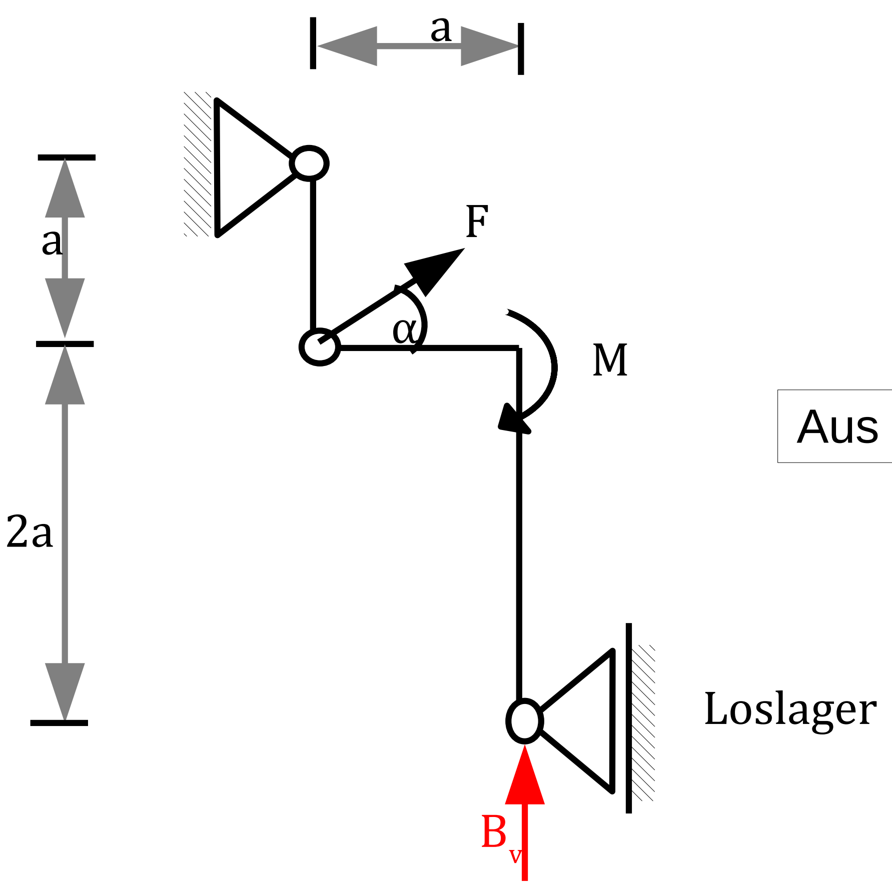
Prinzip der virtuellen Arbeit



Gesucht: vertikale Lagerkraft B_v

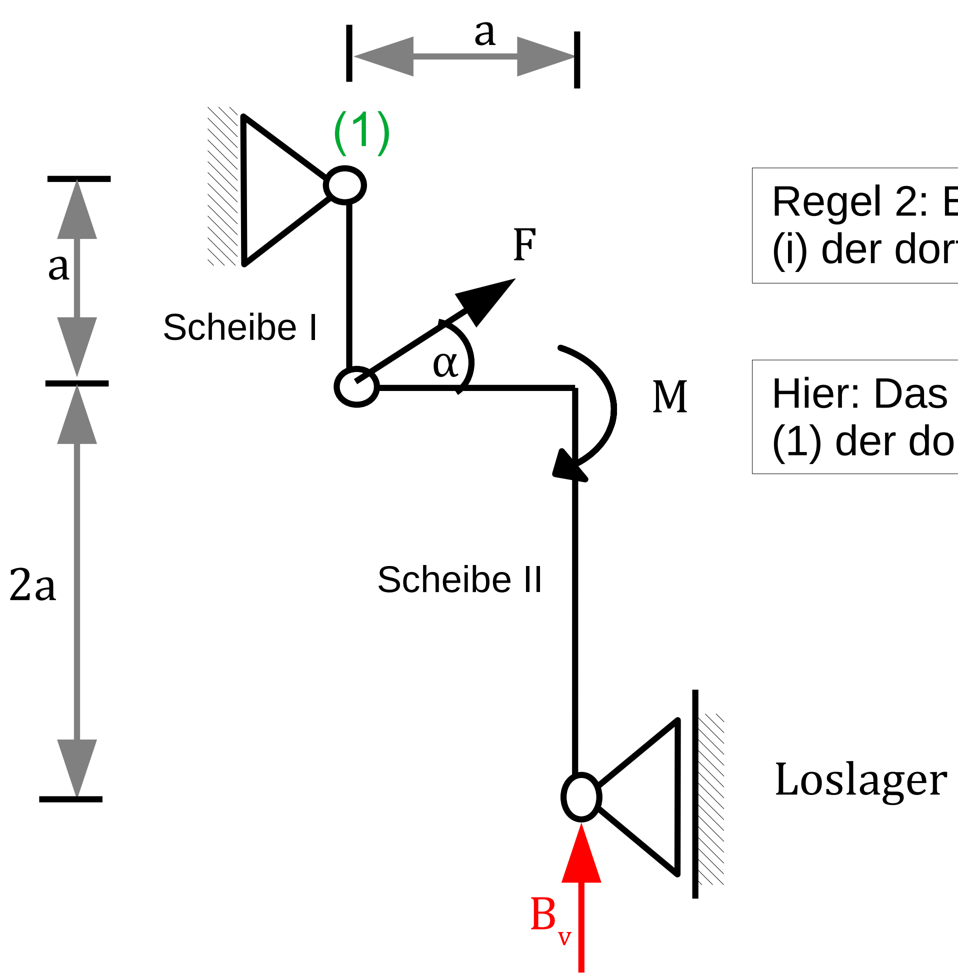
Gegeben: F, M = Fa, α = 35°

Gesuchte Kraft als äußere Kraft anbringen



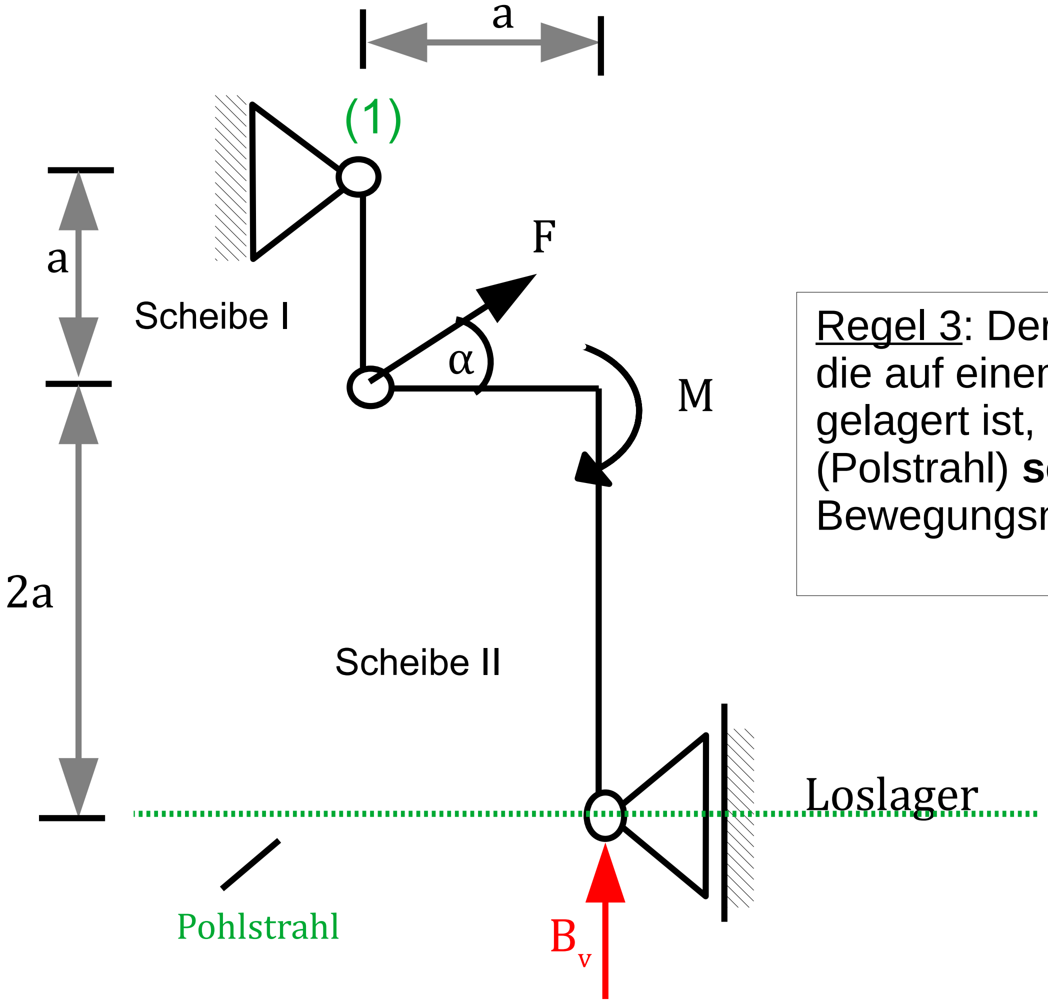
Aus Festlager wird Loslager!

Polplan anwenden



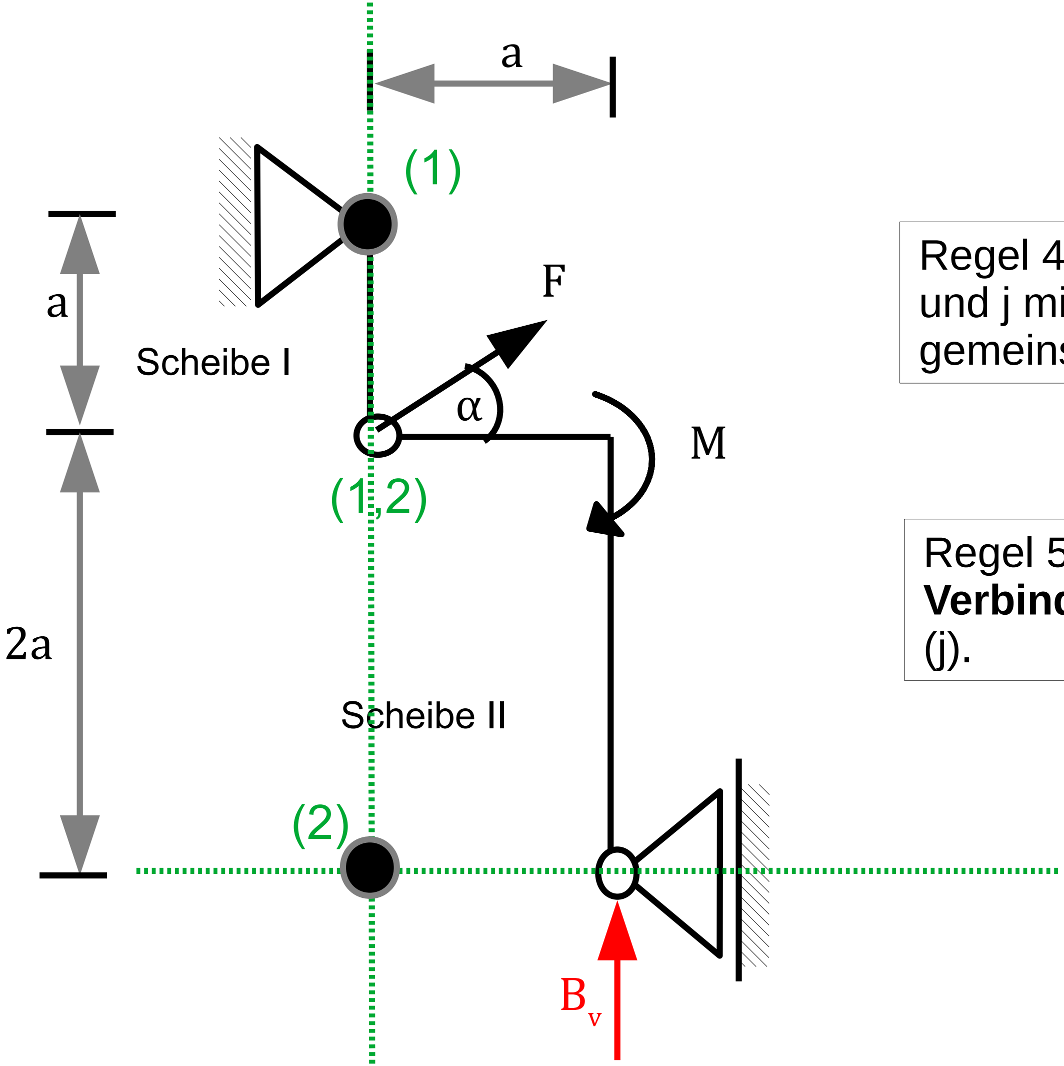
Regel 2: Ein **Festlager** ist der **Hauptpol** (i) der dort angeschlossenen Scheibe.

Hier: Das **Festlager** A ist der **Hauptpol** (1) der dort angeschlossenen Scheibe I.



<u>Regel 3</u>: Der **Hauptpol (i)** einer Scheibe, die auf einem **verschieblichen Lager** gelagert ist, liegt auf einer Geraden (Polstrahl) **senkrecht** zur Bewegungsmöglichkeit dieses Lagers.

Hauptpol (2) liegt irgendwo auf dem Polstrahl



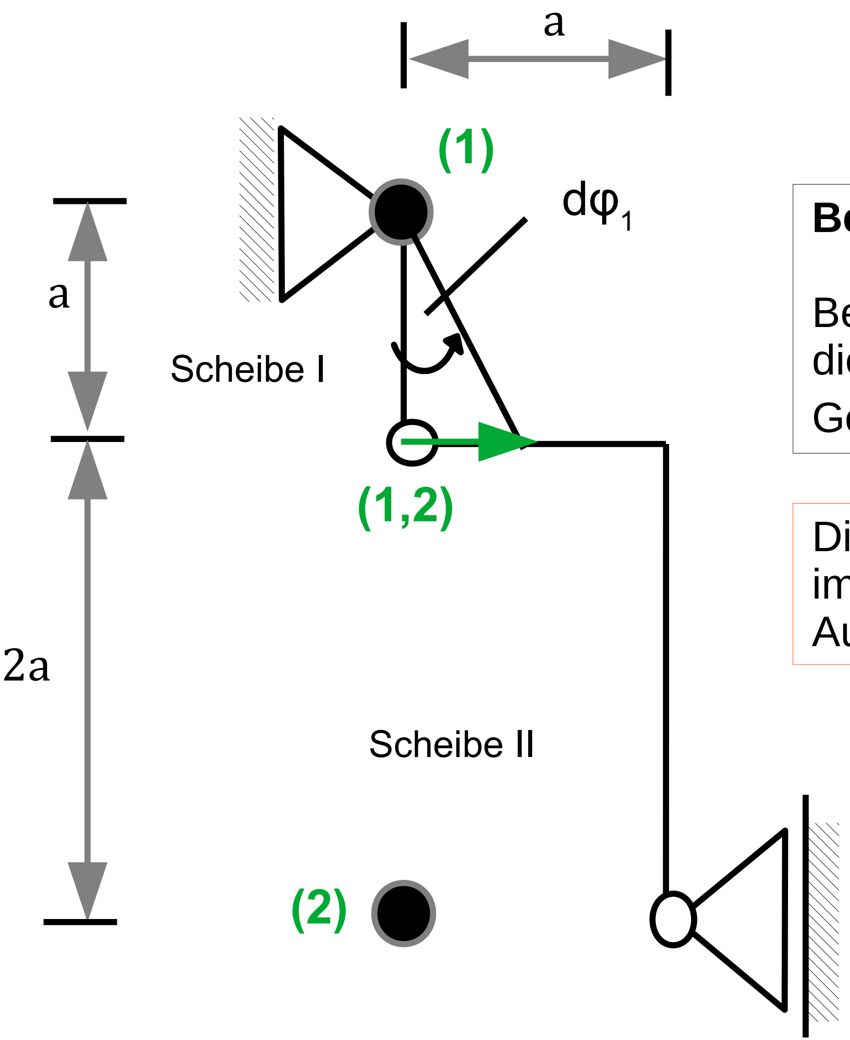
Regel 4: Das **Gelenk**, welches zwei Scheiben i und j miteinander verbindet, ist deren gemeinsamer **Nebenpol (i,j).**

Regel 5: Der Nebenpol (i,j) liegt stets auf der **Verbindungslinie** der beiden Hauptpole (i) und (j).

Alle Pole gefunden

Da alle Hauptpole und Nebenpole gefunden wurden, ist das System **kinematisch,** also verschieblich. Die Voraussetzung für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit ist damit gegeben.

Verschiebungsfigur zeichnen



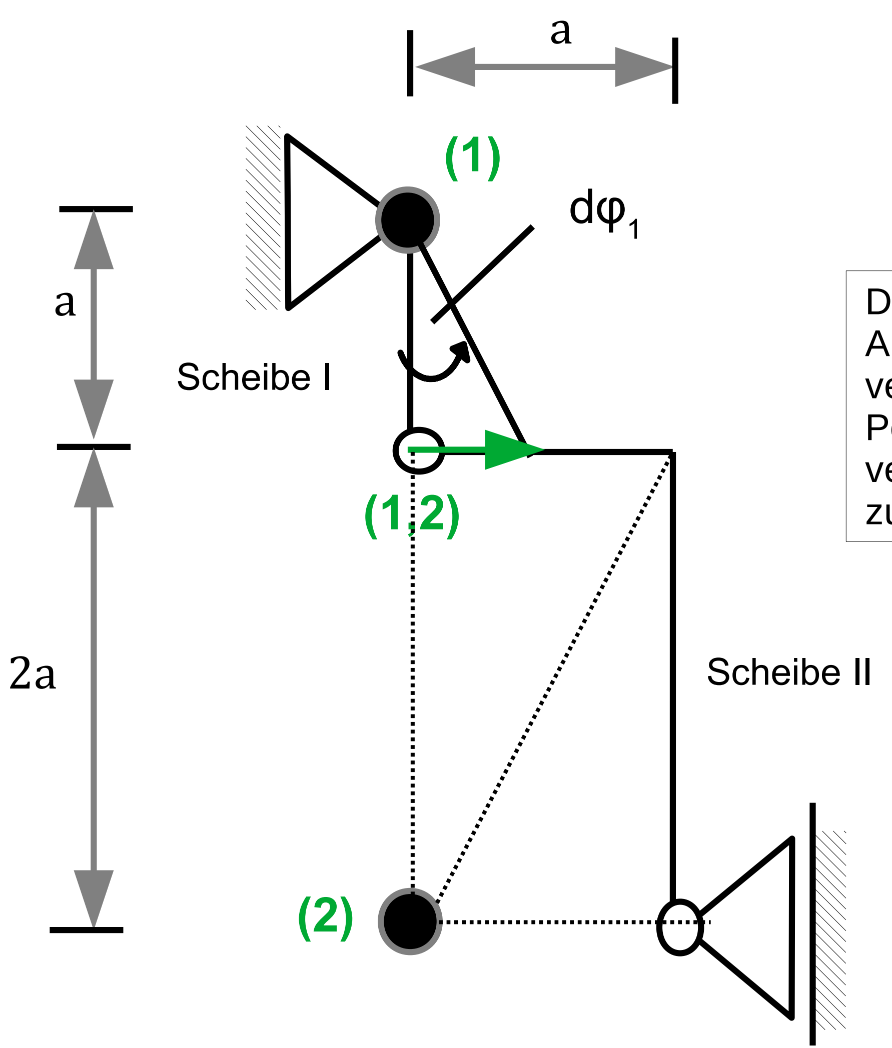
Beliebige Drehung um einen der Hauptpole:

Betrachten wir den Hauptpol (1) und legen die Drehung um den Hauptpol (1) um $d\varphi_1$ im Gegenuhrzeigersinn fest.

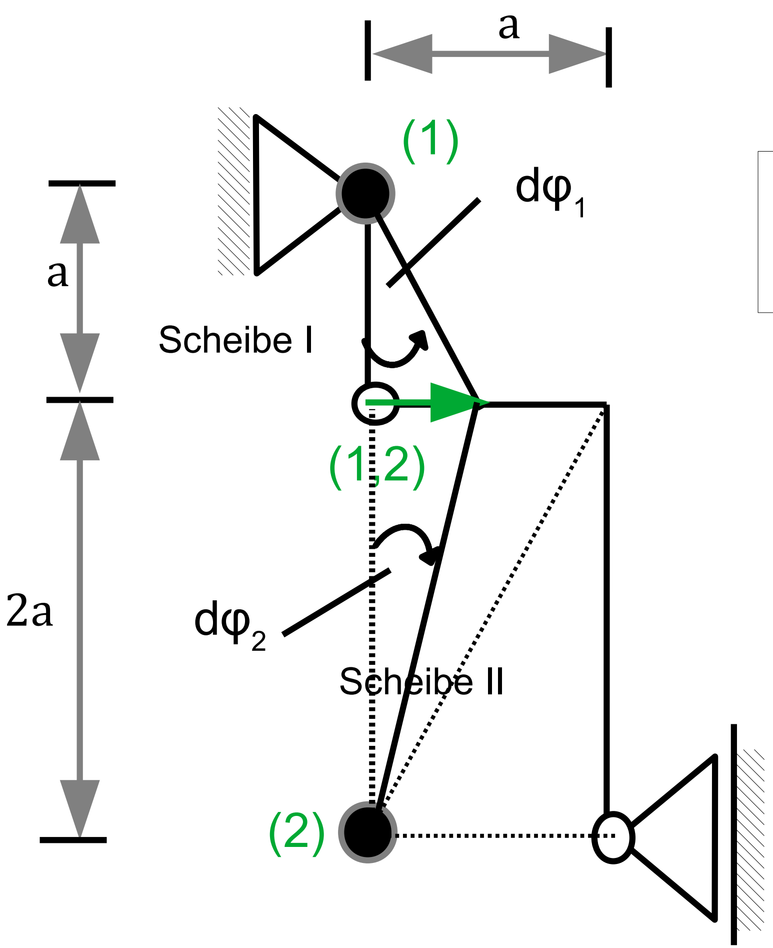
Die Verschiebung des Stabendes erfolgt immer **senkrecht** zur Stabachse bzw. zur Ausgangsverbindung!!!

Danach alle Knoten (Biegesteifeecken, Gelenke, Auflagerknoten) von den Polen ausgehend verbinden. Dabei dürfen von Pol (1) ausgehend zur Knoten auf Scheibe I verbunden werden und von Pol (2) ausgehend zur Knoten auf Scheibe II.

Verschiebungsfigur zeichnen

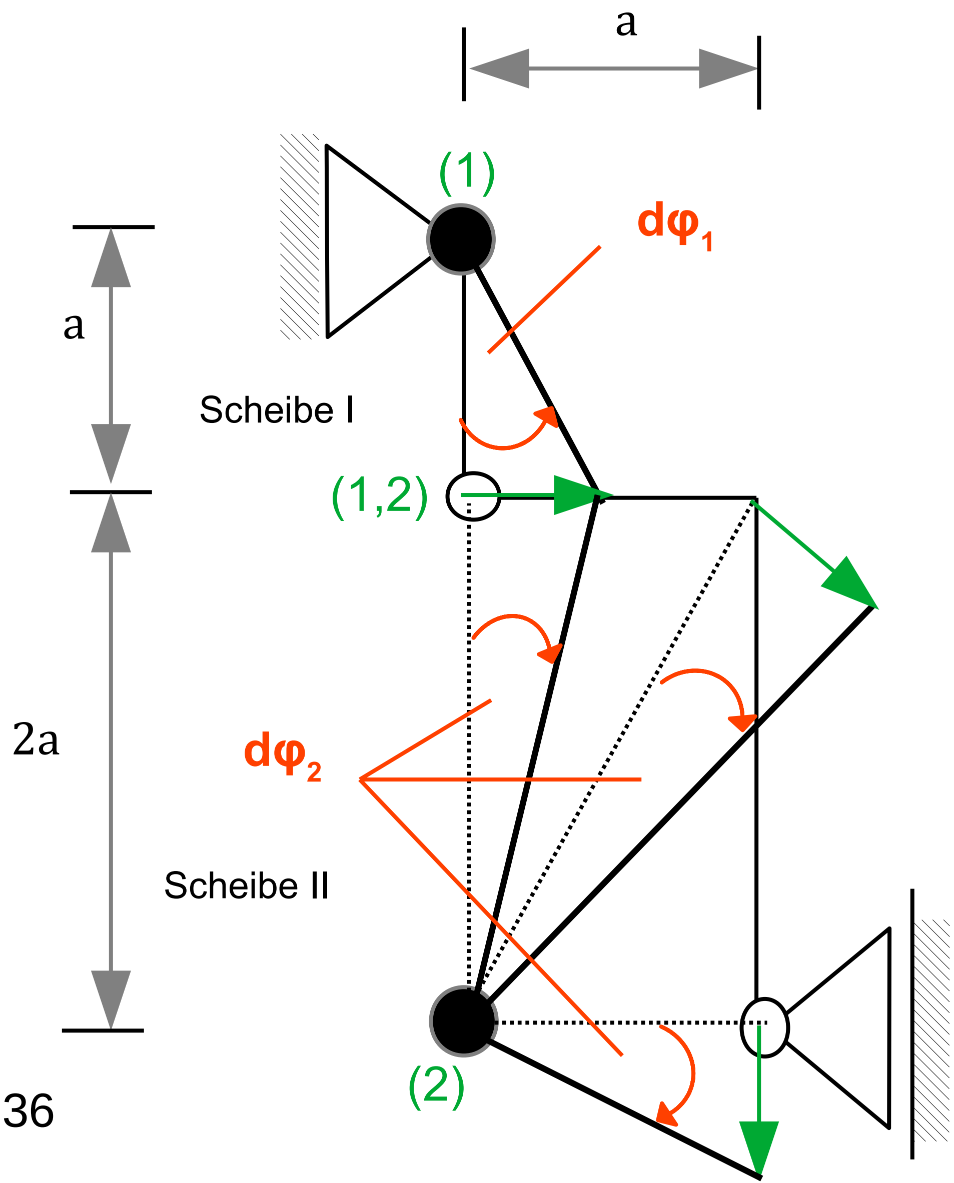


Danach alle Knoten (Biegesteifeecken, Gelenke, Auflagerknoten) von den Polen ausgehend verbinden (gestrichelte Linien). Dabei dürfen von Pol (1) ausgehend zur Knoten auf Scheibe I verbunden werden und von Pol (2) ausgehend zur Knoten auf Scheibe II.



Da Gelenk (1,2) auch den Hauptpol (2) betrifft, betrachten wir in einem nächsten Schritt, welche Drehung der Stab II um den Hauptpol (2) erfährt!

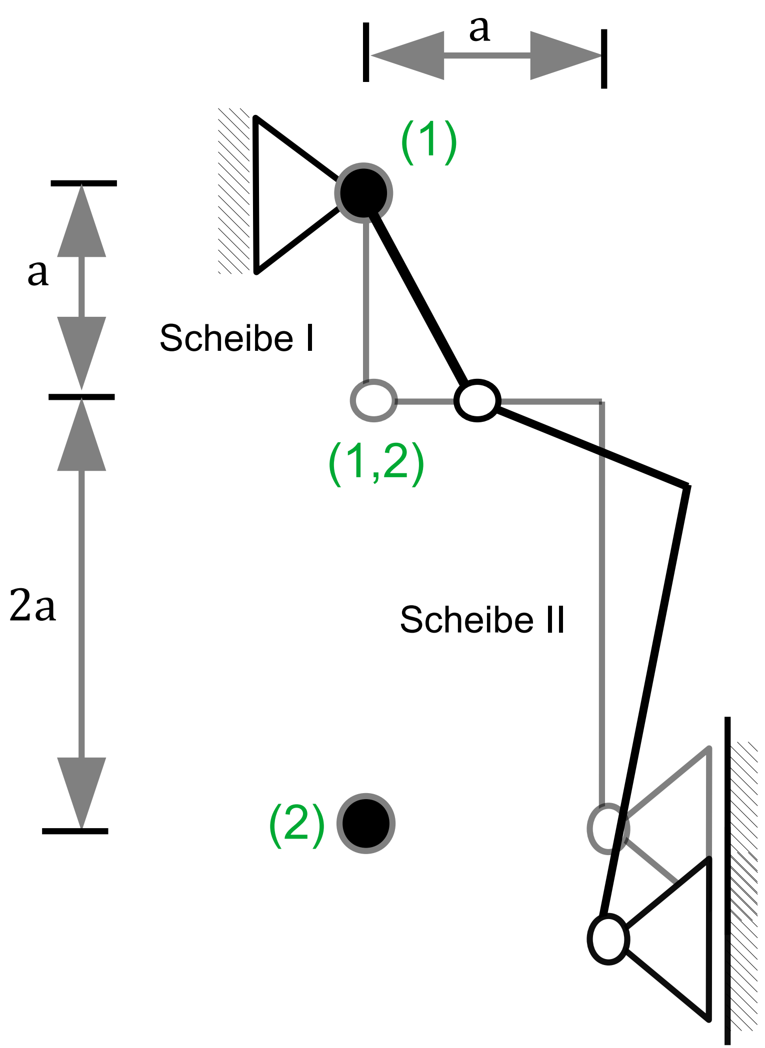
Der Stab II dreht sich IM Uhrzeigersinn um den Hauptpol (2) um $d\varphi_2$.



Nachdem die Drehung um die beiden Hauptpole festliegt, werden alle weiteren Knoten betrachtet (Gelenke, biegesteife Ecken, Auflager etc).

An Scheibe I sind keine Knoten mehr ausgehend vom Pol (1) gegeben. An Scheibe II wird nun die Verschiebung der Knoten ausgehend von Pol (2) betrachtet.

Verschiebungsfigur



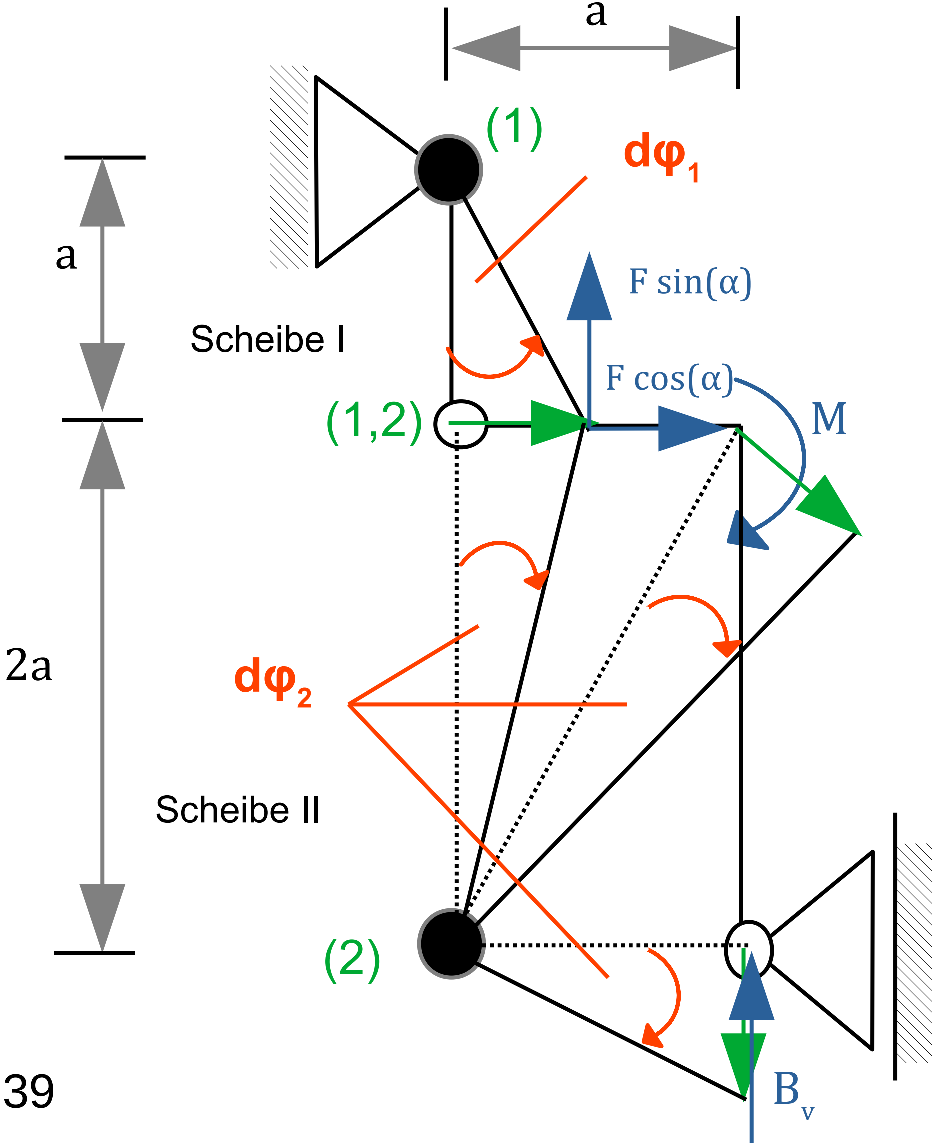
Die Verbindung der neuen Punkte führt zur **Verschiebungsfigur**.

Arbeitssatz anwenden

$$dW = \sum F_i \cdot da_i + \sum M_i \cdot d\varphi = 0$$

Der Arbeitssatz geht hier von sehr kleinen Verschiebungen aus. Da im tatsächlichen System keine Verschiebung vorhanden ist, muss die virtuelle Arbeit = Null sein.

Die Summe aus Kraft und Verschiebung wird positiv, wenn die Kraft F_i mit der Verschiebung da_i wirkt und negativ, wenn sie entgegen der Verschiebung wirkt. Dasselbe gilt auch für die äußeren Momente.



ingenieurkurse.de
Interaktive Online-Kurse

Alle äußeren Kräfte und Momente sind blau eingezeichnet!

Ziel: Verschiebung der äußeren Kräfte und Verdrehung der äußeren Momente bestimmen!

Verschiebung bestimmen: da = dφ * l

Verschiebung Kraft F am Gelenk:

$$da_F = d\varphi_1 \cdot a$$

$$da_F = d\varphi_2 \cdot 2a$$

Verschiebung Kraft B am Lager B:

$$da_B = -d\varphi_2 \cdot a$$

Moment dreht mit $d\varphi_2$.

Arbeit

Wichtig: Eine Kraft verrichtet Arbeit nur dann, wenn Weg und Kraft auf derselben Wirkungslinie liegen. Demnach leistet eine horizontale Kraft auch nur auf einem horizontalen Weg Arbeit. In unserem Beispiel leistet also auf dem horizontalen Weg des Gelenks nur der horizontale Kraftanteil $F \cos(\alpha)$ Arbeit. Da beide gleichgerichtet sind (nach rechts zeigen) ist die Arbeit positiv.

Arbeitssatz anwenden:

$$dW = \sum F_i \cdot da_i + \sum M_i \cdot d\varphi = 0$$

$$dW = F\cos(\alpha) \cdot da_F + B_v \cdot da_B + M \cdot d\varphi_2 = 0$$

$$dW = F\cos(\alpha) \cdot d\varphi_2 \cdot 2a - B_v \cdot d\varphi_2 \cdot a + M \cdot d\varphi_2 = 0$$

Einsetzen von $da_F = d\varphi_2 \cdot 2a$

$da_B = -d\varphi_2 \cdot a$

Auflösen nach B_v:

$$B_v \cdot a \cdot d\varphi_2 = F\cos(\alpha) \cdot d\varphi_2 \cdot 2a + M \cdot d\varphi_2$$

Kann direkt aufgelöst werden, da alle Winkel von $d\varphi_2$ abhängen.

$$B_v = 2 \cdot F\cos(\alpha) + \frac{M}{a}$$

M = Fa, α = 35°

$$B_v = 2 \cdot F\cos(35°) + F$$

$$\boxed{B_v = 2{,}638\,F}$$

Alternativ Abhängigkeit von $d\varphi_1$:

$$dW = \sum F_i \cdot da_i + \sum M_i \cdot d\varphi = 0$$

$$dW = F\cos(\alpha) \cdot da_F + B_v \cdot da_B + M \cdot d\varphi_2 = 0$$

$$dW = F\cos(\alpha) \cdot d\varphi_1 \cdot a - B_v \cdot d\varphi_2 \cdot a + M \cdot d\varphi_2 = 0$$

Einsetzen von $da_F = d\varphi_1 \cdot a$

In Abhängigkeit von $d\varphi_1$:

$$d\varphi_1 \cdot a = d\varphi_2 \cdot 2a$$

$$d\varphi_2 = \frac{1}{2} d\varphi_1$$

$$dW = F\cos(\alpha) \cdot d\varphi_1 \cdot a - B_v \cdot \frac{1}{2} d\varphi_1 \cdot a + M \cdot \frac{1}{2} d\varphi_1 = 0$$

$$B_v \cdot \frac{1}{2} d\varphi_1 \cdot a = F\cos(\alpha) \cdot d\varphi_1 \cdot a + M \cdot \frac{1}{2} d\varphi_1$$

$$B_v = 2 \cdot F\cos(\alpha) + \frac{M}{a}$$