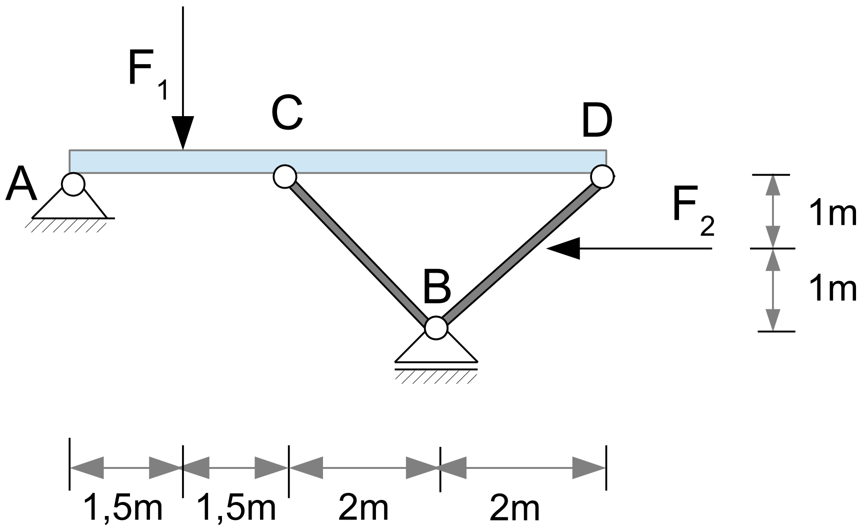
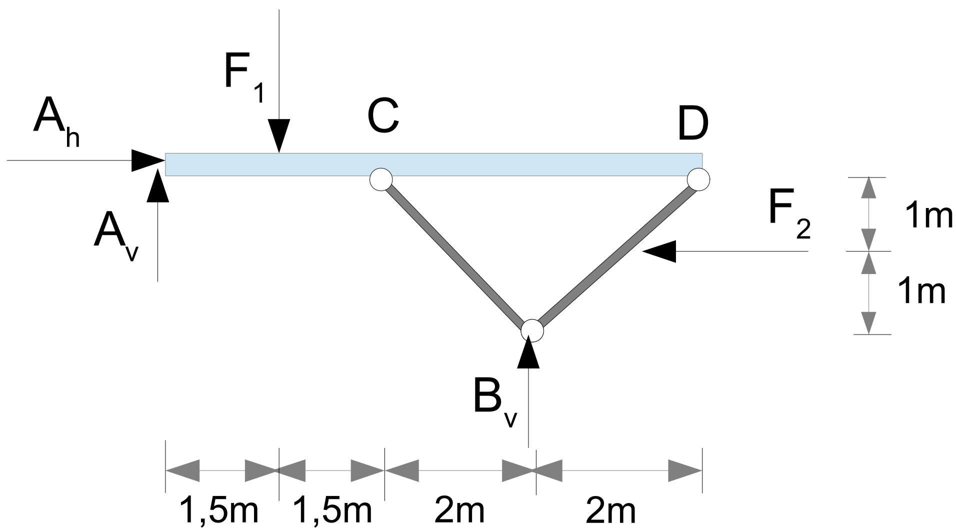
Aufgabe 2: Lagerreaktionen



Gegeben sei das obige Tragwerk, welches durch die zwei Kräfte $F_1 = 1{,}5$ kN und $F_2 = 150$ N belastet wird.

Bestimme die Lagerkräfte A und B sowie die Gelenkkräfte C und D!

Freischnitt:



Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: A_h - F_2 = 0$$

$$\boxed{A_h = F_2 = 150\text{N}}$$

Momentengleichgewichtsbedingung um A:

$$\curvearrowleft A: \quad B_v \cdot (2m + 1{,}5\,m + 1{,}5\,m) - F_1 \cdot 1{,}5\,m - F_2 \cdot 1m = 0$$

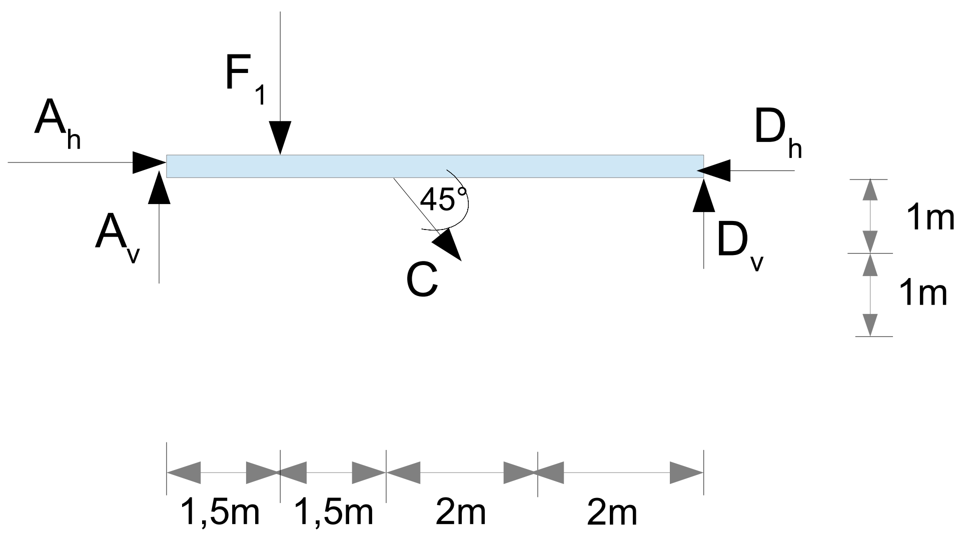
$$\boxed{B_v = \frac{F_1 \cdot 1{,}5\,m + F_2 \cdot 1m}{5m} = \frac{1.500\,N \cdot 1{,}5\,m + 150\,N \cdot 1m}{5m} = 480\,N}$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: A_v + B_v - F_1 = 0$$

$$\boxed{A_v = -B_v + F_1 = -480N + 1.500\,N = 1.020\,N}$$

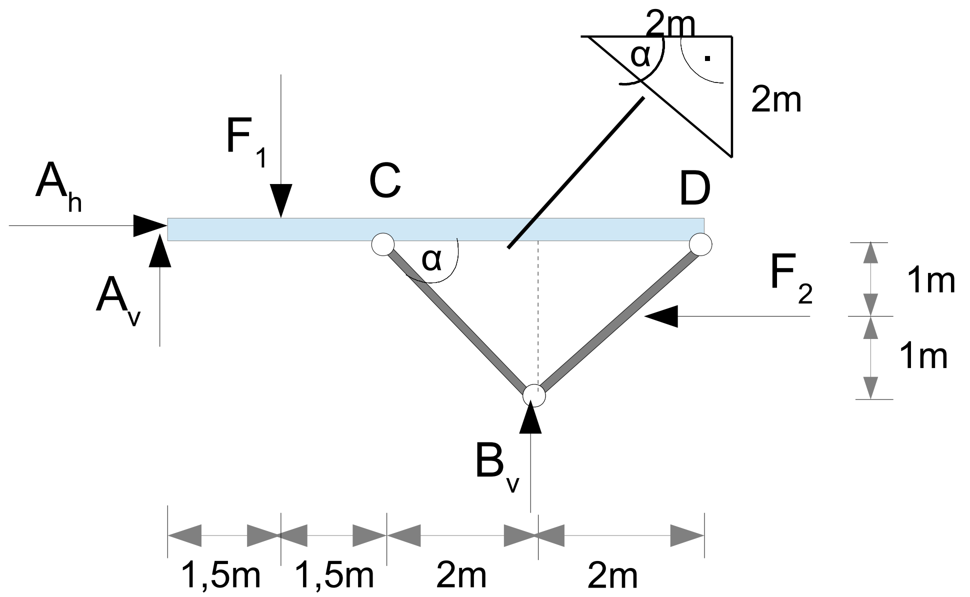
Gleichgewicht am Balken A-D:



C-B ist ein Stab, wieso?

Wenn an einem Körper nur zwei Kräfte angreifen, dann müssen diese gemäß dem Gleichgewichtsaxiom gleich groß und entgegengesetzt gerichtet auf derselben Wirkungslinie liegen, damit der Körper im Gleichgewicht ist. An dem Körper C-B greifen nur zwei Kräfte am Ende des Körpers an, das Gelenk C und die Auflagerkraft B_v. Hier liegt also ein Stab vor. Die Kraftwirkungslinie wird dabei als Stabachse bezeichnet.

Wie wird der Winkel berechnet? Dazu betrachtet man das Dreieck (C-B_v-D-C) und fügt eine gestrichelte Linie so ein, dass 2 rechtwinklige Dreiecke resultieren (siehe untere Grafik).



Mittels Tangens kann der Winkel berechnet werden, da die Abmessungen der Gegen- und Ankathete des rechtwinkligen Dreiecks gegeben sind:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegekathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2\text{m}}{2\text{m}} = 1$$

$$\alpha = \arctan(1) = 45°$$

Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: A_h - D_h + C \cdot \cos(45°) = 0$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: A_v + D_v - C \cdot \sin(45°) - F_1 = 0$$

Momentengleichgewichtsbedingung um D:

$$-A_v \cdot 7\text{m} + F_1 \cdot 5{,}5\,\text{m} + C \cdot \sin(45°) \cdot 4\text{m} = 0$$

$$C = \frac{A_v \cdot 7\text{m} - F_1 \cdot 5{,}5\,\text{m}}{\sin(45°) \cdot 4\text{m}}$$

$$C = \frac{1.020\,\text{N} \cdot 7\text{m} - 1.500\,\text{N} \cdot 5{,}5\,\text{m}}{\sin(45°) \cdot 4\text{m}}$$

$$\boxed{C = -392{,}44\,\text{N}}$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung nach D_v auflösen:

$$D_v = -A_v + C \cdot \sin(45°) + F_1$$

$$D_v = -1.020\,\text{N} - 392{,}44\,\text{N} \cdot \sin(45°) + 1.500\,\text{N}$$

$$\boxed{D_v = 202{,}5\,\text{N}}$$

Horizontale Gleichgewichtsbedingung nach D_h auflösen:

$$D_h = A_h + C \cdot \cos(45°)$$

$$D_h = 150\,\text{N} - 392{,}44\,\text{N} \cdot \cos(45°)$$

$$\boxed{D_h = -127{,}5\,\text{N}}$$