Höhere Mathematik 1 – Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit

Zwei Vektoren im R²

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten zunächst die lineare Abhängigkeit von **zwei Vektoren**.

Ein Vektor ist von einem anderen linear abhängig, wenn sich dieser als Linearkombination des anderen Vektors darstellen lässt.

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 1 = \lambda \cdot 2 \\ 6 = \lambda \cdot 1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = 6 \end{matrix} \quad \rightarrow \text{ linear unabhängig}$$

$$\vec{a} = \lambda \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 1 = \lambda \cdot 6 \\ 6 = \lambda \cdot 3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda = \frac{1}{6} \\ \lambda = 2 \end{matrix} \quad \rightarrow \text{ linear unabhängig}$$

$$\vec{b} = \lambda \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 2 = \lambda \cdot 6 \\ 1 = \lambda \cdot 3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda = \frac{1}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{matrix} \quad \rightarrow \text{ linear abhängig}$$

Der Vektor $\vec{b}$ ist demnach von Vektor $\vec{c}$ linear abhängig und umgekehrt. Beide Vektoren liegen parallel zueinander. Multipliziert man nun $\lambda = 1/3$ mit dem Vektor $\vec{c}$ so erhält man Vektor $\vec{b}$.

Grafisch: Zwei Vektoren im R² sind linear voneinander abhängig, wenn diese parallel zueinander liegen.

Einheitsvektoren im R²

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_x = \lambda \, \vec{e}_y$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 1 = \lambda \cdot 0 \\ 0 = \lambda \cdot 1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 0 \\ \lambda = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \text{ linear unabhängig}$$

Alternative Berechnung kann über die Determinante erfolgen. Diese gilt nur für nxn-Matrizen. Für zwei Vektoren im R² kann also die Determinante berechnet werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = a_1 \, b_2 - b_1 \, a_2$$

Wir fassen also zwei Vektoren zu einer Matrix zusammen (jeder Vektor in eine Zeile) und können die Determinante nach der obigen Formel berechnen (gilt nur für eine 2X2-Matrix).

Ist die Determinante ungleich Null, so sind beide Vektoren voneinander unabhängig. Ist die Determinante also gleich Null sind beide Vektoren voneinander abhängig.

Wir zeigen dies anhand der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 6 = -11$$

Es resultiert ein Wert ungleich Null, damit sind beide Vektoren voneinander abhängig.

Betrachten wir nun die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$$

Die Determinante nimmt den Wert Null an, damit sind beide Vektoren voneinander abhängig.

Eine weitere Berechnungsmöglichkeit geht über die Definition:

Zwei Vektoren sind voneinander abhängig, wenn sie sich als Linearkombination des Nullvektors darstellen lassen.

Wir betrachten hier wieder die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$$

Nehmen beide λ den Wert Null an, so sind die Vektoren voneinander unabhängig.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

$$(1)\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$(2)6\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Wir können nun die 1. Gleichung nach einem λ auflösen und in die 2.Gleichung einsetzen:

$(1)\lambda_1 = -2\lambda_2$ einsetzen in (2)

$(2)6(-2\lambda_2) + \lambda_2 = 0$ nach λ_2 auflösen

$$\lambda_2 = 0$$

Einsetzen in eine der obigen Gleichungen:

$$(1)\lambda_1 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

Beide λ nehmen den Wert Null an. Damit sind die beiden Vektoren voneinander unabhängig.

Für <u>zwei Vektoren im R²</u> reicht es aus eine der obigen Berechnungen zu kennen, um diese auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit zu prüfen.