

# Lernbuch: Maschinenelemente 1

Grundlagen, Verbindungen, Federn, Wellen

Vortragsskript für Webinar und Prüfungsvorbereitung

Dr.-Ing. Kevin Suta

Version 2026

## Basierend auf:

Herbert Wittel, Dieter Muhs, Dieter Jannasch, Joachim Vofsiak  
„*Roloff/Matek Maschinenelemente – Normung, Berechnung, Gestaltung*“  
22. Auflage, Springer Vieweg 2015, ISBN 978-3-658-09082-1

Ergänzend: Christian Spura, Herbert Wittel, Dieter Jannasch  
„*Roloff/Matek Maschinenelemente Aufgabensammlung*“  
22. Auflage, Springer Vieweg, ISBN 978-3-658-47399-0

Stefan Vöth, „*Maschinenelemente Aufgaben und Lösungen*“, B. G. Teubner 2007  
Berthold Schlecht, „*Maschinenelemente 1*“, 2. Auflage, Pearson 2015

## WICHTIG!

Dieses Skript dient als Lernhilfe und fasst die wesentlichen Inhalte der Vorlesung Maschinenelemente 1 zusammen. Es ersetzt nicht das eigenständige Durcharbeiten von Aufgaben und Lehrbüchern – und in der Klausur ersetzt nichts den sicheren Umgang mit dem Tabellenbuch. Für ein tiefes Verständnis ist das aktive Mitrechnen unerlässlich!

## Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                  |           |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung: Maschinenelemente, Normen und Normzahlen</b>      | <b>4</b>  |
| 1.1      | Was sind Maschinenelemente? . . . . .                            | 4         |
| 1.2      | Der Konstruktionsprozess im Schnellüberblick . . . . .           | 5         |
| 1.3      | Normung: warum und wie . . . . .                                 | 5         |
| 1.4      | Normzahlen und Normzahlreihen . . . . .                          | 5         |
| 1.4.1    | Grundreihen R10 und R20 . . . . .                                | 6         |
| 1.4.2    | Abgeleitete Reihen (Auswahlreihen) . . . . .                     | 6         |
| 1.4.3    | Anwendung: Baureihen und geometrische Ähnlichkeit . . . . .      | 7         |
| 1.5      | Zusammenfassung Kapitel 1 . . . . .                              | 10        |
| <b>2</b> | <b>Toleranzen, Passungen und Oberflächen</b>                     | <b>10</b> |
| 2.1      | Warum Austauschbau möglich sein muss . . . . .                   | 11        |
| 2.2      | Grundbegriffe: Nennmaß, Istmaß, Grenzmaße und Abmaße . . . . .   | 11        |
| 2.3      | Das ISO-Toleranzsystem: IT-Grade und Toleranzfeldlagen . . . . . | 12        |
| 2.4      | Passungen: Spiel-, Übergangs- und Übermaßpassung . . . . .       | 13        |
| 2.5      | Passsysteme: Einheitsbohrung und Einheitswelle . . . . .         | 15        |
| 2.6      | Passungsauswahl nach DIN-Empfehlung . . . . .                    | 15        |
| 2.7      | Durchgerechnete Beispiele . . . . .                              | 16        |
| 2.8      | Oberflächenkennwerte: Rauheit . . . . .                          | 18        |
| 2.9      | Mini-Aufgaben zum Selbstrechnen . . . . .                        | 19        |
| 2.10     | Zusammenfassung Kapitel 2 . . . . .                              | 20        |

|          |                                                                                     |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3</b> | <b>Festigkeitsberechnung</b>                                                        | <b>20</b> |
| 3.1      | Belastung, Beanspruchung und die drei Lastfälle . . . . .                           | 21        |
| 3.1.1    | Zeitlicher Verlauf und die Bach'schen Lastfälle . . . . .                           | 21        |
| 3.1.2    | Schwingenspiel-Kenngrößen . . . . .                                                 | 22        |
| 3.2      | Nennspannungen – kurze Wiederholung . . . . .                                       | 23        |
| 3.3      | Vergleichsspannung – GEH oder NH? . . . . .                                         | 23        |
| 3.4      | Statischer Festigkeitsnachweis . . . . .                                            | 24        |
| 3.5      | Dauerfestigkeit: Wöhlerlinie und Wechselfestigkeiten . . . . .                      | 26        |
| 3.5.1    | Das Smith-Diagramm . . . . .                                                        | 27        |
| 3.6      | Vom Werkstoff zum Bauteil: der Konstruktionsfaktor . . . . .                        | 28        |
| 3.6.1    | Kerbwirkungszahl statt Formzahl . . . . .                                           | 28        |
| 3.6.2    | Die drei Einflussfaktoren und der Konstruktionsfaktor $K_D$ . . . . .               | 30        |
| 3.7      | Gestaltausschlagfestigkeit und dynamischer Nachweis . . . . .                       | 31        |
| 3.8      | Mini-Aufgaben . . . . .                                                             | 33        |
| 3.9      | Zusammenfassung Kapitel 3 . . . . .                                                 | 34        |
| <b>4</b> | <b>Schweißverbindungen</b>                                                          | <b>34</b> |
| 4.1      | Grundlagen: Wirkprinzip und Schweißverfahren . . . . .                              | 35        |
| 4.2      | Stoß- und Nahtarten . . . . .                                                       | 36        |
| 4.3      | Rechnerische Nahtfläche und Nahtspannungen . . . . .                                | 39        |
| 4.4      | Zulässige Nahtspannungen nach DVS 1612 . . . . .                                    | 40        |
| 4.5      | Gestaltungsregeln . . . . .                                                         | 42        |
| 4.6      | Durchgerechnete Beispiele . . . . .                                                 | 43        |
| 4.7      | Mini-Aufgaben zum Selbstrechnen . . . . .                                           | 45        |
| 4.8      | Zusammenfassung Kapitel 4 . . . . .                                                 | 46        |
| <b>5</b> | <b>Schraubenverbindungen</b>                                                        | <b>46</b> |
| 5.1      | Gewindegeometrie und Bezeichnungen . . . . .                                        | 47        |
| 5.1.1    | Festigkeitsklassen . . . . .                                                        | 48        |
| 5.2      | Kräfte am Gewinde: Anzieh- und Lösemoment . . . . .                                 | 48        |
| 5.3      | Die vorgespannte Schraubenverbindung: Federmodell und Verspannungsdreieck . . . . . | 50        |
| 5.3.1    | Das Verspannungsdreieck . . . . .                                                   | 50        |
| 5.4      | Setzen und Montagevorspannkraft . . . . .                                           | 52        |
| 5.5      | Nachweise . . . . .                                                                 | 53        |
| 5.5.1    | Montagebeanspruchung . . . . .                                                      | 53        |
| 5.5.2    | Statische und dynamische Sicherheit . . . . .                                       | 53        |
| 5.5.3    | Flächenpressung unter dem Kopf . . . . .                                            | 54        |
| 5.6      | Querbelastete Schraubenverbindung . . . . .                                         | 54        |
| 5.7      | Beispiele . . . . .                                                                 | 55        |
| 5.8      | Mini-Aufgaben . . . . .                                                             | 58        |
| 5.9      | Zusammenfassung Kapitel 5 . . . . .                                                 | 60        |
| <b>6</b> | <b>Niet-, Bolzen- und Stiftverbindungen</b>                                         | <b>60</b> |
| 6.1      | Nietverbindungen . . . . .                                                          | 61        |
| 6.2      | Bolzenverbindungen . . . . .                                                        | 63        |
| 6.3      | Stiftverbindungen . . . . .                                                         | 66        |
| 6.4      | Mini-Aufgaben . . . . .                                                             | 68        |
| 6.5      | Zusammenfassung Kapitel 6 . . . . .                                                 | 69        |
| <b>7</b> | <b>Elastische Federn</b>                                                            | <b>69</b> |
| 7.1      | Federkennlinie und Federrate . . . . .                                              | 69        |
| 7.2      | Federungsarbeit . . . . .                                                           | 70        |
| 7.3      | Reihen-, Parallel- und Gemischtschaltung . . . . .                                  | 71        |
| 7.4      | Federwerkstoffe im Überblick . . . . .                                              | 72        |

|           |                                                                    |            |
|-----------|--------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.5       | Hauptteil: Zylindrische Schraubendruckfeder – Geometrie . . . . .  | 72         |
| 7.6       | Beanspruchung: Schubspannung und Spannungsbeiwert . . . . .        | 74         |
| 7.7       | Federrate, Federkraft, Federweg und Auslegung . . . . .            | 75         |
| 7.8       | Blocklänge, Mindestabstände und Länge der Feder . . . . .          | 77         |
| 7.9       | Zulässige Spannungen nach Drahtsorte . . . . .                     | 78         |
| 7.10      | Knicksicherheit (kurz) . . . . .                                   | 79         |
| 7.11      | Nebenteile: Tellerfeder und Blattfeder . . . . .                   | 79         |
| 7.12      | Mini-Aufgaben . . . . .                                            | 79         |
| 7.13      | Zusammenfassung Kapitel 7 . . . . .                                | 80         |
| <b>8</b>  | <b>Achsen und Wellen</b>                                           | <b>80</b>  |
| 8.1       | Funktion und Abgrenzung: Achse und Welle . . . . .                 | 81         |
| 8.2       | Kräfte und Momente an der Welle . . . . .                          | 82         |
| 8.2.1     | Torsionsmoment aus Leistung und Drehzahl . . . . .                 | 82         |
| 8.2.2     | Kräfte am Zahnrad . . . . .                                        | 83         |
| 8.2.3     | Lagerreaktionen und Biegemomentenverlauf . . . . .                 | 83         |
| 8.3       | Entwurfsberechnung – überschlägige Dimensionierung . . . . .       | 84         |
| 8.3.1     | Fall 2: Entwurfsdurchmesser nur aus dem Torsionsmoment . . . . .   | 84         |
| 8.3.2     | Fall 1: Vergleichsmoment bei Biegung + Torsion . . . . .           | 86         |
| 8.4       | Nachrechnung – der gestaltfeste Dauerfestigkeitsnachweis . . . . . | 87         |
| 8.4.1     | Die Nachweiskette aus Kapitel 3 . . . . .                          | 88         |
| 8.5       | Ausblick: Verformung und kritische Drehzahl . . . . .              | 91         |
| 8.6       | Mini-Aufgaben . . . . .                                            | 92         |
| 8.7       | Zusammenfassung Kapitel 8 . . . . .                                | 93         |
| <b>9</b>  | <b>Welle-Nabe-Verbindungen</b>                                     | <b>93</b>  |
| 9.1       | Übersicht und Einteilung . . . . .                                 | 94         |
| 9.2       | Passfederverbindung (Formschluss) . . . . .                        | 95         |
| 9.2.1     | Nachweis der Flächenpressung . . . . .                             | 96         |
| 9.2.2     | Auswahl und Gestaltung . . . . .                                   | 97         |
| 9.3       | Zylindrischer Pressverband (Reibschluss) . . . . .                 | 97         |
| 9.3.1     | Die Auslegungskette . . . . .                                      | 98         |
| 9.4       | Weitere Welle-Nabe-Verbindungen im Kurzüberblick . . . . .         | 100        |
| 9.5       | Durchgerechnete Beispiele . . . . .                                | 101        |
| 9.6       | Mini-Aufgaben . . . . .                                            | 103        |
| 9.7       | Zusammenfassung Kapitel 9 . . . . .                                | 104        |
| <b>10</b> | <b>Klausurtraining: Komplexaufgaben mit Musterlösung</b>           | <b>104</b> |
| 10.1      | Klausuraufgabe 1: Getriebewelle komplett . . . . .                 | 105        |
| 10.2      | Klausuraufgabe 2: Vorgespannte Schraubenverbindung . . . . .       | 108        |
| 10.3      | Klausuraufgabe 3: Geschweißte Konsole mit Feder . . . . .          | 109        |
| 10.4      | Zusammenfassung Kapitel 10 . . . . .                               | 112        |
| <b>11</b> | <b>Formelsammlung kompakt</b>                                      | <b>112</b> |
| <b>12</b> | <b>Prüfungstipps und Lösungsrezepte</b>                            | <b>118</b> |
| 12.1      | Strategie vor der Klausur . . . . .                                | 118        |
| 12.2      | Strategie in der Klausur . . . . .                                 | 119        |
| 12.3      | Die Lösungsrezepte im Überblick . . . . .                          | 119        |
| 12.4      | Die 12 häufigsten Fehler . . . . .                                 | 120        |
| 12.5      | Zusammenfassung Kapitel 12 . . . . .                               | 121        |

# 1 Einführung: Maschinenelemente, Normen und Normzahlen

## Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Erklären, was ein Maschinenelement ist, und die wichtigsten Elementgruppen nennen
- Den Konstruktionsprozess in seinen Grundzügen skizzieren und die Rolle der Normung darin einordnen
- Die Hierarchie DIN – DIN EN – DIN EN ISO erklären
- Den Stufensprung  $q_r = \sqrt[r]{10}$  herleiten und für  $R_5$ ,  $R_{10}$ ,  $R_{20}$ ,  $R_{40}$  berechnen
- Abgeleitete Reihen  $R_{r/p}$  bilden und Normzahlen auf geometrisch ähnliche Baureihen anwenden

Warum lohnt es sich, ein ganzes Kapitel mit Normen und Zahlenreihen zu beginnen, bevor überhaupt eine Schraube oder ein Zahnrad berechnet wird? Weil ohne dieses Fundament jede Konstruktion bei null anfangt: Jeder Schraubendurchmesser, jede Wellenabmessung, jede Lagergröße müsste individuell entwickelt, gefertigt und auf Lager gehalten werden. Normen und Normzahlen sorgen dafür, dass Bauteile austauschbar, Werkzeuge wiederverwendbar und Lagerbestände überschaubar bleiben – ein Groschen, den du in jeder späteren Berechnung wiederfindest, wenn du Durchmesser, Drehzahlen oder Leistungen „rund auf eine Normzahl legst.“

## 1.1 Was sind Maschinenelemente?

**Maschinenelemente** sind die kleinsten, funktional nicht mehr sinnvoll zerlegbaren Bauteile, aus denen Maschinen und Geräte aufgebaut werden. Sie wiederholen sich – mit wechselnden Abmessungen – in nahezu jeder Konstruktion.

Eine Schraube, ein Wälzlager oder ein Zahnrad taucht in den unterschiedlichsten Maschinen wieder auf: im Getriebe genauso wie in der Werkzeugmaschine oder im Fahrzeug. Genau diese **Wiederholung** macht es sinnvoll, Maschinenelemente losgelöst von der konkreten Gesamtmaschine zu berechnen, zu normen und in Tabellenbüchern zu katalogisieren – das ist der Gegenstand dieser Vorlesung.

### Einteilung der Maschinenelemente nach Funktion

| Gruppe               | Funktion                                  | Beispiele                              |
|----------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------|
| Verbindungselemente  | lösbar/unlösbar Verbindung von Bauteilen  | Schrauben, Bolzen, Nieten, Schweißnaht |
| Lagerungselemente    | Führung und Lagerung bewegter Teile       | Wälzlager, Gleitlager, Führungen       |
| Übertragungselemente | Übertragung von Kraft, Moment, Bewegung   | Wellen, Zahnräder, Kupplungen, Riemen  |
| Dichtungselemente    | Abdichten gegen Leckage und Verschmutzung | Wellendichtringe, O-Ringe, Simmerringe |
| Elastische Elemente  | Kraft-/Energiespeicherung, Dämpfung       | Schraubenfedern, Tellerfedern, Dämpfer |

## 1.2 Der Konstruktionsprozess im Schnellüberblick

Bevor ein Maschinenelement berechnet werden kann, muss klar sein, *welche* Aufgabe es erfüllen soll. Der Konstruktionsprozess führt von der Anforderung zum fertigen, fertigungsreifen Bauteil:

1. **Anforderungen klären:** Kräfte, Drehzahlen, Umgebungsbedingungen erfassen.
2. **Funktionsprinzip festlegen:** passendes Wirkprinzip wählen (z. B. Form- oder Kraftschluss).
3. **Entwurf:** grobe Gestalt und Anordnung der Bauteile.
4. **Berechnung und Dimensionierung:** Festigkeit, Steifigkeit, Lebensdauer – hier setzt der Großteil dieser Vorlesung an.
5. **Normung und Dokumentation:** Abmessungen auf Normzahlen und Normteile abstimmen.

Warum die Normung im Konstruktionsprozess steht

Normung spart an drei Stellen bares Geld: **Rationalisierung** (weniger Varianten), **Aus-tauschbarkeit** (Ersatzteile passen herstellerübergreifend) und **Qualitätssicherung** (geprüfte statt individuelle Anforderungen).

## 1.3 Normung: warum und wie

Ohne verbindliche Regeln würde jeder Hersteller eigene Gewinde, eigene Wellendurchmesser und eigene Passungen verwenden – Reparatur und Zulieferung wären ein Alptraum. Normen legen deshalb **einheitliche** Abmessungen, Werkstoffe, Prüfverfahren und Bezeichnungen fest.

### WICHTIG!

Normen sind nach ihrem Geltungsbereich gestuft: **DIN** (national) → **DIN EN** (europäisch, CEN/CENELEC) → **DIN EN ISO** (international). Eine internationale Norm verdrängt dabei nationale Alleingänge, sobald sie über EN in DIN übernommen wird – Sechskantschrauben heißen heute *DIN EN ISO 4014*, nicht mehr nur *DIN 931*.

Der Weg zu einer neuen Norm läuft – vereinfacht – über Antrag, Fachnormenausschuss, Norm-Entwurf, Einspruchsfrist und Verabschiedung.

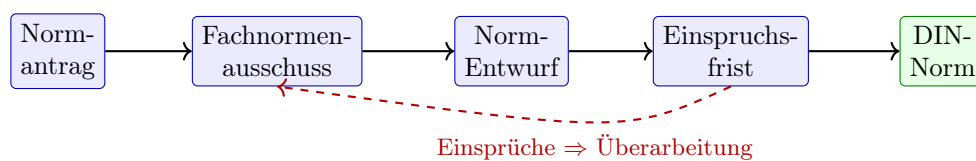


Abbildung 1: Werdegang einer DIN-Norm (vereinfacht): Vom Antrag bis zur verabschiedeten Norm; Einsprüche aus der Öffentlichkeit führen zur Überarbeitung des Entwurfs.

## 1.4 Normzahlen und Normzahlreihen

Selbst mit verbindlichen Normen bliebe ein Problem: Wenn jeder Konstrukteur seinen Wellendurchmesser frei wählen dürfte – 23,7 mm hier, 24,1 mm dort –, gäbe es trotzdem unzählige, praktisch beliebige Werte. **Normzahlen** lösen das, indem sie von vornherein eine begrenzte, geometrisch gestufte Menge „bevorzugter Zahlen“ vorgeben, auf die alle Abmessungen, Leistungen und Drehzahlen gerundet werden.

**Stufensprung einer Normzahlreihe  $R_r$  (DIN 323, TB 1-16):**

$$q_r = \sqrt[r]{10}$$

$r$  = Anzahl der Stufen je Dezimalbereich (also je Faktor 10). Genormt sind die Grundreihen  $R_5$ ,  $R_{10}$ ,  $R_{20}$  und  $R_{40}$ .

Der Stufensprung ist eine **geometrische**, keine arithmetische Progression: Jedes Glied entsteht aus dem vorigen durch Multiplikation mit  $q_r$ , sodass nach  $r$  Schritten genau der Faktor 10 erreicht ist ( $q_r^r = 10$ ).

#### Stufensprünge der Grundreihen

| Reihe    | $r$ | $q_r$  | Charakter          |
|----------|-----|--------|--------------------|
| $R_5$    | 5   | 1,5849 | grobe Stufung      |
| $R_{10}$ | 10  | 1,2589 | Standardreihe      |
| $R_{20}$ | 20  | 1,1220 | feine Stufung      |
| $R_{40}$ | 40  | 1,0593 | sehr feine Stufung |

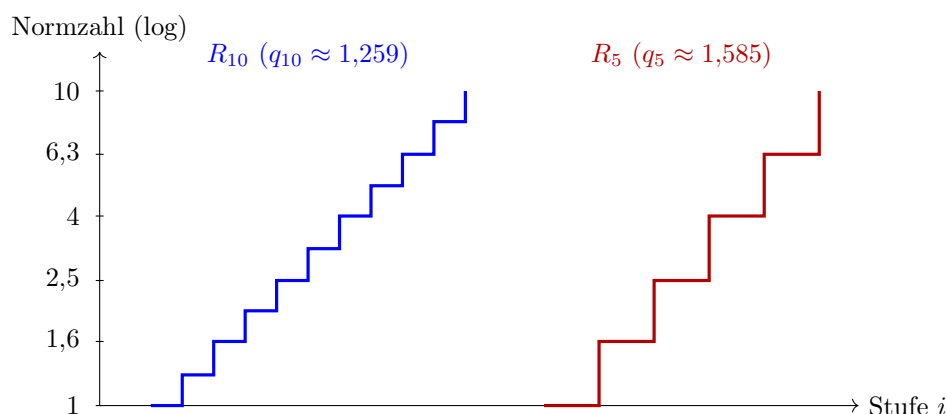


Abbildung 2: Normzahlreihen als Treppendiagramm auf logarithmischer Achse: Ein Dezimalbereich (1 bis 10) wird bei  $R_{10}$  in zehn, bei  $R_5$  nur in fünf Stufen unterteilt – der Stufensprung  $q_5$  ist entsprechend größer.

#### 1.4.1 Grundreihen $R_{10}$ und $R_{20}$

Die tabellierten (gerundeten) Werte der Grundreihen im Bereich 1 bis 10 lauten (TB 1-16):

##### Normzahlen $R_{10}$ und $R_{20}$ im Bereich 1–10

$R_{10}$ : 1,00 – 1,25 – 1,60 – 2,00 – 2,50 – 3,15 – 4,00 – 5,00 – 6,30 – 8,00 – 10,0

$R_{20}$ : 1,00 – 1,12 – 1,25 – 1,40 – 1,60 – 1,80 – 2,00 – 2,24 – 2,50 – 2,80 – 3,15 – 3,55 – 4,00 – 4,50 – 5,00 – 5,60 – 6,30 – 7,10 – 8,00 – 9,00 – 10,0

In allen weiteren Dezimalbereichen (10–100, 100–1000, ...) wiederholt sich dieselbe Zahlenfolge, jeweils um den Faktor 10 verschoben.

#### 1.4.2 Abgeleitete Reihen (Auswahlreihen)

Manchmal ist selbst  $R_{10}$  zu fein gestuft – etwa wenn nur wenige Baugrößen einer Reihe wirtschaftlich sind. Dann wählt man aus einer Grundreihe nur **jedes  $p$ -te Glied** aus und erhält eine **abgeleitete Reihe**.

**Notation:**  $R_{r/p}(a_0 \dots)$ , mit  $r$  = Grundreihe,  $p$  = Schrittweite,  $a_0$  = Anfangswert.  
**Stufensprung der abgeleiteten Reihe:**

$$q_{r/p} = q_r^p$$

Stufensprung einer abgeleiteten Reihe

Wie groß ist der Stufensprung der Reihe  $R_{20/3}$  (jedes dritte Glied von  $R_{20}$ )?

Lösung

$$q_{20/3} = q_{20}^3 = (1,1220)^3 = 1,4125.$$

Kontrolle: 1,4125 liegt zwischen  $q_{10} \approx 1,259$  und  $q_5 \approx 1,585$  – plausibel, denn  $R_{20/3}$  ist gröber als  $R_{20}$ , aber feiner als  $R_5$ .

### 1.4.3 Anwendung: Baureihen und geometrische Ähnlichkeit

Normzahlreihen sind besonders nützlich, wenn eine Baureihe von Maschinen (z. B. Getriebe gleicher Bauart in mehreren Größen) **geometrisch ähnlich** gestaltet wird: Alle Längen skalieren mit demselben Faktor  $q_L$ .

Bei geometrisch ähnlichen Bauteilen mit Längenmaßstab  $q_L$  (einem Normzahl-Stufensprung  $q_{r/p}$ ):

$$\text{Flächenmaßstab: } q_A = q_L^2$$

$$\text{Volumenmaßstab: } q_V = q_L^3$$

$$\text{Kraftmaßstab (bei gleicher Spannung): } q_F = q_A = q_L^2$$

$$\text{Leistungsmaßstab (bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit): } q_P = q_L^2$$

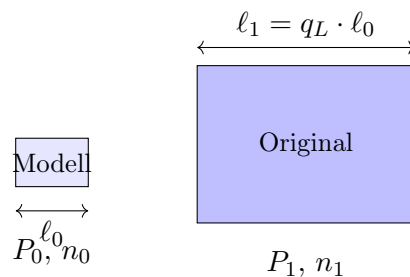
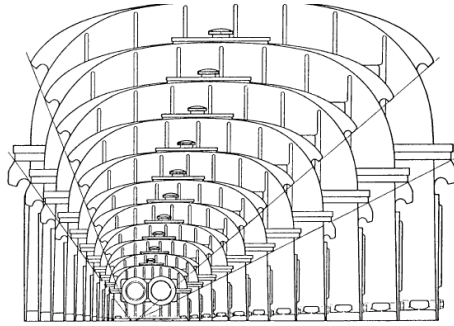


Abbildung 3: Geometrisch ähnliche Baugrößen: Modell und Original unterscheiden sich nur durch den Längenmaßstab  $q_L$  (nicht maßstäblich dargestellt).



**Bild 1-1**  
Beispiel einer Getriebebaureihe  
(Werkbild Flender)

Abbildung 4: Beispiel einer Getriebebaureihe (Werkbild Flender): geometrisch ähnlich gestufte Bau-  
größen nach Normzahlreihe. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemen-  
te, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 1-1, S. 9.

### Achtung!

Typische Klausurfallen bei Normzahlen:

- $q_r = \sqrt[r]{10}$ , **nicht**  $q_r = 10/r$  – geometrische, keine arithmetische Progression!
- $q_{r/p} = q_r^p$  (Potenzieren), **nicht**  $q_r/p$  (Dividieren).
- $q_A = q_L^2$  und  $q_V = q_L^3$  – Flächen und Volumina skalieren **nicht** linear mit  $q_L$ .
- Für Zahnzahlen, Rohrdurchmesser u. Ä. gelten oft **Rundwertreihen** ( $R''_{10}$ : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, ...) statt der Hauptwerte – im Tabellenbuch nachschlagen, nicht  $R_{10}$  blind anwenden.

### Fördermaschine im Modellversuch

Eine Fördermaschine mit  $P_1 = 160 \text{ kW}$  bei  $n_1 = 200 \text{ min}^{-1}$  soll an einem geometrisch ähnlichen Modell mit Längenmaßstab  $q_L = 8$  erprobt werden. Gesucht: Leistung  $P_0$  und Drehzahl  $n_0$  des Modells.

### Lösung

#### 1. Leistungsmaßstab:

$$q_P = q_L^2 = 8^2 = 64.$$

#### 2. Modell-Leistung:

$$P_0 = \frac{P_1}{q_P} = \frac{160 \text{ kW}}{64} = 2,5 \text{ kW}.$$

#### 3. Drehzahlmaßstab (bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit skaliert die Drehzahl umgekehrt zur Länge):

$$q_n = \frac{1}{q_L} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

#### 4. Modell-Drehzahl:

$$n_0 = \frac{n_1}{q_n} = n_1 \cdot q_L = 200 \text{ min}^{-1} \cdot 8 = 1600 \text{ min}^{-1}.$$

Kontrolle: Das kleinere Modell muss deutlich schneller drehen, um an der Umfangsgeschwindigkeit des Originals zu bleiben –  $n_0 > n_1$  ist plausibel.



### Wellendurchmesser-Baureihe nach $R_{20/3}$

Sechs Wellendurchmesser einer Baureihe sollen nach  $R_{20/3}$  gestuft werden, Startwert  $d_0 = 20$  mm. Gesucht: die sechs Durchmesser sowie die zugehörigen Kreisquerschnitte.

#### Lösung

##### 1. Stufensprung:

$$q_{20/3} = q_{20}^3 = (1,1220)^3 = 1,4125.$$

##### 2. Durchmesser ( $d_i = d_0 \cdot q_{20/3}^i$ ):

| $i$                                           | 0    | 1    | 2     | 3     | 4     | 5     |
|-----------------------------------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| $d_i$ in mm                                   | 20,0 | 28,3 | 39,9  | 56,4  | 79,6  | 112,5 |
| $A_i = \frac{\pi}{4}d_i^2$ in cm <sup>2</sup> | 3,14 | 6,27 | 12,51 | 24,95 | 49,79 | 99,35 |

##### 3. Kontrolle:

$$q_A = q_{20/3}^2 = (1,4125)^2 = 1,995 \approx 2,0.$$

Die Fläche verdoppelt sich also näherungsweise je Stufe – konsistent mit  $q_A = q_L^2$  (z. B.  $12,51/6,27 = 1,995$ ).

### Zylindrische Behälter mit gestuftem Volumen

Vier zylindrische Behälter mit Volumen  $V = 2, 4, 8, 16$  ℓ sollen bei konstantem Verhältnis  $h/d = 2$  gefertigt werden. Gesucht: Durchmesser  $d$  und Höhe  $h$  jedes Behälters.

#### Lösung

##### 1. Ansatz: Mit $h = 2d$ folgt für das Zylindervolumen

$$V = \frac{\pi}{4}d^2h = \frac{\pi}{4}d^2 \cdot 2d = \frac{\pi}{2}d^3 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}.$$

##### 2. Werte ( $V$ jeweils in mm<sup>3</sup> umgerechnet, $1 \ell = 10^6$ mm<sup>3</sup>):

| $V$ in ℓ       | 2     | 4     | 8     | 16    |
|----------------|-------|-------|-------|-------|
| $d$ in mm      | 108,4 | 136,6 | 172,1 | 216,8 |
| $h = 2d$ in mm | 216,8 | 273,1 | 344,1 | 433,5 |

##### 3. Kontrolle – Bezug zu Normzahlreihen: Das Volumen verdoppelt sich je Behälter ( $q_V = 2$ ), der Durchmesser folgt also

$$q_L = \sqrt[3]{q_V} = \sqrt[3]{2} = 1,260 \quad (\text{z. B. } 136,6/108,4 = 1,260).$$

Dieser Wert liegt praktisch auf  $R_{10}$  ( $q_{10} = 1,259$ ) – kein Zufall, sondern typisch dafür, wie sich Normzahlreihen aus sinnvollen Volumensprüngen ergeben.

### Mini-Aufgabe

Eine Leistungsreihe soll nach  $R_5$  gestuft werden, Startwert  $P_0 = 10$  kW. Berechne die nächsten vier Glieder  $P_1$  bis  $P_4$  und vergleiche sie mit den tabellierten Hauptwerten der  $R_5$ -Reihe.

### Lösung

Mit  $q_5 = 1,5849$  und  $P_i = P_0 \cdot q_5^i$ :

$$P_0, \dots, P_4 = 10,0; 15,8; 25,1; 39,8; 63,1 \text{ kW.}$$

Die tabellierten (gerundeten) Hauptwerte der  $R_5$ -Reihe lauten dagegen 10 – 16 – 25 – 40 – 63. Die Abweichung ist klein (Rundung auf DIN-323-Werte); in der Praxis wird immer der tabellierte, gerundete Wert verwendet, nicht das exakte geometrische Zwischenergebnis.

### Mini-Aufgabe

Ist 1,4 eine Normzahl der Reihe  $R_{10}$ ? Begründe mit der Stufenformel.

### Lösung

Die  $R_{10}$ -Reihe enthält im Bereich 1 bis 2 nur die Werte 1,00 und 1,25 (nächster Wert 1,60) – 1,4 gehört also **nicht** zu  $R_{10}$ . Es ist aber die dritte Stufe von  $R_{20}$ :

$$10^{3/20} = 1,4125 \approx 1,4.$$

1,4 ist somit eine Normzahl der feineren Reihe  $R_{20}$ , aber keine der gröberen Reihe  $R_{10}$ .

## 1.5 Zusammenfassung Kapitel 1

### Das Wichtigste aus Kapitel 1

- **Maschinenelemente** sind wiederkehrende, funktional nicht weiter zerlegbare Bauteile (Verbindungs-, Lagerungs-, Übertragungs-, Dichtungs- und elastische Elemente).
- Der **Konstruktionsprozess** führt von Anforderungen über Funktionsprinzip und Entwurf zur Berechnung – Normung sichert Austauschbarkeit und Rationalisierung.
- Normenhierarchie: **DIN** (national) → **DIN EN** (europäisch) → **DIN EN ISO** (international).
- **Stufensprung**:  $q_r = \sqrt[3]{10}$  für  $R_5$  (1,585),  $R_{10}$  (1,259),  $R_{20}$  (1,122),  $R_{40}$  (1,059); **abgeleitete Reihen**:  $q_{r/p} = q_r^p$ .
- Bei geometrisch ähnlichen Baureihen gilt  $q_A = q_L^2$ ,  $q_V = q_L^3$ ,  $q_F = q_L^2$ ,  $q_P = q_L^2$  – Flächen, Volumina, Kräfte und Leistungen skalieren **nicht** linear mit der Länge.

## 2 Toleranzen, Passungen und Oberflächen

### Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Nennmaß, Istmaß, Grenzmaße und Abmaße (ES/EI für Bohrungen, es/ei für Wellen) sicher unterscheiden und berechnen
- Das ISO-Toleranzsystem (IT-Grade, Toleranzfeldlagen) erklären und Toleranzklassen wie H7 oder g6 lesen
- Spiel-, Übergangs- und Übermaßpassungen anhand von Höchst- und Mindestpassung unterscheiden

- Eine Passungsrechnung im System Einheitsbohrung mit TB-Werten vollständig durchführen
- Für eine gegebene Funktionsanforderung eine passende Passung auswählen
- Die Oberflächenkennwerte  $R_a$  und  $R_z$  einordnen und über eine Faustformel mit der Toleranz verknüpfen

## 2.1 Warum Austauschbau möglich sein muss

Kein Fertigungsverfahren trifft ein Maß exakt. Selbst die beste Drehmaschine liefert bei wiederholter Fertigung eines „Ø40-mm Zapfens“ jedes Mal ein geringfügig anderes Istmaß – mal 39,995 mm, mal 40,003 mm. Das ist unvermeidlich und, solange die Abweichung klein genug bleibt, auch **unproblematisch**: Eine Welle mit 40,003 mm passt genauso gut in ein Gleitlager wie eine mit 39,995 mm, solange beide innerhalb eines festgelegten Spielraums bleiben.

Genau hier setzt die Toleranzlehre an. Sie legt fest, *wie stark* ein Maß vom Nennwert abweichen darf, ohne dass die Funktion leidet. Das macht **Austauschbau** erst möglich: Ein Ersatzteil aus einer anderen Fertigungscharge – oder von einem anderen Zulieferer – passt trotzdem, weil beide Teile innerhalb genormter Grenzen gefertigt wurden. Ohne diese Normung müsste jedes Bauteil individuell angepasst werden; mit ihr lassen sich Getriebe, Motoren und ganze Maschinen aus millionenfach produzierten Einzelteilen zusammensetzen. Als Faustregel gilt dabei: **so grob wie möglich, so fein wie nötig** – jede zusätzliche Genauigkeit kostet Fertigungszeit und Geld.

## 2.2 Grundbegriffe: Nennmaß, Istmaß, Grenzmaße und Abmaße

Um Toleranzen eindeutig zu beschreiben, brauchst du eine feste Begriffssystematik. Sie ist die Grundlage für alles Weitere in diesem Kapitel – wer hier Fehler macht, verrechnet sich garantiert bei der Passungsrechnung.

### Die vier Grundbegriffe

- **Nennmaß  $N$** : das in der Zeichnung angegebene Sollmaß (z. B. Ø40 mm), Bezugsgröße für alle Abmaße.
- **Istmaß  $I$** : das tatsächlich gefertigte, gemessene Maß eines Einzelteils.
- **Grenzmaße**: Höchstmaß  $G_o$  und Mindestmaß  $G_u$  – die beiden Extremwerte, zwischen denen das Istmaß liegen muss.
- **Abmaß**: Differenz zwischen einem Grenzmaß und dem Nennmaß. Bei **Bohrungen** (Innenmaß) wird mit **Großbuchstaben**  $ES$  (oberes Abmaß) und  $EI$  (unteres Abmaß) bezeichnet, bei **Wellen** (Außenmaß) mit **Kleinbuchstaben**  $es$  und  $ei$ .

### Grenzmaße aus Nennmaß und Abmaß:

$$\text{Bohrung: } G_{oB} = N + ES \quad G_{uB} = N + EI$$

$$\text{Welle: } G_{oW} = N + es \quad G_{uW} = N + ei$$

**Maßtoleranz** (immer positiv, Betrag der Feldbreite):

$$T = G_o - G_u \quad T_B = ES - EI \quad T_W = es - ei$$

$N$  ist das gemeinsame Bezugsmaß,  $ES/EI$  die Abmaße der Bohrung,  $es/ei$  die Abmaße der Welle,  $T_B/T_W$  die Maßtoleranzen von Bohrung und Welle.

Die Nulllinie in der grafischen Darstellung entspricht dem Nennmaß ( $ES = EI = 0$  bzw.  $es = ei = 0$ ). Abmaße oberhalb der Nulllinie sind positiv, unterhalb negativ. Das Toleranzfeld ist der Bereich zwischen den beiden Abmaßen – seine Breite ist die Toleranz  $T$ .

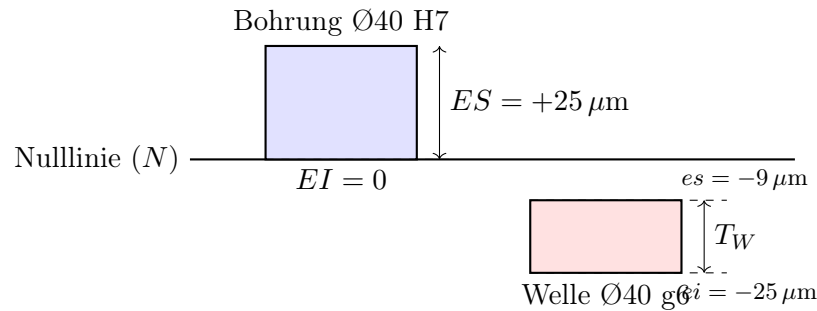


Abbildung 5: Lage der Toleranzfelder über der Nulllinie am Beispiel Ø40 H7/g6 (Abmaße überhöht dargestellt, nicht maßstäblich). Das Bohrungsfeld liegt oberhalb, das Wellenfeld unterhalb der Nulllinie – typisch für eine Spielpassung.

### Achtung!

Groß- und Kleinschreibung ist **keine Formsache**:  $ES/EI$  gehören immer zur Bohrung (Innenmaß),  $es/ei$  immer zur Welle (Außenmaß). Eselsbrücke: *Großbuchstaben = Großes Loch* (Bohrung). Wer hier vertauscht, produziert am Ende ein falsches Vorzeichen in der ganzen Passungsrechnung.

## 2.3 Das ISO-Toleranzsystem: IT-Grade und Toleranzfeldlagen

Damit nicht jede Firma eigene Toleranzwerte erfindet, legt die ISO-Norm (DIN ISO 286) ein einheitliches System fest. Es besteht aus zwei unabhängigen Bausteinen: der **Größe** des Toleranzfeldes (IT-Grad) und seiner **Lage** zur Nulllinie (Grundabmaß-Buchstabe).

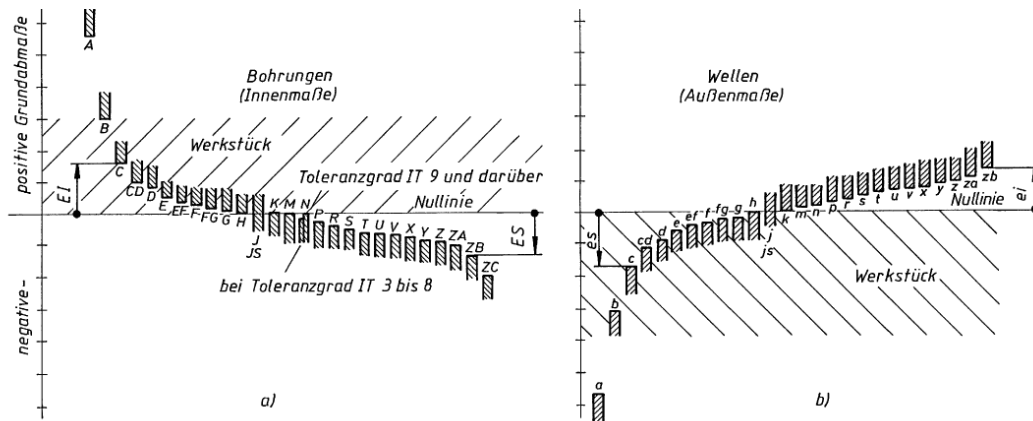
### Grundtoleranzgrade IT

Es gibt 20 genormte Grundtoleranzgrade  $IT01, IT0, IT1, \dots, IT18$ . Je größer die Zahl, desto größer die Toleranz (größer die Fertigung):

- $IT01$ – $IT4$ : Lehren, Messzeuge (sehr eng)
- $IT5$ – $IT11$ : allgemeiner Maschinenbau (Passungen!)
- $IT12$ – $IT18$ : grobe Funktionsmaße, Walz-/Gussmaße

Die Toleranz  $T$  wächst mit dem Nennmaß: Ein  $IT7$  bei Ø400 mm ist in µm deutlich größer als ein  $IT7$  bei Ø10 mm.

Die **Lage** des Toleranzfeldes zur Nulllinie wird durch einen Buchstaben festgelegt: für Bohrungen  $A, B, C, \dots, ZC$  (Großbuchstaben), für Wellen  $a, b, c, \dots, zc$  (Kleinbuchstaben). Buchstaben nahe der Mitte des Alphabets (h für Wellen, H für Bohrungen) liegen nah an der Nulllinie, Buchstaben am Rand weit davon entfernt.



**Bild 2-3** Lage der Toleranzfelder für gleichen Nennmaßbereich (schematisch) a) bei Bohrungen (Innenmaß), b) bei Wellen (Außenmaß)

Abbildung 6: Lage der Toleranzfelder für gleichen Nennmaßbereich (schematisch): a) bei Bohrungen (Innenmaß), b) bei Wellen (Außenmaß). Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 2-3, S. 30.

Buchstabe und Zahl zusammen ergeben die **Toleranzklasse**, z. B. **H7** (Bohrung, Grundabmaß H, Grad IT7) oder **g6** (Welle, Grundabmaß g, Grad IT6). Ist ein Abmaß bekannt, lässt sich das zweite aus der Toleranz berechnen – das brauchst du, sobald ein Tabellenwert fehlt:

#### Zusammenhang Grundabmaß und Grundtoleranz:

$$\text{Bohrung: } ES = EI + IT \quad \Leftrightarrow \quad EI = ES - IT$$

$$\text{Welle: } es = ei + IT \quad \Leftrightarrow \quad ei = es - IT$$

#### Kontrollrechnung mit TB 2-1

Für  $\varnothing 40$  H7 gilt nach Roloff/Matek TB 2-4:  $ES = +25 \mu\text{m}$ ,  $EI = 0$ . Die zugehörige Grundtoleranz für den Bereich  $> 30\text{--}50$  mm ist nach TB 2-1  $IT7 = 25 \mu\text{m}$ . Kontrolle:  $ES - EI = 25 - 0 = 25 \mu\text{m} = IT7 \checkmark$ . Für  $\varnothing 40$  g6:  $es = -9 \mu\text{m}$ ,  $ei = -25 \mu\text{m}$ ,  $es - ei = 16 \mu\text{m} = IT6$  (Bereich  $> 30\text{--}50$  mm)  $\checkmark$ .

Neben den Maßtoleranzen gibt es **Form- und Lagetoleranzen** (DIN ISO 1101), die zusätzlich zur reinen Maßabweichung z. B. Geradheit, Rundheit oder Parallelität begrenzen. Sie werden hier nur begrifflich erwähnt – ausführlich sind sie kein Prüfungsschwerpunkt dieses Skripts.

#### Achtung!

Die Reihenfolge Buchstabe-vor-Zahl ist genormt: Es heißt **H7**, nicht „7H“. Vertauschst du das in der Klausur, ist die Toleranzklasse nicht mehr eindeutig lesbar.

## 2.4 Passungen: Spiel-, Übergangs- und Übermaßpassung

Erst wenn Bohrung und Welle zusammengefügt werden, entsteht eine **Passung**. Sie beschreibt, wie eng oder locker zwei Teile ineinandepassen – und das hängt von der *relativen Lage* der beiden Toleranzfelder zueinander ab.

**Passung** (Differenz von Bohrungs- und Wellenmaß):

$$P = I_B - I_W$$

**Höchstpassung** und **Mindestpassung** (die beiden Extremfälle):

$$P_o = G_{oB} - G_{uW} = ES - ei$$

$$P_u = G_{uB} - G_{oW} = EI - es$$

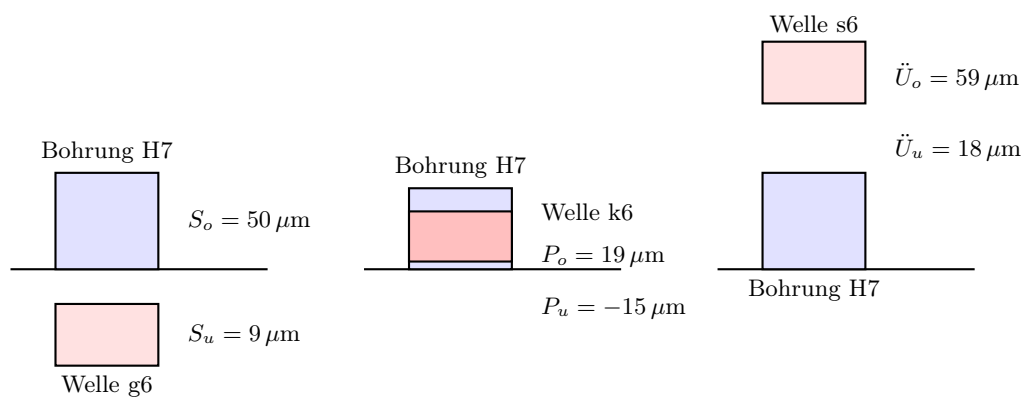
**Passtoleranz** (Streubreite der Passung):

$$P_T = P_o - P_u = T_B + T_W$$

Je nach Vorzeichen von  $P_o$  und  $P_u$  unterscheidet man drei Passungsarten:

#### Die drei Passungsarten

- **Spielpassung:**  $P_o > 0$  und  $P_u \geq 0$  – Bohrung immer größer als Welle, es bleibt stets Spiel. Höchstspiel  $S_o = P_o$ , Mindestspiel  $S_u = P_u$ .
- **Übergangspassung:**  $P_o \geq 0$  und  $P_u < 0$  – je nach Istmaß-Kombination Spiel *oder* Übermaß möglich.
- **Übermaßpassung:**  $P_o \leq 0$  und  $P_u < 0$  – Welle immer größer als Bohrung, es entsteht stets Übermaß (Presssitz). Höchstübermaß  $\ddot{U}_o = -P_u$ , Mindestübermaß  $\ddot{U}_u = -P_o$ .



(a) Spielpassung H7/g6 (b) Übergangspassung H7/k6 (c) Übermaßpassung H7/s6

Abbildung 7: Die drei Passungsarten am Beispiel der Beispielrechnungen A–C: (a) Toleranzfelder getrennt → immer Spiel, (b) Toleranzfelder überlappen → mal Spiel, mal Übermaß, (c) Wellenfeld liegt vollständig über dem Bohrungsfeld → immer Übermaß. Abmaße überhöht dargestellt, nicht maßstäblich.

#### WICHTIG!

Beim Übermaß kehrt sich das Vorzeichen um: Rechnerisch ergeben sich **negative** Werte für  $P_o$  und  $P_u$ , das Höchst- und Mindestübermaß  $\ddot{U}_o/\ddot{U}_u$  werden aber als **positive** Beträge angegeben ( $\ddot{U}_o = -P_u$ ,  $\ddot{U}_u = -P_o$ ). Vergiss diese Vorzeichenumkehr nicht, wenn du das Ergebnis im Klartext formulierst.

### Achtung!

Verwechsle nicht  $T$  und  $P$ : Die Maßtoleranz  $T$  ist als Feldbreite **immer positiv** (Betrag), die Passung  $P$  (bzw.  $P_o$ ,  $P_u$ ) ist dagegen **vorzeichenbehaftet** – positiv für Spiel, negativ für Übermaß. Beide Konzepte gehören zusammen, sind aber nicht dasselbe.

## 2.5 Passsysteme: Einheitsbohrung und Einheitswelle

Um nicht für jede Passung zwei neue Toleranzfelder festlegen zu müssen, hält man in der Praxis eines der beiden Teile konstant und variiert nur das andere. Das nennt man ein **Passsystem**.

### Zwei Passsysteme

- **System Einheitsbohrung (EB)**: Die Bohrung ist das Bezugselement mit festem Toleranzfeld  $H$  ( $EI = 0$ ). Nur die Welle wird an die geforderte Passung angepasst (z. B. H7/g6, H7/k6, H7/s6). **Standard im allgemeinen Maschinenbau**, weil Bohrungen viel schwerer nachzuarbeiten sind als Wellen.
- **System Einheitswelle (EW)**: Die Welle ist das Bezugselement mit festem Toleranzfeld  $h$  ( $es = 0$ ). Sinnvoll, wenn eine durchgehende Welle mehrere Teile mit unterschiedlichen Passungen aufnehmen muss (z. B. Wälzlager-Wellensitze nach Herstellervorgabe).

In diesem Kapitel rechnen wir konsequent im System Einheitsbohrung – das deckt die überwiegende Mehrheit der Klausuraufgaben ab.

## 2.6 Passungsauswahl nach DIN-Empfehlung

In der Praxis suchst du nicht irgendeine Passung, sondern eine, die zur **Funktion** passt: Soll sich ein Bauteil frei drehen, von Hand verschieben lassen oder unlösbar sitzen? DIN 7154/7155/7157 geben dafür bewährte Passungsempfehlungen im System Einheitsbohrung vor:

| Passungsart                      | Passung (EB)    | Typischer Einsatz                                               |
|----------------------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------------|
| Übermaßpassung                   | H7/s6,<br>H7/r6 | Lagerbuchse in Gehäuse eingepresst,<br>Flansch auf Wellenende   |
| Übergangspassung                 | H7/n6,<br>H7/k6 | Zahnrad/Riemenscheibe mit Passfeder,<br>per Hammerschlag gefügt |
| Spielpassung, kein Spiel spürbar | H7/g6           | Verschiebbare Räder/Kupplungen,<br>Arbeitsspindel-Gleitlager    |
| Spielpassung, geringes Spiel     | H7/f7           | Gleitlager allgemein, Gleitbuchsen auf Wellen                   |
| Spielpassung, merkliches Spiel   | H8/e8           | Mehrfach gelagerte Welle, Kurbelwelle                           |

Passungsempfehlungen nach Roloff/Matek TB 2-9 (Auszug, System Einheitsbohrung).

### Lösungsrezept: Passung berechnen

1. **Funktion analysieren**: Welche Relativbewegung/Verbindung ist gefordert?
2. **Passungsart aus TB 2-9 ablesen**: liefert die Toleranzklasse (z. B. H7/g6).
3. **Grenzabmaße aus TB 2-4** für den passenden Nennmaßbereich ablesen ( $ES/EI$ ,  $es/ei$ ).
4.  $P_o$ ,  $P_u$ ,  $P_T$  **berechnen** nach den Formeln oben.

## 5. Plausibilität prüfen: Passt das Vorzeichen zur erwarteten Passungsart?

Ergänzend gilt es, zwei weitere Grundsätze zumindest dem Namen nach zu kennen: Das **Hüllprinzip** verlangt, dass ein Istmaß zusätzlich eine ideale Hüllform (Grenzmaß) nicht überschreiten darf – es koppelt Maß- und Formtoleranz. Beim **Unabhängigkeitsprinzip** gelten Maß- und Formtoleranz dagegen getrennt. Reichen sich mehrere tolerierte Einzelmaße zu einer Gesamtlänge auf, spricht man von einer **Toleranzkette**; ihre Grenzwerte ergeben sich im einfachsten Fall aus dem Min-Max-Prinzip (Summe aller Höchstmaße bzw. aller Mindestmaße). Wir kommen darauf in Kapitel 9 bei der Wellengestaltung zurück.

## 2.7 Durchgerechnete Beispiele

### Spielpassung: Gleitlagerung einer Arbeitsspindel

Eine Arbeitsspindel ( $\varnothing 40$  mm) wird in einer Gleitlagerbuchse gelagert und soll sich frei, aber ohne merkliches Spiel drehen können. Gewählt wird die Passung **H7/g6** im System Einheitsbohrung. Gesucht: Höchst- und Mindestspiel sowie die Grenzmaße von Bohrung und Welle.

### Lösung

1. **Grenzabmaße aus TB 2-4** (nach Roloff/Matek TB 2-4, Bereich  $> 30$ – $50$  mm):

$$ES = +25 \mu\text{m}, \quad EI = 0, \quad es = -9 \mu\text{m}, \quad ei = -25 \mu\text{m}.$$

2. **Höchst- und Mindestspiel:**

$$P_o = ES - ei = 25 - (-25) = +50 \mu\text{m} = S_o$$

$$P_u = EI - es = 0 - (-9) = +9 \mu\text{m} = S_u$$

3. **Passtoleranz** (Kontrolle):

$$P_T = P_o - P_u = 50 - 9 = 41 \mu\text{m} \stackrel{!}{=} T_B + T_W = 25 + 16 = 41 \mu\text{m} \checkmark$$

4. **Grenzmaße:**

$$G_{oB} = 40,025 \text{ mm}, \quad G_{uB} = 40,000 \text{ mm}, \quad G_{oW} = 39,991 \text{ mm}, \quad G_{uW} = 39,975 \text{ mm}.$$

Kontrolle:  $P_o > 0$  und  $P_u \geq 0 \rightarrow$  Spielpassung. Das Spiel liegt stets zwischen  $9 \mu\text{m}$  und  $50 \mu\text{m}$  – plausibel für eine spürbar spielfreie, aber leichtgängige Lagerung.

### Übermaßpassung: eingepresste Lagerbuchse

Eine Lagerbuchse ( $\varnothing 40$  mm) wird ohne zusätzliche Sicherung fest in eine Gehäusebohrung eingepresst. Gewählt wird die Passung **H7/s6**. Gesucht: Höchst- und Mindestübermaß.

### Lösung

1. **Grenzabmaße aus TB 2-4** (nach Roloff/Matek TB 2-4, Bereich  $> 30$ – $50$  mm):

$$ES = +25 \mu\text{m}, \quad EI = 0, \quad es = +59 \mu\text{m}, \quad ei = +43 \mu\text{m}.$$

2. **Höchst- und Mindestpassung:**

$$P_o = ES - ei = 25 - 43 = -18 \mu\text{m}, \quad P_u = EI - es = 0 - 59 = -59 \mu\text{m}.$$



**3. Beide Werte  $\leq 0 \rightarrow$  Übermaßpassung.** Vorzeichenumkehr für die Angabe als Übermaß:

$$\ddot{U}_o = -P_o = 59 \mu\text{m}, \quad \ddot{U}_u = -P_u = 18 \mu\text{m}.$$

**4. Passtoleranz (Kontrolle):**

$$P_T = P_o - P_u = -18 - (-59) = 41 \mu\text{m} \stackrel{!}{=} T_B + T_W = 25 + 16 = 41 \mu\text{m} \checkmark$$

Kontrolle: Die Buchse sitzt mit einem Übermaß zwischen  $18 \mu\text{m}$  und  $59 \mu\text{m}$  – ein spürbarer, aber noch handhabbarer Presssitz. Bemerkenswert: Die Passtoleranz  $P_T = 41 \mu\text{m}$  ist identisch mit Beispiel A, da beide Male die IT-Kombination IT7+IT6 vorliegt – nur die Lage der Wellentoleranz zur Nulllinie unterscheidet sich.

### Übergangspassung: Zahnrad auf Getriebewelle

Ein Zahnrad wird mit einer Passfeder auf eine Getriebewelle ( $\varnothing 25 \text{ mm}$ ) gesetzt und mit Hammerschlägen aufgezogen – gefordert ist eine sichere, aber lösbare Verbindung. Gewählt wird die Passung **H7/k6**. Gesucht: die möglichen Grenzfälle Spiel bzw. Übermaß.

### Lösung

**1. Grenzabmaße aus TB 2-4** (nach Roloff/Matek TB 2-4, Bereich  $> 18\text{--}30 \text{ mm}$ ):

$$ES = +21 \mu\text{m}, \quad EI = 0, \quad es = +15 \mu\text{m}, \quad ei = +2 \mu\text{m}.$$

**2. Höchst- und Mindestpassung:**

$$P_o = ES - ei = 21 - 2 = +19 \mu\text{m}, \quad P_u = EI - es = 0 - 15 = -15 \mu\text{m}.$$

**3. Einordnung:**  $P_o > 0$  und  $P_u < 0 \rightarrow$  **Übergangspassung**. Je nach Istmaß-Kombination von Zahnrad und Welle stellt sich entweder ein Spiel von höchstens  $19 \mu\text{m}$  oder ein Übermaß von höchstens  $15 \mu\text{m}$  ein.

$$P_T = P_o - P_u = 19 - (-15) = 34 \mu\text{m} \stackrel{!}{=} T_B + T_W = 21 + 13 = 34 \mu\text{m} \checkmark$$

Kontrolle: Beide Grenzfälle sind betragsmäßig klein – typisch für eine Übergangspassung, die von Hand oder mit leichten Schlägen gefügt werden kann, ohne dabei lose zu sitzen.

### Passungsauswahl: verschiebbare Riemenscheibe

Eine Riemenscheibe ( $\varnothing 60 \text{ mm}$ ) soll auf ihrer Welle von Hand verschiebbar sein, aber kein merkliches Spiel aufweisen; eine Passfeder verhindert das Mitdrehen. Gesucht: geeignete Passung und die zugehörigen Passungskennwerte.

### Lösung

**1. Funktion analysieren:** „von Hand verschiebbar, kein merkliches Spiel- kein Presssitz, kein spürbares Spiel nötig.“

**2. Passungsart aus TB 2-9 ablesen:** Diese Anforderung entspricht genau der Zeile „Spielpassung, kein Spiel spürbar“  $\rightarrow$  **H7/g6** (System Einheitsbohrung).

**3. Grenzabmaße aus TB 2-4** (nach Roloff/Matek TB 2-4, Bereich  $> 50\text{--}65 \text{ mm}$ ):

$$ES = +30 \mu\text{m}, \quad EI = 0, \quad es = -10 \mu\text{m}, \quad ei = -29 \mu\text{m}.$$

#### 4. Passungsrechnung:

$$P_o = 30 - (-29) = +59 \mu\text{m}, \quad P_u = 0 - (-10) = +10 \mu\text{m}, \quad P_T = 49 \mu\text{m}.$$

Grenzmaße:  $G_{oB} = 60,030 \text{ mm}$ ,  $G_{uB} = 60,000 \text{ mm}$ ,  $G_{oW} = 59,990 \text{ mm}$ ,  $G_{uW} = 59,971 \text{ mm}$ .

**5. Plausibilität:**  $P_o > 0$ ,  $P_u > 0 \rightarrow$  echte Spielpassung, Spiel stets zwischen  $10 \mu\text{m}$  und  $59 \mu\text{m}$  – das Bauteil lässt sich verschieben, ohne spürbar zu klappern. Passt zur geforderten Funktion.

## 2.8 Oberflächenkennwerte: Rauheit

Neben Maß und Form spielt auch die **Mikrogeometrie** der Oberfläche eine Rolle – sie beeinflusst Reibung, Verschleiß und Dichtwirkung. Man unterscheidet Gestaltabweichungen 1. Ordnung (Formabweichung) bis 6. Ordnung (Gefügestruktur); die eigentliche **Rauheit** entspricht den Ordnungen 3 bis 5 und entsteht durch das Fertigungsverfahren selbst (Werkzeugriefen, Kornbrüche).

| Gestaltabweichung<br>(als Profilschnitt überhöht dargestellt)                                                                                 | Beispiele für<br>die Art der<br>Abweichung | Beispiele für die<br>Entstehungsursache                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Ordnung: Formabweichungen<br>                             | Unebenheit<br>Unrundheit                   | Fehler in den Führungen der Werkzeugmaschine, Durchbiegung der Maschine oder des Werkstückes, falsche Einspannung des Werkstückes, Härteverzug, Verschleiß |
| 2. Ordnung: Welligkeit<br>                                 | Wellen                                     | Außermittige Einspannung oder Formfehler eines Fräasers, Schwingungen der Werkzeugmaschine oder des Werkzeuges                                             |
| 3. Ordnung:<br>                                            | Rauheit                                    | Form der Werkzeugschneide, Vorschub oder Zustellung des Werkzeuges                                                                                         |
| 4. Ordnung:<br>                                            |                                            | Vorgang der Spanbildung (Reißspan, Scherspan, Aufbauschneide), Werkstoffverformung beim Sandstrahlen, Knospenbildung bei galvanischer Behandlung           |
| 5. Ordnung:<br>nicht mehr in einfacher Weise<br>bildlich darstellbar                                                                          |                                            | Kristallisationsvorgänge, Veränderung der Oberfläche durch chemische Einwirkung (z.B. Beizen), Korrosionsvorgänge                                          |
| 6. Ordnung:<br>nicht mehr in einfacher Weise bildlich<br>darstellbar                                                                          | Gitteraufbau<br>des<br>Werkstoffes         | Physikalische und chemische Vorgänge im Aufbau der Materie, Spannungen und Gleitungen im Kristallgitter                                                    |
|  Überlagerung der Gestaltabweichungen<br>1. bis 4. Ordnung |                                            |                                                                                                                                                            |

**Bild 2-11** Beispiele für Gestaltabweichungen (nach DIN 4760)

Abbildung 8: Beispiele für Gestaltabweichungen 1. bis 6. Ordnung nach DIN 4760, mit typischen Entstehungsursachen. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 2-11, S. 37.

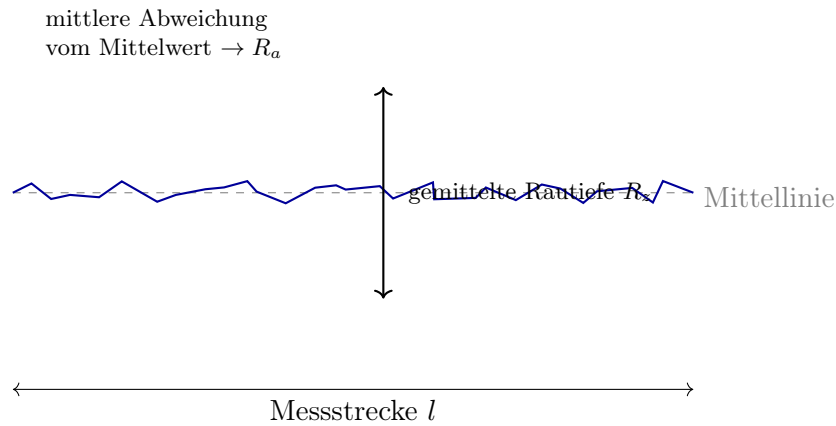


Abbildung 9: Vereinfachtes Rauheitsprofil: Der **Mittenrauwert**  $R_a$  ist der arithmetische Mittelwert der Beträge aller Abweichungen von der Mittellinie über die Messstrecke  $l$ ; die **gemittelte Rautiefe**  $R_z$  ist der Mittelwert der Einzelrautiefen aus fünf aneinander-grenzenden Einzelmessstrecken.

**Faustformel** zur Abschätzung der zulässigen Rautiefe aus der Maßtoleranz:

$$R_z \leq k \cdot T$$

mit Erfahrungswert  $k \approx 0,5$  (keine besonderen Anforderungen),  $0,25$  (gering),  $0,1$  (hoch) bzw.  $0,05$  (sehr hohe Anforderung an die Passgenauigkeit).

#### Achtung!

$R_a$  und  $R_z$  sind **nicht** über eine feste Formel ineinander umrechenbar – es gibt nur den Erfahrungswert  $R_a \approx \frac{1}{3} \dots \frac{1}{7} R_z$ . Ist in der Aufgabe eine bestimmte Kenngröße gefordert, übernimm genau diese; rechne im Zweifel nicht eigenmächtig um.

## 2.9 Mini-Aufgaben zum Selbstrechnen

### Mini-Aufgabe

Bestimme für eine Bohrung  $\varnothing 25$  H7 (nach Roloff/Matek TB 2-4:  $ES = +21 \mu\text{m}$ ,  $EI = 0$ ) die Grenzmaße  $G_{oB}$  und  $G_{uB}$  sowie die Maßtoleranz  $T_B$ .

### Lösung

$$G_{oB} = N + ES = 25,000 + 0,021 = 25,021 \text{ mm}$$

$$G_{uB} = N + EI = 25,000 + 0 = 25,000 \text{ mm}$$

$$T_B = ES - EI = 21 - 0 = 21 \mu\text{m}$$

### Mini-Aufgabe

Für eine Passung  $\varnothing 25$  H7/n6 gilt nach Roloff/Matek TB 2-4:  $ES = +21 \mu\text{m}$ ,  $EI = 0$ ,  $es = +28 \mu\text{m}$ ,  $ei = +15 \mu\text{m}$ . Bestimme  $P_o$ ,  $P_u$  und die Passungsart.

## Lösung

$$P_o = ES - ei = 21 - 15 = +6 \mu\text{m}$$

$$P_u = EI - es = 0 - 28 = -28 \mu\text{m}$$

Da  $P_o > 0$  und  $P_u < 0$ : **Übergangspassung**. Kontrolle:  $P_T = 6 - (-28) = 34 \mu\text{m} = T_B + T_W = 21 + 13 = 34 \mu\text{m} \checkmark$

## 2.10 Zusammenfassung Kapitel 2

### Das Wichtigste aus Kapitel 2

- **Bohrung = Großbuchstaben** ( $ES, EI, N + ES = G_{oB}, N + EI = G_{uB}$ ), **Welle = Kleinbuchstaben** ( $es, ei, N + es = G_{oW}, N + ei = G_{uW}$ ). Maßtoleranz  $T = G_o - G_u$  ist immer positiv.
- **Toleranzklasse** = Grundabmaß-Buchstabe (Lage, A...ZC bzw. a...zc) + IT-Grad (Größe, IT01...IT18), z. B. H7 oder g6.
- **Passung**  $P_o = ES - ei, P_u = EI - es, P_T = P_o - P_u = T_B + T_W$ . Spielpassung:  $P_o > 0, P_u \geq 0$ . Übergangspassung:  $P_o \geq 0, P_u < 0$ . Übermaßpassung:  $P_o \leq 0, P_u < 0$  (Übermaß als positive Größe:  $\ddot{U}_o = -P_u, \ddot{U}_u = -P_o$ ).
- **System Einheitsbohrung** (Bohrung=H, Standard) vs. **System Einheitswelle** (Welle=h).
- **Lösungsrezept Passungsrechnung**: Funktion analysieren  $\rightarrow$  Passungsart aus TB 2-9  $\rightarrow$  Grenzabmaße aus TB 2-4  $\rightarrow P_o/P_u/P_T$  berechnen  $\rightarrow$  Plausibilität prüfen.
- **Oberfläche**:  $R_a$  = mittlere Abweichung von der Mittellinie,  $R_z$  = gemittelte Rautiefe; Faustformel  $R_z \leq k \cdot T$ .  $R_a$  und  $R_z$  sind nicht direkt ineinander umrechenbar.

## 3 Festigkeitsberechnung

### Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Belastung und Beanspruchung unterscheiden und den zeitlichen Verlauf einer Beanspruchung (ruhend, schwellend, wechselnd) den drei Bach'schen Lastfällen zuordnen
- die Schwingspiel-Kenngrößen Mittelspannung  $\sigma_m$ , Ausschlagsspannung  $\sigma_a$  und Spannungsverhältnis  $R$  berechnen
- Nennspannungen für Zug/Druck, Biegung, Torsion und Abscheren aufstellen und eine Vergleichsspannung nach GEH bzw. NH bilden
- einen statischen Festigkeitsnachweis ( $S_F, S_B$ ) führen
- die Wöhlerlinie und das Smith-Diagramm deuten und die Wechselfestigkeiten  $\sigma_{zdw}, \sigma_{bdw}, \tau_{tdw}$  eines Werkstoffs bestimmen
- vom Werkstoff- zum Bauteilkennwert rechnen: Kerbwirkungszahl  $\beta_k$ , Konstruktionsfaktor  $K_D$ , Gestaltwechselfestigkeit  $\sigma_{bGW}$  und Gestaltausschlagfestigkeit  $\sigma_{bGA}$
- einen vollständigen dynamischen Dauerfestigkeitsnachweis  $S_D = \sigma_{bGA}/\sigma_{ba}$  durchführen

In der Elastostatik (Technische Mechanik II) hast du gelernt, Spannungen zu berechnen und mit einer zulässigen Spannung zu vergleichen:  $\sigma \leq \sigma_{\text{zul}}$ . Das genügt, solange eine Last *ruhend* anliegt. Reale Maschinen aber *schwingen*: Eine Getriebewelle dreht sich tausendmal in der Minute, jede Faser am Umfang wird bei jeder Umdrehung einmal auf Zug und einmal auf Druck belastet. Nach Millionen solcher Lastwechsel bricht das Bauteil – bei einer Spannung, die *weit unterhalb* der Streckgrenze liegt und die es statisch mühelos ausgehalten hätte. Man nennt das **Ermüdung** oder **Dauerbruch**.

#### WICHTIG!

Der weitaus größte Teil aller Maschinenbrüche ist kein Gewaltbruch, sondern ein **Ermüdungsbruch** unter schwingender Last. Ein rein statischer Nachweis  $\sigma \leq R_e/S$  übersieht genau diese Versagensart. Dieses Kapitel liefert das Werkzeug, um Bauteile gegen Ermüdung auszulegen – die **Gestaltfestigkeits-Systematik** nach Roloff/Matek. Sie ist das fachliche Herzstück des Buchs und wird in Kapitel 8 (Wellen) 1:1 wiederverwendet.

### 3.1 Belastung, Beanspruchung und die drei Lastfälle

Zuerst zwei Begriffe sauber trennen, die im Alltag oft vermischt werden:

**Belastung** ist die von außen wirkende Größe: eine Kraft  $F$ , ein Biegemoment  $M_b$ , ein Torsionsmoment  $T$ .

**Beanspruchung** ist die daraus im Werkstoff entstehende **Spannung** ( $\sigma$ ,  $\tau$ ). Sie hängt zusätzlich von der Bauteilgeometrie (Querschnitt, Kerben) ab.

Dieselbe Belastung erzeugt in einem dünnen Stab eine hohe, in einem dicken eine geringe Beanspruchung. Der Festigkeitsnachweis vergleicht immer *Beanspruchung* mit *Festigkeit* – nie die Belastung direkt.

#### 3.1.1 Zeitlicher Verlauf und die Bach'schen Lastfälle

Entscheidend für die Ermüdung ist, wie sich die Beanspruchung *über der Zeit* ändert. Man unterscheidet nach C. Bach drei Grundfälle:

- **Lastfall I – ruhend (statisch):** Die Spannung wird einmal aufgebracht und bleibt konstant. Nur hier gilt der rein statische Nachweis.
- **Lastfall II – schwellend:** Die Spannung schwankt zwischen null und einem Maximalwert, *ohne* das Vorzeichen zu wechseln (z. B. Anfahren aus dem Stillstand).
- **Lastfall III – wechselnd:** Die Spannung durchläuft bei jedem Zyklus die Nulllinie und wechselt das Vorzeichen (Zug  $\leftrightarrow$  Druck). Der klassische Fall der rotierenden, umlaufbiegebeanspruchten Welle.

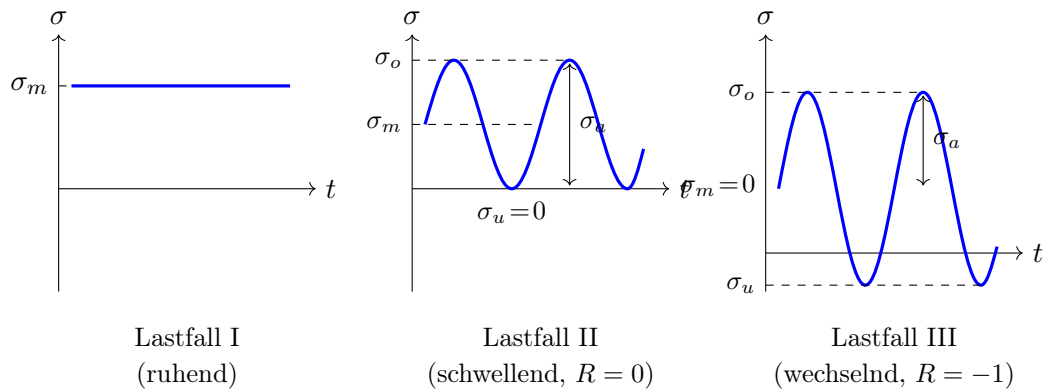


Abbildung 10: Die drei Bach'schen Lastfälle: ruhend (I), schwellend (II) und rein wechselnd (III). Eingetragen sind Ober- und Unterspannung  $\sigma_o$ ,  $\sigma_u$ , die Mittelspannung  $\sigma_m$  und die Ausschlagspannung  $\sigma_a$ .

### 3.1.2 Schwingenspiel-Kenngrößen

Jedes Schwingenspiel (Lastzyklus) wird durch Ober- und Unterspannung  $\sigma_o$ ,  $\sigma_u$  beschrieben. Daraus leiten sich vier weitere Kenngrößen ab:

**Mittelspannung, Ausschlagspannung, Spannungsverhältnis:**

$$\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}, \quad \boxed{\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2}}, \quad R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}.$$

- $\sigma_m$ : Mittelspannung – der konstante „Sockel“, um den geschwungen wird.
- $\sigma_a$ : Ausschlag- oder Amplitudenspannung – der halbe Schwingweg. **Sie** ist für die Ermüdung maßgebend.
- $R$ : Spannungsverhältnis – eine dimensionslose Kennzahl für den Lastfall.

Es gilt stets  $\sigma_o = \sigma_m + \sigma_a$  und  $\sigma_u = \sigma_m - \sigma_a$ .

Das Spannungsverhältnis  $R$  ordnet den Lastfall eindeutig zu:

Lastfall am Spannungsverhältnis  $R$  ablesen

| Bereich          | $R$          | $\sigma_m$              | Lastfall              |
|------------------|--------------|-------------------------|-----------------------|
| ruhend           | $R = 1$      | $\sigma_m = \sigma_o$   | I                     |
| reine Schwellung | $R = 0$      | $\sigma_m = \sigma_o/2$ | II                    |
| Wechselbereich   | $-1 < R < 0$ | $\sigma_m \neq 0$       | (zwischen II und III) |
| reiner Wechsel   | $R = -1$     | $\sigma_m = 0$          | III                   |

Reine Wechselbeanspruchung ( $R = -1$ ,  $\sigma_m = 0$ ) und reine Schwellbeanspruchung ( $R = 0$ ) sind die beiden Referenzfälle, auf die sich die tabellierte Werkstofffestigkeiten beziehen.

**Achtung!**

**Klausurfalle Lastfall-Verwechslung.** Kriterium für „wechselnd“ ist der **Vorzeichenwechsel** von  $\sigma_u$  zu  $\sigma_o$ , nicht bloß „schwankende Last“. Schwankt eine Torsion zwischen  $T_u = 0$  und  $T_o$ , so ist  $R = 0$  – das ist **schwellend (Lastfall II)**, nicht wechselnd! Umgekehrt ist ein

Bauteil mit  $\sigma_m \neq 0$  nicht automatisch Fall I (ruhend) – auch dynamische Lasten haben oft eine Mittelspannung ungleich null.

### 3.2 Nennspannungen – kurze Wiederholung

Bevor wir Beanspruchungen bewerten, müssen wir sie berechnen. Die Nennspannungen aus der Technischen Mechanik in kompakter Übersicht:

#### Grundbeanspruchungsarten und ihre Nennspannungen:

| Beanspruchung | Nennspannung                 | Querschnittswert | Kreis (Durchm. $d$ )       |
|---------------|------------------------------|------------------|----------------------------|
| Zug / Druck   | $\sigma_{z,d} = \frac{F}{A}$ | $A$              | $A = \frac{\pi d^2}{4}$    |
| Biegung       | $\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$ | $W_b$            | $W_b = \frac{\pi d^3}{32}$ |
| Torsion       | $\tau_t = \frac{T}{W_t}$     | $W_t$            | $W_t = \frac{\pi d^3}{16}$ |
| Abscheren     | $\tau_s = \frac{F_s}{A}$     | $A$              | $A = \frac{\pi d^2}{4}$    |

$A$ : Querschnittsfläche,  $W_b$ : axiales Widerstandsmoment,  $W_t$ : polares (Torsions-)Widerstandsmoment.

$W_t = 2 W_b$  beim Kreis

Merke dir für den Kreisquerschnitt: das Torsionswiderstandsmoment ist doppelt so groß wie das Biege- und Widerstandsmoment,  $W_t = \pi d^3/16 = 2 \cdot (\pi d^3/32) = 2 W_b$ . Beide brauchst du in fast jeder Wellenrechnung.

### 3.3 Vergleichsspannung – GEH oder NH?

Wirken Biegung und Torsion gleichzeitig (der Normalfall bei Wellen), liegen  $\sigma_b$  und  $\tau_t$  zusammen vor. Um sie mit *einer* einachsigen Festigkeit vergleichen zu können, fassen wir sie zu einer **Vergleichsspannung**  $\sigma_v$  zusammen. Welche Festigkeitshypothese man wählt, hängt vom Werkstoffverhalten ab.

**Gestaltänderungsenergie-Hypothese (GEH)** – für **zähe** Werkstoffe (Stahl, die meisten Metalle):

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \tau_t^2}$$

**Normalspannungshypothese (NH)** – für **spröde** Werkstoffe (Grauguss, gehärtete/spröde Stähle):

$$\sigma_v = \frac{1}{2} \left[ \sigma_b + \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \tau_t^2} \right]$$

#### WICHTIG!

**Faustregel:** zäh  $\Rightarrow$  GEH, spröde  $\Rightarrow$  NH. Zähe Werkstoffe versagen durch Fließen (Schubspannungen lösen es aus – deshalb der Faktor 3 vor  $\tau^2$ ), spröde durch Trennbruch (die größte

Normalspannung entscheidet). Für den Wellen-Standardfall aus Stahl ist  $\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2}$  die Formel, die du auswendig können musst.

Bei unterschiedlichen Zeitverläufen von Biegung und Torsion korrigiert das **Anstrengungsverhältnis**  $\alpha_0$  die Schubspannung:  $\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3(\alpha_0 \tau_t)^2}$ . Richtwerte:  $\alpha_0 \approx 0,7$  (Biegung wechselnd, Torsion ruhend/schwellend),  $\approx 1,0$  (beide gleicher Lastfall),  $\approx 1,5$  (Biegung ruhend, Torsion wechselnd). Ohne gegenteilige Angabe rechnest du mit  $\alpha_0 = 1$ .

### 3.4 Statischer Festigkeitsnachweis

Der statische Nachweis stellt sicher, dass das Bauteil beim einmaligen Aufbringen der *Maximallast* weder fließt noch bricht. Man vergleicht die größte auftretende Spannung mit der Werkstofffestigkeit.

#### Statische Sicherheiten:

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{\max}} \geq S_{F,\min} \quad (\text{gegen Fließen, zähe Werkstoffe})$$

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_{\max}} \geq S_{B,\min} \quad (\text{gegen Bruch})$$

- $R_e$ : Streckgrenze (bei Werkstoffen ohne ausgeprägte Streckgrenze die 0,2 %-Dehngrenze  $R_{p0,2}$ ).
- $R_m$ : Zugfestigkeit.
- $\sigma_{\max}$ : größte vorhandene (Vergleichs-)Spannung.

#### Mindestsicherheiten (nach Roloff/Matek, TB 3-14a)

Für Walz- und Schmiedestähle gelten als Richtwerte:

$$S_{F,\min} = 1,5, \quad S_{B,\min} = 2,0, \quad S_{D,\min} = 1,5.$$

Bei Eisengusswerkstoffen liegen sie höher (etwa 1,9–2,8).  $S_D$  ist die Dauerfestigkeitssicherheit aus Abschnitt 3.7.

#### Statischer Nachweis eines Zugstabs

Ein Zugstab aus S235JR (Normdurchmesser  $d_N = 16 \text{ mm}$ ) hat den Durchmesser  $d = 16 \text{ mm}$  und wird mit der vorwiegend ruhenden Zugkraft  $F = 25 \text{ kN}$  belastet. Werkstoffwerte (TB 1-1):  $R_e = 235 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_m = 360 \text{ N/mm}^2$ .

**Gesucht:** Zugspannung  $\sigma_z$  sowie die Sicherheiten  $S_F$  und  $S_B$ . Reicht das Bauteil?

#### Lösung

##### 1. Querschnittsfläche:

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (16 \text{ mm})^2 = 201,1 \text{ mm}^2.$$

##### 2. Zugspannung:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{25\,000 \text{ N}}{201,1 \text{ mm}^2} = 124,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$



### 3. Sicherheit gegen Fließen:

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_z} = \frac{235}{124,3} = 1,89 \geq 1,5 \checkmark$$

### 4. Sicherheit gegen Bruch:

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_z} = \frac{360}{124,3} = 2,90 \geq 2,0 \checkmark$$

**Kontrolle:** Beide Sicherheiten liegen über ihren Mindestwerten. Der Stab ist statisch ausreichend gegen Fließen und Bruch gesichert.

### Lastfall-Zuordnung an einer Torsionswelle

Eine Getriebewelle ( $d = 20 \text{ mm}$ ) überträgt beim Anfahren aus dem Stillstand ein Torsionsmoment, das zwischen  $T_o = 120 \text{ Nm}$  und  $T_u = 0$  schwankt (nur ein Drehsinn).

**Gesucht:** Nennspannung  $\tau_o$ , die Kenngrößen  $\tau_m$ ,  $\tau_a$ ,  $R$  und der Bach'sche Lastfall.

### Lösung

#### 1. Torsionswiderstandsmoment:

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi (20 \text{ mm})^3}{16} = 1570,8 \text{ mm}^3.$$

#### 2. Oberspannung (mit $T_o = 120 \text{ Nm} = 120\,000 \text{ Nmm}$ ):

$$\tau_o = \frac{T_o}{W_t} = \frac{120\,000 \text{ Nmm}}{1570,8 \text{ mm}^3} = 76,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \tau_u = \frac{T_u}{W_t} = 0.$$

#### 3. Kenngrößen:

$$\tau_m = \frac{\tau_o + \tau_u}{2} = 38,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \tau_a = \frac{\tau_o - \tau_u}{2} = 38,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad R = \frac{\tau_u}{\tau_o} = 0.$$

#### 4. Lastfall: $R = 0$ und kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ reine **Schwellbeanspruchung, Bach'scher Lastfall II.**

**Kontrolle:** Bei reiner Schwellung ist stets  $\tau_m = \tau_a$  (der Schwingweg reicht exakt von 0 bis  $\tau_o$ ) – das bestätigt die Rechnung. **Nicht** Lastfall III: das Moment wechselt nie das Vorzeichen.

### Ausschlag-, Mittelspannung und Spannungsverhältnis

An einem Bauteil werden Ober- und Unterspannung gemessen:  $\sigma_o = 180 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_u = -60 \text{ N/mm}^2$ .

**Gesucht:**  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$ ,  $R$  und der Beanspruchungsbereich.

### Lösung

#### 1. Mittel- und Ausschlagspannung:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} = \frac{180 + (-60)}{2} = 60 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2} = \frac{180 - (-60)}{2} = 120 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

#### 2. Spannungsverhältnis:

$$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} = \frac{-60}{180} = -0,33.$$

**3. Bereich:** Es liegt ein Vorzeichenwechsel vor ( $-1 < R < 0$ )  $\Rightarrow$  **Wechselbeanspruchung**. Da aber  $\sigma_m \neq 0$  ist, handelt es sich *nicht* um reine Wechselbeanspruchung (die läge nur bei  $R = -1$  vor).

**Kontrolle:** Rückrechnung  $\sigma_o = \sigma_m + \sigma_a = 60 + 120 = 180 \checkmark$  und  $\sigma_u = \sigma_m - \sigma_a = 60 - 120 = -60 \checkmark$ .

### 3.5 Dauerfestigkeit: Wöhlerlinie und Wechselfestigkeiten

Nun zum Kern des Kapitels. Wie viele Lastwechsel ein Bauteil bei gegebener Ausschlagspannung erträgt, zeigt der **Wöhlerversuch**: mehrere gleiche Proben werden mit unterschiedlichen Amplituden schwingend belastet, bis sie brechen. Trägt man die ertragene Lastspielzahl  $N$  über der Spannungsamplitude auf (doppellogarithmisch), erhält man die **Wöhlerlinie**.

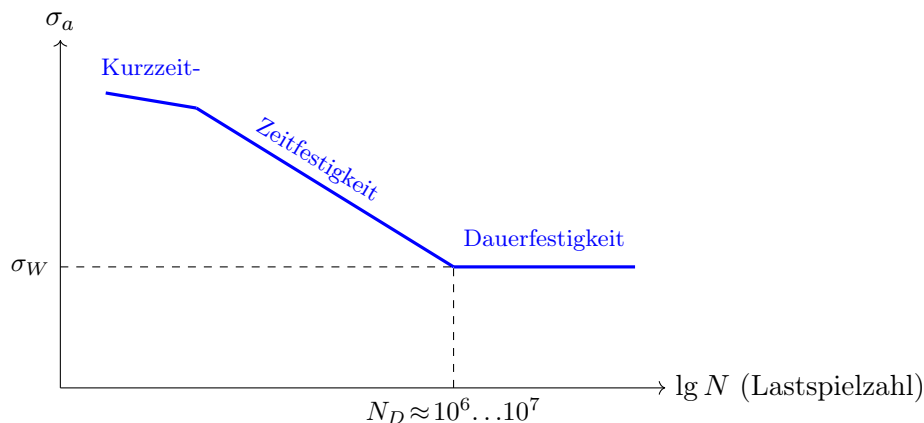


Abbildung 11: Wöhlerlinie (qualitativ, doppellogarithmisch). Unterhalb der Ausschlagspannung  $\sigma_W$  erträgt das Bauteil beliebig viele Lastwechsel – es ist *dauerfest*. Der abfallende Ast ist der Zeitfestigkeitsbereich.

Ab der **Grenzlastspielzahl**  $N_D$  (bei Stahl rund  $10^6$  bis  $10^7$ ) fällt die Wöhlerlinie nicht weiter ab: Liegt die Amplitude unter der **Dauerfestigkeit**  $\sigma_W$ , hält das Bauteil (theoretisch) unendlich lange. Die auf reine Wechselbeanspruchung bezogene Dauerfestigkeit heißt **Wechselfestigkeit**.

Jede Beanspruchungsart hat ihre eigene Wechselfestigkeit – tabelliert in TB 1-1 für den Normdurchmesser  $d_N = 16$  mm:

**Wechselfestigkeiten des Werkstoffs** (bei  $d_N$ ):

$$\sigma_{zdW} \text{ (Zug/Druck)}, \quad \sigma_{bW} \text{ (Biegung)}, \quad \tau_{tW} \text{ (Torsion)}.$$

**Faustformeln** (DIN 743, Rundstahl) zur Überschlagsrechnung:

$$\sigma_{bW} \approx 0,5 R_m, \quad \sigma_{zdW} \approx 0,4 R_m, \quad \tau_{tW} \approx 0,3 R_m.$$

Bei abweichendem Bauteildurchmesser  $d \neq d_N$  werden die Werte mit dem **technologischen Größeneinflussfaktor**  $K_t$  umgerechnet (siehe Beispiel 4).

### 3.5.1 Das Smith-Diagramm

Die Wechselfestigkeit gilt nur für  $\sigma_m = 0$ . Liegt eine Mittelspannung vor, erträgt das Bauteil eine kleinere Amplitude. Diesen Zusammenhang stellt das **Dauerfestigkeits-Schaubild nach Smith** dar: über der Mittelspannung  $\sigma_m$  (Abszisse) werden die ertragbaren Ober- und Unterspannungen  $\sigma_o, \sigma_u$  aufgetragen.

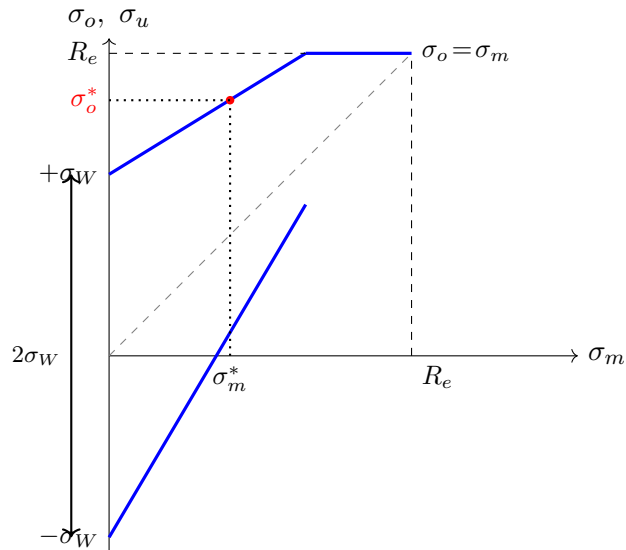


Abbildung 12: Vereinfachtes Smith-Diagramm. Ablesen: Über der Betriebs-Mittelspannung  $\sigma_m^*$  senkrecht nach oben bis zur oberen Grenzlinie; der abgelesene Wert  $\sigma_o^*$  ist die gerade noch dauerhaft ertragbare Oberspannung. Bei  $\sigma_m = 0$  beträgt die zulässige Amplitude  $\pm\sigma_W$ ; oben und rechts kappt die Streckgrenze  $R_e$  das Diagramm.

#### So liest du ein Smith-Diagramm

1. Betriebs-Mittelspannung  $\sigma_m$  auf der Abszisse suchen.
2. Senkrecht nach oben bis zur oberen Grenzlinie ( $\sigma_o$ ) und nach unten bis zur unteren ( $\sigma_u$ ).
3. Der *halbe* Abstand ist die dauerhaft ertragbare Amplitude  $\sigma_A = (\sigma_o - \sigma_u)/2$ .
4. Liegt die Grenzlinie oberhalb von  $R_e$ , kappt die Streckgrenze – dann entscheidet der statische Nachweis.

Kernaussage: Je größer  $\sigma_m$ , desto kleiner die ertragbare Amplitude.

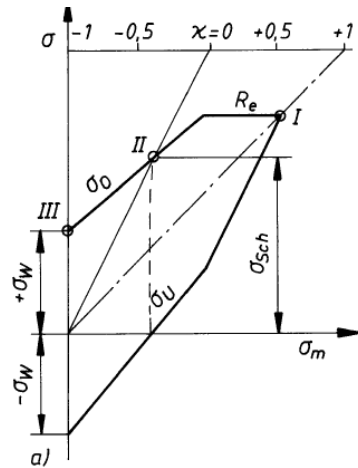


Abbildung 13: Dauerfestigkeitsschaubild (DFS) nach Smith: Auftragung von Ober- und Unterspannung über der Mittelspannung, begrenzt durch die Fließgrenze  $R_e$ . Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 3-19a, S. 56.

### 3.6 Vom Werkstoff zum Bauteil: der Konstruktionsfaktor

Die Wechselfestigkeit  $\sigma_{bW}$  gilt für eine polierte, ungekerbte Normprobe. Ein reales Bauteil ist aber *gekerbt* (Wellenabsätze, Nuten, Bohrungen), hat eine *raue Oberfläche* und ist meist *größer* als die Probe. Alle drei Effekte senken die ertragbare Amplitude. Wir müssen also von der **Werkstofffestigkeit** zur **Bauteilfestigkeit** umrechnen.

#### 3.6.1 Kerbwirkungszahl statt Formzahl

An einer Kerbe steigt die Spannung lokal an. Die rein geometrische Überhöhung beschreibt die **Formzahl**  $\alpha_k$ ; die tatsächlich *festigkeitswirksame* Überhöhung die **Kerbwirkungszahl**  $\beta_k$ .

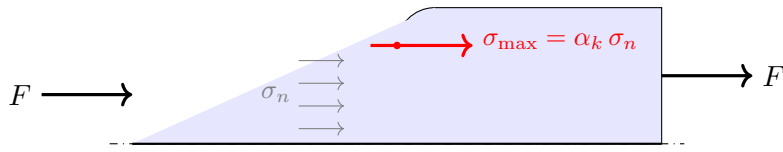
**Formzahl** (rein geometrisch, werkstoffunabhängig):

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}$$

**Kerbwirkungszahl** (festigkeitswirksam, berücksichtigt Stützwirkung):

$$\beta_k = \frac{\sigma_W}{\sigma_{GW}}, \quad \text{es gilt } 1 \leq \beta_k \leq \alpha_k.$$

$\sigma_{\max}$ : Spannungsspitze am Kerbgrund,  $\sigma_n$ : Nennspannung im Kerbquerschnitt.



Kerbe (Wellenabsatz)

Abbildung 14: Spannungsspitze am gekerbten Stab (qualitativ): Im ungestörten Querschnitt herrscht die Nennspannung  $\sigma_n$ , am Kerbgrund steigt sie auf  $\sigma_{\max} = \alpha_k \sigma_n$ . Für die Dauerfestigkeit ist die (kleinere) Kerbwirkungszahl  $\beta_k$  maßgebend.

#### Achtung!

**Zwei häufige Fehler mit  $\beta_k$ .** Erstens:  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  verwechseln –  $\alpha_k$  ist rein geometrisch,  $\beta_k$  berücksichtigt die *Stützwirkung* des Werkstoffs und ist stets  $\leq \alpha_k$ . Zweitens: die Kerbwirkungszahl wird **immer auf die Wechselfestigkeit** angewendet ( $\sigma_{bGW} = \sigma_{bW}/K_{Db}$ ) – **niemals** direkt auf die vorhandene Betriebsspannung  $\sigma_{ba}$ !

### TB 3-9 Kerbwirkungszahlen für

#### a) abgesetzte Rundstäbe

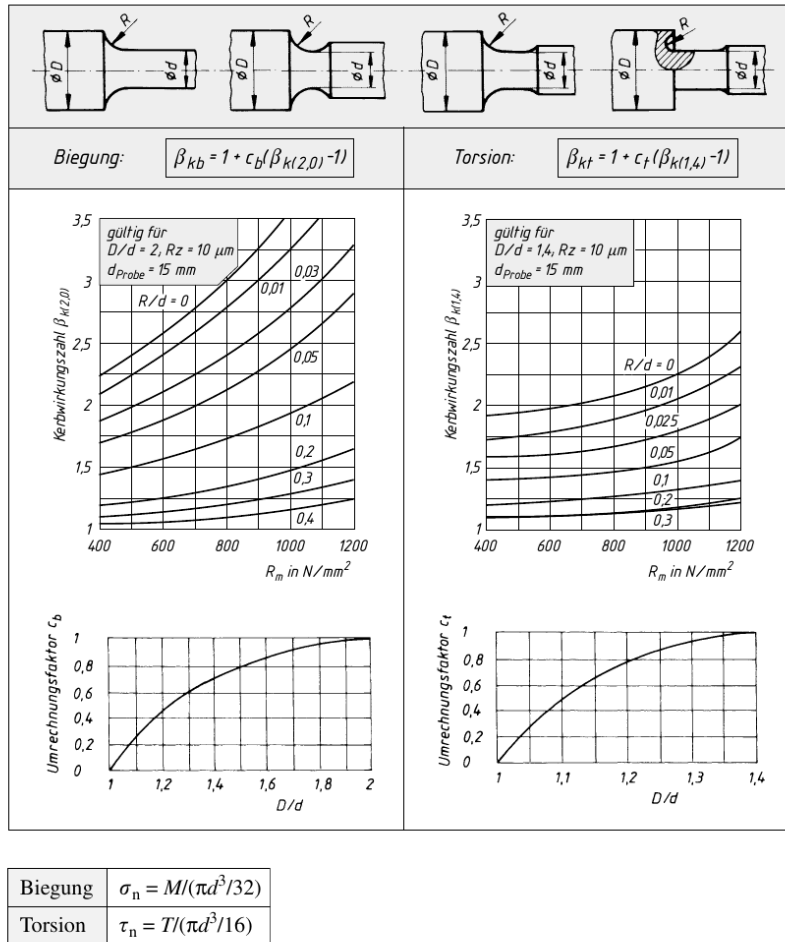


Abbildung 15: Kerbwirkungszahlen für abgesetzte Rundstäbe bei Biegung ( $\beta_{kb}$ ) und Torsion ( $\beta_{kt}$ ) in Abhängigkeit von  $R_m$  und Rundungsradius  $R/d$ , mit Umrechnungsfaktoren  $c_b$ ,  $c_t$ . Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, TB 3-9a.

### 3.6.2 Die drei Einflussfaktoren und der Konstruktionsfaktor $K_D$

Neben der Kerbwirkung wirken zwei weitere Einflüsse:

- **Größeneinflussfaktor**  $K_g$ : größere Bauteile sind (bezogene) schwächer (TB 3-11c).  $K_g \leq 1$ .
- **Oberflächeneinflussfaktor**  $K_O$  bzw.  $K_{Os}$ : raue Oberflächen mindern die Dauerfestigkeit (TB 3-10).  $K_O \leq 1$ .
- (Optional) **Oberflächenverfestigung**  $K_V$  (Nitrieren, Rollen, TB 3-12): erhöht die Festigkeit,  $K_V \geq 1$ ; ohne Behandlung  $K_V = 1$ .

Alle drei fasst der **Konstruktionsfaktor**  $K_D$  zusammen – getrennt für Biegung und Torsion:

**Konstruktionsfaktor** (Roloff/Matek Gl. 3.16):

$$K_{Db} = \frac{\beta_{kb}}{K_g} + \frac{1}{K_{Os}} - \frac{1}{K_V} \quad K_{Dt} = \frac{\beta_{kt}}{K_g} + \frac{1}{K_{Ot}} - \frac{1}{K_V}$$

Bei unbehandelter Oberfläche ( $K_V = 1$ ) vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$K_{Db} = \frac{\beta_{kb}}{K_g} + \frac{1}{K_O} - 1.$$

Damit ergibt sich die **Gestaltwechselfestigkeit** – die auf das reale Bauteil bezogene Wechselfestigkeit:

**Gestaltwechselfestigkeit** (Gl. 3.17):

$$\sigma_{bGW} = \frac{\sigma_{bW}}{K_{Db}} \quad \tau_{tGW} = \frac{\tau_{tW}}{K_{Dt}}$$

Sie ist der Kennwert, mit dem die Bauteil-Ausschlagsspannung verglichen wird – die Kerbwirkung steckt hier im Nenner, nicht in der Betriebsspannung.

### 3.7 Gestaltausschlagfestigkeit und dynamischer Nachweis

Die Gestaltwechselfestigkeit  $\sigma_{bGW}$  gilt für reine Wechselbeanspruchung ( $\sigma_m = 0$ ). Bei  $\sigma_m \neq 0$  ist die ertragbare Amplitude kleiner – das ist die **Gestaltausschlagfestigkeit**  $\sigma_{bGA}$ . Wie sie berechnet wird, hängt davon ab, *wie* sich die Beanspruchung bei einer Überlast weiter steigert. Das beschreibt der **Überlastungsfall**:

**Gestaltausschlagfestigkeit je Überlastungsfall** (Gl. 3.18):

- **Fall 1** ( $\sigma_m = \text{konst.}$ ):  $\sigma_{bGA} = \sigma_{bGW} - \psi_\sigma \cdot \sigma_{mn}$
- **Fall 2** ( $R = \text{konst.}$ , **Regelfall** bei Wellen/Getrieben):  $\sigma_{bGA} = \frac{\sigma_{bGW}}{1 + \psi_\sigma \cdot \sigma_{mn} / \sigma_{ba}}$
- **Fall 3** ( $\sigma_u = \text{konst.}$ , z. B. vorgespannte Federn):  $\sigma_{bGA} = \frac{\sigma_{bGW} - \psi_\sigma (\sigma_{mn} - \sigma_{ba})}{1 + \psi_\sigma}$

$\psi_\sigma$ : Mittelspannungsempfindlichkeit (TB 3-13,  $\psi_\sigma = a_M R_m + b_M$ ),  $\sigma_{mn}$ : (Vergleichs-)Mittelspannung.

#### WICHTIG!

**Fall 2** ( $R = \text{konst.}$ ) ist der **Regelfall** für Wellen und Getriebe: bei Überlast wachsen Mittel- und Ausschlagsspannung im gleichen Verhältnis, das Spannungsverhältnis  $R$  bleibt konstant. Er liefert meist die größte Sicherheit. Ohne gegenteilige Angabe rechnest du mit Fall 2.

#### WICHTIG!

**Sonderfall reine Wechselbeanspruchung.** Ist  $\sigma_m = 0$  (also  $\sigma_{mn} = 0$ ), so liefern *alle drei* Formeln denselben Wert:

$$\sigma_{bGA} = \sigma_{bGW} \quad (\text{da } \sigma_{mn} = 0).$$

Das nutzt Beispiel 4 aus.

Jetzt der eigentliche Nachweis – die Bauteil-Ausschlagsspannung  $\sigma_{ba}$  muss mit ausreichender Sicherheit unter der Gestaltausschlagfestigkeit liegen:

### Dynamischer Dauerfestigkeitsnachweis (Einzelspannung):

$$S_D = \frac{\sigma_{bGA}}{\sigma_{ba}} \geq S_{D,\min} = 1,5$$

Bei **kombinierter** Biegung und Torsion (GEH-Interaktion, Gl. 3.21):

$$\frac{1}{S_D} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bGA}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ta}}{\tau_{tGA}}\right)^2}.$$

### Achtung!

Im Nenner von  $S_D$  steht die **Ausschlagsspannung**  $\sigma_{ba}$  – nicht  $\sigma_o$  oder  $\sigma_{\max}$ ! Setzt du versehentlich die Oberspannung ein, wird  $S_D$  systematisch zu klein und du verwirfst ein eigentlich taugliches Bauteil.

### Lösungsrezept: Dynamischer Festigkeitsnachweis in 6 Schritten

1. **Werkstoffwerte** bei  $d_N$  aus TB 1-1 ablesen und mit  $K_t$  auf den Bauteildurchmesser umrechnen:  $R_m$ ,  $R_p$ ,  $\sigma_{bW}$  (bzw.  $\tau_{tW}$ ).
2. **Betriebsspannungen** berechnen:  $\sigma_{ba} = M_{ba}/W_b$  (und ggf.  $\sigma_{bm}$ ,  $\tau_{ta}$ ,  $\tau_{tm}$ ).
3. **Einflussfaktoren**  $\beta_k$ ,  $K_g$ ,  $K_O$ , ( $K_V$ ) aus TB 3-8 bis TB 3-12 bestimmen und daraus  $K_{Db}$  (Gl. 3.16) berechnen.
4. **Gestaltwechselfestigkeit**  $\sigma_{bGW} = \sigma_{bW}/K_{Db}$ .
5. **Gestaltausschlagfestigkeit**  $\sigma_{bGA}$  je Überlastungsfall (Regelfall 2; bei  $\sigma_{bm} = 0$  ist  $\sigma_{bGA} = \sigma_{bGW}$ ).
6. **Sicherheit**  $S_D = \sigma_{bGA}/\sigma_{ba}$  bilden und mit  $S_{D,\min} = 1,5$  vergleichen.

### Kompletter dynamischer Nachweis: gekerbter Rundstab (C45E)

Der Absatz einer Welle aus C45E (vergütet) hat im Kerbquerschnitt den Durchmesser  $d = 30$  mm. Er wird rein **wechselnd** auf Biegung belastet mit dem Ausschlagmoment  $M_{ba} = 300$  Nm (also  $\sigma_{bm} = 0$ ).

**Werkstoff- und Einflusswerte:**  $R_{mN} = 700$ ,  $R_{eN} = 490$ ,  $\sigma_{bWN} = 350$  N/mm<sup>2</sup> (TB 1-1, bei  $d_N = 16$  mm); Kerbwirkungszahl  $\beta_{kb} = 1,8$  (abgelesen aus TB 3-8, abgesetzte Welle); Größeneinfluss  $K_g = 0,92$  (abgelesen aus TB 3-11c); Oberflächeneinfluss  $K_O = 0,90$  (abgelesen aus TB 3-10,  $R_z \approx 16$  µm); ohne Oberflächenverfestigung,  $K_V = 1$ .

**Gesucht:** dynamische Sicherheit  $S_D$ . Ist das Bauteil dauerhaft?

### Lösung

1. **Werkstoffwerte auf  $d = 30$  mm umrechnen** (Größeneinflussfaktor  $K_t$ , TB 3-11a, Vergütungsstahl):

$$K_t(R_m) = 1 - 0,26 \cdot \lg \frac{30}{16} = 0,929,$$

$$R_m = 0,929 \cdot 700 = 650,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{bW} = 0,929 \cdot 350 = 325,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

$$K_t(R_e) = 1 - 0,34 \cdot \lg \frac{30}{16} = 0,907,$$

$$R_p = 0,907 \cdot 490 = 444,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$



## 2. Betriebs-Ausschlagspannung:

$$W_b = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi (30)^3}{32} = 2650,7 \text{ mm}^3, \quad \sigma_{ba} = \frac{M_{ba}}{W_b} = \frac{300\,000 \text{ Nmm}}{2650,7 \text{ mm}^3} = 113,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

## 3. Konstruktionsfaktor (Gl. 3.16, mit $K_V = 1$ ):

$$K_{Db} = \frac{\beta_{kb}}{K_g} + \frac{1}{K_O} - 1 = \frac{1,8}{0,92} + \frac{1}{0,90} - 1 = 2,068.$$

## 4. Gestaltwechselfestigkeit (Gl. 3.17):

$$\sigma_{bGW} = \frac{\sigma_{bW}}{K_{Db}} = \frac{325,2}{2,068} = 157,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**5. Gestaltausschlagfestigkeit:** reine Wechselbeanspruchung,  $\sigma_{bm} = 0 \Rightarrow \sigma_{bGA} = \sigma_{bGW} = 157,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .

## 6. Dynamische Sicherheit:

$$S_D = \frac{\sigma_{bGA}}{\sigma_{ba}} = \frac{157,3}{113,2} = 1,39 < S_{D,\min} = 1,5 \quad (\text{nicht erfüllt})$$

Das Bauteil ist **nicht ausreichend dauerhaft**.

**Statischer Kontrollnachweis** (Biegung,  $\sigma_{bF} \approx 1,2 R_p$ ):

$$\sigma_{bF} = 1,2 \cdot 444,5 = 533,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad S_F = \frac{\sigma_{bF}}{\sigma_{ba}} = \frac{533,4}{113,2} = 4,71 \geq 1,5 \checkmark$$

## WICHTIG!

**Die Pointe:** Statisch ist die Welle mit  $S_F = 4,71$  komfortabel sicher – *dynamisch* versagt sie mit  $S_D = 1,39$  knapp den Nachweis. Genau diesen Fall übersieht ein rein statischer Überschlag! Abhilfe: größerer Kerbradius (senkt  $\beta_{kb}$ ), größerer Durchmesser oder Oberflächenverfestigung ( $K_V > 1$ ). Merksatz: **Statisch reicht – dynamisch nicht.**

## 3.8 Mini-Aufgaben

### Mini-Aufgabe

**Aufgabe 1.** Ein Zugstab aus E335 ( $d = 20 \text{ mm}$ , vorwiegend ruhend) trägt  $F = 60 \text{ kN}$ . Werkstoffwerte (TB 1-1):  $R_e = 335$ ,  $R_m = 570 \text{ N/mm}^2$ . Berechne  $\sigma_z$ ,  $S_F$  und  $S_B$ . Ist der Stab sicher?

### Lösung

$$A = \frac{\pi}{4} (20)^2 = 314,2 \text{ mm}^2, \quad \sigma_z = \frac{60\,000}{314,2} = 191,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$
$$S_F = \frac{335}{191,0} = 1,75 \geq 1,5 \checkmark, \quad S_B = \frac{570}{191,0} = 2,98 \geq 2,0 \checkmark$$

Beide Sicherheiten sind erfüllt – der Stab ist ausreichend gesichert.

### Mini-Aufgabe

**Aufgabe 2.** An einem Bauteil werden  $\sigma_o = 150 \text{ N/mm}^2$  und  $\sigma_u = -90 \text{ N/mm}^2$  gemessen. Bestimme  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$ ,  $R$  und den Beanspruchungsbereich.

### Lösung

$$\sigma_m = \frac{150 + (-90)}{2} = 30 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_a = \frac{150 - (-90)}{2} = 120 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad R = \frac{-90}{150} = -0,60.$$

Vorzeichenwechsel und  $-1 < R < 0 \Rightarrow$  **Wechselbeanspruchung** (nicht rein, da  $\sigma_m \neq 0$ ).

**Kontrolle:**  $\sigma_m + \sigma_a = 30 + 120 = 150 = \sigma_o \checkmark$ .

## 3.9 Zusammenfassung Kapitel 3

### Das Wichtigste aus Kapitel 3

- **Belastung** (außen:  $F$ ,  $M_b$ ,  $T$ )  $\neq$  **Beanspruchung** (innen:  $\sigma$ ,  $\tau$ ). Bauteile versagen meist durch **Ermüdung**, nicht durch Gewaltbruch.
- **Schwingspiel:**  $\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}$ ,  $\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2}$ ,  $R = \sigma_u / \sigma_o$ . Lastfall aus  $R$ : I ( $R = 1$ ), II ( $R = 0$ , schwellend), III ( $R = -1$ , rein wechselnd). Kriterium ist der Vorzeichenwechsel.
- **Vergleichsspannung:** zäh  $\Rightarrow$  GEH  $\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2}$ , spröde  $\Rightarrow$  NH.
- **Statischer Nachweis:**  $S_F = R_e / \sigma_{\max} \geq 1,5$ ,  $S_B = R_m / \sigma_{\max} \geq 2,0$ .
- **Gestaltfestigkeits-Kette:**

$$\sigma_{bW} \xrightarrow{K_{Db}=\beta_{kb}/K_g+1/K_O-1/K_V} \sigma_{bGW} = \frac{\sigma_{bW}}{K_{Db}} \xrightarrow{\text{Überlastungsfall}} \sigma_{bGA} \rightarrow S_D = \frac{\sigma_{bGA}}{\sigma_{ba}} \geq 1,5.$$

- $\beta_k$  (Kerbwirkungszahl,  $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$ ) wirkt **auf die Wechselfestigkeit**, nie auf die Betriebsspannung. Bei  $\sigma_{bm} = 0$  gilt  $\sigma_{bGA} = \sigma_{bGW}$ ; Überlastungsfall 2 ( $R = \text{konst.}$ ) ist der Regelfall.
- **Merksatz:** „Statisch reicht – dynamisch nicht.“ Der Dauerfestigkeitsnachweis ist bei schwingender Last der entscheidende.

Diese Systematik –  $\sigma_{bW} \rightarrow K_{Db} \rightarrow \sigma_{bGW} \rightarrow \sigma_{bGA} \rightarrow S_D$  – ist das Fundament der Wellenberechnung. In Kapitel 8 projizieren wir sie auf die gefährdeten Querschnitte realer Wellen und führen den Nachweis für Biegung **und** Torsion gemeinsam über die GEH-Interaktionsformel.

## 4 Schweißverbindungen

### Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Erklären, warum Schweißverbindungen stoffschlüssig und damit unlösbar sind, und die wichtigsten Verfahren den Kürzeln aus Zeichnungen zuordnen
- Stumpfstoß, T-Stoß und Überlappstoß sowie Stumpfnäht und Kehlnäht unterscheiden und skizzieren

- Das a-Maß einer Kehlnaht korrekt definieren und von der Schenkellänge abgrenzen
- Die rechnerische Nahtfläche  $A_w$  und die Nennspannungen  $\sigma_{\perp}$ ,  $\tau_{\parallel}$  für die gängigen Lastfälle berechnen
- Zusammengesetzte Beanspruchung über Vergleichsspannung oder Interaktionsgleichung nachweisen
- Einen vollständigen Dauerfestigkeitsnachweis nach DVS 1612 mit Kerbfalllinie, Spannungsverhältnis  $\kappa$  und Dickenbeiwert  $\beta$  durchführen

Eine geschweißte Verbindung lässt sich im Gegensatz zu einer Schraub- oder Nietverbindung nicht mehr zerstörungsfrei lösen – Grund- und Zusatzwerkstoff verschmelzen zu einem einzigen, durchgängigen Materialverbund. Genau das macht Schweißkonstruktionen so attraktiv für den **Leichtbau**: keine Überlappungen, keine Bohrungen, kein zusätzliches Verbindungselement, das nur Gewicht kostet, ohne selbst Last zu tragen. Der Preis dieser Effizienz ist, dass die Naht durch den lokalen Schmelzvorgang zugleich zur empfindlichsten Stelle des ganzen Bauteils wird – Gefügeveränderungen, Eigenspannungen und Kerbwirkung sammeln sich genau dort, wo du am wenigsten nachträglich korrigieren kannst. Dieses Kapitel zeigt dir, wie du eine Schweißnaht so bemisst, dass sie dieser Sonderrolle gerecht wird.

#### 4.1 Grundlagen: Wirkprinzip und Schweißverfahren

Eine **Schweißverbindung** ist eine **stoffschlüssige** Verbindung: Die Bauteile werden an der Fugestelle örtlich bis zum Schmelzen erhitzt (ggf. unter Zugabe von Zusatzwerkstoff) und verbinden sich beim Erstarren zu einem homogenen Gefüge. Das unterscheidet sie vom **Löten** (nur der Zusatzwerkstoff schmilzt, der Grundwerkstoff bleibt fest) und von allen **lösbaaren** Verbindungen wie Schrauben oder Stiften, die formschlüssig oder reibschlüssig wirken.

Für die Klausur reicht es, die Verfahrenskürzel aus Zeichnungen und Aufgabentexten wiederzuerkennen – die schweißtechnischen Details sind nicht Gegenstand dieses Skripts.

| Kürzel                                                                 | Verfahren                 | Kurzcharakteristik                                                            |
|------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Schmelzschweißen (Lichtbogen, ohne äußeren Druck)</i>               |                           |                                                                               |
| 111                                                                    | E-Hand                    | Lichtbogenhandschweißen mit umhüllter Stabelektrode                           |
| 135                                                                    | MAG                       | Metall-Aktivgasschweißen, aktives Schutzgas (z. B. CO <sub>2</sub> -Mischgas) |
| 131                                                                    | MIG                       | Metall-Inertgasschweißen, inertes Schutzgas (z. B. Argon)                     |
| 141                                                                    | WIG                       | Wolfram-Inertgasschweißen, nicht abschmelzende Wolframelektrode               |
| 121                                                                    | UP                        | Unterpulverschweißen, Lichtbogen unter schützender Pulverschüttung            |
| <i>Pressschweißen (mit Druck, oft ohne vollständiges Aufschmelzen)</i> |                           |                                                                               |
| –                                                                      | Widerstandspunktschweißen | punktuell Verschweißen von Blechen durch Stromwärme + Druck                   |
| –                                                                      | Rollennahtschweißen       | wie Punktschweißen, aber kontinuierliche Naht über Rollelektroden             |
| –                                                                      | Reibschweißen             | Wärme aus Reibung zweier rotierender/oszillierender Fügeflächen               |

Ob ein Bauteil überhaupt zuverlässig geschweißt werden kann, hängt von drei unabhängigen Faktoren ab: der **Schweißseignung** des Werkstoffs (chemische Zusammensetzung, insbesondere Kohlenstoffgehalt – unlegierte Baustähle wie S235 und S355 sind gut schweißgeeignet), der **Schweißsicherheit** der Konstruktion (Wanddicken, Kerbwirkung, Einspannbedingungen) und der **Schweißmöglichkeit** in der Fertigung (Zugänglichkeit, verfügbares Verfahren, Nahtvorbereitung). Erst wenn alle drei passen, spricht man von guter **Schweißbarkeit**.

Der lokale Schmelz- und Erstarrungsvorgang verändert das Gefüge in der sogenannten **Wärmeinflusszone (WEZ)** neben der eigentlichen Schweißnaht, erzeugt **Eigenstressungen** durch das ungleichmäßige Abkühlen und führt häufig zu geometrischem **Verzug**. All das macht die Naht – unabhängig von der reinen Nennspannung – zu einer ausgeprägten Kerbstelle mit reduzierter Dauerfestigkeit.

#### WICHTIG!

Die Schweißnaht ist praktisch immer der kritische Ort einer Schweißkonstruktion, nicht der ungestörte Grundwerkstoff daneben. Deshalb rechnest du in diesem Kapitel nicht mit den Werkstoffkennwerten  $\sigma_{bW}$  o. ä. des Grundwerkstoffs, sondern mit eigenen, nahtspezifischen zulässigen Spannungen, die die Kerbwirkung bereits einrechnen (Abschnitt „Zulässige Nahtspannungen“).

## 4.2 Stoß- und Nahtarten

Wie zwei Bauteile zueinander liegen (**Stoßart**) und wie die Naht selbst geformt ist (**Nahtart**), bestimmen zusammen, wie glatt die Kraft durch die Verbindung fließt – und damit maßgeblich die Kerbwirkung.

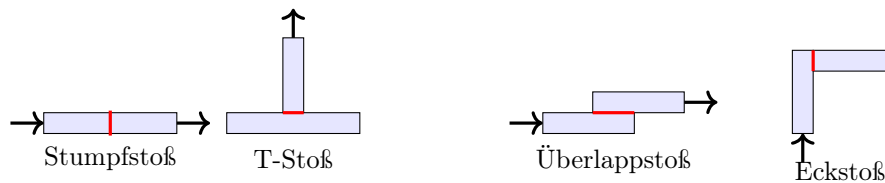


Abbildung 16: Grundlegende Stoßarten (schematisch, rot = Nahtlage). Beim Stumpfstoß verläuft der Kraftfluss (Pfeile) geradlinig, bei T-, Überlapp- und Eckstoß wird er umgelenkt – Ursache für die höhere Kerbwirkung dieser Stoßarten.

**Stumpfstoß und Stumpfnah:** Die Bauteile liegen stumpf, also in einer Ebene, gegeneinander. Je nach Blechdicke  $t$  wird die Fuge V-, Y-, HV- oder X-förmig vorbereitet (Fugenformen), damit der Zusatzwerkstoff bis zur Wurzel durchdringt. Bei vollständig durchgeschweißter Naht ist der Kraftfluss praktisch ungestört – die Stumpfnah ist deshalb, wo Anordnung und Zugänglichkeit es zulassen, die **bevorzugte** Nahtart: geringste Kerbwirkung, bester Kraftfluss, am einfachsten zerstörungsfrei prüfbar.

| Art der Schweißnahtvorbereitung | Schnitt | Darstellung | Werkstückdicke $t$<br>mm | Ausführung | Symbol<br>(nach ISO 2553) | Kennzahl-N | Winkel $\alpha, \beta$<br>Grad | Spalt $b$<br>mm | Steghöhe $c$<br>mm | Empfohlener Schweißprozess <sup>1)</sup> | Bemerkungen |
|---------------------------------|---------|-------------|--------------------------|------------|---------------------------|------------|--------------------------------|-----------------|--------------------|------------------------------------------|-------------|
| Kantenbördeln                   |         |             |                          |            |                           |            |                                |                 |                    |                                          |             |

Abbildung 17: Schweißnahtvorbereitung an Stählen nach DIN EN ISO 9692-1 (Auswahl): Kantenbördeln, I-Fuge, V-Fuge und Y-Fuge mit Werkstückdicke, Winkel und Spalt. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 6-11, S. 139.

**T-Stoß, Überlappstoß und Kehlnah:** Stehen die Bauteile rechtwinklig zueinander (T-Stoß) oder liegen sie überlappt aufeinander (Überlappstoß), braucht es keine aufwendige Nahtvorbereitung – die Kehlnah füllt einfach die entstehende Kehlfuge. Das spart Fertigungsaufwand, erkauft sich das aber mit einer Umlenkung des Kraftflusses und entsprechend höherer Kerbwirkung als bei der Stumpfnah. Nach der Nahtoberfläche unterscheidet man Flach-, Hohl- und Wölbnah; nach der Anzahl tragender Nähte einseitige und (die häufigere) **Doppelkehlnah**.

Die zentrale Kenngröße der Kehlnah ist das **a-Maß**:

Das **a-Maß** (rechnerische Nahtdicke) einer Kehlnah ist die **Höhe des größten einschreibbaren gleichschenkligen Dreiecks**, gemessen vom theoretischen **Wurzelpunkt** senkrecht zur Nahtoberfläche. Es ist die Größe, mit der du in allen folgenden Formeln rechnest – **nicht** die Schenkellänge  $z$  der Naht.

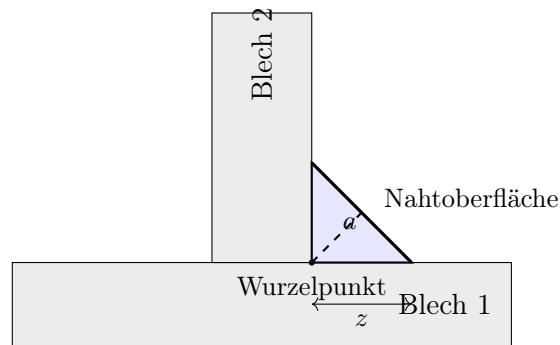


Abbildung 18: Kehlnahtquerschnitt am T-Stoß: Die rechnerische Nahtdicke  $a$  ist die Höhe des einschreibbaren gleichschenkligen Dreiecks vom Wurzepunkt zur Nahtoberfläche. Für die gleichschenklige Naht gilt  $a = z/\sqrt{2} \approx 0,7 z$  mit der Schenkellänge  $z$ .

### Achtung!

Verwechsle nicht  $a$ -Maß und Schenkellänge  $z$ ! In Zeichnungen wird oft  $z$  angegeben (die sichtbare Kantenlänge der Naht), gerechnet wird aber immer mit  $a \approx 0,7 z$ . Wer  $z$  direkt als  $a$  einsetzt, überschätzt die Nahtfläche  $A_w$  um rund 40 % und liegt damit auf der unsicheren Seite.

Die geometrisch ausgeführte Nahtlänge  $L$  ist nicht immer voll tragfähig: An den Nahtenden bleibt ein **Endkrater** – ein nicht vollwertiger Übergangsbereich von etwa der Länge  $a$  auf jeder Seite. Bei nicht umlaufenden Kehlnähten muss dieser Anteil abgezogen werden:

**Wirksame Nahtlänge** bei nicht umlaufender Kehlnaht:

$$l_{eff} = L - 2a$$

$L$  = ausgeführte (geometrische) Nahtlänge. Kein Abzug nötig bei geschlossenen, umlaufenden Nähten oder bei endkraterfreier Ausführung mit Auslaufblechen.

Für das  $a$ -Maß selbst gelten normative Grenzwerte, damit die Naht weder zu schwach (Wurzelfehler) noch unwirtschaftlich dick wird:

**Grenzwerte für das  $a$ -Maß der Kehlnaht** (Roloff/Matek, Buchseite 170):

$$3 \text{ mm} \leq a \leq 0,7 \cdot t_{min} \quad \text{und} \quad a \geq \sqrt{t_{max}} - 0,5$$

mit  $t_{min}$  = kleinste,  $t_{max}$  = größte beteiligte Bauteildicke ( $a, t$  jeweils in mm). Die Mindestnahtdicke liegt bei 2 mm im Maschinenbau bzw. 3 mm bei Handschweißung.

Gebräuchliche  $a$ -Maße, nach Roloff/Matek Buchseite 170

Zulässige  $a$ -Maße mit zugehöriger größtzulässiger Bauteildicke  $t_{max}$  in Klammern (jeweils in mm):

$$3 (12) \quad 3,5 (16) \quad 4 (20) \quad 4,5 (25) \quad 5 (30) \quad 6 (42) \quad 7 (56)$$

Faustregel: dünne Nähte anstreben – das Schweißgutvolumen wächst mit  $a^2$ , die Tragfähigkeit aber nur linear mit  $a$ .

### 4.3 Rechnerische Nahtfläche und Nahtspannungen

Für die Spannungsberechnung wird die Naht wie ein eigener, dünner Querschnitt behandelt – mit der rechnerischen Nahtdicke  $a$  als „Breite“ und der wirksamen Nahtlänge als „Länge“.

**Rechnerische Nahtfläche:**

$$\boxed{A_w = a \cdot l} \quad \text{bzw. bei mehreren Nähten} \quad A_w = \sum_i a_i l_i$$

Bei der **Doppelkehlnaht** (zwei tragende Nähte, z. B. beidseitig am T-Stoß) also  $A_w = 2 a l$  – nicht die einfache Naht ansetzen!

**Stumpfnaht (Basisfall):** Bei vollständig durchgeschweißter Stumpfnaht gilt  $a = t$  (Nahtdicke gleich Blechdicke), die Naht trägt näherungsweise wie das ungeschwächte Bauteil selbst:

$$\sigma_{\perp} = \frac{F}{a \cdot l} \quad (\text{Zug/Druck}), \quad \sigma_{\perp} = \frac{M}{W_{Naht}} \quad (\text{Biegung, analog Balkenbiegung}).$$

**Kehlnaht (Hauptfall im Maschinenbau):** Je nach Lastfall am Anschluss ergeben sich unterschiedliche Nennspannungen. Die folgende Tabelle fasst die wichtigsten Fälle für die Doppelkehlnaht am T-Stoß bzw. die Rundnaht zusammen:

Nennspannungen am Kehlnahtanschluss, nach Roloff/Matek Bild 6-46

| Lastfall          | Nennspannung                                 | Querschnittswert          |
|-------------------|----------------------------------------------|---------------------------|
| T-Stoß, Zug/Druck | $\sigma_{\perp} = \frac{F_z}{2 a h}$         | $A_w = 2 a h$             |
| T-Stoß, Biegung   | $\sigma_{\perp} = \frac{M_x}{W_x}$           | $W_x = \frac{1}{3} a h^2$ |
| T-Stoß, Schub     | $\tau_{\parallel} = \frac{F_y}{2 a h}$       | $A_w = 2 a h$             |
| Rundnaht, Zug     | $\sigma_{\perp} = \frac{F_z}{a \pi d}$       | –                         |
| Rundnaht, Biegung | $\sigma_{\perp} = \frac{M}{a \pi r^2}$       | –                         |
| Rundnaht, Torsion | $\tau_{\parallel t} = \frac{T}{2 a \pi r^2}$ | –                         |

$h$  = Nahthöhe (Höhe des T-Stoß-Anschlusses),  $d = 2r$  = Wellendurchmesser.  $W_x = \frac{1}{3} a h^2$  folgt aus  $I_x = \frac{1}{6} a h^3$  für die beiden seitlichen Nahtlinien.

Wirken mehrere Spannungskomponenten gleichzeitig (z. B. Biegung *und* Querkraft), musst du sie zu einer Vergleichsgröße zusammenfassen. Das Lehrbuch bietet dafür zwei gleichwertige Wege an:

**Vergleichsspannung** (Normalspannungshypothese für die Naht):

$$\sigma_{wv} = 0,5 \left( \sigma_{\perp} + \sqrt{\sigma_{\perp}^2 + 4 \tau_k^2} \right) \leq \sigma_{w,zul}$$

**Interaktionsgleichung** – als „sicherster“ Nachweis empfohlen, wenn  $\sigma_{\perp}$  und  $\tau_{\parallel}$  getrennt vorliegen:

$$\boxed{\left( \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{w,zul}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{\parallel}}{\tau_{w,zul}} \right)^2 \leq 1}$$

## Welchen Weg wählen?

Beide Formeln sind **Alternativen**, keine Ergänzung zueinander – wende immer nur eine der beiden an. In der Praxis ist die Interaktionsgleichung der bequemere Weg, weil  $\sigma_{w,zul}$  und  $\tau_{w,zul}$  ohnehin getrennt über die Kerbfalllinie ermittelt werden (nächster Abschnitt).

### 4.4 Zulässige Nahtspannungen nach DVS 1612

Die reine Nennspannung sagt noch nichts über die Sicherheit aus – entscheidend ist der Vergleich mit einer **nahtspezifischen** zulässigen Spannung, die die Kerbwirkung der jeweiligen Nahtausführung bereits enthält. Genau das leistet die Richtlinie **DVS 1612**, auf der die 22. Auflage von Roloff/Matek für den Maschinenbau-Nachweis aufbaut.

Der Grundgedanke: Jede Kombination aus Nahtart, Stoßart, Nachbearbeitung und Prüfumfang (Bewertungsgruppe nach DIN EN ISO 5817) wird im **Bauformenkatalog** einer **Kerbfalllinie** zugeordnet – einem Buchstaben von A (ungestörter Grundwerkstoff) bis F2 (sehr scharfe Kerbe). Je schärfer die Kerbe, desto niedriger die zulässige Spannung.

| Nr.:                                                | Darstellung | Beschreibung                                                                            | Nahtart                                                 | Nahtbearbeitung | Prüfart und -umfang <sup>1)</sup> |          |              | Bewertungsgruppe <sup>2)</sup> | Kerbfalllinie |
|-----------------------------------------------------|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------------------|----------|--------------|--------------------------------|---------------|
|                                                     |             |                                                                                         |                                                         |                 | 100 % zfP                         | 10 % zfP | Sichtprüfung |                                |               |
| Stumpf- und T-Stoßverbindungen, Normalbeanspruchung |             |                                                                                         |                                                         |                 |                                   |          |              |                                |               |
| 1                                                   |             | Grundwerkstoff (Vollstab)<br>– mit Walzhaut, nicht gereinigungsgestrahlt, unbeeinflusst | ohne Naht                                               |                 |                                   |          |              |                                | <b>A</b>      |
| 2                                                   |             | – wärmebeeinflusst (thermisch getrennt)                                                 |                                                         |                 |                                   |          |              |                                | <b>AB</b>     |
| 3                                                   |             | Stumpfnahthals zwischen Teilen gleicher Dicke                                           | V-Naht und HV-Naht mit Gegenlage<br>DV-Naht<br>DHV-Naht | ja              | ×                                 |          |              | B+                             | <b>B</b>      |
| 4                                                   |             | beidseitig durchgeschweißt und einseitig durchgeschweißt mit Gegenlage                  |                                                         | nein            |                                   | ×        |              | B                              | <b>C</b>      |
| 5                                                   |             |                                                                                         |                                                         | nein            |                                   |          | ×            | C                              | <b>E1</b>     |
| 6                                                   |             | einseitig durchgeschweißt ohne Badsicherung                                             | I-Naht<br>V-Naht<br>HV-Naht                             | nein            | ×                                 |          |              | B+                             | <b>D</b>      |
| 7                                                   |             |                                                                                         |                                                         | nein            |                                   | ×        |              | B                              | <b>E1</b>     |
| 8                                                   |             |                                                                                         |                                                         | nein            |                                   |          | ×            | C                              | <b>E1–</b>    |

Abbildung 19: Bauformenkatalog für die Ausführung und Dauerfestigkeitsbewertung von Schweißverbindungen an Stählen im Maschinenbau nach DVS-Richtlinie 1612 (Auszug): Grundwerkstoff und Stumpfnahthalsverbindungen mit zugehöriger Kerbfalllinie. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, TB 6-11.

#### Faustregel Kerbfalllinien-Zuordnung, nach TB 6-11

- Grundwerkstoff, unbeeinflusst: **A** / wärmebeeinflusst: **AB**
- Stumpfnahthals durchgeschweißt, 100 % zFP, gute Bewertungsgruppe: **B**
- Stumpfnahthals durchgeschweißt, nur Sichtprüfung, Bewertungsgruppe C: **C** bis **D**
- Kehlnahthals am T-Stoß (Doppelkehlnahthals), unbearbeitet, Sichtprüfung: **C** bis **E**
- Kehlnahthals/Rohranschluss mit aufgesetzter Lasche, nicht durchgeschweißt: **E5**
- Torsion/Schub am T-Stoß mit Doppelkehlnahthals: **H**

zFP = zerstörungsfreie Prüfung. Im Zweifel die ungünstigere (spätere) Kerbfalllinie ansetzen.

Ist die Kerbfalllinie bekannt, liest man entweder aus einem Dauerfestigkeitsdiagramm (MKJ-Diagramm, TB 6-12a/b) ab oder rechnet direkt mit der zugehörigen Formel:



Exponent  $x$  für  $\sigma_{zul}$  und  $\tau_{zul, \kappa=-1}$ , nach Roloff/Matek TB 6-12c

| Kerbfalllinie | A | AB | B | C  | D  | E1 | E4 | E5 | E6 | F1 | F2 |
|---------------|---|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x$ (S235)    | 5 | 7  | 9 | 11 | 13 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 41 |
| $x$ (S355)    | 0 | 3  | 6 | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 41 |

| Kerbfalllinie (Schub)                        | G+ | G  | G0 | H+ | H  | H0 |
|----------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|
| $\tau_{zul, \kappa=-1}$ in N/mm <sup>2</sup> | 93 | 82 | 73 | 65 | 59 | 53 |

G-Linien gelten für den Stumpfstoß, H-Linien für den T-Stoß/Kehlnaht (H = beidseitig nicht durchgeschweißte Doppelkehlnaht – Standardfall bei Kehlnaht-Torsion/Schub).

Für die dynamische Belastung brauchst du zunächst die Extremwerte der Kraft (bzw. des Moments) und daraus das Spannungsverhältnis:

**Lastextremwerte und Spannungsverhältnis:**

$$F_{max} = F_m + K_A \cdot F_a \quad F_{min} = F_m - K_A \cdot F_a$$

$$\kappa = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{F_{min}}{F_{max}}$$

$F_m$  = Mittellast,  $F_a$  = Lastausschlag,  $K_A$  = Anwendungsfaktor (TB 3-5c, berücksichtigt Stoßcharakter der Last).

**Achtung!**

$\kappa$  ist  $\sigma_{min}/\sigma_{max}$  – **nicht** Amplitude durch Mittelwert! Bei reiner Schwelllast ( $F_{min} = 0$ ) ist  $\kappa = 0$ . Bei Wechsellast wird  $F_{min}$  **negativ**, damit auch  $\kappa$  negativ ( $-1 < \kappa < 0$ ). Ein positives  $\kappa$  bei tatsächlicher Wechsellast ist ein sicheres Zeichen für einen Vorzeichenfehler.

Mit  $x$  und  $\kappa$  liefert die DVS-1612-Formel die zulässige Spannung direkt:

**Zulässige Nahtspannung nach DVS 1612** (Roloff/Matek TB 6-12c), gültig für  $-1 \leq \kappa < 1$ , Bauteildicke  $2 \text{ mm} \leq t \leq 10 \text{ mm}$ ,  $N \geq 2 \cdot 10^6$  Lastwechsel, Sicherheit  $S_D = 1,5$ :

$$\sigma_{zul} = 150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1,04^{-x} \cdot \frac{2(1 - 0,3 \kappa)}{1,3(1 - \kappa)}$$

$$\tau_{zul} = \tau_{zul, \kappa=-1} \cdot \frac{2(1 - 0,17 \kappa)}{1,17(1 - \kappa)}$$

$x$  = Kerbfall- und werkstoffabhängiger Exponent aus TB 6-12c (Tabelle oben).

**Achtung!**

$\sigma_{zul}$  gilt **je Kerbfall** – nicht global für „Stahlbauteile“ oder „Stahl S235“. Ändert sich Nahtart, Nachbearbeitung oder Prüfumfang, ändert sich  $x$  und damit  $\sigma_{zul}$  komplett neu. Ein einmal berechnetes  $\sigma_{zul}$  aus Beispiel A darfst du nicht auf Beispiel B übertragen, auch wenn beide mit S235/S355 gerechnet sind.

Für dickere Bauteile ist die Kerbwirkung ausgeprägter, deshalb muss  $\sigma_{zul}$  zusätzlich abgemindert

werden:

**Dickenbeiwert** für  $t > 10 \text{ mm}$  (Roloff/Matek TB 6-13):

$$\beta = \left( \frac{10 \text{ mm}}{t_{\max}} \right)^{0,1}, \quad \sigma_{zul}(t) = \sigma_{zul,MKJ} \cdot \beta$$

Für  $t \leq 10 \text{ mm}$  gilt  $\beta = 1$ .  $t_{\max}$  = maßgebende größte Dicke der verschweißten Teile.

Lösungsrezept: Dauerfestigkeitsnachweis einer Schweißnaht (DVS 1612)

1. Belastung festlegen:  $F_m, F_a, K_A$  (TB 3-5c)  $\rightarrow F_{\max} = F_m + K_A F_a, F_{\min} = F_m - K_A F_a$ .
2. Nennspannung(en) aus  $F_{\max}$  berechnen ( $\sigma_{\perp}, \tau_{\parallel}$  je nach Lastfall, siehe Tabelle oben).
3. Spannungsverhältnis  $\kappa = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$  (bzw.  $\tau_{\min}/\tau_{\max}$ ) bilden.
4. Kerbfalllinie aus dem Bauformenkatalog (TB 6-11) ablesen: Nahtart, Stoßart, Bearbeitung, Prüfumfang, Bewertungsgruppe  $\rightarrow$  Buchstabe A bis F2.
5. Zulässige Spannung aus dem MKJ-Diagramm (TB 6-12a/b) ablesen **oder** mit TB 6-12c berechnen.
6. Bei Bauteildicke  $t > 10 \text{ mm}$ : Dickenbeiwert  $\beta$  (TB 6-13) multiplizieren.
7. Nachweis  $\sigma \leq \sigma_{zul}$  bzw. Interaktionsgleichung  $\leq 1$  führen  $\rightarrow$  „dauerfest“ oder „nicht dauerfest“.

Im Stahlbau läuft es anders

Der oben gezeigte DVS-1612-Weg ist der **Maschinenbau-Standard** für dynamisch belastete Bauteile. Im **Stahlbau** (ruhende Lasten im Hochbau, Kranbahnen etc.) rechnet man dagegen nach **DIN EN 1993-1-8 (Eurocode 3)** mit einem Teilsicherheitskonzept statt Dauerfestigkeit:

$$f_{vwd} = \frac{R_m}{\sqrt{3} \cdot \beta_w \cdot \gamma_{M2}} \quad (\text{vereinfachtes Verfahren})$$

mit dem Korrelationsbeiwert  $\beta_w$  (TB 6-7: S235  $\rightarrow 0,8$ , S355  $\rightarrow 0,9$ ) und dem Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_{M2}$ . Alternativ liefert das richtungsbezogene Verfahren eine Vergleichsspannung aus  $\sigma_{\perp}, \tau_{\perp}$  und  $\tau_{\parallel}$ . Für die Klausurvorbereitung in diesem Skript reicht es, den Unterschied zu kennen – gerechnet wird hier durchgehend nach dem Maschinenbau-Weg.

## 4.5 Gestaltungsregeln

Gestaltungsregeln für Schweißkonstruktionen

- **Stumpfnah** bevorzugen, wo Anordnung und Zugänglichkeit es erlauben – glatterer Kraftfluss, geringere Kerbwirkung als bei der Kehlnah.
- **Dünne Nähte anstreben**: Schweißgutvolumen wächst mit  $a^2$ , Tragfähigkeit nur linear mit  $a$  – überdimensionierte Nähte kosten nur Zeit und Verzug, kaum zusätzliche Sicherheit.
- **Kraftfluss „weich“ umlenken**, scharfe Querschnittssprünge und Kerben vermeiden.
- **Nahtanhäufung vermeiden**: sich kreuzende oder zu dicht beieinanderliegende Nähte verstärken die Wärmeeinflusszone und die Eigenspannungen gegenseitig.

- **Bauteilenden umschweißen** (Naht mindestens  $2a$  um die Ecke weiterführen), um Endkraterprobleme an freien Kanten zu vermeiden.
- **a-Maß-Grenzen einhalten:**  $3 \text{ mm} \leq a \leq 0,7 \cdot t_{\min}$  – weder Wurzelfehler durch zu dünne noch unwirtschaftliche Nähte durch zu dicke Ausführung.

## 4.6 Durchgerechnete Beispiele

### Stumpfnahht unter dynamischer Zugbelastung

Eine Zugstange  $\varnothing 60 \text{ mm}$  aus S355 ist mit einer durchgeschweißten Stumpfnahht (Bewertungsgruppe B, 100 % zFP  $\rightarrow$  Kerbfalllinie **B**) gestoßen. Belastung:  $F_m = 60 \text{ kN}$ ,  $F_a = \pm 35 \text{ kN}$ ,  $K_A = 1,3$  (leichte Stöße). Gesucht: Nachweis der Dauerfestigkeit.

### Lösung

#### 1. Lastextremwerte:

$$F_{\max} = 60 + 1,3 \cdot 35 = 105,5 \text{ kN}, \quad F_{\min} = 60 - 1,3 \cdot 35 = 14,5 \text{ kN}.$$

#### 2. Spannungsverhältnis:

$$\kappa = \frac{F_{\min}}{F_{\max}} = \frac{14,5}{105,5} = 0,137 \quad (\text{Schwellbereich}).$$

#### 3. Nahtfläche und Nennspannung ( $a = t$ , durchgeschweißt):

$$A_w = \frac{\pi}{4} \cdot 60^2 \text{ mm}^2 = 2827,4 \text{ mm}^2, \quad \sigma_w = \frac{105\,500 \text{ N}}{2827,4 \text{ mm}^2} = 37,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

#### 4. Zulässige Spannung (Kerbfall B, S355 $\rightarrow x = 6$ nach TB 6-12c):

$$\sigma_{zul} = 150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1,04^{-6} \cdot \frac{2(1 - 0,3 \cdot 0,137)}{1,3(1 - 0,137)} = 202,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

#### 5. Dickenbeiwert ( $t = 60 \text{ mm} > 10 \text{ mm}$ ):

$$\beta = \left(\frac{10}{60}\right)^{0,1} = 0,836, \quad \sigma_{zul}(t) = 202,7 \cdot 0,836 = 169,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**Kontrolle:**  $\sigma_w = 37,3 \text{ N/mm}^2 \leq \sigma_{zul}(t) = 169,5 \text{ N/mm}^2 \rightarrow$  Naht ist dauerhaft, mit deutlicher Reserve (Ausnutzung  $\approx 22\%$ ).

### Kehlnaht-Anschluss einer Lasche unter Zug

Eine Lasche der Breite  $b = 80 \text{ mm}$  wird beidseitig mit Doppelkehlnaht  $a = 5 \text{ mm}$  an ein Blech angeschlossen, Werkstoff S235, unbearbeitet/Sichtprüfung (Bewertungsgruppe C  $\rightarrow$  Kerbfalllinie **C**). Die ausgeführte Nahtlänge je Naht ist  $L = 80 \text{ mm}$  (nicht umlaufend, kein Auslaufblech). Belastung:  $F_m = 20 \text{ kN}$ ,  $F_a = \pm 12 \text{ kN}$ ,  $K_A = 1,2$ . Gesucht: Nachweis der Dauerfestigkeit.

## Lösung

### 1. Lastextremwerte und $\kappa$ :

$$F_{max} = 20 + 1,2 \cdot 12 = 34,4 \text{ kN}, \quad F_{min} = 20 - 1,2 \cdot 12 = 5,6 \text{ kN}, \quad \kappa = \frac{5,6}{34,4} = 0,163.$$

### 2. Wirksame Nahtlänge (Endkraterabzug, nicht umlaufend!):

$$l_{eff} = L - 2a = 80 - 10 = 70 \text{ mm} \quad \text{je Naht.}$$

### 3. Nahtfläche und Nennspannung (Doppelkehlnaht):

$$A_w = 2 a l_{eff} = 2 \cdot 5 \cdot 70 = 700 \text{ mm}^2, \quad \sigma_w = \frac{34\,400 \text{ N}}{700 \text{ mm}^2} = 49,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

### 4. Zulässige Spannung (Kerbfall C, S235 $\rightarrow x = 11$ ):

$$\sigma_{zul} = 150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1,04^{-11} \cdot \frac{2(1 - 0,3 \cdot 0,163)}{1,3(1 - 0,163)} = 170,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**Kontrolle:**  $\sigma_w = 49,1 \text{ N/mm}^2 \leq \sigma_{zul} = 170,3 \text{ N/mm}^2 \rightarrow$  dauerhaft. Zum Vergleich: ohne Endkraterabzug wäre  $A_w = 800 \text{ mm}^2$  und  $\sigma_w = 43,0 \text{ N/mm}^2$  – die Naht würde damit um rund 12,5% zu günstig bewertet.

## Konsolanschluss mit Biegung und Querkraft

Ein Konsolblech ist mit einer Doppelkehlnaht ( $a = 6 \text{ mm}$ , Nahthöhe  $h = 100 \text{ mm}$ ) symmetrisch an eine Wand geschweißt, Werkstoff S235, Bewertungsgruppe C. Der Kraftangriffspunkt liegt im Abstand  $e = 150 \text{ mm}$  von der Wand. Belastung:  $F_m = 8 \text{ kN}$ ,  $F_a = \pm 4 \text{ kN}$ ,  $K_A = 1,25$ . Gesucht: Interaktionsnachweis der Dauerfestigkeit.

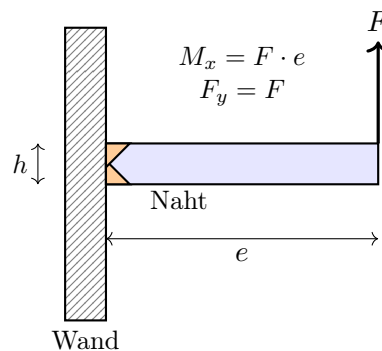


Abbildung 20: Konsolanschluss mit Doppelkehlnaht (Beispiel C): Die Kraft  $F$  im Abstand  $e$  erzeugt am Nahtquerschnitt sowohl ein Biegemoment  $M_x$  als auch eine Querkraft  $F_y$  – der Nachweis muss beide Anteile zusammenfassen.

## Lösung

### 1. Lastextremwerte und $\kappa$ :

$$F_{max} = 8 + 1,25 \cdot 4 = 13,0 \text{ kN}, \quad F_{min} = 8 - 1,25 \cdot 4 = 3,0 \text{ kN}, \quad \kappa = \frac{3,0}{13,0} = 0,231.$$

### 2. Querschnittswerte:

$$A_w = 2 a h = 2 \cdot 6 \cdot 100 = 1200 \text{ mm}^2, \quad W_x = \frac{1}{3} a h^2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 100^2 = 20\,000 \text{ mm}^3.$$

### 3. Nennspannungen aus $F_{max}$ :

$$M_x = F_{max} \cdot e = 13\,000 \cdot 150 = 1\,950\,000 \text{ Nmm},$$

$$\sigma_{\perp} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{1\,950\,000}{20\,000} = 97,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \tau_{\parallel} = \frac{F_{max}}{A_w} = \frac{13\,000}{1200} = 10,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**4. Zulässige Spannungen** (Biegung: Kerbfall C,  $x = 11$ ; Schub: Kerbfall H,  $\tau_{zul, \kappa=-1} = 59 \text{ N/mm}^2$ ), jeweils mit  $\kappa = 0,231$ :

$$\sigma_{zul} = 150 \cdot 1,04^{-11} \cdot \frac{2(1 - 0,3 \cdot 0,231)}{1,3(1 - 0,231)} = 181,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\tau_{zul} = 59 \cdot \frac{2(1 - 0,17 \cdot 0,231)}{1,17(1 - 0,231)} = 126,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

### 5. Interaktionsnachweis:

$$\left(\frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{zul}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\parallel}}{\tau_{zul}}\right)^2 = \left(\frac{97,5}{181,4}\right)^2 + \left(\frac{10,8}{126,0}\right)^2 = 0,289 + 0,007 = 0,296 \leq 1.$$

**Kontrolle:** Interaktionswert  $0,30 \ll 1 \rightarrow$  Konsolanschluss dauerhaft. Die Biegung dominiert klar, der Schubanteil ist bei dieser schlanken Konsole mit großem Hebelarm  $e$  fast vernachlässigbar.

## 4.7 Mini-Aufgaben zum Selbstrechnen

### Mini-Aufgabe

An zwei Blechen der Dicke  $t_1 = 10 \text{ mm}$  und  $t_2 = 14 \text{ mm}$  ist eine Kehlnaht mit  $a = 5 \text{ mm}$  vorgesehen. Prüfe anhand der a-Maß-Grenzwerte, ob diese Ausführung zulässig ist.

### Lösung

Maßgebend sind  $t_{min} = 10 \text{ mm}$  und  $t_{max} = 14 \text{ mm}$ :

$$a_{max} = 0,7 \cdot t_{min} = 0,7 \cdot 10 = 7,0 \text{ mm}, \quad a_{min} = \sqrt{t_{max}} - 0,5 = \sqrt{14} - 0,5 = 3,24 \text{ mm}.$$

Mit der Mindestnahtdicke  $3 \text{ mm}$  ergibt sich der zulässige Bereich  $3,24 \text{ mm} \leq a \leq 7,0 \text{ mm}$ . Da  $a = 5 \text{ mm}$  in diesem Bereich liegt, ist die Ausführung **zulässig**.

### Mini-Aufgabe

Ein Hebel ist mit einer Doppelkehlnaht  $a = 4 \text{ mm}$  auf eine Welle  $\varnothing 50 \text{ mm}$  geschweißt (Rundnaht), Werkstoff S235, Kerbfall **H** (Torsion, Doppelkehlnaht am T-Stoß). Das Nenn-Torsionsmoment beträgt  $T_{Nenn} = 800 \text{ Nm}$  bei  $K_A = 1,4$ ; die Last wechselt zwischen  $T_{max}$  und  $T_{min} = -0,4 T_{max}$ . Weise die Dauerfestigkeit der Naht nach.

### Lösung

#### 1. Lastextremwerte und $\kappa$ :

$$T_{max} = K_A \cdot T_{Nenn} = 1,4 \cdot 800 = 1120 \text{ Nm} = 1\,120\,000 \text{ Nmm},$$

$$T_{min} = -0,4 \cdot T_{max} = -448\,000 \text{ Nmm}, \quad \kappa = \frac{T_{min}}{T_{max}} = -0,4 \quad (\text{Wechselbereich}).$$

**2. Nennspannung** (Rundnaht auf Torsion,  $r = 25 \text{ mm}$ ):

$$\tau_{||t} = \frac{T_{max}}{2 a \pi r^2} = \frac{1\,120\,000}{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 25^2} = 71,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**3. Zulässige Schubspannung** (Kerbfall H,  $\tau_{zul, \kappa=-1} = 59 \text{ N/mm}^2$ ):

$$\tau_{zul} = 59 \cdot \frac{2(1 - 0,17 \cdot (-0,4))}{1,17(1 - (-0,4))} = 76,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**Kontrolle:**  $\tau_{||t} = 71,3 \text{ N/mm}^2 \leq \tau_{zul} = 76,9 \text{ N/mm}^2 \rightarrow$  Naht ist **dauerfest**, allerdings mit hoher Ausnutzung von  $\approx 93\%$  – hier lohnt sich in der Praxis eine Vergrößerung des  $a$ -Maßes, um Reserve zu schaffen.

## 4.8 Zusammenfassung Kapitel 4

### Das Wichtigste aus Kapitel 4

- Schweißverbindungen sind **stoffschlüssig** und unlösbar; die Naht selbst ist wegen WEZ, Eigenspannungen und Verzug fast immer der kritische Ort des Bauteils.
- **Stumpfnah** (Kraftfluss geradlinig, geringste Kerbwirkung) bevorzugen, wo möglich; **Kehlnaht** am T-/Überlappstoß, wenn Fertigung es verlangt.
- Das **a-Maß** ist die Höhe des einschreibbaren gleichschenkligen Dreiecks bis zum Wurzelpunkt – nicht die Schenkellänge  $z$  ( $a \approx 0,7 z$ ). Grenzen:  $3 \text{ mm} \leq a \leq 0,7 \cdot t_{min}$ .
- Rechnerische Nahtfläche  $A_w = a \cdot l$  (Doppelkehlnaht:  $A_w = 2al$ ), Endkraterabzug  $l_{eff} = L - 2a$  bei nicht umlaufenden Nähten nicht vergessen.
- Zusammengesetzte Beanspruchung über Vergleichsspannung oder Interaktionsgleichung  $(\sigma/\sigma_{zul})^2 + (\tau/\tau_{zul})^2 \leq 1$  nachweisen.
- **Lösungsrezept DVS 1612:**  $F_{max}/F_{min}$  mit  $K_A$  bilden  $\rightarrow$  Nennspannung  $\rightarrow \kappa = \sigma_{min}/\sigma_{max} \rightarrow$  Kerbfalllinie aus TB 6-11  $\rightarrow \sigma_{zul}$  aus TB 6-12c  $\rightarrow$  ggf. Dickenbeiwert  $\beta$  ( $t > 10 \text{ mm}$ )  $\rightarrow$  Nachweis  $\sigma \leq \sigma_{zul}$ .
- $\sigma_{zul}$  gilt **je Kerbfall** – bei geänderter Nahtausführung immer neu bestimmen. Im Stahlbau (ruhende Lasten) gilt stattdessen der EC3-Weg mit  $f_{vwd}$  und Teilsicherheitsbeiwerten.

## 5 Schraubenverbindungen

### Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- die wichtigsten Gewindegrößen ( $d$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $P$ , Steigungswinkel  $\varphi$ , Spannungsquerschnitt  $A_s$ ) benennen und die Festigkeitsklassen (8.8, 10.9, 12.9) deuten
- das Gewinde als schiefe Ebene verstehen, das Anziehdrehmoment  $M_A$  berechnen und die Selbsthemmung prüfen
- das Federmodell der vorgespannten Verbindung und das **Verspannungsdreieck** lesen und daraus  $\Phi$ ,  $F_{BS}$ ,  $F_{BT}$  und die Restklemmkraft  $F_{KI}$  bestimmen
- die Montagevorspannkraft  $F_{VM}$  mit Setzkraftverlust  $F_Z$  und Anziehfaktor  $k_A$  auslegen

und eine passende Schraube wählen

- die Nachweise führen: Montagebeanspruchung  $\sigma_{red}$ , statische und dynamische Sicherheit, Flächenpressung unter dem Kopf
- eine querbelastete Verbindung über Reibschluss auslegen

Die Schraube ist das mit Abstand am häufigsten verbaute Maschinenelement – in einem Auto stecken tausende. Sie ist so alltäglich, dass man leicht übersieht, wie viel Ingenieurwissen in einer sauber ausgelegten Verbindung steckt. Der entscheidende Denkfehler des Anfängers: Eine Schraube hält *nicht*, weil man sie „festzieht“, sondern weil sie die Bauteile mit einer definierten **Vorspannkraft** zusammenpresst. Diese Vorspannkraft trägt die Betriebslast, verhindert das Aufklaffen der Trennfuge und sorgt dafür, dass die dynamische Zusatzbelastung der Schraube winzig bleibt. Eine Zylinderkopfschraube, eine Flanschverbindung an einer Druckleitung, eine Kupplung – ihre Betriebssicherheit hängt an der Vorspannkraft, nicht am Drehmoment allein. Genau deshalb ist die Schraubenverbindung ein Rechen-Herzstück: Wer das Verspannungsdreieck beherrscht, hat den Kern verstanden.

## 5.1 Gewindegeometrie und Bezeichnungen

Ein Gewinde entsteht, wenn man ein Profil (beim Befestigungsgewinde ein gleichseitiges Dreieck) schraubenlinienförmig auf einen Zylinder wickelt. Windet man eine schiefe Ebene um den Zylinder, so ist ihr Steigungswinkel gerade der **Steigungswinkel**  $\varphi$  des Gewindes – diese Vorstellung brauchen wir später für das Anziehmoment.

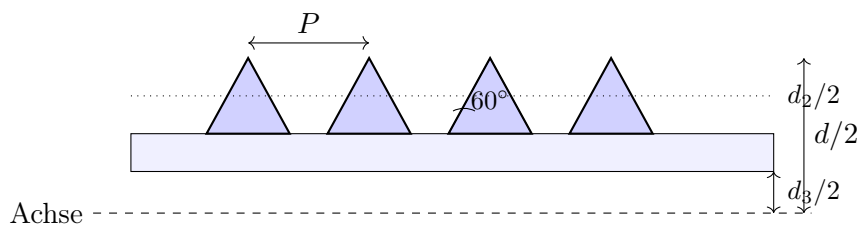


Abbildung 21: Metrisches ISO-Spitzgewinde im Achsschnitt: Außendurchmesser  $d$ , Flankendurchmesser  $d_2$ , Kerndurchmesser  $d_3$ , Teilung (Steigung)  $P$ , Flankenwinkel  $60^\circ$ .

**Wichtige Gewindegrößen** (metrisches ISO-Gewinde, Bezeichnung z. B. M12 oder M20×2 für Feingewinde):

- $d = D$ : **Außen-/Nenndurchmesser** (Bolzen  $d$ , Mutter  $D$ )
- $d_2$ : **Flankendurchmesser** (maßgebend für das Gewindemoment)
- $d_3$ : **Kerndurchmesser** des Bolzens,  $A_3 = \frac{\pi}{4}d_3^2$  **Kernquerschnitt**
- $P$ : **Teilung/Steigung** (Axialweg pro Umdrehung bei eingängigem Gewinde:  $P_h = P$ )
- $A_s$ : **Spannungsquerschnitt**  $A_s = \frac{\pi}{4} \left( \frac{d_2 + d_3}{2} \right)^2$  – der für Zugspannung maßgebende Ersatzquerschnitt

Der **Steigungswinkel**  $\varphi$  folgt aus der abgewickelten Schraubenlinie: Ein Umfang  $d_2 \cdot \pi$  (Ankathete) und die Steigung  $P_h$  (Gegenkathete) bilden das Steigungsdreieck.

**Steigungswinkel** (nach Roloff/Matek, Gl. 8.1):

$$\tan \varphi = \frac{P_h}{d_2 \cdot \pi}$$

Für Befestigungsgewinde ist  $\varphi$  klein, etwa  $\varphi \approx 1,9^\circ \dots 3,7^\circ$ .

### Achtung!

Verwechsle  $A_s$  und  $A_3$  nicht! Für alle Zug- und Vorspannkraft-Rechnungen (Montagespannung, Fläche für  $\sigma_M$ ) nimmst du den **Spannungsquerschnitt**  $A_s$ . Der Kernquerschnitt  $A_3$  ist kleiner und wird nur in Sonderfällen (z. B. Torsion am Kern bei Bewegungsschrauben) gebraucht. Ein Griff in die falsche Spalte des Tabellenbuchs verfälscht die Spannung sofort um mehrere Prozent.

Metrisches ISO-Regelgewinde (Auszug, nach Roloff/Matek TB 8-1)

| Gewinde | $P$ [mm] | $d_2$ [mm] | $d_3$ [mm] | $A_s$ [mm <sup>2</sup> ] | $A_3$ [mm <sup>2</sup> ] |
|---------|----------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|
| M8      | 1,25     | 7,188      | 6,466      | 36,6                     | 32,84                    |
| M10     | 1,5      | 9,026      | 8,160      | 58,0                     | 52,30                    |
| M12     | 1,75     | 10,863     | 9,853      | 84,3                     | 76,25                    |
| M16     | 2,0      | 14,701     | 13,546     | 157                      | 144,1                    |
| M20     | 2,5      | 18,376     | 16,933     | 245                      | 225,2                    |

### 5.1.1 Festigkeitsklassen

Auf dem Schraubenkopf steht die **Festigkeitsklasse**, z. B. **8.8**. Diese zwei Zahlen sind ein kleines Rechenrätsel mit großer Merkhilfe:

**Festigkeitsklasse**  $x.y$  (nach Roloff/Matek TB 8-4):

$$R_m = x \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad R_{p0,2} = \frac{y}{10} \cdot R_m.$$

Beispiel **8.8**:  $R_m = 8 \cdot 100 = 800 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  und  $R_{p0,2} = 0,8 \cdot 800 = 640 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .

Festigkeitsklassen – die drei wichtigsten

| Klasse | $R_m$ [N/mm <sup>2</sup> ] | $R_{p0,2}$ [N/mm <sup>2</sup> ] |                    |
|--------|----------------------------|---------------------------------|--------------------|
| 8.8    | 800                        | 640                             | Standard, hochfest |
| 10.9   | 1000                       | 900                             | hochfest           |
| 12.9   | 1200                       | 1080                            | höchstfest         |

Merkregel: erste Zahl  $\times 100 = R_m$ ; erste  $\times$  zweite  $\times 10 = R_{p0,2}$  (z. B.  $10 \cdot 9 \cdot 10 = 900$ ).

## 5.2 Kräfte am Gewinde: Anzieh- und Lösemoment

Warum wird eine feste Verbindung durch eine so kleine Handkraft am Schlüssel überhaupt hoch vorgespannt? Weil das Gewinde eine **schiefe Ebene** ist: Beim Anziehen „schiebt“ sich die Mutter die Rampe hinauf, das große Drehmoment am Umfang erzeugt eine viel größere axiale Vorspannkraft.



Wir wickeln eine Windung des Flankendurchmessers ab: Die Steigung  $P_h$  über den Umfang  $d_2\pi$  ergibt die Rampe mit dem Winkel  $\varphi$ . Die Vorspannkraft  $F$  wirkt axial (die Rampe hinauf), die Umfangskraft  $F_u = 2M_G/d_2$  tangential. Reibung tritt unter dem Flankenwinkel auf und wird über den **Ersatzreibungswinkel**  $\rho'$  erfasst.

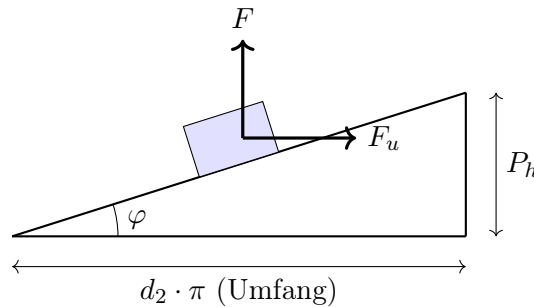


Abbildung 22: Abgewickeltes Gewinde als schiefe Ebene: Die Umfangskraft  $F_u$  (aus dem Gewindemoment) treibt die Mutter gegen die axiale Vorspannkraft  $F$  die Rampe mit Steigungswinkel  $\varphi$  hinauf. Reibung wird über  $\rho'$  berücksichtigt.

**Gewindemoment** (Reibmoment im Gewinde selbst, nach Roloff/Matek Gl. 8.23):

$$M_G = F_{VM} \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \tan(\varphi \pm \rho')$$

„+“ = Anziehen, „-“ = Lösen.

**Ersatzreibungswinkel** am Spitzgewinde ( $\beta = 60^\circ$  Flankenwinkel):

$$\tan \rho' = \frac{\mu_G}{\cos(\beta/2)} = 1,155 \cdot \mu_G.$$

Beim Anziehen muss zusätzlich die Reibung unter der **Kopf-/Mutterauflage** überwunden werden (Reibmoment  $M_{RA}$ ). Das **Gesamtanziehmoment** ist die Summe aus Gewinde- und Auflage-reibmoment:

**Anziehdrehmoment** (nach Roloff/Matek Gl. 8.24/8.27):

$$M_A = M_G + M_{RA} = F_{VM} \cdot \left[ \underbrace{0,159 P + 0,577 \mu_G d_2}_{\text{Gewinde}} + \underbrace{\mu_K \cdot \frac{d_K}{2}}_{\text{Auflage}} \right]$$

mit dem mittleren Auflagedurchmesser  $d_K/2 \approx 0,65 d$ . Näherung für  $\mu_{ges} \approx 0,12$ :

$$M_A \approx 0,17 \cdot F_{VM} \cdot d.$$

### Selbsthemmung

Eine Verbindung ist **selbsthemmend** (sie löst sich unter reiner Axiallast nicht von selbst), wenn der Steigungswinkel kleiner als der Ersatzreibungswinkel ist:

$$\varphi < \rho'.$$

Bei Befestigungsgewinden ist das immer erfüllt: typisch  $\varphi \approx 3^\circ$ , aber  $\rho' \approx 7,9^\circ$  (für  $\mu_G = 0,12$ ). Deshalb hält eine Schraube auch ohne Sicherung gegen statisches Aufdrehen – Losdrehen entsteht erst durch dynamisches Setzen und Querbewegungen.

### Achtung!

Für die Berechnung von  $M_A$  setzt man bewusst den *kleinsten* Wert der Reibungszahl-Streuung ein (Rechenwert  $\mu_{ges} = 0,12$ ). Grund: Bei niedriger Reibung wird die Schraube bei gegebenem Drehmoment am stärksten vorgespannt – das ist der kritische Fall für die Überlastung der Schraube.

## 5.3 Die vorgespannte Schraubenverbindung: Federmodell und Verspannungsdreieck

Jetzt kommt das Herzstück. Ziehst du die Schraube an, dehnt sie sich (sie wirkt wie eine **Zugfeder**), gleichzeitig werden die verspannten Bauteile zusammengedrückt (sie wirken wie eine **Druckfeder**). Beide Federn sind gegeneinander verspannt und tragen dieselbe Vorspannkraft  $F_V$ .

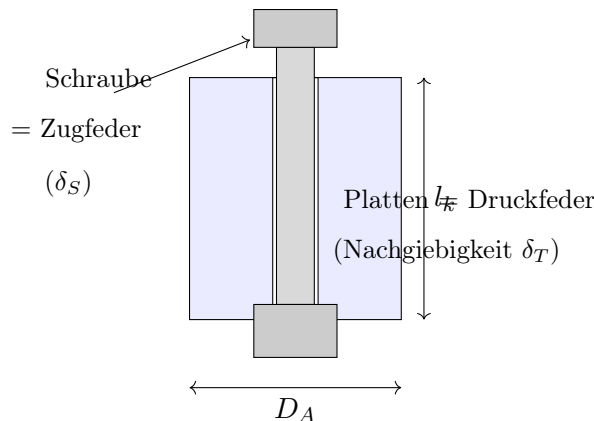


Abbildung 23: Federersatzmodell: Die Schraube (Zugfeder, Nachgiebigkeit  $\delta_S$ ) und die verspannten Platten (Druckfeder als Hohlzylinder,  $\delta_T$ ) sind über die Klemmlänge  $l_k$  gegeneinander vorgespannt.

Die **Nachgiebigkeit**  $\delta$  ist der Kehrwert der Federsteifigkeit – Verformung pro Kraft. Eine weiche (lange, dünne) Schraube hat ein großes  $\delta_S$ , ein kompakter Plattenstapel ein kleines  $\delta_T$ .

**Nachgiebigkeit** eines Bauteils (nach Roloff/Matek Gl. 8.6):

$$\delta = \frac{f}{F} = \frac{l}{E \cdot A}$$

- $\delta_S$ : Nachgiebigkeit der **Schraube** (Summe aus Kopf-, Schaft-, Gewinde- und Mutteranteilen)
- $\delta_T$ : Nachgiebigkeit der **verspannten Teile** (Platten),  $\delta_T = l_k / (A_{ers} \cdot E_T)$

Wichtig: die Platten sind viel steifer als die Schraube, daher  $\delta_T \ll \delta_S$ .

### 5.3.1 Das Verspannungsdreieck

Trägt man Kraft über Verformung auf, ergibt sich das zentrale Bild dieses Kapitels. Die Schraube (steigende Gerade, Steigung  $1/\delta_S$ ) wird beim Anziehen gedehnt; die Platten (fallende Gerade, Steigung  $1/\delta_T$ ) werden gestaucht. Beide treffen sich bei der Vorspannkraft  $F_V$  – das ist der Montagezustand.

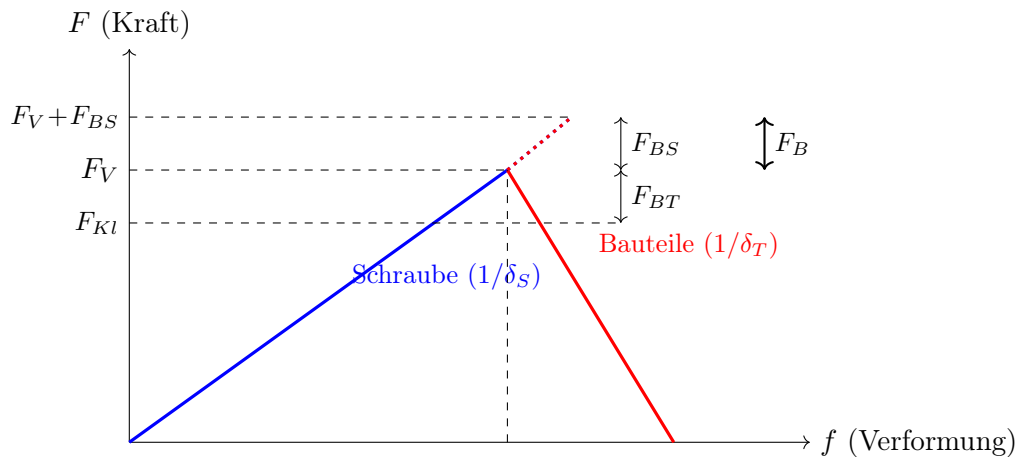


Abbildung 24: Verspannungsschaubild (Verspannungsdreieck). Im Montagezustand herrscht die Vorspannkraft  $F_V$ . Eine axiale Betriebskraft  $F_B$  verteilt sich: nur der kleine Anteil  $F_{BS} = \Phi F_B$  belastet die Schraube zusätzlich, der große Anteil  $F_{BT}$  entlastet die Bauteile. Übrig bleibt die Restklemmkraft  $F_{Kl}$ .

Der Clou: Greift im Betrieb eine axiale Betriebskraft  $F_B$  an, teilt sie sich *nicht* voll auf die Schraube auf. Weil Schraube und Platten parallel geschaltet sind, übernimmt die Schraube nur den Bruchteil  $\Phi$ . Dieses **Kraftverhältnis** ist die wichtigste Kennzahl der Verbindung.

**Kraftverhältnis** (nach Roloff/Matek Gl. 8.11/8.17):

$$\Phi = n \cdot \Phi_k = n \cdot \frac{\delta_T}{\delta_S + \delta_T}$$

- $\Phi_k = \delta_T / (\delta_S + \delta_T)$ : Kraftverhältnis bei Krafteinleitung an den äußeren Ebenen (ungünstigster Fall)
- $n$ : **Krafteinleitungsfaktor** ( $n = 1$  Angriff an den Kopf-/Mutterebenen;  $n \approx 0,4 \dots 0,7$  realistisch bei innerer Krafteinleitung; VDI 2230)

Damit lassen sich alle Betriebskräfte am Verspannungsdreieck ablesen:

**Kräfte im Betrieb** (axiale Betriebskraft  $F_B$ , nach Roloff/Matek Gl. 8.11–8.14):

$$F_{BS} = \Phi \cdot F_B \quad (\text{Zusatzkraft der Schraube})$$

$$F_{BT} = F_B \cdot (1 - \Phi) \quad (\text{Entlastung der Bauteile})$$

$$F_{Kl} = F_V - F_{BT} = F_V - F_B(1 - \Phi) \quad (\text{Restklemmkraft})$$

$$F_{Sges} = F_V + F_{BS} = F_{Kl} + F_B \quad (\text{Gesamtschraubenkraft})$$

### Achtung!

Die drei häufigsten Klausurfallen an dieser Stelle:

- **$\Phi$  vergessen:**  $F_{BS} = \Phi F_B$ , *nicht*  $F_{BS} = F_B$ . Die Schraube spürt nur einen kleinen Bruchteil der Betriebskraft – das ist der ganze Sinn der Vorspannung.
- **$\Phi$  mit  $\Phi_k$  verwechseln:**  $\Phi = n \cdot \Phi_k$ . Ohne Angabe von  $n$  wird oft fälschlich  $n = 1$  angenommen. Steht  $n$  in der Aufgabe, musst du es einrechnen.

- **Klemmkraft  $\neq$  Vorspannkraft:**  $F_{Kl}$  (Restklemmung im Betrieb) ist *kleiner* als  $F_V$ . Die Differenz steckt in der Bauteilentlastung  $F_{BT}$  (und im Setzverlust, siehe unten).

Bei **dynamischer** (schwellender oder wechselnder) Betriebskraft zwischen  $F_{Bu}$  und  $F_{Bo}$  interessiert vor allem die **Ausschlagkraft** der Schraube:

**Dynamische Anteile** (nach Roloff/Matek Gl. 8.15/8.16):

$$F_a = \frac{F_{Bo} - F_{Bu}}{2} \cdot \Phi, \quad F_m = F_V + \frac{F_{Bo} + F_{Bu}}{2} \cdot \Phi.$$

Auch hier steht  $\Phi$  davor – die Federung schützt die Schraube vor der vollen Lastamplitude.

## 5.4 Setzen und Montagevorspannkraft

Frisch angezogene Verbindungen verlieren einen Teil ihrer Vorspannung: Rauheitsspitzen in den Trennfugen, im Gewinde und unter dem Kopf plätten sich unter der Pressung – man nennt das **Setzen**. Der Setzbetrag  $f_Z$  (Summe über alle Fugen) verringert die Verformung und damit die Vorspannkraft um den **Setzkraftverlust**  $F_Z$ .

**Setzkraftverlust** (nach Roloff/Matek Gl. 8.19):

$$F_Z = \frac{f_Z}{\delta_S + \delta_T}$$

Richtwert für den Setzbetrag:  $f_Z \approx 0,011 \text{ mm} = 11 \text{ } \mu\text{m}$  (nach Roloff/Matek TB 8-10a; je Gewinde ca.  $3 \text{ } \mu\text{m}$ , je Auflage  $2,5 \text{ } \mu\text{m}$ , je innere Trennfuge  $1,5 \text{ } \mu\text{m}$ ).

Weil man die Schraube *nach* dem Setzen noch mit der geforderten Kraft geklemmt haben will, muss man sie bei der Montage entsprechend höher vorspannen. Hinzu kommt die **Streuung des Anziehverfahrens**: Ein einfacher Drehmomentschlüssel trifft die Zielkraft nur ungenau. Diese Streuung erfasst der **Anziehungsfaktor**  $k_A = F_{V \max} / F_{V \min} > 1$ .

**Montagevorspannkraft** (nach Roloff/Matek Gl. 8.29/8.30):

$$F_{VM} = k_A \cdot [F_{Kl} + F_B (1 - \Phi) + F_Z]$$

Ohne axiale Betriebskraft (reine Klemm-, Dicht- oder Querkraftverbindung,  $F_B = 0$ ):

$$F_{VM} = k_A \cdot (F_{Kl} + F_Z).$$

Anziehungsfaktor  $k_A$  (Auszug, nach Roloff/Matek TB 8-11)

| Anziehverfahren                                      | $k_A$   |
|------------------------------------------------------|---------|
| Streckgrenz-/drehwinkelgesteuert                     | 1,2–1,4 |
| Drehmomentschlüssel, messend, viele Kontrollversuche | 1,4–1,6 |
| Drehmomentschlüssel, geschätzte Reibung              | 1,6–2,5 |
| Schlagschrauber / von Hand ohne Messung              | 2,5–4,0 |

Je genauer das Verfahren, desto kleiner  $k_A$  – und desto kleiner (leichter) darf die Schraube sein.

### Achtung!

$k_A$  **multipliziert** die Montagevorspannkraft (Worst Case „oben“), es wird nie durch  $k_A$  dividiert. Und vergiss den Term  $+F_Z$  nicht: Ohne ihn liegt die Vorspannung im Betrieb zu niedrig, die Verbindung wird locker.

### Lösungsrezept: Vorgespannte Schraubenverbindung in 7 Schritten

1. **Nachgiebigkeiten**  $\delta_S, \delta_T$  bestimmen (oder gegeben)  $\rightarrow \Phi_k = \delta_T/(\delta_S + \delta_T)$ .
2. **Kraftverhältnis**  $\Phi = n \cdot \Phi_k$  mit Krafteinleitungsfaktor  $n$ .
3. **Erforderliche Klemmkraft**  $F_{Kl}$  festlegen (Dichtheit, Reibschluss, Aufklaffen verhindern).
4. **Setzkraftverlust**  $F_Z = f_Z/(\delta_S + \delta_T)$  berechnen.
5. **Montagevorspannkraft**  $F_{VM} = k_A [F_{Kl} + F_B(1 - \Phi) + F_Z]$ .
6. **Schraube wählen:**  $F_{sp} \text{ (TB 8-14)} \geq F_{VM}$  mit Reserve  $\rightarrow$  Größe und Festigkeitsklasse.
7. **Nachweise:** Montage  $\sigma_{red}$ , statische Sicherheit, Dauerfestigkeit  $\sigma_a \leq \sigma_A$ , Flächenpressung  $p \leq p_G$ .

## 5.5 Nachweise

### 5.5.1 Montagebeanspruchung

Beim Anziehen wirken *gleichzeitig* Zug (aus  $F_{VM}$ ) und Torsion (aus dem Gewindemoment  $M_G$ ) auf den gefährdeten Querschnitt. Beide werden nach der Gestaltänderungsenergie-Hypothese (von Mises) zur **Vergleichsspannung** zusammengefasst. Die Norm erlaubt, die Streckgrenze zu 90 % auszunutzen.

**Montage-Vergleichsspannung** (nach Roloff/Matek Gl. 8.31):

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3\tau_t^2} \leq 0,9 \cdot R_{p0,2}$$

mit  $\sigma_M = F_{sp}/A_s$  und  $\tau_t = M_G/W_t$ .

### WICHTIG!

Beim Anziehen bis 90 % der Streckgrenze ist der Randbereich des Gewindekerns bereits im teilplastischen Zustand. Deshalb rechnet man das **polare Widerstandsmoment** nicht mit dem elastischen  $\pi d_0^3/16$ , sondern mit

$$W_t = \frac{\pi d_0^3}{12} \quad (\text{überelastisch angezogen}),$$

$d_0 = d_s = (d_2 + d_3)/2$  für Schaftschauben. Nur mit  $/12$  stimmt das Ergebnis mit den Spannkraften  $F_{sp}$  aus TB 8-14 überein – das ist eine beliebte Klausurfalle.

### 5.5.2 Statische und dynamische Sicherheit

Im Betrieb kommt zur Vorspannung die Schrauben-Zusatzkraft  $F_{BS} = \Phi F_B$ . Die maximale Schraubenkraft  $F_{Sges}$  darf die Streckgrenze nicht erreichen:

**Statische Sicherheit** (nach Roloff/Matek Gl. 8.35):

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{red,B}} \geq S_{F,erf}$$

mit  $S_{F,erf} \geq 1,0$  (axiale Last) bzw. höher bei Querlast. Der Torsionsanteil klingt im Betrieb teilweise ab ( $k_\tau \approx 0,5$ ).

Bei **dynamischer** Last entscheidet die Ausschlagsspannung  $\sigma_a$  gegen die **Ausschlagfestigkeit**  $\sigma_A$  des Gewindes:

**Dauerfestigkeitsnachweis** (nach Roloff/Matek Gl. 8.20/8.21):

$$\sigma_a = \frac{F_a}{A_s} \leq \sigma_A, \quad S_D = \frac{\sigma_A}{\sigma_a} \geq 1,2$$

Ausschlagfestigkeit schlussvergüteter Gewinde (Regelfall):

$$\sigma_A \approx 0,85 \cdot \left( \frac{150}{d} + 45 \right) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (d \text{ in mm}).$$

#### WICHTIG!

Die Ausschlagfestigkeit des Gewindes ist *unabhängig* von der Festigkeitsklasse! Eine 12.9 hält dynamisch nicht mehr aus als eine 8.8 – die Kerbwirkung im gerollten Gewinde begrenzt beide gleich. Hochfeste Schrauben lohnen sich für die *Vorspannkraft* (statisch), nicht für die Schwingfestigkeit. Ein hohes  $\Phi$  ist der eigentliche Feind: Es lässt die dynamische Zusatzkraft  $F_a$  ansteigen. Weiche (lange, schlanke) Dehnschrauben mit kleinem  $\Phi$  sind die dauerhafteste Lösung.

### 5.5.3 Flächenpressung unter dem Kopf

Unter Schraubenkopf und Mutter darf die Pressung die Grenzflächenpressung  $p_G$  des Bauteilwerkstoffs nicht überschreiten, sonst setzt sich die Auflage stark und die Vorspannung geht verloren:

**Flächenpressung** (nach Roloff/Matek Gl. 8.36):

$$p = \frac{F_{sp} + \Phi F_B}{A_p} \leq p_G$$

$A_p$ : gepresste Kreisringfläche (TB 8-8/8-9);  $p_G$  z. B. S235: 490, S355: 760, C45E: 770  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  (nach Roloff/Matek TB 8-10b).

### 5.6 Querbelastete Schraubenverbindung

Bisher wirkte die Betriebskraft *axial*. Steht die Betriebskraft  $F_Q$  dagegen **quer** zur Schraubenachse (Scherbelastung), gibt es zwei Prinzipien – und das Standardprinzip im Maschinenbau ist *nicht* das Abscheren, sondern der **Reibschluss**.

#### WICHTIG!

Bei der **reibschlüssigen** Querverbindung wird die Querkraft allein durch *Reibung in der Trennfuge* übertragen, die die Vorspannkraft erzeugt. Die Schraube selbst wird nur auf Zug (Vorspannung) belastet, *nicht* auf Abscheren! Die Vorspannung muss so hoch sein, dass die

Fuge nicht rutscht.

**Erforderliche Klemmkraft je Schraube** (Reibschluss, nach Roloff/Matek Gl. 8.18):

$$F_{Kl,erf} = \frac{F_Q \cdot S_R}{\mu_T \cdot z \cdot q_F}$$

- $F_Q$ : zu übertragende Querkraft (bei Drehmoment am Lochkreis  $D$ :  $F_Q = 2T/D$ )
- $\mu_T$ : Reibungszahl der Trennfuge (nach Roloff/Matek TB 8-12b)
- $z$ : Anzahl kraftübertragender Schrauben,  $q_F$ : Anzahl Reibflächen (meist 1)
- $S_R$ : Rutschsicherheit ( $\approx 1,2 \dots 1,5$ )

Alternativ überträgt die **formschlüssige** Verbindung (Passschraube, Scher-/Lochleibungsverbindung) die Querkraft direkt über den Bolzenschaft. Vereinfacht (analog Nietverbindung, siehe Kapitel 7) prüft man

$$\text{Abscheren: } \tau_a = \frac{F_Q}{z \cdot A} \leq \tau_{a,zul}, \quad \text{Lochleibung: } p = \frac{F_Q}{z \cdot d \cdot t} \leq p_{zul}.$$

Passschrauben sind teurer (Passung nötig), werden aber bei stoßhafter Last oder wenn Rutschen unzulässig ist eingesetzt. Die genauen Stahlbau-Nachweise (Eurocode 3) sprengen den ME1-Rahmen.

## 5.7 Beispiele

### Anziehmoment und Montagebeanspruchung einer M12–8.8

Eine Schaftschraube **M12–8.8** wird geölt montiert ( $\mu_G = \mu_K = 0,12$ ) und soll beim Anziehen die Streckgrenze zu 90 % ausnutzen.

**Gegeben** (TB 8-1):  $P = 1,75 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 10,863 \text{ mm}$ ,  $d_3 = 9,853 \text{ mm}$ ,  $A_s = 84,3 \text{ mm}^2$ ;  $R_{p0,2} = 640 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .

**Gesucht:** Montage-Vorspannkraft  $F_{sp}$ , Anziehmoment  $M_A$ , Kontrolle der Vergleichsspannung  $\sigma_{red}$ .

### Lösung

#### 1. Maßgebender Durchmesser:

$$d_0 = d_s = \frac{d_2 + d_3}{2} = \frac{10,863 + 9,853}{2} = 10,358 \text{ mm}.$$

#### 2. Montagespannung (90 %-Ausnutzung, Zug+Torsion kombiniert, Gl. 8.32):

$$\sigma_M = \frac{0,9 \cdot R_{p0,2}}{\sqrt{1 + 3 \left[ \frac{3}{d_0} (0,159 P + 0,577 \mu_G d_2) \right]^2}} = 511,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

#### 3. Spannkraft (Montage-Vorspannkraft):

$$F_{sp} = \sigma_M \cdot A_s = 511,7 \cdot 84,3 = 43\,130 \text{ N} \approx \mathbf{43,1 \text{ kN}}.$$

Kontrolle: Tabellenwert  $F_{sp}(\text{M12-8.8}, \mu_{ges} = 0,12) = 43,1 \text{ kN}$  nach Roloff/Matek TB 8-14 – exakt getroffen. ✓

#### 4. Gewindemoment:

$$M_G = F_{sp} (0,159 P + 0,577 \mu_G d_2) = 43\,130 \cdot (0,278 + 0,752) = 44\,450 \text{ Nmm}.$$

**5. Torsionsspannung** mit  $W_t = \pi d_0^3/12$  (überelastisch!):

$$W_t = \frac{\pi \cdot 10,358^3}{12} = 290,9 \text{ mm}^3, \quad \tau_t = \frac{M_G}{W_t} = \frac{44\,450}{290,9} = 152,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**6. Vergleichsspannung** (Kontrolle):

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3\tau_t^2} = \sqrt{511,7^2 + 3 \cdot 152,8^2} = 576,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Sollwert:  $0,9 \cdot R_{p0,2} = 0,9 \cdot 640 = 576 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  – stimmt exakt. ✓

**7. Anziehmoment** (mit Auflagereibung,  $d_K/2 \approx 0,65 d$ ):

$$M_A = F_{sp} (0,159 P + 0,577 \mu_G d_2 + \mu_K \cdot 0,65 d) = 84\,820 \text{ Nmm} \approx \mathbf{84,8 \text{ Nm}}.$$

Kontrolle: TB 8-14 nennt  $M_{sp} = 83,6 \text{ Nm}$ ; die geringe Abweichung stammt aus der Näherung  $d_K/2 = 0,65 d$ . ✓

### Komplettes Verspannungsdreieck mit Betriebskraft

Eine Flanschverbindung mit Schrauben **M12–8.8** hat je Schraube: Schraubennachgiebigkeit  $\delta_S = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ mm/N}$ , Plattennachgiebigkeit  $\delta_T = 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ mm/N}$ , Krafteinleitungsfaktor  $n = 0,4$ . Montagevorspannkraft  $F_{VM} = 30 \text{ kN}$ , Setzkraftverlust  $F_Z = 3 \text{ kN}$ . Axiale Betriebskraft je Schraube  $F_B = 6 \text{ kN}$ , schwellend ( $0 \dots F_B$ );  $A_s = 84,3 \text{ mm}^2$ .

**Gesucht:**  $\Phi_k$ ,  $\Phi$ ,  $F_{BS}$ ,  $F_{BT}$ , Restklemmkraft  $F_{Kl}$ , dynamische Sicherheit  $S_D$ .

### Lösung

**1. Kraftverhältnisse:**

$$\Phi_k = \frac{\delta_T}{\delta_S + \delta_T} = \frac{0,9}{3,5 + 0,9} = 0,2045, \quad \Phi = n \cdot \Phi_k = 0,4 \cdot 0,2045 = \mathbf{0,0818}.$$

**2. Kraftaufteilung** der Betriebskraft:

$$F_{BS} = \Phi F_B = 0,0818 \cdot 6000 = 491 \text{ N}, \quad F_{BT} = F_B(1 - \Phi) = 6000 \cdot 0,918 = 5509 \text{ N}.$$

Fast die gesamte Betriebskraft entlastet die Bauteile – die Schraube spürt nur 491 N. Das ist der Sinn der Vorspannung.

**3. Vorspannkraft nach dem Setzen:**

$$F_V = F_{VM} - F_Z = 30\,000 - 3000 = 27\,000 \text{ N}.$$

**4. Restklemmkraft:**

$$F_{Kl} = F_V - F_{BT} = 27\,000 - 5509 = 21\,491 \text{ N} \approx \mathbf{21,5 \text{ kN}} > 0.$$

Die Fuge bleibt sicher geschlossen (Aufklaffen erst bei  $F_{Kl} \leq 0$ ).

**5. Dynamische Sicherheit** (schwellend,  $F_{Bu} = 0$ ,  $F_{Bo} = F_B$ ):

$$F_a = \frac{F_{Bo} - F_{Bu}}{2} \cdot \Phi = \frac{6000}{2} \cdot 0,0818 = 245,5 \text{ N}, \quad \sigma_a = \frac{F_a}{A_s} = \frac{245,5}{84,3} = 2,91 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

$$\sigma_A = 0,85 \left( \frac{150}{12} + 45 \right) = 48,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad S_D = \frac{\sigma_A}{\sigma_a} = \frac{48,9}{2,91} \approx \mathbf{16,8}.$$

$S_D \gg S_{D,erf} = 1,2$  – die Verbindung ist dauerhaft, mit großer Reserve. Plausibel, denn das kleine  $\Phi$  hält die Schwingbelastung der Schraube winzig.



### Erforderliche Montagevorspannkraft und Schraubenwahl

Ein Deckel eines Druckbehälters wird mit einer Schraube gesichert (stellvertretend je Schraube gerechnet).

**Gegeben:** geforderte Dicht-/Klemmkraft  $F_{Kl} = 8 \text{ kN}$ , axiale Betriebskraft  $F_B = 10 \text{ kN}$  (schwellend), Kraftverhältnis  $\Phi = 0,25$ , Setzkraftverlust  $F_Z = 3 \text{ kN}$ , Anziehen mit Drehmomentschlüssel  $k_A = 1,6$ .

**Gesucht:** Montagevorspannkraft  $F_{VM}$  und passende Schraube (Festigkeitsklasse 8.8).

### Lösung

#### 1. Montagevorspannkraft (Rezept-Schritt 5):

$$F_{VM} = k_A [F_{Kl} + F_B(1 - \Phi) + F_Z] = 1,6 [8000 + 10\,000 \cdot 0,75 + 3000].$$

$$F_{VM} = 1,6 \cdot 18\,500 = 29\,600 \text{ N} = \mathbf{29,6 \text{ kN}}.$$

#### 2. Schraubenwahl – erster Versuch M10–8.8:

TB 8-14 nennt für M10–8.8 ( $\mu_{ges} = 0,12$ ) die Spannkraft  $F_{sp} = 29,6 \text{ kN}$ .

$$F_{sp}(\text{M10-8.8}) = 29,6 \text{ kN} = F_{VM}.$$

**Kontrolle:** Der Tabellenwert ist *exakt gleich* der erforderlichen Montagevorspannkraft – also keinerlei Sicherheitsreserve!  $F_{sp} = F_{VM}$  ist der Grenzfall, kein „ausreichend“.

#### 3. Nächstgrößere Schraube M12–8.8:

$$F_{sp}(\text{M12-8.8}) = 43,1 \text{ kN} \gg F_{VM} = 29,6 \text{ kN}. \quad \checkmark$$

Gewählt: **M12–8.8**. Das zugehörige Anziehmoment liegt anteilig bei

$$M_A \approx 83,6 \text{ Nm} \cdot \frac{29,6}{43,1} \approx 57,4 \text{ Nm}$$

(nur bis  $F_{VM}$  vorspannen, nicht bis zur vollen Spannkraft).

### Achtung!

Beispiel (c) zeigt die Klassiker-Pointe:  $F_{sp} = F_{VM}$  bedeutet *Grenzfall ohne Reserve*, nicht „passt gerade“. Streuungen, Sonderlasten und Montageungenauigkeiten sind dann nicht mehr abgedeckt. Im Zweifel die nächstgrößere Schraube oder eine höhere Festigkeitsklasse wählen.

### Querbelastete Verbindung über Reibschluss

Ein Kupplungsflansch überträgt das Drehmoment  $T = 500 \text{ Nm}$  über einen Lochkreis  $D = 120 \text{ mm}$  mit  $z = 6$  Schrauben.

**Gegeben:** Reibungszahl der Trennfuge  $\mu_T = 0,12$ , geforderte Rutsicherheit  $S_R = 1,2$ , Anziehungsfaktor  $k_A = 1,5$ , eine Reibfläche ( $q_F = 1$ ), keine axiale Betriebskraft ( $F_B = 0$ ), Setzverlust vernachlässigbar.

**Gesucht:** Umfangskraft  $F_Q$ , erforderliche Klemmkraft je Schraube,  $F_{VM}$ , Schraubengröße (8.8).

## Lösung

1. **Umfangskraft** am Lochkreis:

$$F_Q = \frac{2T}{D} = \frac{2 \cdot 500\,000 \text{ Nmm}}{120 \text{ mm}} = 8333 \text{ N}.$$

2. **Erforderliche Klemmkraft je Schraube** (Reibschluss):

$$F_{Kl,erf} = \frac{F_Q \cdot S_R}{\mu_T \cdot z \cdot q_F} = \frac{8333 \cdot 1,2}{0,12 \cdot 6 \cdot 1} = 13\,889 \text{ N} \approx \mathbf{13,9 \text{ kN}}.$$

3. **Montagevorspannkraft** ( $F_B = 0$ ,  $F_Z$  vernachlässigt):

$$F_{VM} = k_A \cdot F_{Kl,erf} = 1,5 \cdot 13\,889 = 20\,833 \text{ N} \approx \mathbf{20,8 \text{ kN}}.$$

4. **Schraubenwahl:** TB 8-14 M10-8.8:  $F_{sp} = 29,6 \text{ kN} \geq 20,8 \text{ kN}$ .

$\Rightarrow$  **M10-8.8 ausreichend.**

Anziehmoment anteilig:  $M_A \approx 47,8 \text{ Nm} \cdot \frac{20,8}{29,6} \approx 33,6 \text{ Nm}$ .

**Kontrolle:** Die Schraube wird nur auf Zug (Vorspannung 20,8 kN) belastet, *nicht* auf Abscheren – die Querkraft trägt allein die Reibung. Plausibel, dass eine kleine M10 genügt.

## 5.8 Mini-Aufgaben

### Mini-Aufgabe

Eine Schraube **M10-8.8** soll mit einer Montagevorspannkraft  $F_{VM} = 25 \text{ kN}$  angezogen werden ( $\mu_{ges} = 0,12$ ,  $d = 10 \text{ mm}$ ). Schätze das erforderliche Anziehmoment  $M_A$  mit der Näherungsformel ab und prüfe die Selbsthemmung ( $d_2 = 9,026 \text{ mm}$ ,  $P = 1,5 \text{ mm}$ ).

## Lösung

**Anziehmoment** (Näherung  $M_A \approx 0,17 F_{VM} d$ ):

$$M_A \approx 0,17 \cdot 25\,000 \cdot 10 = 42\,500 \text{ Nmm} = \mathbf{42,5 \text{ Nm}}.$$

**Selbsthemmung:** Steigungswinkel

$$\tan \varphi = \frac{P}{d_2 \pi} = \frac{1,5}{9,026 \cdot \pi} = 0,0529 \Rightarrow \varphi = 3,0^\circ,$$

Ersatzreibungswinkel  $\tan \rho' = 1,155 \cdot 0,12 = 0,1386 \Rightarrow \rho' = 7,9^\circ$ . Wegen  $\varphi = 3,0^\circ < \rho' = 7,9^\circ$  ist die Verbindung **selbsthemmend**. ✓

### Mini-Aufgabe

Eine Verbindung hat  $F_{VM} = 40 \text{ kN}$ , Setzkraftverlust  $F_Z = 4 \text{ kN}$ , Kraftverhältnis  $\Phi = 0,2$  und eine axiale Betriebskraft  $F_B = 8 \text{ kN}$ . Berechne die Zusatzkraft der Schraube  $F_{BS}$  und die Restklemmkraft  $F_{Kl}$ . Bleibt die Fuge geschlossen?

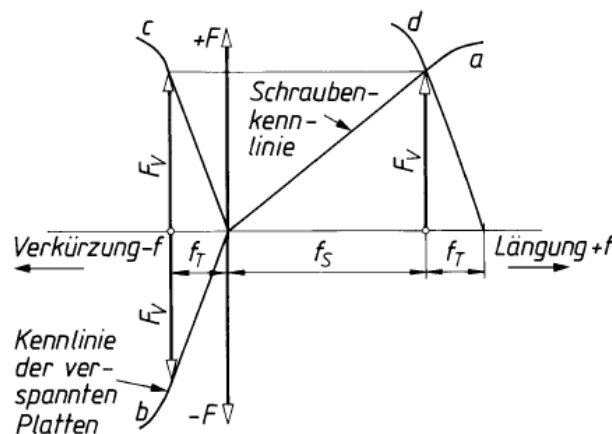
**Zusatz-/Entlastungskraft:**

$$F_{BS} = \Phi F_B = 0,2 \cdot 8000 = 1600 \text{ N}, \quad F_{BT} = F_B(1 - \Phi) = 8000 \cdot 0,8 = 6400 \text{ N}.$$

**Vorspannkraft nach Setzen:**  $F_V = F_{VM} - F_Z = 40\,000 - 4000 = 36\,000 \text{ N}$ . **Restklemmkraft:**

$$F_{Kl} = F_V - F_{BT} = 36\,000 - 6400 = 29\,600 \text{ N} = \mathbf{29,6 \text{ kN} > 0}.$$

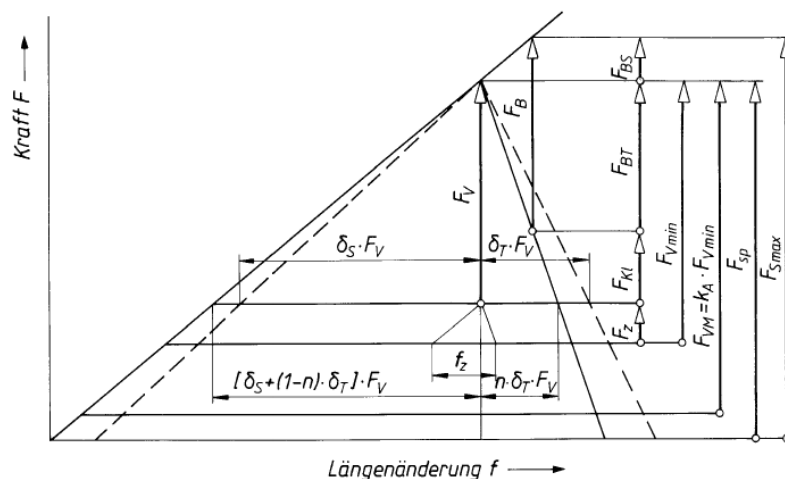
Da  $F_{Kl} > 0$ , bleibt die Trennfuge sicher geschlossen – die Verbindung klafft nicht auf. ✓



**Bild 8-22**  
Kraft-Verformungs-Schaubild für den Montagezustand

Für eine mit der Kraft  $F_V$  auf Zug beanspruchte Schraubenverbindung

Abbildung 25: Kraft-Verformungs-Schaubild (Verspannungsschaubild) für den Montagezustand einer Schraubenverbindung. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 8-9, S. 252.



**Bild 8-22**  
Verspannungsschl  
Hauptdimension  
--- Montagezu

Abbildung 26: Verspannungsschaubild mit allen Hauptdimensionierungsgrößen ( $F_{VM}$ ,  $F_{KL}$ ,  $F_B$ ,  $F_{BS}$ ,  $F_{BT}$ ,  $F_Z$ ,  $f_z$ ) im Betriebszustand – gestrichelt der Montagezustand. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 8-22, S. 263.

## 5.9 Zusammenfassung Kapitel 5

### Das Wichtigste aus Kapitel 5

- **Vorspannung ist alles:** Eine Schraube hält durch die Klemmkraft, nicht durch das Drehmoment. Der Steigungswinkel folgt aus  $\tan \varphi = P_h/(d_2\pi)$ ; Zugquerschnitt ist stets  $A_s$  (nicht  $A_3$ ).
- **Festigkeitsklasse  $x.y$ :**  $R_m = x \cdot 100$ ,  $R_{p0,2} = \frac{y}{10} R_m$  ( $8.8 \rightarrow 800/640$ ).
- **Anziehmoment:**  $M_A = F_{VM}[0,159P + 0,577\mu_G d_2 + \mu_K \frac{d_K}{2}] \approx 0,17 F_{VM} d$ . Selbsthemmung bei  $\varphi < \rho'$ .
- **Verspannungsdreieck:**  $\Phi = n \frac{\delta_T}{\delta_S + \delta_T}$ ;  $F_{BS} = \Phi F_B$ ,  $F_{BT} = F_B(1 - \Phi)$ ,  $F_{Kl} = F_V - F_{BT}$ . Die Schraube spürt nur  $\Phi F_B$ !
- **Auslegungskette:**  $F_{Kl,erf} \rightarrow F_Z = f_Z/(\delta_S + \delta_T) \rightarrow F_{VM} = k_A[F_{Kl} + F_B(1 - \Phi) + F_Z] \rightarrow$  Schraube mit  $F_{sp} \geq F_{VM}$  (Reserve!).
- **Nachweise:** Montage  $\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3\tau_t^2} \leq 0,9R_{p0,2}$  mit  $W_t = \pi d_0^3/12$ ; Dauerfestigkeit  $\sigma_a \leq \sigma_A$  (unabhängig von der Festigkeitsklasse!); Flächenpressung  $p \leq p_G$ .
- **Querlast:** bevorzugt Reibschluss  $F_{Kl,erf} = F_Q S_R/(\mu_T z q_F)$  – die Schraube wird auf Zug, nicht auf Scherung belastet.
- **Fallen:**  $\Phi$  nicht vergessen;  $F_Z$  mitnehmen;  $k_A$  multipliziert;  $F_{sp} = F_{VM}$  ist Grenzfall, keine Reserve.

## 6 Niet-, Bolzen- und Stiftverbindungen

### Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Niet-, Bolzen- und Stiftverbindungen als Scherverbindungen einordnen und von der vorgespannten Schraubenverbindung abgrenzen
- eine Nietverbindung auf Abscheren  $\tau_a$  und Lochleibung  $\sigma_l$  nachweisen und ein-/zweischnittige Anordnungen unterscheiden
- die drei Einbaufälle einer Bolzenverbindung erkennen und das zugehörige Biegemoment  $M_{b,max}$  berechnen
- einen Bolzen vollständig auf Biegung, Scherung und Flächenpressung nachweisen
- eine Querstiftverbindung auf Flächenpressung in Nabe ( $p_N$ ) und Welle ( $p_W$ ) sowie auf Abscheren nachweisen

Schrauben übertragen Kräfte meist über Reibschluss in der Trennfuge – die Vorspannkraft wirkt in Schraubenachse. Niete, Bolzen und Stifte funktionieren grundsätzlich anders: Sie liegen **quer** zur Krafttrichtung in einer Bohrung und übertragen die Kraft direkt auf **Abscheren**, während die umgebenden Bauteile auf **Lochleibung** bzw. **Flächenpressung** beansprucht werden. Niete sind dabei **unlösbar** – der Schließkopf wird im weichen Zustand gestaucht, ein Ausbau zerstört den Niet. Bolzen und Stifte sind **lösbar** und deshalb ideal für Gelenke und für die Kraftübertragung zwischen drehbaren Teilen. Auch wenn die Schraube die Nietverbindung im allgemeinen Maschinenbau weitgehend verdrängt hat, bleibt sie dort unersetzt, wo Gewicht zählt und keine Vorspannung verloren

gehen darf – klassisch im Flugzeugbau. Bolzen stecken in praktisch jedem Gelenk (Kolbenbolzen, Kettenglied, Baggerarm), Stifte überall dort, wo Wellen und Naben Drehmoment einfach und günstig übertragen sollen.

Allen drei Verbindungsarten liegt ein gemeinsames Nachweisschema zugrunde: Das Verbindungselement wird auf **Abscheren** geprüft, das umgebende Bauteil auf **Lochleibung** bzw. **Flächenpressung**. Beim Bolzen kommt als dritter, meist entscheidender Nachweis die **Biegung** hinzu, weil er – anders als Niet und Stift – über eine Spielpassung frei liegend als Biegestab wirkt.

## 6.1 Nietverbindungen

**Wirkprinzip.** Der Niet wird glühend oder kalt in das vorgebohrte Loch eingesetzt und der überstehende Schaft zum **Schließkopf** gestaucht. Dabei füllt er das Loch formschlüssig aus – die Kraftübertragung erfolgt über Abscheren des Nietschafts und Lochleibungsdruck zwischen Niet und Blech. Entscheidend für die Beanspruchung ist die **Schnittigkeit**: Bei der **einschnittigen** Verbindung (Überlappstoß,  $m = 1$ ) liegt nur eine Scherfuge vor, und die Kraft wird außermittig eingeleitet – es entsteht ein zusätzliches Biegemoment  $M = F \cdot (t_1 + t_2)/2$ . Bei der **zweischchnittigen** Verbindung (Doppellaschenstoß,  $m = 2$ ) verdoppelt sich die tragende Scherfläche, und die Kraftlinie verläuft biegungsfrei durch die Verbindung.

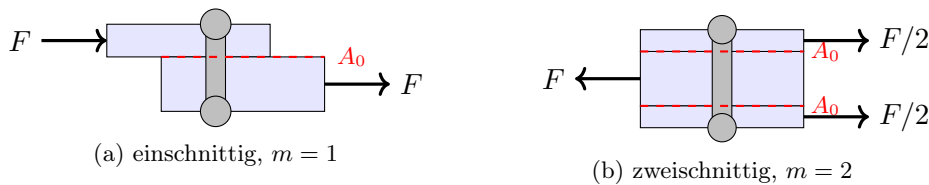


Abbildung 27: Ein- und zweischchnittige Nietverbindung im Schnitt. Bei (a) verläuft die Kraft außermittig – es entsteht ein Biegemoment  $M = F \cdot (t_1 + t_2)/2$ . Bei (b) fluchten die Kraftlinien: keine Biegung, die Scherfläche ist doppelt so groß.

Der Nachweis erfolgt im klassischen Maschinenbau-Konzept mit **zulässigen Spannungen** (das Konzept nach Eurocode 3 mit  $F_{v,Rd}/F_{b,Rd}$  wird für den Stahlbau in einer separaten Merke-Box kurz erwähnt).

**Abscher- und Lochleibungsnachweis** (Gl. 7.10/7.11):

$$\tau_a = \frac{F}{m \cdot n \cdot A_0} \leq \tau_{a,zul}$$

$$\sigma_l = \frac{F}{n \cdot d_0 \cdot t_{\min}} \leq \sigma_{l,zul}$$

- $F$ : Kraft quer zur Nietachse (bei dynamischer Last  $F_{eq} = K_A \cdot F$  mit Anwendungsfaktor  $K_A$  nach TB 3-5)
- $A_0 = \pi d_0^2/4$ : Lochquerschnittsfläche,  $d_0$ : Nietlochdurchmesser
- $m$ : Anzahl der Scherfugen **pro Niet** ( $m = 1$  einschnittig,  $m = 2$  zweischchnittig),  $n$ : Anzahl kraftübertragender Niete
- $t_{\min}$ : kleinste Summe der in gleicher Richtung drückenden Blechdicken – bei zweischchnittiger Verbindung  $t_{\min} = \min(t_1, 2t_2)$ , **nicht** einfach die dünnste Einzelplatte!

Zulässige Spannungen, statisch (freie Sicherheitswahl  $S$ ):

$$\tau_{a,zul} \approx 0,6 \cdot \frac{R_m(\text{Niet})}{S}, \quad \sigma_{l,zul} \approx 1,5 \cdot \frac{R_m(\text{Bauteil})}{S}.$$

## Im Stahlbau heißt das ...

Der Eurocode 3 (DIN EN 1993-1-8) rechnet nicht mit zulässigen Spannungen, sondern mit Bemessungswiderständen  $F_{v,Rd}$  (Abscheren) und  $F_{b,Rd}$  (Lochleibung), jeweils durch den Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_{M2}$  geteilt. Für Kran- und Leichtbau existiert zusätzlich ein Betriebsfestigkeitsnachweis nach DIN 15018-1 mit lastspielabhängigen Werten  $\sigma_{W,zul}$  (TB 7-6). Für dieses Lernbuch bleibt Gl. 7.10/7.11 der maßgebende Rechenweg.

## TB 7-4 – Halbrundniete DIN 124 (Auszug)

| $d_1$ in mm              | 10   | 12  | 16  | 20  | 24  |
|--------------------------|------|-----|-----|-----|-----|
| $d_0$ in mm              | 10,5 | 13  | 17  | 21  | 25  |
| $A_0$ in mm <sup>2</sup> | 87   | 133 | 227 | 346 | 491 |

nach Roloff/Matek TB 7-4. Rand-/Lochabstände nach TB 7-2: Randabstand  $e \geq 1,2 d_0$ , Lochabstand  $p \geq 2,2 d_0$  – sonst reißt das Blech vor dem Niet aus.

## Achtung!

**Zwei klassische Fehler:** (1)  $m$  (Scherfugen pro Niet) und  $n$  (Nietanzahl) werden verwechselt – beide stehen multiplikativ im Nenner von Gl. 7.10, ein vergessener Faktor verdoppelt/halbiert  $\tau_a$  fälschlich. (2) Bei zweischnittigen Verbindungen wird  $t_{\min}$  als „dünnste Einzelplatte“ statt als  $\min(t_1, 2t_2)$  angesetzt – die Summe der gleichsinnig drückenden Außenblechdicken zählt als **ein** Wert.

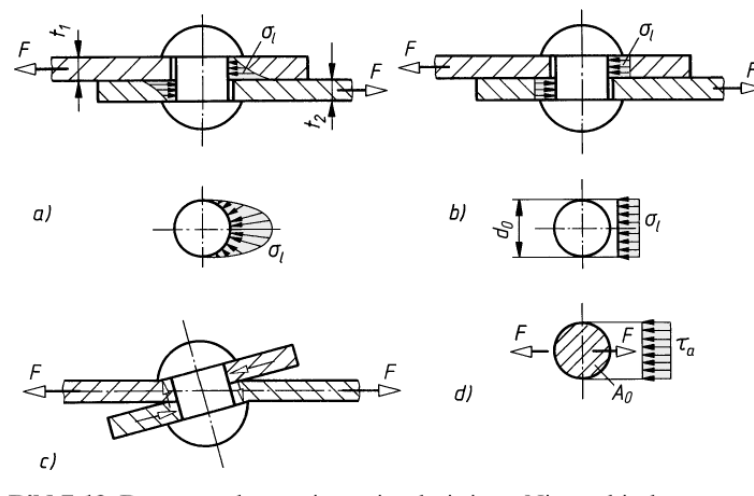


Abbildung 28: Beanspruchung einer einschnittigen Nietverbindung. a) wirklicher Verlauf des Lochleibungsdruckes  $\sigma_l$ , b) und d) rechnerisch angenommener Verlauf der Lochleibungs- und Abscherspannungen  $\sigma_l$  und  $\tau_a$ , c) Verformung unter Last (schematisch). Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 7-12, S. 212.

## Nietverbindung – ein- vs. zweischnittig

Ein Zuglaschenstoß aus S235 ( $R_m = 360 \text{ N/mm}^2$ ) überträgt ruhend  $F = 120 \text{ kN}$  über  $n = 4$  Halbrundniete  $d_1 = 12 \text{ mm}$  ( $d_0 = 13 \text{ mm}$ ,  $A_0 = 133 \text{ mm}^2$  nach TB 7-4). Nietwerkstoff (nach dem Schlagen)  $R_m = 400 \text{ N/mm}^2$ , Sicherheit  $S = 1,5$ . Das Mittelblech ist  $t_1 = 12 \text{ mm}$  dick,

die beiden Außenlaschen je  $t_2 = 6 \text{ mm}$ . Gesucht: Ist die Verbindung einschnittig, ist die Verbindung zweischnittig ausführbar? Nachweis auf Abscheren und Lochleibung.

### Lösung

#### 1. Zulässige Spannungen:

$$\tau_{a,zul} = 0,6 \cdot \frac{400}{1,5} = 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_{l,zul} = 1,5 \cdot \frac{360}{1,5} = 360 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

#### 2. Abscheren, einschnittig ( $m = 1$ , Überlappstoß):

$$\tau_a = \frac{120\,000}{1 \cdot 4 \cdot 133} = 225,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} > 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{nicht zulässig!}$$

#### 3. Abscheren, zweischnittig ( $m = 2$ , Doppellaschenstoß):

$$\tau_a = \frac{120\,000}{2 \cdot 4 \cdot 133} = 112,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{ok (71 \% Ausnutzung)}.$$

#### 4. Lochleibung (mit $t_{\min} = \min(12, 2 \cdot 6) = 12 \text{ mm}$ ):

$$\sigma_l = \frac{120\,000}{4 \cdot 13 \cdot 12} = 192,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 360 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{ok}.$$

Kontrolle/Plausibilität: Dieselbe Kraft und Nietzahl ist nur zweischnittig zulässig – die Verdopplung der Scherfugen halbiert  $\tau_a$  direkt und macht aus einer unzulässigen eine sichere Verbindung. Der Lochleibungsnachweis ist unabhängig von  $m$  und bleibt in beiden Fällen unkritisch.

Ein kurzer Exkurs: Für dünne Bleche ohne Nietwerkzeug haben sich **Stanzniet-** und **Clinchverbindungen** etabliert – der Füge teil wird kalt durchgesetzt, ohne vorgebohrtes Loch. Ein eigener Spannungsnachweis wie oben ist dafür nicht üblich; die zulässigen Kräfte werden Herstellerangaben entnommen.

## 6.2 Bolzenverbindungen

**Wirkprinzip.** Der Bolzen verbindet eine **Gabel** mit einer **Stange** zu einem Gelenk und ist – im Gegensatz zum Niet – **lösbar**. Er wirkt als frei liegender Biegestab, zusätzlich treten Scherung und Flächenpressung auf. Entscheidend für die Größe des Biegemoments ist der **Einbaufall**: Sitzt der Bolzen überall mit Spielpassung (frei drehbar), verhält er sich wie ein beidseitig frei aufliegender Träger – das ungünstigste Mb. Sitzt er dagegen mit Übermaßpassung fest in der Gabel oder in der Stange, wirkt diese Stelle wie eine Einspannung, und das Biegemoment fällt kleiner aus.

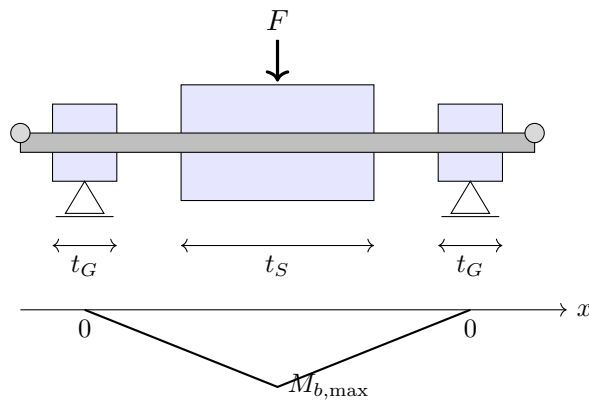


Abbildung 29: Einbaufall 1 (Spielpassung in Gabel *und* Stange): Der Bolzen wirkt wie ein frei aufliegender Träger mit Einzellast  $F$  in Stangenmitte – der Momentenverlauf ist dreieckförmig mit dem Maximum unter der Kraft.

**Maximales Biegemoment je Einbaufall** (mit  $t_S$ : Stangenkopfdicke,  $t_G$ : Dicke *einer* Gabelwange):

Einbaufall 1 (Spiel in Gabel *und* Stange):  $M_{b,max} = \frac{F(t_S + 2t_G)}{8}$

Einbaufall 2 (Übermaß in der Gabel):  $M_{b,max} = \frac{F t_S}{8}$

Einbaufall 3 (Übermaß in der Stange):  $M_{b,max} = \frac{F t_G}{4}$

Entwurfsformel für den Bolzendurchmesser (Gl. 9.1):

$$d \geq k \cdot \sqrt{\frac{K_A \cdot F_{nenn}}{\sigma_{b,zul}}}$$

mit Einspannfaktor  $k$  (Klammerwert = gleitende Flächen): Einbaufall 1:  $k = 1,6$  (1,9); Einbaufall 2:  $k = 1,1$  (1,4); Einbaufall 3:  $k = 1,1$  (1,2).

**Nachweise am bemaßten Bolzen** (Gl. 9.2–9.4):

$$\sigma_b = \frac{K_A \cdot M_{b,nenn}}{0,1 \cdot d^3} \leq \sigma_{b,zul}, \quad \tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{K_A \cdot F_{nenn}}{A_S} \leq \tau_{a,zul}, \quad p = \frac{K_A \cdot F_{nenn}}{A_{proj}} \leq p_{zul}$$

mit  $A_S = \pi d^2/4$ . Projizierte Fläche  $A_{proj}$ : an der Stange  $d \cdot t_S$ , an der **gesamten** Gabel  $2 \cdot d \cdot t_G$  (beide Wangen zusammen).

Zulässige Spannungen für Bolzen/Stifte, bezogen auf  $R_m$

| Belastung  | $\sigma_{b,zul}$ | $\tau_{a,zul}$ | $p_{zul}$ (nicht gleitend) |
|------------|------------------|----------------|----------------------------|
| ruhend     | $0,3 R_m$        | $0,2 R_m$      | $0,35 R_m$                 |
| schwellend | $0,2 R_m$        | $0,15 R_m$     | $0,25 R_m$                 |
| wechselnd  | $0,15 R_m$       | $0,1 R_m$      | –                          |

nach Roloff/Matek TB 9-1. Für nicht gehärtete Normbolzen/-stifte (Härte 125–245 HV) gilt richtwertig  $R_m = 400 \text{ N/mm}^2$ . Normdurchmesser nach TB 9-2 (Bolzen): 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 30, 36, 40, 50,



60 mm.

### Achtung!

**Zwei klassische Fehler:** (1) Der **Einbaufall** wird falsch bestimmt – entscheidend ist, *wo* die Übermaßpassung sitzt (Gabel, Stange oder gar keine), nicht ob der Bolzen „fest“ wirkt. Einbaufall 1 liefert das größte  $M_{b,max}$ , eine Verwechslung führt meist zu einer zu klein berechneten Biegespannung. (2) Bei  $A_{proj}$  wird die Gabel wie die Stange behandelt – richtig ist  $A_{proj} = 2 d t_G$  für die Gabel (beide Wangen!), auch wenn die Zahlenwerte zufällig gleich groß werden können.

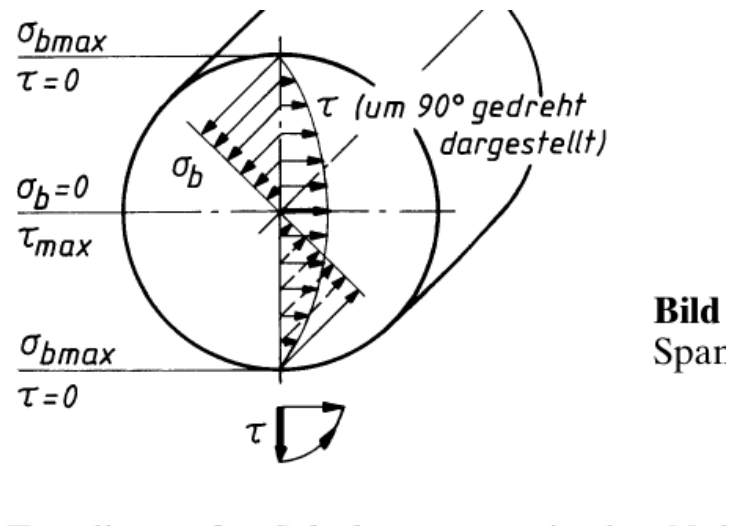


Abbildung 30: Spannungsverteilung im Bolzenquerschnitt: In der Randfaser trifft  $\sigma_{b,max}$  mit  $\tau = 0$  und in der Nulllinie  $\tau_{max}$  mit  $\sigma_b = 0$  zusammen. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 9-3, S. 295.

### Gabel-Stange-Bolzen, Einbaufall 1

Ein Bolzengelenk überträgt schwelkend  $F_{nenn} = 15 \text{ kN}$  bei leichten Stößen ( $K_A = 1,2$ ). Der Bolzen sitzt mit Spielpassung sowohl in der Gabel als auch in der Stange (Einbaufall 1, nicht gleitende Flächen:  $k = 1,6$ ,  $t_S/d = 1,0$ ,  $t_G/d = 0,5$ ). Werkstoff: nicht gehärteter Normbolzen,  $R_m = 400 \text{ N/mm}^2$ . Gesucht: erforderlicher Bolzendurchmesser sowie die vollständigen Nachweise (Biegung, Scherung, Flächenpressung) am gewählten Normdurchmesser.

### Lösung

#### 1. Zulässige Spannungen (schwelkend, Tabelle oben):

$$\sigma_{b,zul} = 0,2 \cdot 400 = 80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \tau_{a,zul} = 0,15 \cdot 400 = 60 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad p_{zul} = 0,25 \cdot 400 = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

#### 2. Entwurf (Gl. 9.1):

$$d \geq 1,6 \cdot \sqrt{\frac{1,2 \cdot 15\,000}{80}} = 24,0 \text{ mm}$$

Normdurchmesser  $d = 24 \text{ mm}$  (TB 9-2) – exakt getroffen. **3. Bauteilmaße:**  $t_S = 1,0 \cdot 24 = 24 \text{ mm}$ ,  $t_G = 0,5 \cdot 24 = 12 \text{ mm}$ .

$$M_{b,max} = \frac{15\,000 \cdot (24 + 2 \cdot 12)}{8} = 90\,000 \text{ Nmm}.$$

#### 4. Biegung:

$$\sigma_b = \frac{1,2 \cdot 90\,000}{0,1 \cdot 24^3} = 78,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{ok, knapp (98 \% Ausnutzung)}.$$

#### 5. Scherung ( $A_S = \pi \cdot 24^2/4 = 452,4 \text{ mm}^2$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1,2 \cdot 15\,000}{452,4} = 53,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 60 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{ok}.$$

#### 6. Flächenpressung Stange ( $A_{\text{proj}} = 24 \cdot 24 = 576 \text{ mm}^2$ ) und Gabel ( $A_{\text{proj}} = 2 \cdot 24 \cdot 12 = 576 \text{ mm}^2$ , hier zufällig gleich groß):

$$p = \frac{1,2 \cdot 15\,000}{576} = 31,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{ok}.$$

Kontrolle: Die Entwurfsformel ist genau auf  $\sigma_{b,\text{zul}}$  ausgelegt – deshalb ist die Biegung mit 98 % Ausnutzung erwartungsgemäß der bemessungsentscheidende Nachweis, während Scherung (89 %) und Flächenpressung (31 %) deutlich unkritischer bleiben.

### 6.3 Stiftverbindungen

Stifte übertragen – ähnlich wie Niete – vor allem über **Abscheren** und **Flächenpressung**, sind aber (mit Ausnahme des Kerbstifts) lösbar. Man unterscheidet nach Bauform: **Zylinderstift** (Passstift zur genauen Lagesicherung), **Kegelstift** (leicht demontierbar, meist unberechnet als reines Lagesicherungselement eingesetzt), **Kerbstift/Kerbnagel** (mit Kerben kalt aufgeweitet, dadurch rüttelfest im Loch geklemmt) und **Spannstift/Spannhülse** (federnde Rohrhülse, gleicht Fertigungstoleranzen aus). Die praktisch wichtigste berechnete Anwendung ist der **Querstift** zur Drehmomentübertragung zwischen Welle und Nabe.

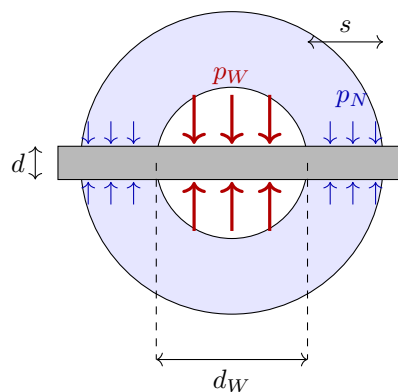


Abbildung 31: Querstift im Schnitt entlang der Stiftachse: Die Flächenpressung ist in der Wellenbohrung ( $p_W$ ) wegen der kleineren tragenden Fläche deutlich größer als in der Nabenbohrung ( $p_N$ ).

**Querstiftverbindung** (Gl. 9.15–9.17), mit  $d$ : Stiftdurchmesser,  $d_W$ : Wellendurchmesser,  $s$ : Nabenwanddicke:

$$p_N = \frac{K_A \cdot T_{\text{nenn}}}{d \cdot s \cdot (d_W + s)} \leq p_{\text{zul}} \quad (\text{Pressung Nabenbohrung})$$

$$p_W = \frac{6 \cdot K_A \cdot T_{\text{nenn}}}{d \cdot d_W^2} \leq p_{\text{zul}} \quad (\text{Pressung Wellenbohrung, **Faktor 6!**})$$

$$\tau_a = \frac{4 \cdot K_A \cdot T_{\text{nenn}}}{d^2 \cdot \pi \cdot d_W} \leq \tau_{a,\text{zul}} \quad (\text{Abscheren im Wellenquerschnitt})$$

Entwurfswerte:  $d \approx (0,2 \dots 0,3) \cdot d_W$ ,  $s \approx (0,25 \dots 0,5) \cdot d_W$  (Stahl/GS) bzw.  $0,75 \cdot d_W$  (GJL). Für Kerbstifte gelten  $p_{\text{zul}}$  und  $\tau_{a,\text{zul}}$  aus der Tabelle in Abschnitt 6.2 mit den Faktoren 0,7 (Flächenpressung) bzw. 0,8 (Abscheren). Normdurchmesser nach TB 9-3: 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 16; 20; 25; 30; 40; 50 mm.

## WICHTIG!

Der Faktor 6 in Gl. 9.16 sorgt dafür, dass  $p_W$  (Wellenbohrung) fast immer der **bemessungsentscheidende** Nachweis ist – die tragende Fläche in der Welle ist kleiner und ungünstiger verteilt als in der Nabenbohrung. Wer nur  $p_N$  prüft und  $p_W$  vergisst, übersieht typischerweise den kritischen Fall!

## Querstift unter Torsion

Eine Hebelnabe aus EN-GJL-200 ( $R_m = 200 \text{ N/mm}^2$ ) sitzt auf einer Welle  $d_W = 25 \text{ mm}$  (Nabenaußendurchmesser  $D = 2d_W = 50 \text{ mm}$ , Wandstärke  $s = (D - d_W)/2 = 12,5 \text{ mm}$ ) und wird durch eine schwellend wirkende Hebelkraft  $F = 600 \text{ N}$  am Hebelarm  $l_1 = 80 \text{ mm}$  belastet (leichte Stöße,  $K_A = 1,2$ ). Gewählt ist ein Kegelkerbstift  $d = 10 \text{ mm}$ , Stiftwerkstoff  $R_m = 400 \text{ N/mm}^2$ . Gesucht: Nachweise auf Flächenpressung ( $p_N$ ,  $p_W$ ) und Abscheren.

## Lösung

### 1. Nenndrehmoment:

$$T_{\text{nenn}} = F \cdot l_1 = 600 \cdot 80 = 48\,000 \text{ Nmm}.$$

### 2. Zulässige Werte, schwellend, Kerbstift-Faktoren:

$$p_{\text{zul,Nabe}} = 0,7 \cdot 0,25 \cdot 200 = 35 \text{ N/mm}^2$$

$$p_{\text{zul,Stift}} = 0,7 \cdot 0,25 \cdot 400 = 70 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{a,\text{zul}} = 0,8 \cdot 0,15 \cdot 400 = 48 \text{ N/mm}^2$$

### 3. Pressung Nabenbohrung (Gl. 9.15):

$$p_N = \frac{1,2 \cdot 48\,000}{10 \cdot 12,5 \cdot 37,5} = 12,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 35 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

ok (35 % Ausnutzung).

### 4. Pressung Wellenbohrung (Gl. 9.16):

$$p_W = \frac{6 \cdot 1,2 \cdot 48\,000}{10 \cdot 25^2} = 55,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 70 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

ok, aber 79 % Ausnutzung – bemessungsentscheidend!

### 5. Abscheren (Gl. 9.17):

$$\tau_a = \frac{4 \cdot 1,2 \cdot 48\,000}{10^2 \cdot \pi \cdot 25} = 29,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 48 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

ok (61 % Ausnutzung). Kontrolle: Wie erwartet ist  $p_W$  mit 79 % Ausnutzung deutlich kritischer als  $p_N$  (35 %) – der Faktor 6 macht sich genau wie in der Merke-Box beschrieben bemerkbar.

Kurz zu den beiden übrigen Stift-Bauarten: Der **Steckstift** (Bild 9-10b) überträgt eine Querkraft  $F$  am Hebelarm  $l$  und wird auf Biegung *und* überlagerte Flächenpressung nachgewiesen:

$$\sigma_b = \frac{K_A \cdot M_{b,\text{nenn}}}{0,1 \cdot d^3} \leq \sigma_{b,\text{zul}} \text{ mit } M_{b,\text{nenn}} = F \cdot l, \quad p_{\text{max}} = \frac{K_A \cdot F_{\text{nenn}} \cdot (6l + 4s)}{d \cdot s^2} \leq p_{\text{zul}}.$$

Beim **Längsstift/Rundkeil** (Welle-Nabe-Verbindung mit Stift parallel zur Wellenachse, Länge  $l$ ) ist ausschließlich die Flächenpressung maßgebend, Abscheren wird vernachlässigt:

$$p = \frac{4 \cdot K_A \cdot T_{\text{nenn}}}{d \cdot d_W \cdot l} \leq p_{\text{zul}}.$$

## 6.4 Mini-Aufgaben

### Mini-Aufgabe

Eine zweiseitige Nietverbindung ( $m = 2$ ) überträgt ruhend  $F = 80\text{ kN}$  über  $n = 3$  Halbrundniete  $d_1 = 16\text{ mm}$  ( $d_0 = 17\text{ mm}$ ,  $A_0 = 227\text{ mm}^2$  nach TB 7-4). Nietwerkstoff  $R_m = 400\text{ N/mm}^2$ , Sicherheit  $S = 1,5$ . Prüfe die Verbindung auf Abscheren.

### Lösung

$$\tau_{a,\text{zul}} = 0,6 \cdot \frac{400}{1,5} = 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_a = \frac{80\,000}{2 \cdot 3 \cdot 227} = 58,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \rightarrow \text{ok (37 \% Ausnutzung)}.$$

### Mini-Aufgabe

Eine Nabe wird über einen Zylinderstift  $d = 6\text{ mm}$  mit einer Welle  $d_W = 20\text{ mm}$  verbunden. Das zu übertragende Nenndrehmoment beträgt  $T_{\text{nenn}} = 20\,000\text{ Nmm}$ , die Last ist ruhend ( $K_A = 1,0$ ), Stiftwerkstoff  $R_m = 400\text{ N/mm}^2$ . Prüfe die Flächenpressung in der Wellenbohrung  $p_W$ .

### Lösung

$$p_W = \frac{6 \cdot 1,0 \cdot 20\,000}{6 \cdot 20^2} = 50,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad p_{\text{zul}} = 0,35 \cdot 400 = 140 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

$50,0 < 140\text{ N/mm}^2 \rightarrow \text{ok (36 \% Ausnutzung)}$ . Kontrolle: Trotz des Faktors 6 bleibt hier ausreichend Reserve, weil der Stiftwerkstoff mit  $R_m = 400\text{ N/mm}^2$  deutlich fester ist als die typische Nabe.

## 6.5 Zusammenfassung Kapitel 6

### Das Wichtigste aus Kapitel 6

- **Gemeinsames Prinzip:** Verbindungselement auf Abscheren, Bauteil auf Lochleibung/Flächenpressung – Bolzen zusätzlich auf Biegung.
- **Niet:**  $\tau_a = F/(m n A_0) \leq \tau_{a,zul}$  und  $\sigma_l = F/(n d_0 t_{min}) \leq \sigma_{l,zul}$ . Eselsbrücke zur Schnittigkeit:  $m$  zählt, wie oft das Messer beim gedanklichen Schneiden durch den Niet fahren müsste – einmal beim Überlapstoß, zweimal beim Doppellaschenstoß.
- **Bolzen:** Einbaufall bestimmen  $\rightarrow M_{b,max}$  berechnen  $\rightarrow$  Nachweise  $\sigma_b, \tau_a, p$  führen. Einbaufall 1 (Spiel überall) ist am ungünstigsten, Einbaufall 3 (Übermaß in der Stange) am günstigsten.
- **Querstift:** Immer *alle drei* Nachweise führen –  $p_N, p_W$  und  $\tau_a$  – wobei  $p_W$  wegen des Faktors 6 fast immer maßgebend ist.
- **Klausur-Reflex:**  $K_A$  multipliziert die Nennkraft/das Nenndrehmoment *vor* dem Einsetzen, nie die zulässige Spannung.

## 7 Elastische Federn

### Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Federkennlinie, Federrate  $R$  und Federungsarbeit  $W$  definieren und aus einem Diagramm ablesen
- Reihen-, Parallel- und Gemischtschaltungen von Federn berechnen und die Merkregel dahinter erklären
- Für zylindrische Schraubendruckfedern Geometrie ( $d, D, w, n, n_t$ ), Schubspannung  $\tau$  und Federrate  $R$  berechnen
- Den Spannungsbeiwert  $k$  anwenden und zulässige Spannungen nach Drahtsorte einordnen
- Blocklänge  $L_c$ , Mindestabstand  $S_a$  und die ungespannte Länge  $L_0$  einer Druckfeder bestimmen
- Tellerfeder und Blattfeder als Nebenteile qualitativ einordnen

Federn sind überall im Maschinenbau: Sie **speichern Energie** (Uhrfeder, Federspeicher), sie **begrenzen Kräfte** (Überlastsicherung, Ventildfeder) und sie **dämpfen Schwingungen**, indem sie Stöße abfedern und Kontaktkräfte über die Zeit verteilen (Fahrzeugfederung, Maschinenlager). Anders als die bisher behandelten Bauteile ist die **gewollte, große elastische Verformung** bei einer Feder kein Mangel, sondern genau ihre Funktion. Damit ändert sich auch die Denkweise: Neben dem Festigkeitsnachweis ( $\tau \leq \tau_{zul}$ ) tritt jetzt die **Kennlinie** in den Vordergrund – also die Frage, wie Kraft und Weg zusammenhängen.

### 7.1 Federkennlinie und Federrate

Trägt man die Federkraft  $F$  über dem Federweg  $s$  auf, erhält man die **Federkennlinie**. Ihre Steigung heißt **Federrate**  $R$  (in anderen Büchern, z. B. bei Vöth, auch als  $c$  bezeichnet – inhaltlich dasselbe, nur andere Notation).

**Federrate** bei linearer Kennlinie (Gl. 10.1):

$$R = \tan \alpha = \frac{F_1 - F_2}{s_1 - s_2} \quad \text{bzw. für Drehfedern:} \quad R_\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

- $R$ : Federrate in N/mm (Translationsfeder) bzw.  $R_\varphi$  in N·mm/rad (Drehfeder)
- $F_1, F_2$ : Federkräfte bei den Federwegen  $s_1, s_2$

Nicht jede Feder hat eine **lineare** Kennlinie. Man unterscheidet:

- **linear**:  $R = \text{const.}$ , typisch für die zylindrische Schraubendruckfeder aus Runddraht
- **progressiv**:  $R$  nimmt mit  $s$  zu (Kennlinie wird steiler), typisch für eine Tellerfedersäule
- **degressiv**:  $R$  nimmt mit  $s$  ab (Kennlinie wird flacher), typisch für eine auf Zug beanspruchte Gummifeder

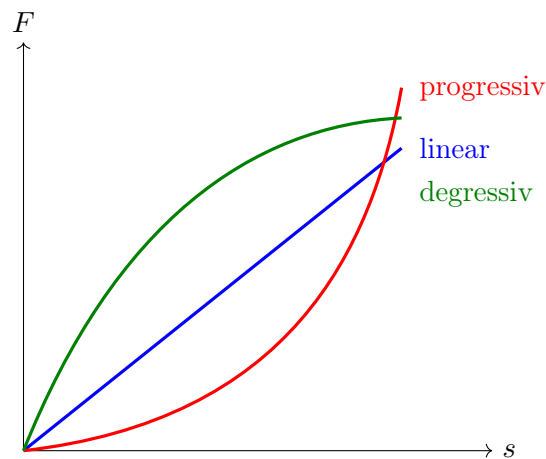


Abbildung 32: Federkennlinien: linear (z. B. zylindrische Schraubendruckfeder), progressiv (z. B. Tellerfedersäule) und degressiv (z. B. Gummifeder auf Zug).

## 7.2 Federungsarbeit

Beim Spannen einer Feder wird mechanische Arbeit verrichtet, die als Formänderungsenergie gespeichert wird – genau diese Energie gibt die Feder beim Entspannen wieder ab. Geometrisch ist die Federungsarbeit  $W$  die **Fläche unter der Kennlinie**.

**Federungsarbeit** bei gerader (linearer) Kennlinie (Gl. 10.3):

$$W = \frac{F \cdot s}{2} = \frac{R \cdot s^2}{2}$$

$W$ : Federungsarbeit in N·mm; bei gekrümmter Kennlinie ist  $W$  als Integral  $\int F ds$  zu bestimmen.

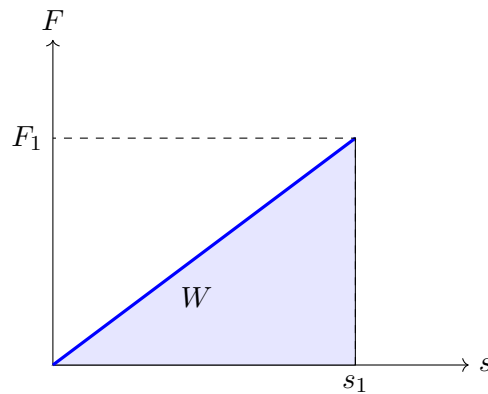


Abbildung 33: Federungsarbeit  $W$  als Fläche unter der (linearen) Kennlinie:  $W = F_1 s_1 / 2 = R s_1^2 / 2$ .

### 7.3 Reihen-, Parallel- und Gemischtschaltung

Selten reicht eine einzelne Feder aus – oft werden mehrere Federn zu einem Paket kombiniert, um eine gewünschte Gesamtfederhärte zu erreichen. Dabei kommt es entscheidend darauf an, **wie** die Federn verbunden sind.

**Federschaltungen** (Gl. 10.2):

$$\text{Parallel: } R_{ges} = R_1 + R_2 \qquad \text{Reihe: } \frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\text{Gemischt (Beispiel): } \frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Bei  $n$  Federn addieren sich bei Reihenschaltung die **Kehrwerte** (Nachgiebigkeiten), bei Parallelschaltung die Raten selbst.

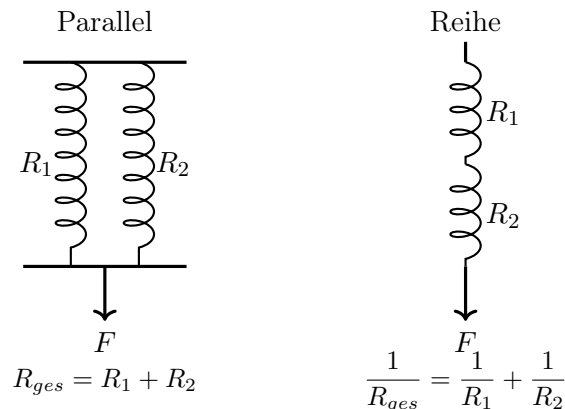


Abbildung 34: Parallelschaltung (gemeinsame Deckplatten) und Reihenschaltung (gemeinsame Kraftlinie) zweier Federn.

#### Merkregel Federschaltung

**Reihe macht weich, Parallel macht steif.**

- **Reihenschaltung:** Jede Feder trägt die volle Kraft  $F$ , die Wege addieren sich  $\rightarrow$  die Nachgiebigkeiten ( $1/R$ ) addieren sich  $\rightarrow R_{ges}$  ist **kleiner** als die kleinste Einzelrate.
- **Parallelschaltung:** Jede Feder trägt einen Kraftanteil, der Weg  $s$  ist für alle gleich  $\rightarrow$

die Raten addieren sich direkt  $\rightarrow R_{ges}$  ist **größer** als die größte Einzelrate.

- **Gemischtschaltung:** zuerst die parallelen bzw. in Reihe liegenden Teilgruppen zusammenfassen, dann das Ergebnis wie eine einzelne Feder weiterverrechnen.

#### Gemischtschaltung dreier Federn

Zwei Federn mit  $R_1 = 25 \text{ N/mm}$  und  $R_2 = 40 \text{ N/mm}$  liegen auf gemeinsamen Deckplatten (Parallelschaltung). Dieses Federpaar ist in Reihe mit einer dritten Feder  $R_3 = 90 \text{ N/mm}$  geschaltet. Gesucht: Gesamtfederrate  $R_{ges}$  und Federweg  $s_{ges}$  bei  $F = 600 \text{ N}$ .

#### Lösung

##### 1. Parallelgruppe zusammenfassen:

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 25 + 40 = 65,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

##### 2. Reihenschaltung mit $R_3$ :

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{65,0} + \frac{1}{90} \Rightarrow R_{ges} = 37,74 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

##### 3. Federweg bei $F = 600 \text{ N}$ :

$$s_{ges} = \frac{F}{R_{ges}} = \frac{600}{37,74} = 15,90 \text{ mm}.$$

Kontrolle:  $R_{ges} = 37,74 \text{ N/mm}$  liegt zwischen der kleinsten Einzelrate ( $R_1 = 25$ ) und der größten ( $R_3 = 90$ ) – so muss es bei einer Gemischtschaltung sein.

## 7.4 Federwerkstoffe im Überblick

Schraubenfedern werden – wie du im nächsten Abschnitt siehst – überwiegend auf **Torsion** beansprucht. Maßgeblich ist daher der **Schubmodul**  $G$ , nicht der Elastizitätsmodul  $E$ .

#### Werkstoffkennwerte nach Roloff/Matek TB 10-1

| Federwerkstoff                                                          | $E$ in $\text{N/mm}^2$ | $G$ in $\text{N/mm}^2$ |
|-------------------------------------------------------------------------|------------------------|------------------------|
| Federstahldraht patentiert-gezogen (SL, SM, DM, SH, DH), DIN EN 10270-1 | 206 000                | 81 500                 |
| Vergüteter Ventildraht (FD, TD, VD), DIN EN 10270-2                     | 206 000                | 81 500                 |
| Warmgewalzt (55Cr3, 50CrV4), DIN EN 10089                               | 206 000                | 78 000                 |

#### Achtung!

$G$  statt  $E$  (oder umgekehrt) einsetzen ist ein klassischer Klausurfehler. Schraubenfedern werden auf Torsion beansprucht ( $G \approx 81\,500 \text{ N/mm}^2$ ), Blattfedern und Drehstäbe dagegen auf Biegung ( $E = 206\,000 \text{ N/mm}^2$ ). Eine Verwechslung verfälscht die berechnete Federrate um den Faktor  $E/G \approx 2,5$ .

## 7.5 Hauptteil: Zylindrische Schraubendruckfeder – Geometrie

Die zylindrische Schraubendruckfeder aus Runddraht ist die mit Abstand häufigste Bauform. Sie besteht aus einem schraubenlinienförmig gewickelten Runddraht mit Durchmesser  $d$ .



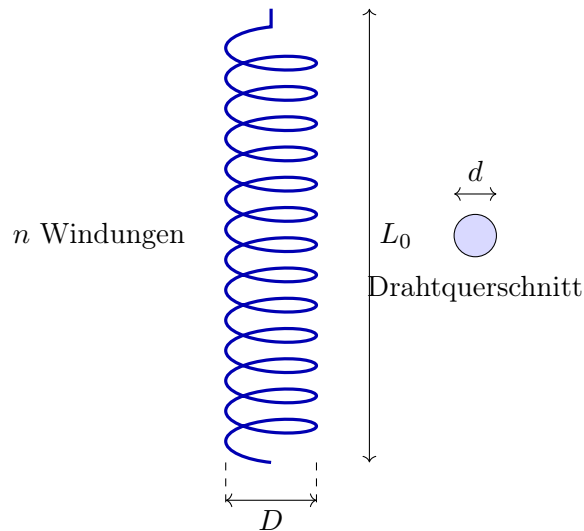


Abbildung 35: Geometrie der zylindrischen Schraubendruckfeder: Drahtdurchmesser  $d$ , mittlerer Windungsdurchmesser  $D$  (**nicht** der Außendurchmesser  $D_e$ !), ungespannte Länge  $L_0$ .

### WICHTIG!

$D$  ist der **mittlere Windungsdurchmesser**, gemessen von Drahtmitte zu Drahtmitte – nicht der Außendurchmesser  $D_e$  und nicht der Innendurchmesser  $D_i$ ! Es gilt

$$D = D_e - d = D_i + d.$$

Wird versehentlich  $D_e$  statt  $D$  in  $\tau$  oder  $R$  eingesetzt, werden Spannungen systematisch zu hoch bzw. Federn rechnerisch zu weich.

Ein weiteres wichtiges Geometrieverhältnis ist das **Wickelverhältnis**  $w = D/d$  (kaltgeformt üblich  $w = 4 \dots 20$ ). Außerdem unterscheidet man zwei Windungszahlen:

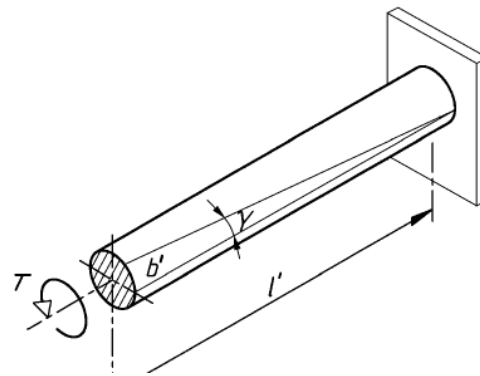
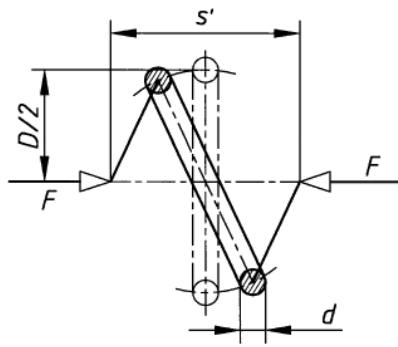
### Windungszahlen:

$$w = \frac{D}{d} \quad n_t = n + 2 \text{ (kaltgeformt)} \quad n_t = n + 1,5 \text{ (warmgeformt)} \quad (\text{Gl. 10.36})$$

- $n$ : Anzahl der **federnden** Windungen – geht in  $R$ ,  $s$ ,  $F$ ,  $W$  ein
- $n_t$ : **Gesamtwindungszahl** inkl. der nicht federnden Endwindungen – wird nur für Längen ( $L_c$ ,  $L_0$ ) gebraucht

### Achtung!

$n$  und  $n_t$  **nicht verwechseln!** In die Formeln für Federrate, Federweg, Federkraft und Federungsarbeit geht immer die Anzahl der **federnden** Windungen  $n$  ein – niemals  $n_t$ . Die Gesamtwindungszahl  $n_t$  brauchst du ausschließlich für die Blocklänge  $L_c$  und die daraus abgeleiteten Längen.



**Bild 1**  
Halbk  
Schra

Abbildung 36: Halbkreisbügel als Teil der Schrauben-Druckfeder und „abgeleiteter“ Torsionsstab – veranschaulicht die Herleitung von  $\tau$  aus dem Torsionsstab-Modell. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 10-28, S. 348.

## 7.6 Beanspruchung: Schubspannung und Spannungsbeiwert

Denkt man sich den Federdraht an einer Stelle aufgeschnitten, wirkt dort ein Torsionsmoment  $T = F \cdot D/2$  auf den Drahtquerschnitt. Der Draht wird also nicht auf Biegung, sondern auf **Torsion** beansprucht.

**Vorhandene Schubspannung**, ohne Krümmungseinfluss, statisch bei  $N \leq 10^4$  Lastspielen (Gl. 10.43):

$$\tau = \frac{F \cdot D/2}{\pi/16 \cdot d^3} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}$$

**Korrigierte Spannung** mit Spannungsbeiwert  $k$  für die Drahtkrümmung, dynamisch bei  $N > 10^4$  (Gl. 10.44):

$$\tau_k = k \cdot \tau \quad k = \frac{w + 0,5}{w - 0,75} \quad (\text{TB 10-11d, Bergsträsser-Näherung})$$

Der Faktor  $k$  berücksichtigt, dass die Spannung im Draht innen (zur Federachse hin) höher ist als außen, weil sich dort Torsions- und Schubspannungsanteil überlagern. Je kleiner das Wickelverhältnis  $w$ , desto stärker die Krümmung und desto größer  $k$  – z. B.  $k \approx 1,18$  bei  $w = 8$  und  $k \approx 1,10$  bei  $w = 15$  (nach Roloff/Matek TB 10-11d).

### Achtung!

Bei **rein statischer** Beanspruchung ( $N \leq 10^4$ ) darf vereinfacht ohne  $k$  gerechnet werden. Bei **dynamischer** Beanspruchung (z. B. Ventildrücken,  $N > 10^4$ ) muss  $\tau$  dagegen mit  $k$  korrigiert werden. Unabhängig davon muss aber **immer** die Blockspannung  $\tau_c$  mit  $\tau_{c,zul}$  verglichen werden (Abschnitt 7.9) – das wird gerne vergessen.

### Gegebene Druckfeder: Federrate und Spannung

Eine zylindrische Schraubendruckfeder hat  $d = 5,0 \text{ mm}$ ,  $D = 40 \text{ mm}$  ( $w = D/d = 8$ ),  $n = 8$  federnde Windungen, Werkstoff Federstahldraht ( $G = 81\,500 \text{ N/mm}^2$ ). Sie wird statisch mit  $F = 250 \text{ N}$  belastet. Gesucht: Federrate  $R$ , Federweg  $s$ , vorhandene Spannung  $\tau$  und korrigierte Spannung  $\tau_k$ .

## Lösung

### 1. Federrate (Gl. 10.46):

$$R = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} = \frac{81\,500 \cdot 5,0^4}{8 \cdot 40^3 \cdot 8} = 12,44 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

### 2. Federweg:

$$s = \frac{F}{R} = \frac{250}{12,44} = 20,10 \text{ mm}.$$

### 3. Vorhandene Schubspannung (Gl. 10.43):

$$\tau = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} = \frac{8 \cdot 250 \cdot 40}{\pi \cdot 5,0^3} = 203,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

### 4. Spannungsbeiwert und korrigierte Spannung:

$$k = \frac{w + 0,5}{w - 0,75} = \frac{8,5}{7,25} = 1,172, \quad \tau_k = k \cdot \tau = 1,172 \cdot 203,7 = 238,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Kontrolle: Mit  $\tau_{\text{zul}}(\text{SM}, d = 5) \approx 731 \text{ N/mm}^2$  (Abschnitt 7.9) ist  $\tau_k$  nur zu etwa 33 % ausgelastet – die Feder ist für dynamische Zwecke deutlich überdimensioniert.

## 7.7 Federrate, Federkraft, Federweg und Auslegung

Aus  $\tau = 8FD/(\pi d^3)$  und der Torsionsverdrehung des aufgewickelten Drahtes ergibt sich die Federrate direkt aus den Geometriegrößen – ein wichtiger Unterschied zu den meisten anderen Maschinenelementen, bei denen man Kraft und Verformung getrennt bestimmt.

### Federrate, federnde Windungszahl, Kraft, Weg, Arbeit (Gl. 10.45–10.49):

$$R = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} \quad n = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot R_{\text{soll}}} \quad F = R \cdot s$$
$$s = \frac{8 \cdot D^3 \cdot n \cdot F}{G \cdot d^4} \quad W = \frac{F \cdot s}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{V \cdot \tau^2}{G}$$

**Überschlägige Vorwahl des Drahtdurchmessers** bei vorgegebenem  $D_e$  bzw.  $D_i$  (Gl. 10.42):

$$d \approx k_1 \cdot \sqrt[3]{F \cdot D_e}$$

mit  $k_1 = 0,15$  (Sorten SL...DH,  $d < 5 \text{ mm}$ ) bzw.  $k_1 = 0,16$  ( $d = 5 \dots 14 \text{ mm}$ ); für Ventildraht FD/TD/VD gilt  $k_1 = 0,17/0,18$ .

### Lösungsrezept: Drahtdurchmesser auslegen

1. Drahtdurchmesser  $d$  mit der Überschlagsformel (Gl. 10.42) abschätzen und auf Normwert nach TB 10-2a aufrunden.
2. Mittleren Durchmesser  $D = D_e - d$  (bzw.  $D = D_i + d$ ) und Wickelverhältnis  $w = D/d$  bestimmen.
3. Vorhandene Spannung  $\tau$  und ggf.  $\tau_k = k \cdot \tau$  berechnen.
4. Zulässige Spannung  $\tau_{\text{zul}} = 0,5 \cdot R_m(d)$  nach Drahtsorte ermitteln (Abschnitt 7.9) und Auslastung  $\tau_k/\tau_{\text{zul}}$  prüfen.

### Auslegung: gesuchter Drahtdurchmesser

Eine kaltgeformte Druckfeder aus Drahtsorte SH soll bei einem vorgegebenen Außendurchmesser  $D_e = 45 \text{ mm}$  eine größte statische Federkraft von  $F = 800 \text{ N}$  aufnehmen. Gesucht: geeigneter Normdrahtdurchmesser  $d$  und die resultierende Auslastung.

### Lösung

**1. Überschlag** (Gl. 10.42,  $k_1 = 0,16$  für  $d = 5 \dots 14 \text{ mm}$  angenommen):

$$d \approx k_1 \cdot \sqrt[3]{F \cdot D_e} = 0,16 \cdot \sqrt[3]{800 \cdot 45} = 0,16 \cdot \sqrt[3]{36\,000} = 5,28 \text{ mm} \\ \Rightarrow d = 5,30 \text{ mm (Normwert, TB 10-2a)}.$$

**2. Mittlerer Durchmesser und Wickelverhältnis:**

$$D = D_e - d = 45 - 5,30 = 39,70 \text{ mm}, \quad w = \frac{D}{d} = 7,49.$$

**3. Spannung:**

$$\tau = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} = \frac{8 \cdot 800 \cdot 39,70}{\pi \cdot 5,30^3} = 543,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad k = \frac{7,99}{6,74} = 1,185, \quad \tau_k = 644,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

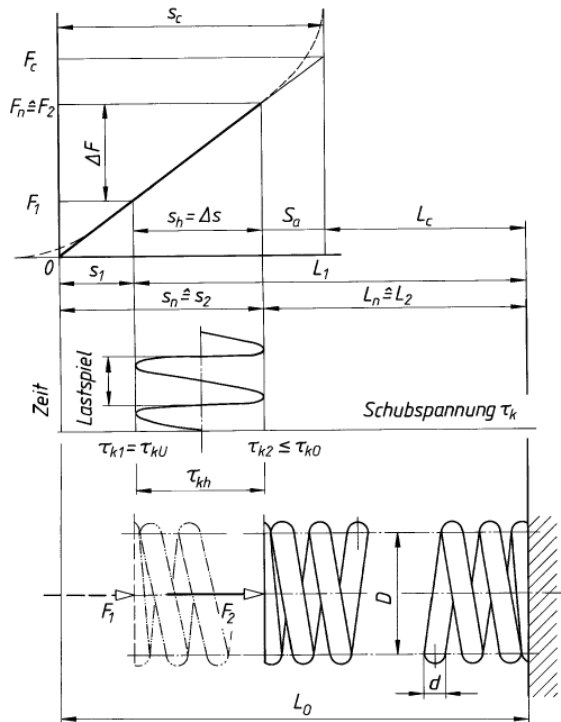
**4. Zulässige Spannung** (TB 10-2c, Sorte SH):

$$R_m = 2330 - 900 \cdot \lg(5,30) = 1678 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \tau_{\text{zul}} = 0,5 \cdot R_m = 839 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**5. Auslastung:**

$$\frac{\tau_k}{\tau_{\text{zul}}} = \frac{644,0}{839} = 76,7 \% \approx 77 \%.$$

Kontrolle: 77 % Auslastung ist ein sinnvoller Wert – genug Reserve für Fertigungstoleranzen und die noch ausstehende Knickprüfung, aber kein unnötig überdimensionierter Draht.



**Bild 10-29**  
Schraubendruckfeder mit Belastungsdiagramm

Abbildung 37: Schraubendruckfeder mit Belastungsdiagramm: Kraft-Weg-Verlauf, Lastspiel über der Zeit und die zugehörigen Schubspannungen  $\tau_{k1}$ ,  $\tau_{k2}$ ,  $\tau_{kh}$  für die dynamische Auslenkung. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 10-29, S. 349.

## 7.8 Blocklänge, Mindestabstände und Länge der Feder

Wird eine Druckfeder ganz zusammengedrückt, liegen die Windungen aufeinander – das ist die **Blocklänge**  $L_c$ . Damit die Feder das nicht schon bei der vorgesehenen größten Betriebskraft  $F_2$  tut (sonst würde sie „auf Block“ gehen und unkontrolliert hart werden), muss zwischen  $L_c$  und der Länge bei  $F_2$  ein Mindestabstand  $S_a$  verbleiben.

**Blocklänge, Mindestabstand, Längen**, kaltgeformt (Gl. 10.37–10.40), mit  $d_{max} = d + e_s$  (Grenzabmaß nach TB 10-2a):

$$S_a = \left[ 0,0015 \cdot \frac{D^2}{d} + 0,1 \cdot d \right] \cdot n \quad S'_a \approx 1,5 \cdot S_a \text{ (dynamisch)}$$

$$L_c \approx n_t \cdot d_{max} \quad L_n = L_c + S_a \quad L_0 = s_c + L_c = s_n + L_c + S_a$$

- $L_c$ : Blocklänge (Federenden angelegt und geschliffen)
- $L_n$ : kleinste zulässige Länge im Betrieb
- $L_0$ : ungespannte (freie) Länge der Feder

### Blocklängen- und Mindestabstands-Check

Eine kaltgeformte Druckfeder mit  $d = 4,00 \text{ mm}$ ,  $D = 32 \text{ mm}$  ( $w = 8$ ),  $n = 10$  federnden Windungen (Federenden angelegt und geschliffen, Grenzabmaß  $e_s = +0,030 \text{ mm}$ ) wird mit  $F_2 = 300 \text{ N}$  belastet. Gesucht:  $L_c$ ,  $S_a$ ,  $L_n$  und die ungespannte Länge  $L_0$ ; Prüfung, ob der Mindestabstand bei  $F_2$  eingehalten wird.

## Lösung

### 1. Gesamtwindungszahl und Blocklänge:

$$n_t = n + 2 = 12, \quad d_{max} = d + e_s = 4,030 \text{ mm}, \quad L_c \approx n_t \cdot d_{max} = 12 \cdot 4,030 = 48,36 \text{ mm}.$$

### 2. Mindestabstand:

$$S_a = \left[ 0,0015 \cdot \frac{32^2}{4} + 0,1 \cdot 4 \right] \cdot 10 = 7,84 \text{ mm}.$$

### 3. Kleinste zulässige Länge:

$$L_n = L_c + S_a = 48,36 + 7,84 = 56,20 \text{ mm}.$$

### 4. Federrate und Weg bei $F_2$ :

$$R = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} = \frac{81\,500 \cdot 4,00^4}{8 \cdot 32^3 \cdot 10} = 7,96 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad s_2 = \frac{F_2}{R} = \frac{300}{7,96} = 37,69 \text{ mm}.$$

### 5. Ungespannte Länge und Länge bei $F_2$ :

$$L_0 \approx s_2 + S_a + L_c = 37,69 + 7,84 + 48,36 = 93,89 \text{ mm}, \quad L_2 = L_0 - s_2 = 56,20 \text{ mm}.$$

Kontrolle:  $L_2 = 56,20 \text{ mm}$  entspricht exakt  $L_n$  – der geforderte Mindestabstand ist bei  $F_2$  gerade so eingehalten (Grenzfall). In der Praxis sollte man mit etwas Reserve zu  $L_n$  auslegen.

## 7.9 Zulässige Spannungen nach Drahtsorte

Die zulässige Schubspannung hängt von der **Drahtsorte** und – über die Zugfestigkeit  $R_m$  – vom Drahtdurchmesser selbst ab (dünnere Drähte werden fester patentiert-gezogen).

Zugfestigkeit und zulässige Spannung, TB 10-2c / TB 10-11a

Zugfestigkeit in Abhängigkeit vom Drahtdurchmesser  $d$  (in mm,  $R_m$  in N/mm<sup>2</sup>):

$$\begin{aligned} R_m &= 2330 - 900 \cdot \lg d \text{ (SH, DH)} & R_m &= 1980 - 740 \cdot \lg d \text{ (SM, DM)} \\ R_m &= 1720 - 660 \cdot \lg d \text{ (SL)} \end{aligned}$$

Zulässige Schubspannung statisch:  $\tau_{zul} = 0,5 \cdot R_m$  (TB 10-11a). Zulässige Blockspannung:  $\tau_{c,zul} = 0,56 \cdot R_m$  (TB 10-11b).

| $d$ in mm | $R_m$ (SH/DH) | $\tau_{zul}$ (SH/DH) | $R_m$ (SM/DM) | $\tau_{zul}$ (SM/DM) |
|-----------|---------------|----------------------|---------------|----------------------|
| 1         | 2330          | 1165                 | 1980          | 990                  |
| 5         | 1701          | 850                  | 1463          | 731                  |
| 10        | 1430          | 715                  | 1240          | 620                  |

Alle Werte in N/mm<sup>2</sup>, nach Roloff/Matek TB 10-2c und TB 10-11a.

## Achtung!

**Wickelverhältnis-Grenzen ignorieren.** Kaltgeformt gilt  $w = D/d = 4 \dots 20$ . Außerhalb dieses Bereichs sind die TB-Diagramme für  $k$  und  $\tau_{zul}$  nicht mehr direkt anwendbar, und die Fertigung wird unwirtschaftlich (Planschleifen bei  $w > 15$  unüblich).

## 7.10 Knicksicherheit (kurz)

Schlanke Druckfedern – solche mit großem Verhältnis  $L_0/D$  – können unter Last seitlich ausknicken, ähnlich wie ein schlanker Druckstab. Roloff/Matek stellt dazu ein Diagramm bereit (TB 10-12), in dem der bezogene Federweg  $s/L_0$  über dem bezogenen Schlankheitsgrad  $\nu \cdot L_0/D$  aufgetragen wird; dabei ist  $\nu$  ein Lagerungsbeiwert, der von der Einspannung der Federenden abhängt ( $\nu = 0,5 \dots 2$ , analog zu den Knicklängenbeiwerten bei Euler-Stäben). Liegt der Betriebspunkt oberhalb der Knickgrenzkurve, ist die Feder knickgefährdet. Abhilfe schaffen ein kleineres  $L_0/D$  (kürzere, dickere Feder), eine bessere Führung der Federenden oder – am gebräuchlichsten – eine **innere Führung** der Feder auf einem Dorn oder in einer Hülse.

## 7.11 Nebenteile: Tellerfeder und Blattfeder

Neben der Schraubendruckfeder gibt es zwei weitere, im Maschinenbau häufig eingesetzte Federformen, die du zumindest konzeptionell kennen solltest.

**Tellerfeder:** Eine Tellerfeder ist eine kegelig gepresste Ringscheibe, die auf Druck in Achsrichtung belastet wird. Ihre Kennlinie ist stark nichtlinear (meist degressiv bis progressiv, abhängig vom Verhältnis Kegelhöhe zu Blechdicke) und wird durch **Stapeln** einzelner Teller an unterschiedliche Anforderungen angepasst:

- **Gleichsinnige Schichtung** (alle Teller mit der Öffnung in dieselbe Richtung, wie Parallelschaltung): Die **Kräfte addieren sich** bei gleichem Federweg – Paket wird steifer.
- **Wechselsinnige Schichtung** (Teller abwechselnd gegeneinander gestapelt, wie Reihenschaltung): Die **Wege addieren sich** bei gleicher Kraft – Säule wird nachgiebiger.

Die Merkregel aus Abschnitt 7.3 (Reihe = weicher, Parallel = steifer) gilt also sinngemäß auch für Tellerfederpakete und -säulen.

**Blattfeder:** Eine Blattfeder ist im Kern ein auf **Biegung** beanspruchter, meist trapezförmiger Federstahlbalken (daher  $E = 206\,000\text{ N/mm}^2$ , nicht  $G$ ). Sie wird vor allem in Fahrzeugfederungen eingesetzt, oft als geschichtetes Paket mehrerer Blätter, um bei begrenzter Bauhöhe eine ausreichende Tragfähigkeit zu erzielen. Die rechnerische Behandlung folgt den Methoden der Biegelehre (siehe Elastostatik-Skript, Balkenbiegung) und wird hier nicht vertieft.

## 7.12 Mini-Aufgaben

### Mini-Aufgabe 1: Parallelschaltung

Zwei Federn mit  $R_1 = 15\text{ N/mm}$  und  $R_2 = 35\text{ N/mm}$  sind parallel geschaltet. Wie groß sind die Gesamtfederrate  $R_{ges}$  und der Federweg  $s$  bei einer Belastung von  $F = 200\text{ N}$ ?

### Lösung

$$R_{ges} = R_1 + R_2 = 15 + 35 = 50,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad s = \frac{F}{R_{ges}} = \frac{200}{50,0} = 4,00\text{ mm}.$$

### Mini-Aufgabe 2: Federrate und Spannung

Eine Schraubendruckfeder hat  $d = 3,0\text{ mm}$ ,  $D = 24\text{ mm}$  ( $w = 8$ ),  $n = 12$  federnde Windungen,  $G = 81\,500\text{ N/mm}^2$ . Berechne für  $F = 100\text{ N}$  (statisch) die Federrate  $R$ , den Federweg  $s$  und die vorhandene Schubspannung  $\tau$ .

## Lösung

$$R = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} = \frac{81\,500 \cdot 3,0^4}{8 \cdot 24^3 \cdot 12} = 4,97 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad s = \frac{F}{R} = \frac{100}{4,97} = 20,10 \text{ mm},$$
$$\tau = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} = \frac{8 \cdot 100 \cdot 24}{\pi \cdot 3,0^3} = 226,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

### 7.13 Zusammenfassung Kapitel 7

#### Das Wichtigste aus Kapitel 7

- **Federrate**  $R = (F_1 - F_2)/(s_1 - s_2)$ ; Kennlinien können linear, progressiv oder degressiv sein. **Federungsarbeit**  $W = Fs/2 = Rs^2/2$  ist die Fläche unter der Kennlinie.
- **Reihe** addiert Nachgiebigkeiten ( $1/R_{ges} = 1/R_1 + 1/R_2$ , weicher), **Parallel** addiert Raten ( $R_{ges} = R_1 + R_2$ , steifer). Gemischtschaltungen zuerst gruppenweise zusammenfassen.
- Schraubendruckfeder:  $D$  ist der **mittlere** Windungsdurchmesser,  $w = D/d$ . In  $R$ ,  $s$ ,  $F$ ,  $W$  geht die federnde Windungszahl  $n$  ein, nicht  $n_t = n + 2$ .
- Vorhandene Spannung  $\tau = 8FD/(\pi d^3)$ , dynamisch korrigiert  $\tau_k = k \cdot \tau$  mit  $k = (w + 0,5)/(w - 0,75)$ . Federrate  $R = Gd^4/(8D^3n)$  mit  $G = 81\,500 \text{ N/mm}^2$  (Torsion!).
- Blocklänge  $L_c \approx n_t \cdot d_{max}$ , Mindestabstand  $S_a$ , kleinste zulässige Länge  $L_n = L_c + S_a$  – immer prüfen, ob  $F_2$  mit ausreichend Abstand zu  $L_c$  liegt. Schlanke Federn zusätzlich auf Knicksicherheit (TB 10-12) prüfen.
- Zulässige Spannung  $\tau_{zul} = 0,5 \cdot R_m(d)$  hängt von Drahtsorte und -durchmesser ab; Blockspannung stets gegen  $\tau_{c,zul} = 0,56 \cdot R_m$  prüfen.
- Tellerfeder: gleichsinnige Schichtung addiert Kräfte, wechelsinnige addiert Wege (Analogie zu Reihe/Parallel). Blattfeder: Biegebalken,  $E$  statt  $G$ .

## 8 Achsen und Wellen



## Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- eine **Achse** von einer **Welle** unterscheiden und die jeweilige Beanspruchung (Biegung bzw. Biegung + Torsion) benennen
- das Torsionsmoment aus Leistung und Drehzahl mit  $T = 9550 \cdot P/n$  berechnen – ohne in die Einheitenfalle zu tappen
- die Kräfte am Zahnrad zerlegen, die Lagerreaktionen und den Biegemomentenverlauf einer Getriebewelle bestimmen
- eine Welle **überschlägig dimensionieren** (Entwurfsdurchmesser aus  $P/n$  bzw. aus dem Vergleichsmoment  $M_v$ )
- am fertig gestalteten Wellenabsatz einen **gestaltfesten Dauerfestigkeitsnachweis** nach der Systematik aus Kapitel 3 führen ( $S_D = \sigma_{bGA}/\sigma_{ba} \geq 1,5$ )
- erklären, warum zu weiche Wellen bei der **kritischen Drehzahl** gefährlich werden

Öffne ein beliebiges Getriebe, einen E-Motor, eine Seilwinde oder ein Fahrrad – überall drehen sich **Wellen und Achsen**. Sie sind die Rückgrat-Bauteile des Maschinenbaus: Sie lagern Räder, tragen Zahnräder und leiten Drehmomente vom Antrieb zum Abtrieb. Kein Wunder, dass die **Wellenberechnung die Klausuraufgabe schlechthin** in Maschinenelemente 1 ist – sie verknüpft Statik (Lagerreaktionen, Schnittgrößen), Festigkeitslehre (Biegung, Torsion, Vergleichsspannung) und den Dauerfestigkeitsnachweis aus Kapitel 3 zu einer einzigen, durchgängigen Rechnung. Wer diese Kette einmal sauber beherrscht, hat die halbe Klausur in der Tasche. Genau diese Kette bauen wir in diesem Kapitel Schritt für Schritt auf – an **einer einzigen Welle**, an die wir drei Fragen stellen.

### 8.1 Funktion und Abgrenzung: Achse und Welle

Umgangssprachlich werden „Achse“ und „Welle“ verwechselt (die „Radachse“ im Auto ist streng genommen eine Welle). Technisch ist die Unterscheidung aber eindeutig – und sie entscheidet über die Beanspruchung.

Eine **Achse** *trägt* umlaufende Teile (Laufräder, Seilrollen, Hebel), überträgt aber **kein Drehmoment**. Sie ist im Wesentlichen auf **Biegung** beansprucht.

Eine **Welle** *treibt* – sie überträgt ein **Drehmoment** und trägt dabei Zahnräder, Riemenscheiben oder Kupplungen. Sie ist auf **Torsion** und (durch die Querkkräfte der Übertragungselemente) meist zusätzlich auf **Biegung** beansprucht.

Ein **Zapfen** ist kein eigenes Bauteil, sondern das abgesetzte Ende einer Achse oder Welle, das in einem Lager sitzt (Lagerzapfen) oder ein Element aufnimmt.

Bei der Achse unterscheidet man noch, ob sie selbst umläuft:

- **Feststehende Achse** (z. B. Fahrrad-Vorderachse): Das Rad dreht sich, die Achse steht still. Die Biegung ist **ruhend oder schwellend** – die günstigere Beanspruchung.
- **Umlaufende Achse** (z. B. Eisenbahn-Radsatz): Die Achse dreht sich mit. Jede Randfaser läuft pro Umdrehung einmal durch die Zug- und einmal durch die Druckzone – die Biegung ist **wechselnd**, also die ungünstigere Beanspruchung.

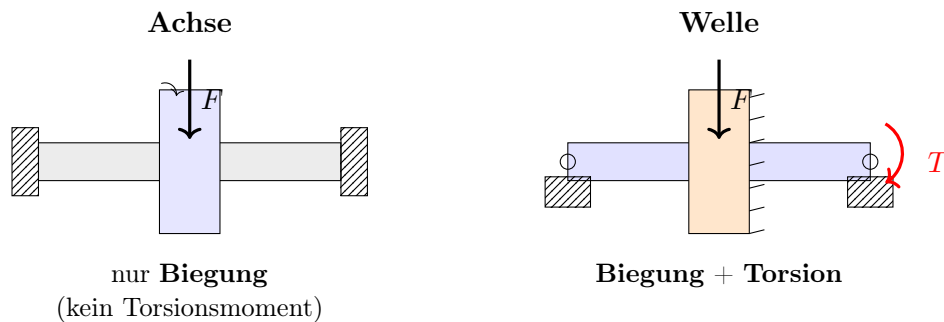


Abbildung 38: Achse (links) trägt ein lose drehendes Laufrad – nur Biegung. Welle (rechts) trägt ein fest sitzendes Zahnrad und leitet ein Drehmoment  $T$  ein – Biegung *und* Torsion.

#### Achse oder Welle? Die entscheidende Frage

Frage dich immer zuerst: *Wird ein Drehmoment übertragen?*

- **Nein**  $\Rightarrow$  Achse  $\Rightarrow$  nur Biegemoment  $M_b$ .
- **Ja**  $\Rightarrow$  Welle  $\Rightarrow$  Torsionsmoment  $T$  und Biegemoment  $M_b \Rightarrow$  Vergleichsmoment nötig.

Der Bauteilname in der Aufgabe hilft nicht immer – die Physik entscheidet.

#### WICHTIG!

Die Biegung an der **umlaufenden** Welle ist **immer wechselnd** – auch bei völlig statischer äußerer Last! Eine ortsfeste Kraft (Zahnkraft, Eigengewicht) drückt jede Randfaser bei jeder Umdrehung einmal in die Zug- und einmal in die Druckzone. Die *Spannung* im Werkstoff wechselt also mit der Drehzahl, obwohl die *Kraft* konstant ist.

Die Torsion bleibt dagegen bei gleichbleibender Drehrichtung **ruhend oder schwellend**. Diese Unterscheidung ist die Voraussetzung für die richtige Wahl des Anstrengungsverhältnisses  $\alpha_0$  (Abschnitt 8.3) und für den Dauerfestigkeitsnachweis (Abschnitt 8.4).

## 8.2 Kräfte und Momente an der Welle

Bevor wir dimensionieren können, brauchen wir die Schnittgrößen: das **Torsionsmoment**  $T$  und den Verlauf des **Biegemoments**  $M_b$ .

### 8.2.1 Torsionsmoment aus Leistung und Drehzahl

Eine Welle überträgt eine Leistung  $P$  bei einer Drehzahl  $n$ . Aus der Grundbeziehung  $P = T \cdot \omega$  mit  $\omega = 2\pi n$  folgt die wichtigste Gebrauchsformel des Kapitels:

#### Torsionsmoment aus Leistung und Drehzahl:

$$T \approx 9550 \cdot \frac{P}{n} \quad [T \text{ in Nm, } P \text{ in kW, } n \text{ in min}^{-1}]$$

Die dynamischen Stöße des Betriebs berücksichtigt der **Anwendungsfaktor**  $K_A$  (nach Roßhoff/Matek, TB 3-5). Das für den Festigkeitsnachweis maßgebende **äquivalente Moment** ist:

$$T_{\text{eq}} = K_A \cdot T_{\text{nenn}} \approx 9550 \cdot \frac{K_A \cdot P}{n}.$$

Die Zahl 9550 ist keine Physik, sondern ein Einheiten-Umrechnungsfaktor:  $9550 \approx 60\,000/(2\pi)$ , damit man  $P$  bequem in Kilowatt und  $n$  in Umdrehungen pro Minute einsetzen kann.

**Achtung!**

[Einheitenfalle bei  $9550 \cdot P/n$ ] In der Formel  $T = 9550 \cdot P/n$  muss  $P$  in **kW** eingesetzt werden, nicht in Watt! Setzt du  $P$  in Watt ein, wird dein Torsionsmoment um den Faktor 1000 zu groß. Merke: 9550 „gehört zu Kilowatt“.

### 8.2.2 Kräfte am Zahnrad

Ein Geradstirnrad überträgt seine Kraft im Zahneingriff. Diese Zahnnormalkraft zerlegt man in zwei Komponenten (siehe Verzahnungskapitel):

**Zahnkräfte am Geradstirnrad** (Teilkreisdurchmesser  $d_0$ , Eingriffswinkel  $\alpha = 20^\circ$ ):

$$F_t = \frac{2T}{d_0} \quad F_r = F_t \cdot \tan \alpha$$

- $F_t$ : **Umfangskraft** (tangential, erzeugt das Nutzmoment)
- $F_r$ : **Radialkraft** (zeigt zur Wellenmitte)

Die resultierende Querkraft ist  $F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2}$ . Bei Schrägverzahnung kommt eine Axialkraft  $F_a$  hinzu (hier nicht betrachtet).

Für die Lagerkräfte werden  $F_t$  und  $F_r$  in zwei senkrechten Ebenen getrennt behandelt und die Lagerreaktionen anschließend zur Resultierenden zusammengeführt. Sitzt nur *ein* Rad auf der Welle, kann man auch direkt mit der resultierenden Querkraft  $F$  rechnen – das tun wir in unseren Beispielen.

### 8.2.3 Lagerreaktionen und Biegemomentenverlauf

Die Welle ist ein Balken auf zwei Lagern  $A$  und  $B$ . Die Lagerreaktionen folgen aus dem Momentengleichgewicht (Statik), der Biegemomentenverlauf ist ein Dreieck mit dem Maximum unter der Krafteinleitung:

Einzelkraft  $F$  im Abstand  $a$  von  $A$  und  $b$  von  $B$  (Stützweite  $l = a + b$ ):

$$F_A = F \cdot \frac{b}{l}, \quad F_B = F \cdot \frac{a}{l}, \quad M_{b,\max} = F_A \cdot a = F \cdot \frac{a b}{l}.$$

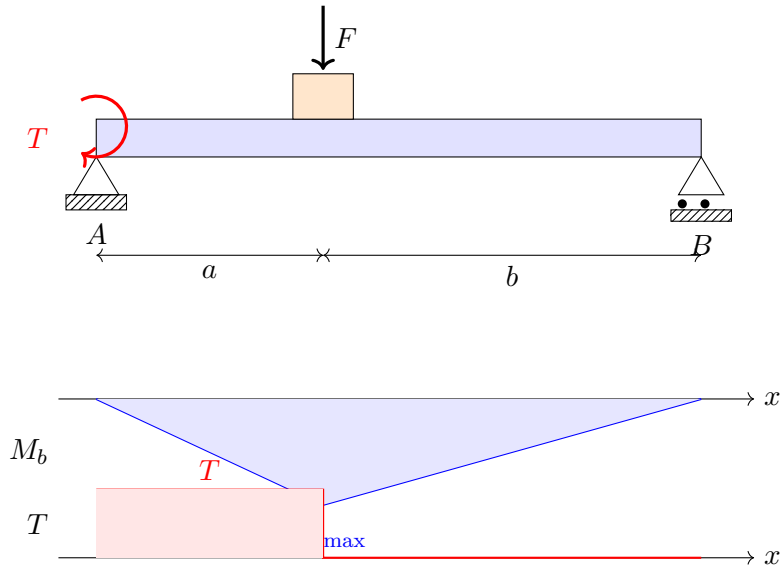


Abbildung 39: Getriebewelle als Balkenmodell: Zahnkraft  $F$  zwischen den Lagern  $A, B$ ; Torsionsmoment  $T$  vom linken Wellenende (Kupplung) bis zum Zahnrad. Darunter der dreieckige Biegemomentenverlauf  $M_b(x)$  mit Maximum unter der Kraft und der abschnittsweise konstante Torsionsmomentenverlauf  $T(x)$ .

Das größte Biegemoment tritt bei einem einzelnen Rad zwischen den Lagern also *unter der Krafteinleitung* auf. Bei „fliegender Anordnung“ (Rad außerhalb der Lager) liegt das Maximum dagegen am Lager. Das Torsionsmoment ist nur auf dem Abschnitt zwischen Momenteneinleitung (Kupplung) und Momentenabgabe (Zahnrad) vorhanden.

### 8.3 Entwurfsberechnung – überschlägige Dimensionierung

Beim Entwurf steckt man in einem **Henne-Ei-Problem**: Um das Biegemoment zu kennen, braucht man die Lagerabstände – die legt man aber erst fest, wenn man den Durchmesser (und damit die Lagergröße) kennt. Man löst das in zwei Stufen:

1. **Überschlägiger Entwurf** mit stark vereinfachten, *konservativen* zulässigen Spannungen (pauschale Sicherheit  $S_D \approx 4$ , weil Kerben und Oberfläche noch unbekannt sind).
2. Danach konstruktiv gestalten (Absätze, Nuten, Lager) und am fertigen Bauteil den *scharfen* Nachweis führen (Abschnitt 8.4).

Je nachdem, ob der Einbauraum schon feststeht, unterscheidet man:

- **Fall 2 – Einbauraum unbekannt** (typische Getriebewelle): Die Biegemomente sind noch nicht bekannt. Entwurf nur aus dem Torsionsmoment.
- **Fall 1 – Einbauraum bekannt**: Kräfte und Momente sind berechenbar. Entwurf mit dem Vergleichsmoment  $M_v$ .

#### 8.3.1 Fall 2: Entwurfsdurchmesser nur aus dem Torsionsmoment

Wenn nur  $P$  und  $n$  bekannt sind, dimensioniert man vorläufig gegen reine Torsion. Die Überschlagsformel enthält die pauschale Sicherheit  $S_D \approx 4$  bereits im Vorfaktor:

**Richtdurchmesser aus  $P, n$  (Vollwelle, reine Torsion):**

$$d'_0 \approx 570 \cdot \sqrt[3]{\frac{K_A \cdot P}{n \cdot \tau_{tD}}}$$

mit  $P$  in kW,  $n$  in  $\text{min}^{-1}$ ,  $\tau_{tD}$  = Torsions-Dauerfestigkeit des Werkstoffs (nach Roloff/Matek, TB 1-1; *nicht* durch  $S_D$  geteilt – die Sicherheit steckt in der Konstante 570).

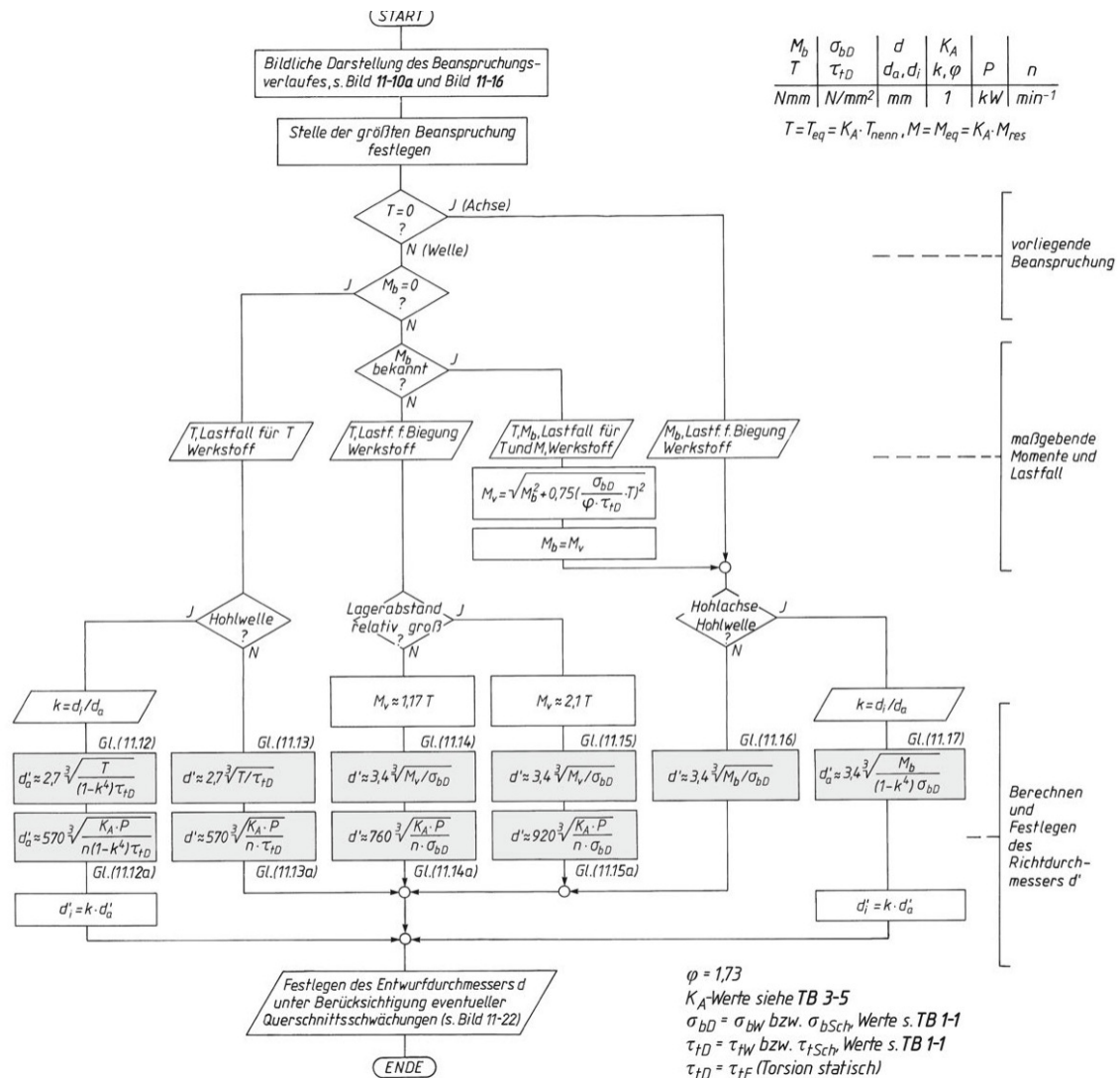


Abbildung 40: Ablaufplan zur Ermittlung des Richtdurchmessers für Achsen und Wellen. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 11-21, S. 378.

### Dieselbe Welle – Frage 1: Entwurfsdurchmesser aus $P/n$

Die Antriebswelle eines Getriebes überträgt  $P = 15 \text{ kW}$  bei  $n = 750 \text{ min}^{-1}$ . Antrieb über Elektromotor mit mäßigen Stößen,  $K_A = 1,35$  (TB 3-5). Werkstoff **E335** mit  $\tau_{tW} = 180 \text{ N/mm}^2$  (TB 1-1). Die Lager- und Radabstände stehen noch nicht fest (Fall 2).

*Gesucht:* das äquivalente Torsionsmoment  $T_{eq}$  und der Richtdurchmesser  $d'_0$ .

### Lösung

#### 1. Torsionsmoment:

$$T_{eq} = 9550 \cdot \frac{K_A P}{n} = 9550 \cdot \frac{1,35 \cdot 15}{750} \approx 257,9 \text{ Nm.}$$

**2. Richtdurchmesser** (reine Torsion,  $\tau_{tD} = \tau_{tW} = 180 \text{ N/mm}^2$ ):

$$d'_0 = 570 \cdot \sqrt[3]{\frac{K_A P}{n \tau_{tD}}} = 570 \cdot \sqrt[3]{\frac{1,35 \cdot 15}{750 \cdot 180}} \approx 30,3 \text{ mm}.$$

**3. Normdurchmesser wählen:**  $d'_0 \approx 30 \text{ mm} \Rightarrow$  konstruktiv aufrunden, z. B. auf  $d = 32 \text{ mm}$  (Normmaße für Lagersitze beachten).

*Kontrolle:* Über die Torsionsformel  $d \geq 1,72 \cdot \sqrt[3]{T_{\text{eq}}/\tau_{tD}}$  mit  $T_{\text{eq}} = 257,9 \text{ Nm} = 257\,900 \text{ Nmm}$  und  $\tau_{tD}/S_D = 180/4 = 45 \text{ N/mm}^2$  erhält man  $\approx 30,8 \text{ mm}$  – Übersichtsformel und Grundformel liefern also dasselbe Ergebnis (kleine Abweichungen entstehen nur durch die Rundung der Konstanten 570).

### 8.3.2 Fall 1: Vergleichsmoment bei Biegung + Torsion

Sobald die Geometrie steht, wirken Biegung *und* Torsion gleichzeitig. Nach der Gestaltänderungsenergie-Hypothese (GEH, siehe Kapitel 4) fasst man beide zu einem **Vergleichsmoment**  $M_v$  zusammen:

**Vergleichsmoment** (GEH) für gleichzeitige Biegung und Torsion:

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + 0,75 (\alpha_0 \cdot T)^2}$$

mit dem **Anstrengungsverhältnis**

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{b,\text{zul}}}{\varphi \cdot \tau_{t,\text{zul}}}, \quad \varphi = 1,73 (= \sqrt{3}).$$

$\alpha_0$  berücksichtigt, dass Biegung und Torsion oft *unterschiedlichen* Lastfällen unterliegen:

- $\alpha_0 \approx 0,7$ : Torsion ruhend/schwellend, Biegung wechselnd (**Regelfall** der umlaufenden Welle)
- $\alpha_0 \approx 1,0$ : Torsion und Biegung im gleichen Lastfall (z. B. beide wechselnd)

#### Achtung!

[ $\alpha_0$  nicht vergessen] Wer  $\alpha_0 = 1$  setzt, obwohl die Torsion nur schwellend ist, addiert Biegung und Torsion „gleichwertig“ und berechnet  $M_v$  zu groß. Bei der umlaufenden Welle ist  $\alpha_0 \approx 0,7$  der Regelfall – das steht selten explizit in der Angabe, sondern folgt aus „Biegung wechselnd, Torsion schwellend“.

Aus dem Vergleichsmoment folgt der erforderliche Durchmesser wie bei reiner Biegung, denn  $M_v$  ist ein „auf Biegung umgerechnetes“ Moment:

**Erforderlicher Durchmesser** aus dem Vergleichsmoment (Vollwelle):

$$d_{\text{erf}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_v}{\pi \sigma_{b,\text{zul}}}} = 2,17 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_v}{\sigma_{b,\text{zul}}}}$$

mit der überschlägigen zulässigen Spannung  $\sigma_{b,\text{zul}} = \sigma_{bW}/S_D$  und  $S_D \approx 4$  (pauschal, Kerben noch unbekannt).

## Dieselbe Welle – Frage 2: Lagerkräfte, $M_{b,\max}$ , $M_v$ und $d_{\text{erf}}$

Jetzt steht die Geometrie fest (Fall 1): Die Welle läuft zwischen zwei Lagern  $A$  und  $B$  mit Stützweite  $l = 350$  mm. Ein Geradstirnrad ( $d_0 = 200$  mm,  $\alpha = 20^\circ$ ) sitzt im Abstand  $a = 150$  mm von  $A$  (also  $b = 200$  mm von  $B$ ). Betriebsdaten:  $P = 8$  kW,  $n = 500$  min $^{-1}$ ,  $K_A = 1,25$ , Werkstoff **E335** ( $\sigma_{bW} = 290$  N/mm $^2$ , TB 1-1). Torsion schwellend, Biegung wechselnd  $\Rightarrow \alpha_0 = 0,7$ .

*Gesucht:* Lagerkräfte,  $M_{b,\max}$ , Vergleichsmoment  $M_v$  und erforderlicher Durchmesser.

### Lösung

#### 1. Nenn-Torsionsmoment und Zahnkräfte:

$$T_{\text{nenn}} = 9550 \cdot \frac{8}{500} = 152,8 \text{ Nm}, \quad F_t = \frac{2 T_{\text{nenn}}}{d_0} = \frac{2 \cdot 152\,800 \text{ Nmm}}{200 \text{ mm}} = 1528 \text{ N}.$$

$$F_r = F_t \cdot \tan 20^\circ = 1528 \cdot 0,364 \approx 556 \text{ N}, \quad F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2} = \sqrt{1528^2 + 556^2} \approx 1626 \text{ N}.$$

#### 2. Lagerkräfte (resultierende Querkraft $F$ ):

$$F_A = F \cdot \frac{b}{l} = 1626 \cdot \frac{200}{350} \approx 929 \text{ N}, \quad F_B = F \cdot \frac{a}{l} = 1626 \cdot \frac{150}{350} \approx 697 \text{ N}.$$

Kontrolle:  $F_A + F_B = 929 + 697 = 1626 \text{ N} = F$  ✓

#### 3. Größtes Biegemoment (unter der Kraft):

$$M_{b,\text{nenn}} = F_A \cdot a = 929 \cdot 150 \approx 139,4 \text{ Nm} \quad (\text{Kontrolle } F_B \cdot b = 697 \cdot 200 = 139,4 \text{ Nm } \checkmark).$$

#### 4. Äquivalente Momente (mit $K_A = 1,25$ ):

$$T_{\text{eq}} = 1,25 \cdot 152,8 = 191,0 \text{ Nm}, \quad M_{b,\text{eq}} = 1,25 \cdot 139,4 = 174,2 \text{ Nm}.$$

#### 5. Vergleichsmoment ( $\alpha_0 = 0,7$ ):

$$M_v = \sqrt{M_{b,\text{eq}}^2 + 0,75 (\alpha_0 T_{\text{eq}})^2} = \sqrt{174,2^2 + 0,75 \cdot (0,7 \cdot 191,0)^2} = \sqrt{174,2^2 + 0,75 \cdot 133,7^2} \approx 209,2 \text{ Nm}.$$

#### 6. Erforderlicher Durchmesser ( $\sigma_{b,\text{zul}} = \sigma_{bW}/S_D = 290/4 = 72,5$ N/mm $^2$ ):

$$d_{\text{erf}} = 2,17 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_v}{\sigma_{b,\text{zul}}}} = 2,17 \cdot \sqrt[3]{\frac{209\,200 \text{ Nmm}}{72,5 \text{ N/mm}^2}} \approx 30,9 \text{ mm}.$$

**7. Normdurchmesser:**  $d_{\text{erf}} \approx 31$  mm  $\Rightarrow$  gewählt **d = 35** mm (nächstes Normmaß für den Lagersitz, mit Reserve für den Wellenabsatz).

*Plausibilität:* Trotz zusätzlicher Biegung liegt  $d_{\text{erf}}$  nahe am reinen Torsionsentwurf aus Frage 1 – die Biegung ist hier moderat, die Torsion dominiert.

## 8.4 Nachrechnung – der gestaltfeste Dauerfestigkeitsnachweis

Der Entwurf mit  $S_D \approx 4$  war grob und pauschal. Jetzt ist die Welle fertig gestaltet: Sie hat **Absätze**, **Passfedernuten** und **Freistiche** – alles **Kerbstellen**, an denen die Spannung örtlich überhöht wird. Am kritischen Querschnitt führen wir nun den *scharfen* Dauerfestigkeitsnachweis mit der vollständigen Kette aus **Kapitel 3**.

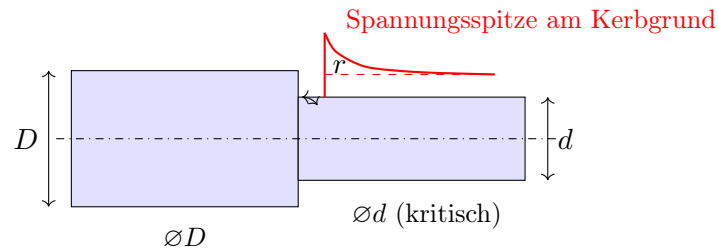


Abbildung 41: Wellenabsatz als Kerbstelle: Der Übergang von  $D$  auf  $d$  mit Rundungsradius  $r$  erzeugt eine örtliche Spannungsüberhöhung. Der kleinere Querschnitt  $d$  mit der Kerbe ist der gefährdete Querschnitt für den Dauerfestigkeitsnachweis.

#### 8.4.1 Die Nachweiskette aus Kapitel 3

Die Systematik ist exakt die aus Kapitel 3 – hier für die **Biegung** an der Welle. Man startet bei der Werkstoff-Wechselhaftigkeit  $\sigma_{bW}$  und rechnet sie über den **Konstruktionsfaktor**  $K_{Db}$  auf die tatsächliche Bauteilfestigkeit herunter:

**Konstruktionsfaktor** für Biegung (Gl. 3.16 aus Kapitel 3):

$$K_{Db} = \frac{\beta_{kb}}{K_g} + \frac{1}{K_{O\sigma}} - \frac{1}{K_V}$$

- $\beta_{kb}$ : Kerbwirkungszahl Biegung (nach Roloff/Matek, TB 3-8)
- $K_g$ : geometrischer Größeneinflussfaktor (TB 3-11)
- $K_{O\sigma}$ : Oberflächeneinflussfaktor (TB 3-10)
- $K_V$ : Einflussfaktor der Oberflächenverfestigung (TB 3-12; ohne Verfestigung  $K_V = 1$ )

**Gestaltwechselfestigkeit** (Gl. 3.17):

$$\sigma_{bGW} = \frac{\sigma_{bW}}{K_{Db}}$$

Aus der Gestaltwechselfestigkeit  $\sigma_{bGW}$  wird über den Überlastungsfall die **Gestalt-Ausschlagfestigkeit**  $\sigma_{bGA}$ . Man unterscheidet drei **Überlastungsfälle**, je nachdem was bei einer Laststeigerung konstant bleibt: Fall 1 (Mittelspannung  $\sigma_{bm}$  konstant), **Fall 2** (Spannungsverhältnis konstant – der *Regelfall*) und Fall 3 (Ausschlagspannung konstant). Für die umlaufende Welle ist die Biegung *rein wechselnd* ( $\sigma_{bm} = 0$ ), damit fällt die Mittelspannungsempfindlichkeit  $\psi_\sigma$  heraus und es gilt einfach

$$\sigma_{bGA} = \sigma_{bGW} \quad (\text{reine Wechselbiegung, } \sigma_{bm} = 0).$$

**Sicherheit gegen Dauerbruch** (Biegung):

$$S_D = \frac{\sigma_{bGA}}{\sigma_{ba}} \geq 1,5$$

mit der vorhandenen Biege-Ausschlagspannung  $\sigma_{ba} = M_{b,eq}/W_b$  und  $W_b = \frac{\pi}{32}d^3$ . Der Mindestwert  $S_{D,min}$  liegt realistisch bei 1,2...2,1 (nach Roloff/Matek, TB 3-14).

Für die **Torsion** läuft alles völlig analog:  $\tau_{tW} \rightarrow K_{Dt} \rightarrow \tau_{tGW} \rightarrow \tau_{tGA}$ , mit

$$K_{Dt} = \frac{\beta_{kt}}{K_g} + \frac{1}{K_{O\tau}} - \frac{1}{K_V}, \quad \tau_{tGW} = \frac{\tau_{tW}}{K_{Dt}}.$$



Wirken Biegung und Torsion zusammen, kombiniert man beide Sicherheiten nach der GEH:

**Kombinierte Sicherheit** bei Biegung + Torsion:

$$\frac{1}{S_D} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bGA}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ta}}{\tau_{tGA}}\right)^2}$$

mit  $\tau_{ta} = T_{eq}/W_t$  und  $W_t = \frac{\pi}{16}d^3 = 2 W_b$ .

#### Achtung!

[ $W_b \neq W_t$  und  $S_{D,\min} = 4$  vs.  $S_{D,\min}$  aus TB 3-14] Zwei Klassiker: (1)  $W_b = \frac{\pi}{32}d^3$  (Biegung), aber  $W_t = \frac{\pi}{16}d^3 = 2 W_b$  (Torsion) – Verwechslung macht die Torsionsspannung um Faktor 2 falsch. (2) Das  $S_D \approx 4$  aus der *Entwurfsberechnung* (Abschnitt 8.3) ist ein pauschaler Zuschlag mangels Kerbdaten. Der *scharfe* Nachweis hier arbeitet mit realistischen  $S_{D,\min} \approx 1,2 \dots 2,1$  aus TB 3-14. Nicht vermischen!

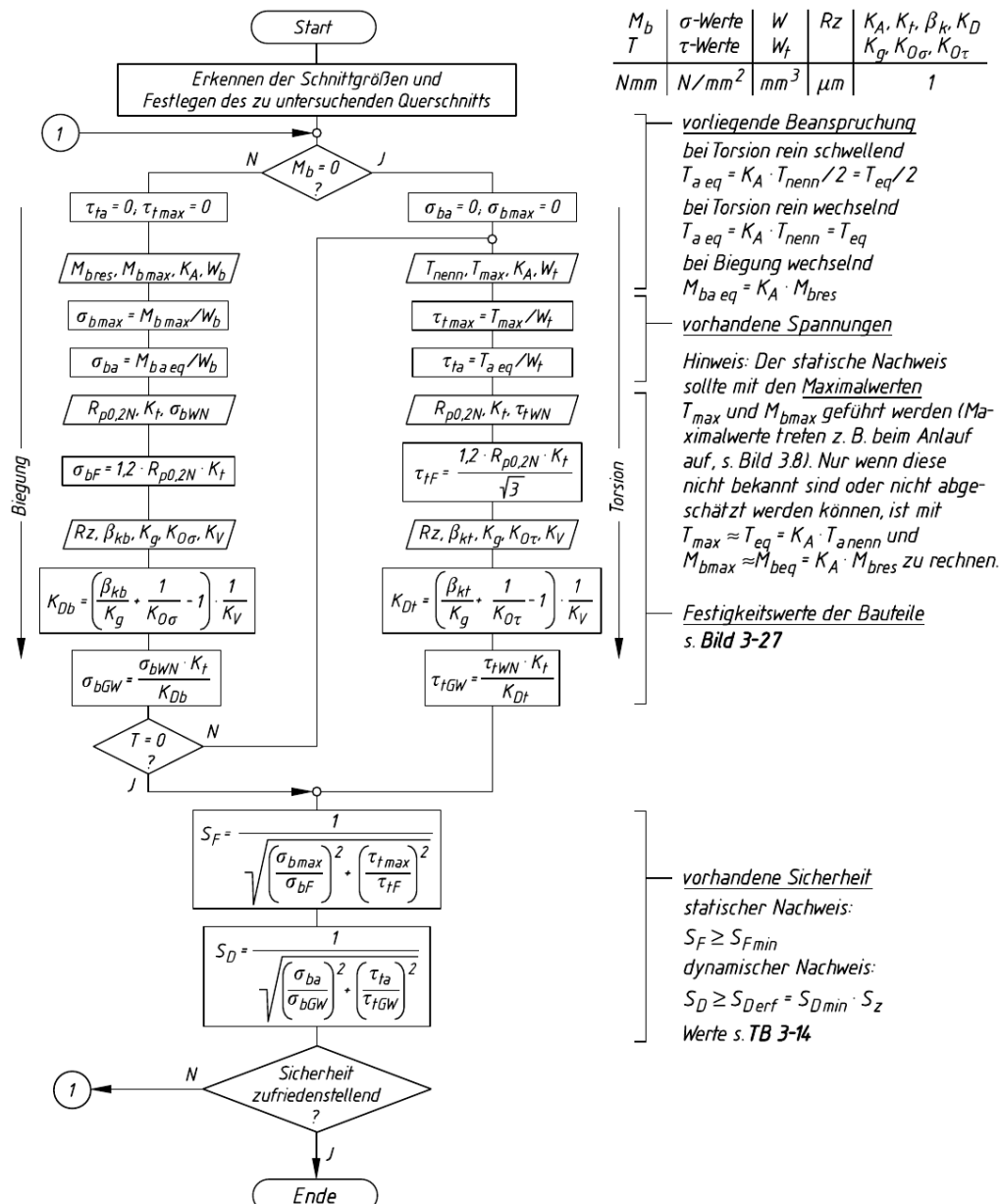


Abbildung 42: Ablaufplan für einen vereinfachten statischen und dynamischen Sicherheitsnachweis. Die Momentengleichungen sind für Wellen angegeben, beansprucht nach Bild 3-8 (Anfahren mit Anlaufkupplung). Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 11-23, S. 380.

#### Dieselbe Welle – Frage 3: Nachweis am Wellenabsatz

Am gewählten Durchmesser  $d = 35 \text{ mm}$  (aus Frage 2) sitzt ein Wellenabsatz – die kritische Kerbstelle. Werkstoff jetzt **C45E** vergütet ( $\sigma_{bW} = 350 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{tW} = 210 \text{ N/mm}^2$ , TB 1-1). Kennwerte am Absatz:  $\beta_{kb} = 1,7$  (TB 3-8),  $\beta_{kt} = 1,4$  (TB 3-8),  $K_g = 0,9$  (TB 3-11),  $K_{O\sigma} = K_{O\tau} = 0,9$  (gedreht, TB 3-10), keine Verfestigung ( $K_V = 1$ ). Am Absatz wirkt  $M_{b,eq} = 174,2 \text{ Nm}$  (wechselnd) und  $T_{eq} = 191,0 \text{ Nm}$ .

Gesucht: Sicherheit  $S_D$  gegen Dauerbruch.

**1. Vorhandene Biege-Ausschlagspannung:**

$$W_b = \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{\pi}{32} \cdot 35^3 \approx 4209 \text{ mm}^3, \quad \sigma_{ba} = \frac{M_{b,\text{eq}}}{W_b} = \frac{174\,200 \text{ Nmm}}{4209 \text{ mm}^3} \approx 41,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**2. Konstruktionsfaktor Biegung** (Gl. 3.16):

$$K_{Db} = \frac{\beta_{kb}}{K_g} + \frac{1}{K_{O\sigma}} - \frac{1}{K_V} = \frac{1,7}{0,9} + \frac{1}{0,9} - \frac{1}{1} = 1,889 + 1,111 - 1 = 2,00.$$

**3. Gestaltwechsel- und Gestalt-Ausschlagfestigkeit** (reine Wechselbiegung,  $\sigma_{bm} = 0$ ):

$$\sigma_{bGW} = \frac{\sigma_{bW}}{K_{Db}} = \frac{350}{2,00} = 175 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_{bGA} = \sigma_{bGW} = 175 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**4. Sicherheit gegen Dauerbruch** (Biegung allein):

$$S_D = \frac{\sigma_{bGA}}{\sigma_{ba}} = \frac{175}{41,4} \approx 4,2.$$

**5. Kombiniertes Nachweis mit Torsion** (analoge Kette,  $\tau_{ta} = T_{\text{eq}}/W_t$ ):

$$W_t = 2 W_b \approx 8419 \text{ mm}^3, \quad \tau_{ta} = \frac{191\,000}{8419} \approx 22,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$K_{Dt} = \frac{1,4}{0,9} + \frac{1}{0,9} - 1 = 1,67, \quad \tau_{tGW} = \frac{210}{1,67} \approx 126 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\approx \tau_{tGA}, \text{ konservativ}),$$

$$\frac{1}{S_D} = \sqrt{\left(\frac{41,4}{175}\right)^2 + \left(\frac{22,7}{126}\right)^2} = \sqrt{0,236^2 + 0,180^2} \approx 0,297 \Rightarrow S_D \approx 3,4.$$

**Ergebnis:**  $S_D \approx 3,4 \gg S_{D,\text{min}} \approx 1,5 \dots 2,1$  (TB 3-14)  $\Rightarrow$  der Absatz ist **ausreichend bemessen**, mit deutlicher Reserve.

*Deutung:* Der pauschale Entwurf mit  $S_D = 4$  war konservativ; der scharfe Nachweis bestätigt eine großzügige Auslegung. Zusätzlich sollte ein *statischer* Nachweis mit den Maximalmomenten (Anlaufstoß  $T_{\text{max}} \approx 2 \dots 2,5 \cdot T_{\text{eq}}$ ) gegen Fließen geführt werden – bei seltenen großen Stößen kann er maßgebend werden.

## 8.5 Ausblick: Verformung und kritische Drehzahl

Festigkeit ist nicht alles. Eine Welle kann fest genug sein und trotzdem versagen – weil sie zu **weich** ist. Zwei Steifigkeitsnachweise runden die Rechnung ab (Details in ME2 / Maschinendynamik):

**Verdrehung.** Eine zu stark tordierende Welle stört den Gleichlauf (z. B. bei Werkzeugmaschinen). Als Richtwert gilt ein zulässiger Verdrehwinkel von  $\vartheta_{\text{zul}} \approx 0,25^\circ \dots 0,5^\circ$  je Meter Wellenlänge.

**Kritische Drehzahl.** Jede reale Welle trägt kleine Unwuchten (Exzentrizität  $e$  der Massen). Die Fliehkraft  $F_z = m(y+e)\omega^2$  biegt die Welle aus. Wächst die Drehzahl, so wird bei einer bestimmten **biegekritischen Winkelgeschwindigkeit** die Auslenkung theoretisch unendlich – **Resonanz**:

**Biegekritische Winkelgeschwindigkeit** (eine Masse, Feder-Masse-Analogie):

$$\omega_k = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

mit der Biegefedersteifigkeit  $c$  der Welle und der Masse  $m$ . Praxisnah über die Durchbiegung

$f$  an der Stelle der Masse:

$$n_{kb} \approx k \cdot 946 \cdot \sqrt{\frac{1}{f}} \quad [n_{kb} \text{ in } \text{min}^{-1}, f \text{ in mm}]$$

( $k = 1$  frei gelagert,  $k = 1,3$  eingespannt). Bei mehreren Massen: Näherung nach **Dunkerley**,  $1/\omega_k^2 = \sum 1/\omega_{ki}^2$ .

Physikalisch ist  $\omega_k = \sqrt{c/m}$  nichts anderes als die Eigenfrequenz eines Feder-Masse-Schwingers: Eine **steifere** Welle (großes  $c$ , also großer Durchmesser, kleine Lagerabstände) hat eine **höhere** kritische Drehzahl. Konstruktive Faustregel: Die Betriebsdrehzahl soll 10 ... 20 % Abstand zur kritischen Drehzahl halten.

#### Wellenberechnung in der Klausur – die 8 Schritte

1. **Torsionsmoment:**  $T_{\text{eq}} = 9550 \cdot K_A P / n$  ( $P$  in kW!).
2. **Kräfte am Element:**  $F_t = 2T/d_0$ ,  $F_r = F_t \tan \alpha$ ,  $F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2}$ .
3. **Lagerreaktionen:** aus  $\sum M = 0$  (ggf. getrennt in zwei Ebenen, dann resultieren).
4. **Biegemomentenverlauf:**  $M_{b,\text{max}}$  am kritischen Querschnitt bestimmen.
5. **Vergleichsmoment:**  $M_v = \sqrt{M_b^2 + 0,75(\alpha_0 T)^2}$ ,  $\alpha_0 \approx 0,7$  (Regelfall).
6. **Entwurfsdurchmesser:**  $d \geq 2,17 \sqrt[3]{M_v / \sigma_{b,\text{zul}}}$  mit  $\sigma_{b,\text{zul}} = \sigma_{bW} / 4 \rightarrow$  Normmaß wählen.
7. **Gestalten:** Absätze, Nuten; kritischen (gekerbten) Querschnitt festlegen.
8. **Gestaltfester Nachweis (Kap. 3):**  $\sigma_{ba} = M_{b,\text{eq}} / W_b$ ,  $K_{Db}$ ,  $\sigma_{bGW}$ ,  $\sigma_{bGA} \rightarrow S_D = \sigma_{bGA} / \sigma_{ba} \geq 1,5$ ; ggf. kombiniert mit Torsion; statischer Nachweis mit  $M_{b,\text{max}}$ ,  $T_{\text{max}}$ .

## 8.6 Mini-Aufgaben

### Mini-Aufgabe

Eine Getriebewelle überträgt  $P = 22 \text{ kW}$  bei  $n = 1450 \text{ min}^{-1}$ , Anwendungsfaktor  $K_A = 1,1$ . Werkstoff **E295**, Torsion schwellend mit  $\tau_{tSch} = 205 \text{ N/mm}^2$  (TB 1-1). Die Geometrie ist noch unbekannt (Fall 2). Bestimme das äquivalente Torsionsmoment  $T_{\text{eq}}$  und den Entwurfsdurchmesser aus reiner Torsion ( $d \geq 1,72 \sqrt[3]{T_{\text{eq}} / \tau_{t,\text{zul}}}$  mit  $\tau_{t,\text{zul}} = \tau_{tSch} / 4$ ).

### Lösung

$$T_{\text{eq}} = 9550 \cdot \frac{1,1 \cdot 22}{1450} \approx 159,4 \text{ Nm}, \quad \tau_{t,\text{zul}} = \frac{205}{4} = 51,25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

$$d \geq 1,72 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_{\text{eq}}}{\tau_{t,\text{zul}}}} = 1,72 \cdot \sqrt[3]{\frac{159400 \text{ Nmm}}{51,25 \text{ N/mm}^2}} \approx 25,1 \text{ mm} \Rightarrow \text{gewählt } d = 28 \text{ mm}.$$

### Mini-Aufgabe

Eine umlaufende Welle biegt sich an der Stelle einer schweren Riemenscheibe um  $f = 0,35 \text{ mm}$  durch (frei gelagert,  $k = 1$ ). Bei welcher Drehzahl  $n_{kb}$  wird sie biegekritisch? Betriebsdrehzahl  $n = 1450 \text{ min}^{-1}$  – ist der Sicherheitsabstand ausreichend?

$$n_{kb} \approx 1 \cdot 946 \cdot \sqrt{\frac{1}{0,35}} \approx 1599 \text{ min}^{-1}.$$

Der Abstand zur Betriebsdrehzahl beträgt nur  $(1599 - 1450)/1450 \approx 10\%$  – gerade noch an der unteren Grenze der Faustregel (10...20%). Die Welle sollte **steifer** ausgeführt werden (größerer Durchmesser oder kleinerer Lagerabstand), um  $n_{kb}$  anzuheben.

## 8.7 Zusammenfassung Kapitel 8

### Das Wichtigste aus Kapitel 8

- **Achse** trägt (nur Biegung), **Welle** treibt (Biegung + Torsion). Biegung an der **umlau-**  
**fenden** Welle ist **immer wechselnd**, auch bei statischer Last.
- **Torsionsmoment:**  $T = 9550 \cdot P/n$  mit  $P$  in **kW**; Stöße über  $K_A$  (TB 3-5)  $\rightarrow T_{eq}$ .
- **Zahnkräfte:**  $F_t = 2T/d_0$ ,  $F_r = F_t \tan \alpha$ ; daraus Lagerkräfte und  $M_{b,max}$  (Dreiecksver-  
lauf, Maximum unter der Kraft).
- **Vergleichsmoment:**  $M_v = \sqrt{M_b^2 + 0,75(\alpha_0 T)^2}$ ,  $\alpha_0 \approx 0,7$  (Torsion schwellend, Biegung  
wechselnd).
- **Entwurf** (überschlägig,  $S_D \approx 4$ ):  $d \geq 2,17 \sqrt[3]{M_v/\sigma_{b,zul}}$  bzw.  $d'_0 = 570 \sqrt[3]{K_A P/(n \tau_{tD})}$   
 $\rightarrow$  Normmaß.
- **Gestaltfester Nachweis** (Kap. 3):  $K_{Db} = \beta_{kb}/K_g + 1/K_{O\sigma} - 1/K_V$ ;  $\sigma_{bGW} =$   
 $\sigma_{bW}/K_{Db}$ ;  $\sigma_{bGA}$  (Regelfall, hier  $= \sigma_{bGW}$ );  $S_D = \sigma_{bGA}/\sigma_{ba} \geq 1,5$ . Kombiniert:  $1/S_D =$   
 $\sqrt{(\sigma_{ba}/\sigma_{bGA})^2 + (\tau_{ta}/\tau_{tGA})^2}$ .
- **Fallen:**  $P$  in kW (nicht W);  $W_b = \frac{\pi}{32} d^3 \neq W_t = \frac{\pi}{16} d^3$ ;  $\alpha_0$  nicht vergessen;  $S_D = 4$   
(Entwurf)  $\neq S_{D,min}$  aus TB 3-14 (Nachweis).
- **Steifigkeit:** kritische Drehzahl  $\omega_k = \sqrt{c/m}$ ; Betriebsdrehzahl 10...20% Abstand hal-  
ten.

## 9 Welle-Nabe-Verbindungen

## Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Welle-Nabe-Verbindungen nach ihrem Wirkprinzip (form-, kraft-/reib-, stoffschlüssig) einteilen und passend auswählen
- den Flächenpressungsnachweis einer Passfederverbindung führen – inklusive der tragenden Länge  $l' = l - b$  und der erforderlichen Normlänge
- einen zylindrischen Pressverband vollständig auslegen: von der erforderlichen Fugendruck über Übermaß, Glättung und Passungswahl bis zur Fügetemperatur
- die übertragbaren Drehmomente von Passfeder und Pressverband bei gleichem Wellendurchmesser vergleichen
- weitere Verbindungsarten (Keil-/Zahnwelle, Polygon, Kegelpressverband, Spannelemente) ihren Einsatzgebieten zuordnen

Ein Zahnrad, eine Riemenscheibe oder eine Kupplung muss ihr Drehmoment irgendwie an die Welle abgeben – und umgekehrt. Genau das leistet die **Welle-Nabe-Verbindung** (WNV): Sie überträgt das Moment von der Welle in die Nabe (das aufgesetzte Bauteil) oder zurück. Das Moment *muss* über die Fügestelle – die einzige offene Frage ist **wie**: durch **Form** (ineinandergreifende Konturen), durch **Kraft/Reibung** (Pressung an der Fügefläche) oder durch **Stoff** (Kleben, Lötten, Schweißen). Diese drei Wirkprinzipien sind der rote Faden des Kapitels. In der Klausur begegnen dir vor allem zwei Rechnungen: der Passfeder-Nachweis (Formschluss) und die vollständige Auslegung eines Pressverbands (Reibschluss).

### 9.1 Übersicht und Einteilung

Man ordnet die WNV nach der Art, wie das Drehmoment übertragen wird. Roloff/Matek unterscheidet vier Gruppen (nach Roloff/Matek, Kap. 12).

#### Einteilung nach Wirkprinzip:

- **Formschluss:** Passfeder, Keilwelle, Zahnwelle, Polygonprofil, Stift. Das Moment wird über *Flächenpressung an ineinandergreifenden Wirkflächen* übertragen. Erhöhte Kerbwirkung durch Nuten.
- **Reibschluss (Kraftschluss):** zylindrischer und kegeliger Pressverband, Spannelemente, Klemmverbindung. Das Moment wird über *Reibung an der Fügefläche* übertragen (Coulomb).
- **Vorgespannter Formschluss:** Keilverbindung (Nutkeile) – kombiniert Reib- und Formschluss.
- **Stoffschluss:** Kleben, Lötten, Schweißen – meist nur zerstörend lösbar.

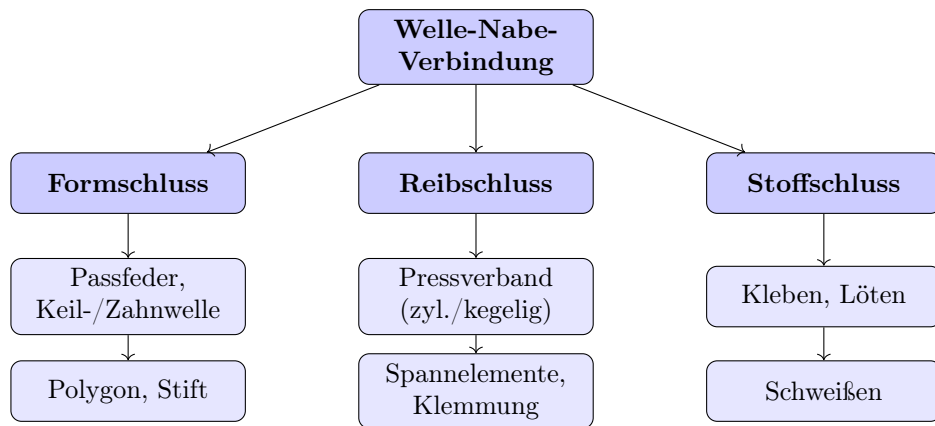


Abbildung 43: Einteilung der Welle-Nabe-Verbindungen nach dem Wirkprinzip. Schwerpunkt dieses Kapitels: Passfeder (Formschluss) und Pressverband (Reibschluss).

Für die Auswahl in der Konstruktion helfen wenige Leitkriterien. Die folgende Tabelle stellt die wichtigsten Vertreter gegenüber.

| Verbindung       | übertragbares $T$ | lösbar                  | zentrierend | Kosten        |
|------------------|-------------------|-------------------------|-------------|---------------|
| Passfeder        | mittel            | ja (leicht)             | bedingt     | gering        |
| Keil-/Zahnwelle  | hoch              | ja (axial verschiebbar) | gut         | mittel        |
| Polygonprofil    | hoch              | ja                      | sehr gut    | hoch          |
| Pressverband     | sehr hoch         | nein (bzw. schwer)      | sehr gut    | mittel        |
| Spannelemente    | hoch              | ja (nachstellbar)       | gut         | hoch          |
| Kleben/Schweißen | mittel/hoch       | nein                    | —           | gering/mittel |

Orientierungswerte nach Roloff/Matek, Bild 12-1.

#### Merksatz zur Auswahl

Formschluss = einfach, lösbar, aber Kerbwirkung. Reibschluss = hohe Momente, gute Zentrierung, kerbarm – aber schwer lösbar und fertigungsaufwendig. Wer eine Verbindung *oft lösen* muss, wählt Formschluss; wer *maximales Moment kerbarm* braucht, wählt den Pressverband.

## 9.2 Passfederverbindung (Formschluss)

Die Passfeder ist die häufigste WNV überhaupt – und die häufigste Klausuraufgabe. Ein quaderförmiges Stahlstück (die Feder) liegt in je einer Nut von Welle und Nabe und überträgt das Moment durch **Flächenpressung an den Seitenflächen**. Die Rückenfläche der Feder hat bewusst Spiel; sie trägt nicht.

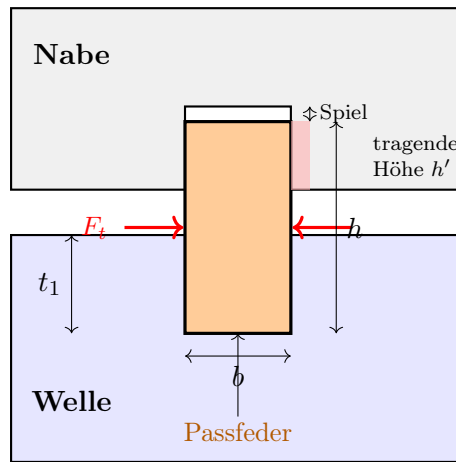


Abbildung 44: Passfeder im Querschnitt: Die Feder überträgt das Moment über Flächenpressung an den *Seitenflächen* (rote Kräfte). Oben Rückenspiel, tragende Höhe  $h' \approx 0,45 h$  an der Flanke des schwächeren Teils (meist Nabe).

### 9.2.1 Nachweis der Flächenpressung

Die tangentialen Umfangskraft am Wellendurchmesser  $d$  beträgt  $F_t = 2T/d$ . Sie drückt über die tragende Höhe  $h'$  und die tragende Länge  $l'$  auf die Nutflanke. Der Nachweis fordert, dass die dort entstehende Flächenpressung die zulässige nicht übersteigt.

**Flächenpressung an der Passfeder** (nach Roloff/Matek, Gl. 12.1):

$$p_m = \frac{F_t}{h' \cdot l' \cdot n \cdot \varphi} = \frac{2T}{d \cdot h' \cdot l' \cdot n \cdot \varphi} \leq p_{zul}$$

- $F_t = 2T/d$ : Umfangskraft am Fugendurchmesser  $d$  (bei dynamischer Last  $F_t = K_A F_{t,nenn}$  mit Anwendungsfaktor  $K_A$  nach TB 3-5)
- $h' \approx 0,45 h$ : tragende Passfederhöhe ( $h$  aus TB 12-2a)
- $l'$ : **tragende** Passfederlänge – rundstirnig (Form A, C, E):  $l' = l - b$ ; geradstirnig (Form B, D, ...):  $l' = l$
- $n$ : Anzahl der Passfedern (Regel  $n = 1$ );  $\varphi$ : Tragfaktor ( $\varphi = 1$  bei  $n = 1$ ,  $\varphi \approx 0,75$  bei  $n = 2$ )
- $p_{zul} = R_e/S_F$  (zäher Werkstoff) bzw.  $R_m/S_B$  (spröder Werkstoff wie Gusseisen)

#### Achtung!

**Klassiker Nr. 1:**  $l' = l - b$  bei rundstirnigen Passfedern (Form A)! Die runden Enden liegen nicht an der geraden Nutflanke an und tragen deshalb nicht. Wer mit der vollen Länge  $l$  rechnet, unterschätzt die Pressung systematisch – die Verbindung ist in Wirklichkeit stärker ausgelastet als berechnet.

#### WICHTIG!

Bei zwei Passfedern ( $n = 2$ , um  $180^\circ$  versetzt) verdoppelt sich die tragende Fläche *nicht*. Wegen Fertigungsungenauigkeiten tragen nie beide Federn gleich – man rechnet mit dem Tragfaktor  $\varphi \approx 0,75$ , sodass zwei Federn nur etwa das 1,5-fache Moment einer einzelnen



übertragen. Zwei Passfedern sind daher selten wirtschaftlich; oft ist der Wechsel zu einer stärkeren Verbindung (Keilwelle, Pressverband) sinnvoller.

### 9.2.2 Auswahl und Gestaltung

Querschnitt  $b \times h$  und Nuttiefen  $t_1, t_2$  werden nicht frei gewählt, sondern über den Wellendurchmesser aus TB 12-2a abgelesen. Die Länge  $l$  ergibt sich aus dem Nachweis – gerundet auf die nächste Normlänge.

#### Richtwerte Passfeder

- Querschnitt  $b \times h$  nach Wellendurchmesser aus TB 12-2a (z. B.  $d = 30 \dots 38 \text{ mm} \Rightarrow 10 \times 8$ ;  $d = 38 \dots 44 \Rightarrow 12 \times 8$ ;  $d = 44 \dots 50 \Rightarrow 14 \times 9$ ).
- Normlängen  $l$  (Auszug): 20, 22, 25, 28, 32, 36, 40, 45, 50, 56, 63, 70, 80, 90, 100 mm.
- Nabenmaße nach TB 12-1: Nabenaußendurchmesser  $D \approx (1,8 \dots 2,2) d$ , Nabenlänge  $L \approx (1,1 \dots 2,1) d$ .
- Faustregel tragende Länge:  $l' \lesssim 1,3 d$  – längere Federn tragen wegen Verdrehung der Welle nicht mehr gleichmäßig; im Nachweis mit Methode C wird  $l'$  auf  $1,3 d$  begrenzt.
- Regelwerkstoff der Feder: E295.

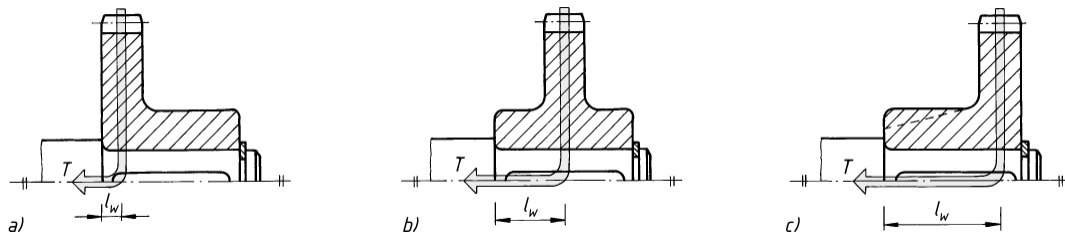


Abbildung 45: Kraftverteilung bei unterschiedlicher Nabenausführung (a, b, c) über der Passfederlänge – verdeutlicht, warum tragende Länge  $l'$  und Wirkabstand  $l_w$  für die Gestaltung wichtig sind. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 12-4, S. 399.

### 9.3 Zylindrischer Pressverband (Reibschluss)

Beim Pressverband wird die Nabe mit **Übermaß** auf die Welle gefügt: Die Bohrung ist minimal kleiner als die Welle. Nach dem Fügen presst die aufgeweitete Nabe radial auf die Welle – diese **Fugenpressung**  $p_F$  erzeugt über den Haftbeiwert  $\mu$  eine Reibkraft am gesamten Umfang, und diese überträgt das Moment. Kein Nutgrund, keine Kerbe – deshalb überträgt der Pressverband bei gleichem Durchmesser ein Vielfaches der Passfeder.

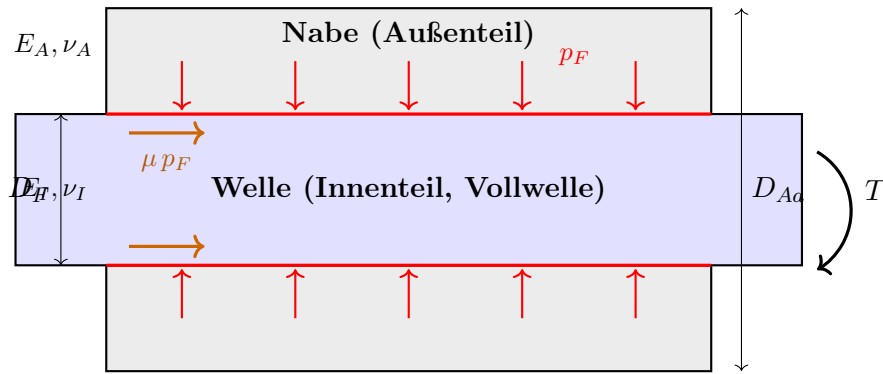


Abbildung 46: Zylindrischer Pressverband im Längsschnitt: Das Übermaß erzeugt eine radiale Fugenpressung  $p_F$  (rot), die über den Haftbeiwert  $\mu$  eine gleichmäßig am Umfang wirkende Reibkraft  $\mu p_F$  (orange) und damit das Moment  $T$  überträgt.

### 9.3.1 Die Auslegungskette

Die Auslegung führt in einer festen Reihenfolge vom geforderten Moment zum kleinsten nötigen Übermaß (*Rutschsicherheit*) und zum größten zulässigen Übermaß (*Werkstoffgrenze*), dazwischen liegt das Feld für die Passungswahl. Wir gehen die Kette Schritt für Schritt (nach Roloff/Matek, Gl. 12.8–12.22).

**Schritt 1 – Erforderliche Fugenpressung** aus Rutschsicherheit  $S_H$ :

$$F_{Rt} = S_H \cdot F_t, \quad F_t = \frac{2T}{D_F}, \quad p_{Fk} = \frac{F_{Rt}}{A_F \cdot \mu}, \quad A_F = D_F \cdot \pi \cdot l_F$$

$S_H \approx 1,5 \dots 2$  Haftsicherheit gegen Rutschen;  $\mu$  Haftbeiwert (TB 12-6a);  $A_F$  Fugenfläche;  $l_F$  Fugenlänge.  $p_{Fk}$  ist die *kleinste erforderliche* Fugenpressung.

**Schritt 2 – Hilfsgröße  $K$  und kleinstes Haftmaß** (Aufweitung nach der dickwandigen Rohrtheorie):

$$K = \frac{E_A}{E_I} \left( \frac{1 + Q_I^2}{1 - Q_I^2} - \nu_I \right) + \frac{1 + Q_A^2}{1 - Q_A^2} + \nu_A, \quad Z_k = \frac{p_{Fk} \cdot D_F}{E_A} \cdot K$$

mit den Durchmesserhältnissen  $Q_A = D_F/D_{Aa}$  (Außenteil) und  $Q_I = D_{Ii}/D_F$  (Innenteil,  $Q_I = 0$  bei Vollwelle).  $Z_k$  ist das kleinste *wirksame* Haftmaß.

**Achtung!**

**$Q$ -Verhältnisse richtig herum!** Beide sind “klein durch groß” (stets  $< 1$ ), aber mit unterschiedlichem Bezug:  $Q_A = D_F/D_{Aa}$  (Fuge  $\div$  Nabenaußen),  $Q_I = D_{Ii}/D_F$  (Wellenbohrung  $\div$  Fuge). Bei einer Vollwelle ist  $Q_I = 0$ . Ein vertauschtes  $Q$  liefert ein  $K$ , das um Größenordnungen falsch ist.

**Schritt 3 – Glättung und kleinstes Übermaß:**

$$G \approx 0,8 \cdot (R_{zA} + R_{zI}), \quad \ddot{U}_u = Z_k + G$$

Beim Fügen werden die Rauheitsspitzen (gemittelte Rautiefen  $R_z$ ) eingeebnet – dieser Verlust  $G$  geht dem wirksamen Haftmaß verloren und muss dem messbaren Übermaß *zugeschlagen* werden.

### Achtung!

**Glättung nicht vergessen!** Das *wirksame* Haftmaß  $Z$  ist nicht das vor dem Fügen messbare Übermaß  $\ddot{U}$ . Es gilt  $\ddot{U} = Z + G$ . Wer  $G$  vergisst, wählt die Passung zu knapp – die Verbindung rutscht im Betrieb durch.

**Schritt 4 – Grenzpressung und größtes Übermaß:** Die Nabe darf an ihrem Innenrand nicht fließen (Gestaltänderungshypothese):

$$p_{Fg} \leq \frac{R_{eA}}{S_{FA}} \cdot \frac{1 - Q_A^2}{\sqrt{3}} \quad (\text{Außenteil, analog Innenteil}), \quad Z_g = \frac{p_{Fg} \cdot D_F}{E_A} \cdot K, \quad \ddot{U}_o = Z_g + G$$

Maßgebend ist der **kleinere** der beiden Grenzwerte (Außen-/Innenteil).  $\ddot{U}_o$  ist das größte zulässige Übermaß.

**Schritt 5 – Passtoleranz und Passungswahl:**

$$PT = \ddot{U}_o - \ddot{U}_u = T_B + T_W, \quad T_B \approx 0,6 \cdot PT$$

$PT$  ist der Spielraum für die Toleranzen von Bohrung ( $T_B$ ) und Welle ( $T_W$ ). Aus  $T_B$  wählt man einen Toleranzgrad mit  $IT \leq T_B$  (TB 2-1) und legt eine Übermaßpassung fest (Einheitsbohrung H, Welle im Übermaßfeld, z. B. **H7/s6** oder **H6/r6**).

**Schritt 6 – Fügetemperatur beim thermischen Fügen** (Schrumpfen der Nabe):

$$\vartheta_A \approx \vartheta + \frac{\ddot{U}_o + S_u}{\alpha_A \cdot D_F}$$

$S_u$  Einführspiel ( $S_u \approx \ddot{U}_o/2$  oder  $D_F/1000$ );  $\alpha_A$  Längenausdehnungskoeffizient der Nabe (TB 12-6b);  $\vartheta$  Raumtemperatur. Die Nabe muss so weit aufgeweitet werden, dass sie *mit* Einführspiel über die Welle passt. Grenzwerte je Nabenwerkstoff nach TB 12-6c beachten.

### Achtung!

Einführspiel  $S_u$  bei der Fügetemperatur nicht vergessen! Ohne  $S_u$  wird  $\vartheta_A$  zu niedrig berechnet – die Nabe klemmt beim Aufschieben fest, bevor sie ihre Endlage erreicht, und der Verband ist unbrauchbar.

### Lösungsrezept Pressverband in 7 Schritten

1. **Fugenpressung:**  $F_t = 2T/D_F$ ,  $F_{Rt} = S_H F_t$ ,  $p_{Fk} = F_{Rt}/(A_F \mu)$ .
2. **Hilfsgröße**  $K$  aus  $Q_A$ ,  $Q_I$ ,  $E$ -Moduln  $\Rightarrow$  kleinstes Haftmaß  $Z_k = p_{Fk} D_F K / E_A$ .
3. **Glättung:**  $G = 0,8(R_{zA} + R_{zI}) \Rightarrow$  kleinstes Übermaß  $\ddot{U}_u = Z_k + G$ .
4. **Grenzpressung**  $p_{Fg}$  aus Streckgrenze (kleinerer Wert Außen/Innen)  $\Rightarrow Z_g$ ,  $\ddot{U}_o = Z_g + G$ .
5. **Passtoleranz**  $PT = \ddot{U}_o - \ddot{U}_u \Rightarrow$  Passung wählen (H7/s6 o. ä.).
6. **Kontrolle:** liegt die wirkliche Pressung zwischen  $p_{Fk}$  und  $p_{Fg}$ ?
7. **Fügetemperatur:**  $\vartheta_A = \vartheta + (\ddot{U}_o + S_u)/(\alpha_A D_F)$ , gegen Grenzwert prüfen.

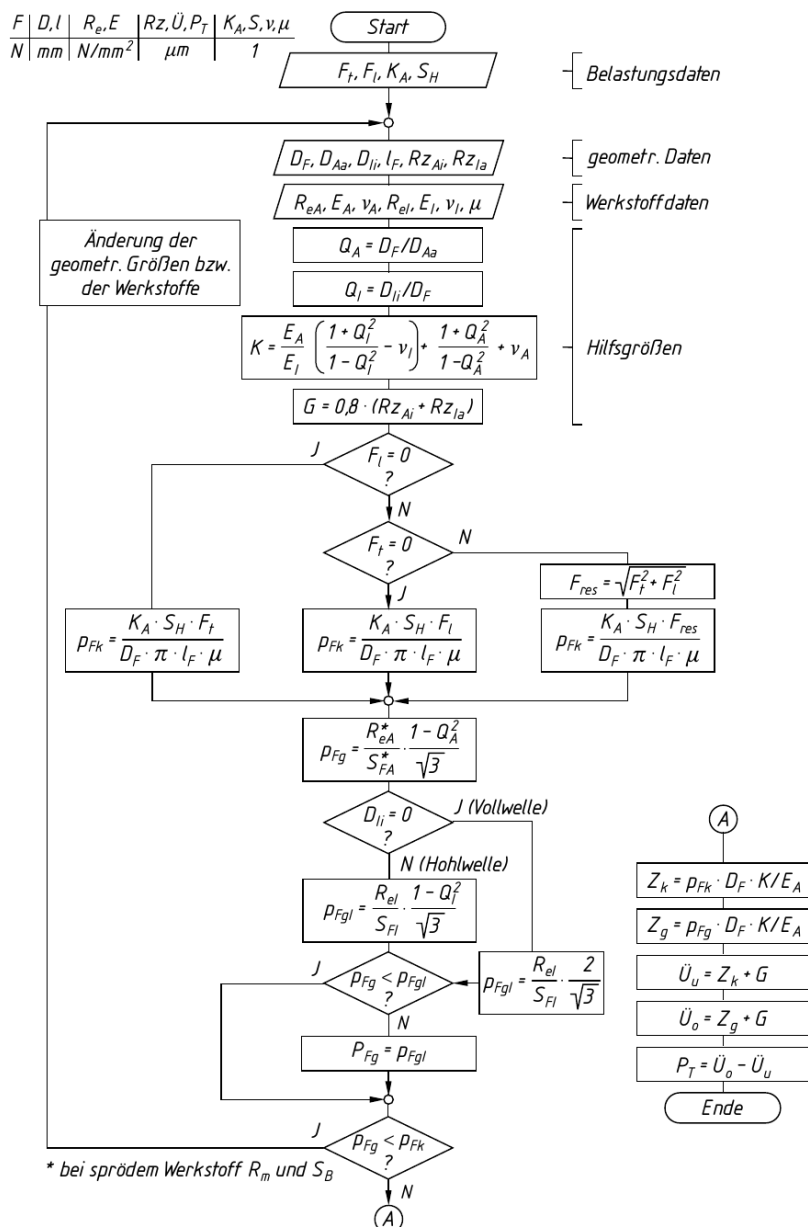


Abbildung 47: Ablaufplan zur Bestimmung der Übermaße  $\ddot{U}_u$  und  $\ddot{U}_o$  für elastische Pressverbände. Bildquelle: Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 22. Aufl., Springer Vieweg 2015, Bild 12-16, S. 411.

#### 9.4 Weitere Welle-Nabe-Verbindungen im Kurzüberblick

- **Keilwelle / Zahnwelle:** Mehrere über den Umfang verteilte Keile bzw. Zähne (DIN ISO 14, DIN 5480/5481) übertragen große, auch wechselnde Momente formschlüssig. Gut zentrierend, axial verschiebbar (Schaltgetriebe). Berechnung: Flächenpressung mit mittlerem Durchmesser  $d_m = (D + d)/2$  und nur 75 % tragenden Keilen. Einsatz: Fahrzeug- und Werkzeugmaschinengetriebe.
- **Polygonprofil:** Unrunde, selbstzentrierende Kontur (P3G nach DIN 32711, P4C nach DIN 32712). Sehr geringe Kerbwirkung ( $\beta_k \approx 1$ ), hohe Momente, aber teure Fertigung (Schleifen). Einsatz: hochbeanspruchte, kerbempfindliche Verbindungen.
- **Kegelpressverband:** Reibschluss über eine kegelige Fügefläche; das axiale Verspannen (Schraube/Mutter) erzeugt die Fugenpressung. Bei kleinem Kegelwinkel **selbsthemmend** –

hält auch nach Wegnahme der Verspannkraft. Leicht lösbar, gut zentrierend, kein Übermaß beim Fügen nötig. Einsatz: Wellenenden, Werkzeugaufnahmen. Für Kegelwinkel  $\rightarrow 0$  gehen die Formeln in die des zylindrischen Pressverbands über.

- **Spannelemente (Spannsätze, Ringfeder):** Konische Ringpaare werden durch Schrauben axial verspannt und pressen reibschlüssig auf Welle und Nabe. Nachstellbar, lösbar, keine Nut nötig. Übertragbares Moment aus Herstellertabellen (TB 12-9). Einsatz: nachträglich montierbare, positionierbare Verbindungen.

## 9.5 Durchgerechnete Beispiele

### Passfeder-Nachweis mit Längenkorrektur

Auf einer Welle  $d = 40 \text{ mm}$  sitzt ein Zahnrad, das  $T = 300 \text{ Nm}$  überträgt. Gewählt ist eine Passfeder DIN 6885 – Form A  $12 \times 8 \times 50$  (rundstirnig). Die Nabe besteht aus Gusseisen EN-GJL-250 mit  $R_m \approx 180 \text{ N/mm}^2$  (kerbwertreduziert) und  $S_B = 1,7$ . Methode C,  $n = 1$ ,  $\varphi = 1$ .

**Gesucht:** Reicht die Passfeder? Falls nicht, welche Normlänge ist nötig?

### Lösung

#### 1. Umfangskraft:

$$F_t = \frac{2T}{d} = \frac{2 \cdot 300\,000 \text{ Nmm}}{40 \text{ mm}} = 15\,000 \text{ N}.$$

#### 2. Tragende Maße (aus $b \times h = 12 \times 8$ , Form A rundstirnig):

$$h' = 0,45 \cdot h = 0,45 \cdot 8 = 3,6 \text{ mm}, \quad l' = l - b = 50 - 12 = 38 \text{ mm}.$$

#### 3. Vorhandene Pressung:

$$p_m = \frac{F_t}{h' \cdot l'} = \frac{15\,000}{3,6 \cdot 38} = 109,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

#### 4. Zulässige Pressung (spröder Werkstoff):

$$p_{\text{zul}} = \frac{R_m}{S_B} = \frac{180}{1,7} = 105,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**5. Nachweis:**  $p_m = 109,6 > p_{\text{zul}} = 105,9$  (Auslastung  $\approx 104\%$ ) – **nicht erfüllt!** Die Feder mit  $l = 50 \text{ mm}$  reicht knapp nicht.

#### 6. Erforderliche Länge:

$$l'_{\text{erf}} = \frac{F_t}{h' \cdot p_{\text{zul}}} = \frac{15\,000}{3,6 \cdot 105,9} = 39,4 \text{ mm} \Rightarrow l_{\text{erf}} = l'_{\text{erf}} + b = 51,4 \text{ mm}.$$

Nächste Normlänge (TB 12-2a):  $l = 56 \text{ mm}$ . Kontrolle:  $l' = 56 - 12 = 44 \text{ mm}$ ,

$$p_m = \frac{15\,000}{3,6 \cdot 44} = 94,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 105,9 \checkmark$$

**Ergebnis:** Passfeder A12  $\times$  8  $\times$  50 reicht nicht – erforderlich ist mindestens A12  $\times$  8  $\times$  56. Die kleine Überschreitung von nur 4 % zeigt: Ohne die Korrektur  $l' = l - b$  hätte man (mit  $l' = 50$ ) fälschlich  $p_m = 83,3 \text{ N/mm}^2$  erhalten und die Verbindung als sicher freigegeben.

### Vollständiger zylindrischer Pressverband mit Fügetemperatur

Eine Riemenscheibe aus EN-GJL-200 sitzt als Schrumpfpassung auf einer Vollwelle E295. Daten: Fugendurchmesser  $D_F = d = 60$  mm, äquivalentes Moment  $T = 600$  Nm, Rutschsicherheit  $S_H = 1,5$ , Nabenaußendurchmesser  $D_{Aa} = 144$  mm, Fugenlänge  $l_F = 80$  mm, Haftbeiwert  $\mu = 0,16$  (Guss, trocken, Schrumpfpassung). Werkstoffe:  $E_I = 210\,000$ ,  $E_A = 115\,000$  N/mm<sup>2</sup>,  $\nu_I = 0,30$ ,  $\nu_A = 0,25$ ,  $\alpha_A = 10 \cdot 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>;  $R_{zA} = R_{zI} = 6,3$   $\mu$ m; Nabe  $R_m \approx 150$  N/mm<sup>2</sup>,  $S_{FA} = 2,0$ ; Raumtemperatur  $\vartheta = 20$  °C.

**Gesucht:** kleinstes und größtes Übermaß, Passtoleranz und Fügetemperatur.

### Lösung

**1. Erforderliche Fugenpressung:**  $Q_A = D_F/D_{Aa} = 60/144 = 0,417$ ;  $Q_I = 0$  (Vollwelle).

$$F_t = \frac{2T}{D_F} = \frac{2 \cdot 600\,000}{60} = 20\,000 \text{ N}, \quad F_{Rt} = S_H F_t = 30\,000 \text{ N},$$

$$A_F = D_F \pi l_F = 60 \cdot \pi \cdot 80 = 15\,080 \text{ mm}^2, \quad p_{Fk} = \frac{F_{Rt}}{A_F \mu} = \frac{30\,000}{15\,080 \cdot 0,16} = 12,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**2. Hilfsgröße  $K$  und kleinstes Haftmaß:**

$$K = \frac{115\,000}{210\,000} (1 - 0,30) + \frac{1 + 0,417^2}{1 - 0,417^2} + 0,25 = 2,05,$$

$$Z_k = \frac{p_{Fk} D_F}{E_A} K = \frac{12,4 \cdot 60}{115\,000} \cdot 2,05 = 0,0133 \text{ mm} = 13,3 \mu\text{m}.$$

**3. Glättung und kleinstes Übermaß:**

$$G = 0,8 (6,3 + 6,3) = 10,1 \mu\text{m}, \quad \ddot{U}_u = Z_k + G = 23,4 \mu\text{m}.$$

**4. Grenzpressung und größtes Übermaß** (Außenteil maßgebend, weichere Guss-Nabe):

$$p_{Fg} = \frac{R_m}{\sqrt{3} S_{FA}} (1 - Q_A^2) = \frac{150}{\sqrt{3} \cdot 2,0} (1 - 0,417^2) = 35,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$Z_g = \frac{p_{Fg} D_F}{E_A} K = 38,3 \mu\text{m}, \quad \ddot{U}_o = Z_g + G = 48,4 \mu\text{m}.$$

**5. Passtoleranz:**

$$PT = \ddot{U}_o - \ddot{U}_u = 48,4 - 23,4 = 25,0 \mu\text{m}, \quad T_B \approx 0,6 PT = 15 \mu\text{m}.$$

Nach TB 2-1 (Nennmaßbereich 50...80 mm) passt IT5 ( $IT = 13 \mu\text{m} \leq 15 \mu\text{m}$ ) für die Bohrung; das nötige Übermaß liegt im Bereich einer Übermaßpassung (z. B. H6/s6). Das Übermaßfeld 23,4...48,4  $\mu$ m wird durch die Passungswahl abgedeckt.

**6. Fügetemperatur** (Schrumpfen der Nabe): mit  $S_u \approx \ddot{U}_o/2 = 24,2 \mu\text{m}$ ,

$$\Delta\vartheta = \frac{\ddot{U}_o + S_u}{\alpha_A D_F} = \frac{(48,4 + 24,2) \cdot 10^{-3} \text{ mm}}{10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \cdot 60 \text{ mm}} = 121 \text{ K},$$

$$\vartheta_A = \vartheta + \Delta\vartheta = 20 + 121 = 141 \text{ °C}.$$

**Kontrolle:**  $\vartheta_A = 141$  °C liegt deutlich unter dem Grenzwert 350 °C für GJL-Naben (TB 12-6c) ✓. Das Übermaß ist moderat, die Fügetemperatur unkritisch – ein wirtschaftlich machbarer Pressverband.

### Momentvergleich: Passfeder gegen Pressverband

Wie viel Drehmoment übertragen bei *gleichem* Wellendurchmesser  $d = 40 \text{ mm}$  eine Passfeder und ein Pressverband?

- (a) Passfeder A12  $\times 8 \times 50$  wie in Beispiel 1 ( $h' = 3,6 \text{ mm}$ ,  $l' = 38 \text{ mm}$ ,  $p_{\text{zul}} = 105,9 \text{ N/mm}^2$ ).  
(b) Pressverband, GJL-Nabe  $D_{Aa} = 96 \text{ mm}$ ,  $l_F = 60 \text{ mm}$ ,  $\mu = 0,16$ , wirksames Haftmaß  $Z \approx 40 \mu\text{m}$  ( $E_A = 115\,000 \text{ N/mm}^2$ ,  $K = 2,05$  wie zuvor).

### Lösung

(a) **Passfeder** – maximales Moment aus  $p_{\text{zul}}$ :

$$T_{\text{max}} = p_{\text{zul}} \cdot h' \cdot l' \cdot \frac{d}{2} = 105,9 \cdot 3,6 \cdot 38 \cdot \frac{40}{2} = 289,7 \cdot 10^3 \text{ Nmm} \approx 290 \text{ Nm}.$$

(b) **Pressverband** – Fugenpressung aus dem Haftmaß, dann Reibmoment:

$$p_F = \frac{Z \cdot E_A}{D_F \cdot K} = \frac{0,040 \cdot 115\,000}{40 \cdot 2,05} = 56,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$A_F = D_F \pi l_F = 40 \cdot \pi \cdot 60 = 7540 \text{ mm}^2, \quad F_{Rt} = p_F A_F \mu = 56,0 \cdot 7540 \cdot 0,16 = 67,6 \text{ kN},$$

$$T = F_{Rt} \cdot \frac{d}{2} = 67\,600 \cdot \frac{40}{2} = 1351 \cdot 10^3 \text{ Nmm} \approx 1350 \text{ Nm}.$$

**Ergebnis:** Der Pressverband überträgt bei gleichem Wellendurchmesser das  $1350/290 \approx 4,6$ -fache Moment der Passfeder – und das *ohne* kerbwirkende Nut. Der Preis dafür: unlösbare, fertigungsaufwendige Fügung und Empfindlichkeit gegenüber Fliehkraft (Fugendruck-Abbau bei hohen Drehzahlen).

## 9.6 Mini-Aufgaben

### Mini-Aufgabe

Auf einer Welle  $d = 45 \text{ mm}$  sitzt eine Nabe aus EN-GJL-250 ( $R_m \approx 180 \text{ N/mm}^2$ ,  $S_B = 1,7$ ). Gewählt ist eine Passfeder DIN 6885 – Form A  $14 \times 9 \times 40$  (rundstirnig). Zu übertragen ist  $T = 250 \text{ Nm}$ . Führe den Flächenpressungsnachweis ( $n = 1$ ,  $\varphi = 1$ ).

### Lösung

$$F_t = \frac{2 \cdot 250\,000}{45} = 11\,111 \text{ N}, \quad h' = 0,45 \cdot 9 = 4,05 \text{ mm}, \quad l' = 40 - 14 = 26 \text{ mm}.$$

$$p_m = \frac{11\,111}{4,05 \cdot 26} = 105,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad p_{\text{zul}} = \frac{180}{1,7} = 105,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

$p_m = 105,5 < p_{\text{zul}} = 105,9$  – Nachweis **gerade noch erfüllt** (Auslastung 99,6 %). Hätte man die runden Enden übersehen und mit  $l' = l = 40 \text{ mm}$  gerechnet, käme  $p_m = 68,6 \text{ N/mm}^2$  heraus – eine gefährlich zu optimistische Bewertung.

### Mini-Aufgabe

Ein Pressverband soll  $T = 400 \text{ Nm}$  übertragen. Daten:  $D_F = 50 \text{ mm}$ ,  $l_F = 60 \text{ mm}$ ,  $\mu = 0,15$ , Rutschsicherheit  $S_H = 1,8$ . Berechne die erforderliche Fugenpressung  $p_{Fk}$ .

## Lösung

$$F_t = \frac{2 \cdot 400\,000}{50} = 16\,000 \text{ N}, \quad F_{Rt} = S_H F_t = 1,8 \cdot 16\,000 = 28\,800 \text{ N},$$

$$A_F = 50 \cdot \pi \cdot 60 = 9425 \text{ mm}^2, \quad p_{Fk} = \frac{F_{Rt}}{A_F \mu} = \frac{28\,800}{9425 \cdot 0,15} = 20,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Diese Fugenpressung ist der Ausgangspunkt für Schritt 2 der Auslegungskette (Hilfsgröße  $K$ , kleinstes Haftmaß).

## 9.7 Zusammenfassung Kapitel 9

### Das Wichtigste aus Kapitel 9

- **Drei Wirkprinzipien:** Formschluss (Passfeder, Keilwelle – lösbar, Kerbwirkung), Reibschluss (Pressverband – höchstes Moment, kerbarm, schwer lösbar), Stoffschluss (Kleben/Schweißen).
- **Passfeder:**  $p_m = \frac{2T}{d h' l' n \varphi} \leq p_{zul}$  mit  $h' \approx 0,45 h$  und – *Klassiker!* –  $l' = l - b$  bei rundstirnigen Formen. Ergebnis auf nächste Normlänge runden.
- **Pressverband – 7 Schritte:**  $p_{Fk}$  aus  $S_H$  und  $\mu \rightarrow K$  und  $Z_k \rightarrow$  Glättung  $G$ ,  $\ddot{U}_u = Z_k + G \rightarrow$  Grenzpressung  $p_{Fg}$ ,  $\ddot{U}_o = Z_g + G \rightarrow$  Passtoleranz  $PT$ , Passung wählen  $\rightarrow$  Kontrolle  $\rightarrow$  Fügetemperatur  $\vartheta_A$ .
- **Drei Fallen:**  $l' = l - b$  nicht vergessen;  $Q_A = D_F/D_{Aa}$  und  $Q_I = D_{Ii}/D_F$  nicht vertauschen; Glättung  $\ddot{U} = Z + G$  und Einführspiel  $S_u$  mitnehmen.
- **Größenordnung:** Bei gleichem  $d$  überträgt der Pressverband rund das 4-5-fache Moment der Passfeder – der Grund, warum bei hohen, kerbempfindlichen Lasten der Reibschluss gewinnt.

## 10 Klausurtraining: Komplexaufgaben mit Musterlösung

### Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- eine mehrteilige **Wellenaufgabe** durchgängig lösen – von Torsionsmoment und Lagerreaktionen über den Entwurfsdurchmesser bis zum Passfeder- und Dauerfestigkeitsnachweis
- eine **vorgespannte Schraubenverbindung** vollständig auslegen: Klemmkraft, Kraftverhältnis, Montagevorspannkraft, Schraubenwahl und alle Nachweise
- einen **Schweißanschluss** unter Biegung und Schub nach DVS 1612 nachweisen und eine daran angeschlossene **Schraubendruckfeder** auslegen
- die Rechenkettens aus den Kapiteln 3, 4, 5, 7, 8 und 9 unter Klausurbedingungen sicher verknüpfen
- ein Ergebnis auf Plausibilität prüfen und erkennen, wann ein Nachweis *scheitert* und welche Korrekturmaßnahme dann greift

Die vorangegangenen Kapitel haben dir jedes Werkzeug einzeln in die Hand gegeben. In der Klausur



sur begegnen dir diese Werkzeuge aber nie isoliert, sondern in großen, mehrteiligen Aufgaben, die Statik, Festigkeitslehre und Bauteilauslegung zu einer einzigen Rechnung verweben. Genau das trainiert dieses Kapitel: drei klausurtypische Komplexaufgaben mit je 45–60 Minuten Bearbeitungszeit, vollständiger Angabe und schrittweiser Musterlösung. Alle benötigten Tabellenrichtwerte stehen direkt in der Angabe – ein Tabellenbuch brauchst du nicht. Rechne jede Aufgabe zuerst selbst, bevor du in die Lösung schaust.

#### So gehst du eine Klausuraufgabe an

1. **Erst lesen, dann skizzieren.** Fertige eine saubere Systemskizze an und trage *alle* gegebenen Größen ein. Kläre: Achse oder Welle? Axiale oder Querkraft? Ruhend, schwellend oder wechselnd?
2. **Formeln vor Zahlen.** Schreibe zuerst die symbolische Formel hin, dann setzt du ein. Das gibt Teilpunkte, auch wenn sich am Ende ein Zahlendreher einschleicht.
3. **Einheiten mitführen.** Rechne konsequent in **N und mm** ( $\rightarrow$  Spannungen in  $\text{N/mm}^2$ ).  $P$  in kW,  $n$  in  $\text{min}^{-1}$  für  $T = 9550 P/n$ ; Momente von Nm in Nmm umrechnen ( $\times 1000$ ).
4. **Zwischenergebnisse markieren.** Rahme oder unterstreiche Teilergebnisse – so findest du sie im Folgeteil wieder und musst nicht suchen.
5. **Zeit einteilen.** Ein Punkt  $\approx$  eine Minute. Bleibst du hängen, notiere das Zwischenergebnis als Annahme und rechne weiter – Folgefehler werden meist nur einmal bewertet.
6. **Plausibilität prüfen.** Ist die Sicherheit realistisch ( $S \approx 1,5 \dots 5$ )? Liegt der Durchmesser im erwarteten Bereich? Ein  $S_D = 0,03$  oder  $d = 400 \text{ mm}$  ist fast immer ein Rechenfehler.

## 10.1 Klausuraufgabe 1: Getriebewelle komplett

### Aufgabenstellung: Getriebewelle komplett

#### (Leitaufgabe, ca. 30 Punkte, 55 min)

Die Antriebswelle eines Stirnradgetriebes überträgt die Leistung  $P = 22 \text{ kW}$  bei der Drehzahl  $n = 1000 \text{ min}^{-1}$ . Der Antrieb erfolgt über einen Elektromotor mit mäßigen Stößen, Anwendungsfaktor  $K_A = 1,25$ . Ein Geradstirnrad (Teilkreisdurchmesser  $d_0 = 180 \text{ mm}$ , Eingriffswinkel  $\alpha = 20^\circ$ ) sitzt zwischen den beiden Lagern  $A$  und  $B$  (Stützweite  $l = 400 \text{ mm}$ ) im Abstand  $a = 160 \text{ mm}$  von  $A$ . Die Torsion ist schwellend, die Biegung der umlaufenden Welle wechselnd  $\Rightarrow$  Anstrengungsverhältnis  $\alpha_0 = 0,7$ .

**Wellenwerkstoff C45E vergütet** (Werte bei  $d_N = 16 \text{ mm}$ ):  $\sigma_{bW} = 350 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{tW} = 210 \text{ N/mm}^2$ . Am Wellenabsatz (kritische Kerbstelle beim gewählten Durchmesser):  $\beta_{kb} = 1,7$ ,  $\beta_{kt} = 1,4$ , Größeneinfluss  $K_g = 0,88$ , Oberflächeneinfluss  $K_{O\sigma} = K_{O\tau} = 0,90$  (gedreht), keine Verfestigung ( $K_V = 1$ ). Für den überschlägigen Entwurf: pauschale Sicherheit  $S_D \approx 4$ .

**Passfeder** (DIN 6885 Form A, rundstirnig) auf dem Radsitz: Querschnitt nach Wellendurchmesser  $b \times h = 12 \times 8$  (für  $d = 38 \dots 44 \text{ mm}$ ), tragende Höhe  $h' = 0,45 h$ , zulässige Flächenpressung der Gussnabe  $p_{zul} = 100 \text{ N/mm}^2$ . Normlängen: 40, 45, 50, 56, 63 mm.

#### Teilaufgaben:

- (a) Berechne das Nenn- und das äquivalente Torsionsmoment. (3 P)
- (b) Bestimme die Zahnkräfte, die Lagerreaktionen und das größte Biegemoment. (6 P)
- (c) Ermittle das Vergleichsmoment  $M_v$  und den erforderlichen Durchmesser; wähle einen Normdurchmesser. (6 P)

- (d) Weise die Passfeder  $A 12 \times 8 \times 45$  nach. Reicht sie? Falls nicht: welche Normlänge ist nötig? (7 P)
- (e) Führe am Wellenabsatz ( $d$  aus (c)) den gestaltfesten Dauerfestigkeitsnachweis für Biegung und Torsion. (8 P)

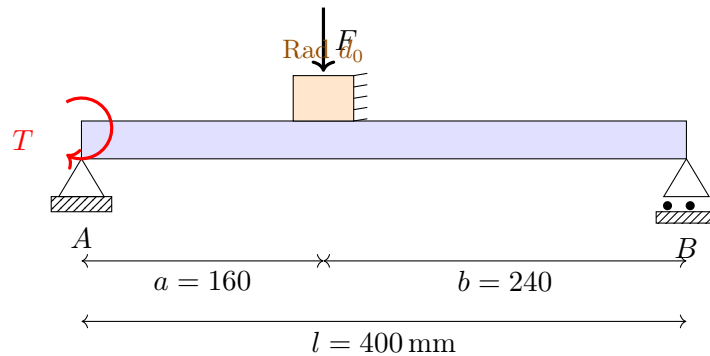


Abbildung 48: Systemskizze Getriebewelle: Zahnkraft  $F$  am Rad zwischen den Lagern  $A$  und  $B$ , Torsionsmoment  $T$  vom linken Wellenende (Kupplung) bis zum Rad.

### Lösung

#### 1. Torsionsmoment (a):

$$T_{\text{nenn}} = 9550 \cdot \frac{P}{n} = 9550 \cdot \frac{22}{1000} = 210,1 \text{ Nm}, \quad T_{\text{eq}} = K_A \cdot T_{\text{nenn}} = 1,25 \cdot 210,1 = 262,6 \text{ Nm}.$$

#### 2. Zahnkräfte (b): (mit $T_{\text{nenn}} = 210 \text{ Nm}$ )

$$F_t = \frac{2 T_{\text{nenn}}}{d_0} = \frac{2 \cdot 210 \text{ Nm}}{180} = 2334,4 \text{ N}, \quad F_r = F_t \cdot \tan 20^\circ = 849,7 \text{ N},$$

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2} = \sqrt{2334,4^2 + 849,7^2} = 2484,3 \text{ N}.$$

#### 3. Lagerreaktionen und Biegemoment (b):

$$F_A = F \cdot \frac{b}{l} = 2484,3 \cdot \frac{240}{400} = 1490,6 \text{ N}, \quad F_B = F \cdot \frac{a}{l} = 2484,3 \cdot \frac{160}{400} = 993,7 \text{ N}.$$

$$\text{Kontrolle: } F_A + F_B = 1490,6 + 993,7 = 2484,3 \text{ N} = F \quad \checkmark$$

$$M_{b,\text{nenn}} = F_A \cdot a = 1490,6 \cdot 160 = 238 \text{ 500 Nmm} = 238,5 \text{ Nm} \quad (\text{Kontrolle } F_B \cdot b = 238,5 \text{ Nm } \checkmark).$$

$$\text{Äquivalentes Biegemoment: } M_{b,\text{eq}} = K_A \cdot M_{b,\text{nenn}} = 1,25 \cdot 238,5 = 298,1 \text{ Nm}.$$

#### 4. Vergleichsmoment und Entwurfsdurchmesser (c): ( $\alpha_0 = 0,7$ )

$$M_v = \sqrt{M_{b,\text{eq}}^2 + 0,75 (\alpha_0 T_{\text{eq}})^2} = \sqrt{298,1^2 + 0,75 \cdot (0,7 \cdot 262,6)^2} = \sqrt{298,1^2 + 0,75 \cdot 183,8^2} = 338,0 \text{ Nm}.$$

$$\text{Mit } \sigma_{b,\text{zul}} = \sigma_{bW} / S_D = 350 / 4 = 87,5 \text{ N/mm}^2:$$

$$d_{\text{erf}} = 2,17 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_v}{\sigma_{b,\text{zul}}}} = 2,17 \cdot \sqrt[3]{\frac{338 \text{ 000 Nmm}}{87,5 \text{ N/mm}^2}} = 34,05 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{d = 40 \text{ mm}}$$

(nächstes Normmaß mit Reserve für Lagersitz und Absatz).

**5. Passfedernachweis (d):** Am Radsitz  $d = 40 \text{ mm}$  wirkt die dynamische Umfangskraft (mit  $K_A$ , also über  $T_{eq}$ ):

$$F_t = \frac{2 T_{eq}}{d} = \frac{2 \cdot 262\,600}{40} = 13\,130 \text{ N}, \quad h' = 0,45 \cdot h = 0,45 \cdot 8 = 3,6 \text{ mm}.$$

Form A ist **rundstirnig**  $\Rightarrow$  tragende Länge  $l' = l - b = 45 - 12 = 33 \text{ mm}$ :

$$p_m = \frac{F_t}{h' \cdot l'} = \frac{13\,130}{3,6 \cdot 33} = 110,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} > p_{zul} = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{Auslastung } 110\%) \Rightarrow \textbf{nicht erfüllt!}$$

Die Feder  $A 12 \times 8 \times 45$  reicht **nicht**. Erforderliche tragende Länge:

$$l'_{\text{erf}} = \frac{F_t}{h' \cdot p_{zul}} = \frac{13\,130}{3,6 \cdot 100} = 36,5 \text{ mm} \Rightarrow l_{\text{erf}} = l'_{\text{erf}} + b = 48,5 \text{ mm}.$$

Nächste Normlänge:  $l = 50 \text{ mm}$ . Kontrolle mit  $l' = 50 - 12 = 38 \text{ mm}$ :

$$p_m = \frac{13\,130}{3,6 \cdot 38} = 96,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 100 \checkmark \Rightarrow \textbf{gewählt: } A 12 \times 8 \times 50.$$

**6. Dauerfestigkeitsnachweis am Wellenabsatz (e):** ( $d = 40 \text{ mm}$ )

*Biege-Ausschlagspannung* (Biegung rein wechselnd,  $\sigma_{bm} = 0$ ):

$$W_b = \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{\pi}{32} \cdot 40^3 = 6283,2 \text{ mm}^3, \quad \sigma_{ba} = \frac{M_{b,eq}}{W_b} = \frac{298\,100}{6283,2} = 47,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

*Konstruktionsfaktor Biegung* (Gl. 3.16,  $K_V = 1$ ):

$$K_{Db} = \frac{\beta_{kb}}{K_g} + \frac{1}{K_{O\sigma}} - 1 = \frac{1,7}{0,88} + \frac{1}{0,90} - 1 = 1,932 + 1,111 - 1 = 2,043.$$

*Gestaltwechsel-/Gestaltausschlagfestigkeit* (reine Wechselbiegung):

$$\sigma_{bGW} = \frac{\sigma_{bW}}{K_{Db}} = \frac{350}{2,043} = 171,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \sigma_{bGA}.$$

*Torsion* (analog,  $\tau_{ta} = T_{eq}/W_t$ , konservativ  $\tau_{tGA} \approx \tau_{tGW}$ ):

$$W_t = 2 W_b = 12\,566 \text{ mm}^3, \quad \tau_{ta} = \frac{262\,600}{12\,566} = 20,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$K_{Dt} = \frac{1,4}{0,88} + \frac{1}{0,90} - 1 = 1,702, \quad \tau_{tGW} = \frac{210}{1,702} = 123,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

*Kombinierte Sicherheit* (GEH-Interaktion, Gl. 3.21):

$$\frac{1}{S_D} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bGA}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ta}}{\tau_{tGA}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{47,4}{171,3}\right)^2 + \left(\frac{20,9}{123,4}\right)^2} = \sqrt{0,277^2 + 0,169^2} = 0,325,$$

$$\boxed{S_D = 3,08 \geq S_{D,\min} = 1,5 \checkmark}$$

**Plausibilitätskontrolle:** Der Durchmesser  $d = 40 \text{ mm}$  liegt im erwarteten Bereich für ein 22-kW-Getriebe. Der Wellenabsatz ist mit  $S_D = 3,08$  *sicher* dauerfest – der pauschale Entwurf mit  $S_D = 4$  war leicht konservativ. Der *eigentliche Engpass* war die **Passfeder**: Sie versagt bei  $l = 45 \text{ mm}$  knapp und muss auf  $l = 50 \text{ mm}$  verlängert werden. Genau diese Längenkorrektur  $l' = l - b$  (die runden Enden tragen nicht) ist die didaktische Pointe – ohne sie hätte man mit  $l' = 45$  fälschlich  $p_m = 81,0 \text{ N/mm}^2$  erhalten und die zu kurze Feder freigegeben.

## 10.2 Klausuraufgabe 2: Vorgespannte Schraubenverbindung

### Aufgabenstellung: Vorgespannte Schraubenverbindung

(ca. 26 Punkte, 45 min)

Der Deckel eines Druckbehälters wird über einen Flansch verschraubt; die Rechnung erfolgt stellvertretend *je Schraube*. Die Verbindung muss eine Dicht-/Klemmkraft  $F_{Kl} = 10 \text{ kN}$  sicherstellen und trägt eine axiale, schwellende Betriebskraft  $F_B = 12 \text{ kN}$  ( $0 \dots F_B$ ).

**Gegeben:** Schraubennachgiebigkeit  $\delta_S = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ mm/N}$ , Plattennachgiebigkeit  $\delta_T = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ mm/N}$ , Krafteinleitungsfaktor  $n = 0,5$ . Setzbetrag  $f_Z = 0,011 \text{ mm}$  (TB 8-10a). Anziehen mit messendem Drehmomentschlüssel, Anziehfaktor  $k_A = 1,6$ ; Reibung geölt  $\mu_G = \mu_K = 0,12$ .

**Schraubendaten Festigkeitsklasse 8.8** ( $R_{p0,2} = 640 \text{ N/mm}^2$ ). Spannkraften  $F_{sp}$  (TB 8-14,  $\mu_{ges} = 0,12$ ): M10  $\rightarrow 29,6 \text{ kN}$ , M12  $\rightarrow 43,1 \text{ kN}$ . Für M12:  $P = 1,75 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 10,863 \text{ mm}$ ,  $d_3 = 9,853 \text{ mm}$ ,  $A_s = 84,3 \text{ mm}^2$ ,  $d = 12 \text{ mm}$ .

**Teilaufgaben:**

- Welche Klemmkraft muss im Betrieb erhalten bleiben? (2 P)
- Berechne das Kraftverhältnis  $\Phi$  aus  $\delta_S$ ,  $\delta_T$  und  $n$ . (4 P)
- Bestimme den Setzkraftverlust  $F_Z$  und die Montagevorspannkraft  $F_{VM}$ . (6 P)
- Wähle eine geeignete Schraube (Klasse 8.8) über  $F_{sp} \geq F_{VM}$ . (4 P)
- Berechne das Anziehmoment  $M_A$  für die gewählte Schraube (bis  $F_{VM}$ ). (4 P)
- Führe die Nachweise: Montage  $\sigma_{red} \leq 0,9 R_{p0,2}$  und Dauerfestigkeit  $\sigma_a$ . (6 P)

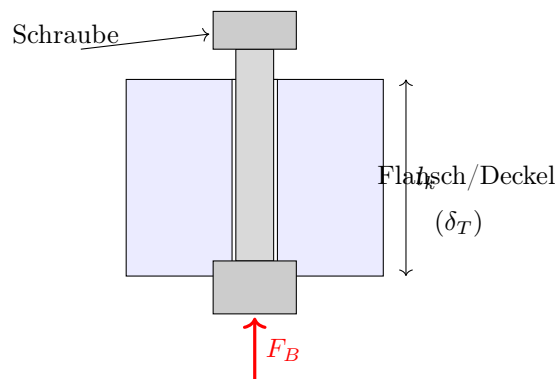


Abbildung 49: Systemskizze Deckelverschraubung (je Schraube): axiale Betriebskraft  $F_B$  wirkt aufklaffend auf die Trennfuge, die Schraube (Zugfeder  $\delta_S$ ) klemmt den Flansch (Druckfeder  $\delta_T$ ).

### Lösung

**1. Erforderliche Klemmkraft (a):** Damit die Trennfuge dicht bleibt und nicht aufklafft, muss im Betrieb  $F_{Kl} = 10 \text{ kN}$  als Restklemmkraft erhalten bleiben.

**2. Kraftverhältnis (b):**

$$\Phi_k = \frac{\delta_T}{\delta_S + \delta_T} = \frac{1,0}{4,0 + 1,0} = 0,20, \quad \Phi = n \cdot \Phi_k = 0,5 \cdot 0,20 = 0,10.$$

### 3. Setzkraftverlust und Montagevorspannkraft (c):

$$F_Z = \frac{f_Z}{\delta_S + \delta_T} = \frac{0,011}{5,0 \cdot 10^{-6}} = 2200 \text{ N} = 2,2 \text{ kN}.$$

$$F_{VM} = k_A [F_{Kl} + F_B(1 - \Phi) + F_Z] = 1,6 [10\,000 + 12\,000 \cdot 0,90 + 2200] = 1,6 \cdot 23\,000,$$

$$F_{VM} = 36\,800 \text{ N} = 36,8 \text{ kN}.$$

### 4. Schraubenwahl (d): Gesucht $F_{sp} \geq F_{VM} = 36,8 \text{ kN}$ .

$$\text{M10-8.8: } F_{sp} = 29,6 \text{ kN} < 36,8 \text{ kN (zu klein),} \quad \text{M12-8.8: } F_{sp} = 43,1 \text{ kN} > 36,8 \text{ kN} \checkmark$$

$\Rightarrow$  **gewählt: M12-8.8** (mit Reserve,  $43,1/36,8 = 1,17$ ).

### 5. Anziehmoment (e): Nur bis $F_{VM}$ vorspannen (nicht bis zur vollen Spannkraft):

$$M_A = F_{VM} [0,159 P + 0,577 \mu_G d_2 + \mu_K \cdot 0,65 d].$$

$$0,159 \cdot 1,75 + 0,577 \cdot 0,12 \cdot 10,863 + 0,12 \cdot 0,65 \cdot 12 = 0,278 + 0,752 + 0,936 = 1,966 \text{ mm}.$$

$$M_A = 36\,800 \cdot 1,966 = 72\,360 \text{ Nmm} \approx \mathbf{72,4 \text{ Nm}}.$$

### 6. Nachweise (f):

Montagebeanspruchung ( $\sigma_M = F_{VM}/A_s$ ; Gewindemoment  $M_G$  mit  $W_t = \pi d_0^3/12$ ):

$$\sigma_M = \frac{F_{VM}}{A_s} = \frac{36\,800}{84,3} = 436,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad d_0 = \frac{d_2 + d_3}{2} = 10,358 \text{ mm}.$$

$$M_G = F_{VM} [0,159 P + 0,577 \mu_G d_2] = 36\,800 \cdot 1,030 = 37\,920 \text{ Nmm},$$

$$W_t = \frac{\pi d_0^3}{12} = 290,9 \text{ mm}^3, \quad \tau_t = \frac{M_G}{W_t} = \frac{37\,920}{290,9} = 130,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3 \tau_t^2} = \sqrt{436,5^2 + 3 \cdot 130,4^2} = 491,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \leq 0,9 R_{p0,2} = 576 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \checkmark$$

Dauerfestigkeit (schwellend,  $F_{Bu} = 0$ ,  $F_{Bo} = F_B$ ):

$$F_a = \frac{F_{Bo} - F_{Bu}}{2} \cdot \Phi = \frac{12\,000}{2} \cdot 0,10 = 600 \text{ N}, \quad \sigma_a = \frac{F_a}{A_s} = \frac{600}{84,3} = 7,12 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

$$\sigma_A = 0,85 \left( \frac{150}{d} + 45 \right) = 0,85 \left( \frac{150}{12} + 45 \right) = 48,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad S_D = \frac{\sigma_A}{\sigma_a} = \frac{48,9}{7,12} = 6,87 \geq 1,2 \checkmark$$

**Plausibilitätskontrolle:** Restklemmkraft  $F_{Kl, \text{vorh}} = (F_{VM} - F_Z) - F_B(1 - \Phi) = 34\,600 - 10\,800 = 23\,800 \text{ N} > 0$  – die Fuge bleibt sicher geschlossen, sogar deutlich über den geforderten 10 kN. Alle Nachweise sind erfüllt; das kleine  $\Phi = 0,10$  hält die dynamische Zusatzkraft der Schraube winzig ( $\sigma_a$  nur  $7 \text{ N/mm}^2$ ) – genau der Sinn der elastischen Vorspannung.

## 10.3 Klausuraufgabe 3: Geschweißte Konsole mit Feder

Aufgabenstellung: Geschweißte Konsole mit Feder

(ca. 28 Punkte, 50 min)

Eine Konsole ist mit einer beidseitigen **Doppelkehlnaht** ( $a = 5 \text{ mm}$ , Nahthöhe  $h = 120 \text{ mm}$ ) symmetrisch an eine Wand geschweißt, Werkstoff **S235**, Bewertungsgruppe C. Am freien Ende, im Abstand  $e = 200 \text{ mm}$  von der Wand, greift eine dynamische Kraft an: Mittellast  $F_m = 9 \text{ kN}$ , Ausschlag  $F_a = \pm 5 \text{ kN}$ , Anwendungsfaktor  $K_A = 1,25$ .

**DVS-1612-Werte:** Biegung (senkrechte Nahtspannung) → Kerbfalllinie C, Exponent  $x = 11$  (S235). Schub am T-Stoß → Kerbfalllinie H,  $\tau_{zul, \kappa=-1} = 59 \text{ N/mm}^2$ . Formeln:

$$\sigma_{zul} = 150 \cdot 1,04^{-x} \cdot \frac{2(1 - 0,3\kappa)}{1,3(1 - \kappa)}, \quad \tau_{zul} = \tau_{zul, \kappa=-1} \cdot \frac{2(1 - 0,17\kappa)}{1,17(1 - \kappa)}.$$

Querschnittswerte der Doppelkehlnaht:  $A_w = 2 a h$ ,  $W_x = \frac{1}{3} a h^2$ . ( $t = 5 \text{ mm} \leq 10 \text{ mm} \Rightarrow$  Dickenbeiwert  $\beta = 1$ .)

**Feder:** An der Konsole hängt eine kaltgeformte zylindrische Schraubendruckfeder aus Draht **SH**, die eine größte statische Kraft  $F = 900 \text{ N}$  aufnimmt. Daten:  $d = 6 \text{ mm}$ ,  $D = 48 \text{ mm}$ ,  $n = 7$  federnde Windungen,  $G = 81\,500 \text{ N/mm}^2$ , freie Länge  $L_0 = 120 \text{ mm}$ , Grenzabmaß  $e_s = +0,035 \text{ mm}$ . Zugfestigkeit  $R_m = 2330 - 900 \lg d$  (SH),  $\tau_{zul} = 0,5 R_m$ ; Spannungsbeiwert  $k = (w + 0,5)/(w - 0,75)$ .

**Teilaufgaben:**

- (a) Lastextremwerte  $F_{max}$ ,  $F_{min}$  und Spannungsverhältnis  $\kappa$ . (4 P)
- (b) Querschnittswerte und Nennspannungen  $\sigma_{\perp}$ ,  $\tau_{\parallel}$  aus  $F_{max}$ . (6 P)
- (c) Zulässige Spannungen  $\sigma_{zul}$ ,  $\tau_{zul}$ . (5 P)
- (d) Interaktionsnachweis der Naht. Dauerfest? (3 P)
- (e) Federrate  $R$  und Federweg  $s$ . (4 P)
- (f) Schubspannung  $\tau$ , korrigierte Spannung  $\tau_k$ , Auslastung. (4 P)
- (g) Blocklänge  $L_c$ , Mindestabstand  $S_a$ , kleinste Länge  $L_n$  – geht die Feder bei  $F$  auf Block? (2 P)

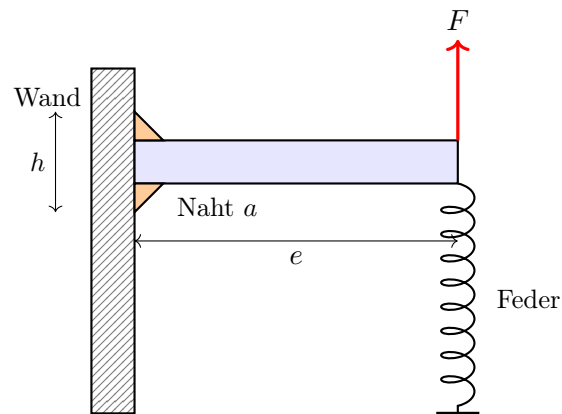


Abbildung 50: Systemskizze Schweißkonsole: die Kraft  $F$  im Abstand  $e$  erzeugt an der Doppelkehlnaht Biegung ( $\sigma_{\perp}$ ) und Schub ( $\tau_{\parallel}$ ); darunter die auf Druck belastete Schraubenfeder.

## Lösung

### 1. Lastextremwerte und $\kappa$ (a):

$$F_{max} = F_m + K_A F_a = 9 + 1,25 \cdot 5 = 15,25 \text{ kN}, \quad F_{min} = 9 - 1,25 \cdot 5 = 2,75 \text{ kN}.$$

$$\kappa = \frac{F_{min}}{F_{max}} = \frac{2,75}{15,25} = 0,180 \quad (\text{Schwellbereich, } 0 < \kappa < 1).$$

## 2. Querschnittswerte und Nennspannungen (b):

$$A_w = 2 a h = 2 \cdot 5 \cdot 120 = 1200 \text{ mm}^2, \quad W_x = \frac{1}{3} a h^2 = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 120^2 = 24000 \text{ mm}^3.$$

$$M_x = F_{max} \cdot e = 15250 \cdot 200 = 3050000 \text{ Nmm},$$
$$\sigma_{\perp} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{3050000}{24000} = 127,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \tau_{\parallel} = \frac{F_{max}}{A_w} = \frac{15250}{1200} = 12,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**3. Zulässige Spannungen (c):** (Biegung: Kerbfall C,  $x = 11$ ; Schub: Kerbfall H; jeweils  $\kappa = 0,180$ )

$$\sigma_{zul} = 150 \cdot 1,04^{-11} \cdot \frac{2(1 - 0,3 \cdot 0,180)}{1,3(1 - 0,180)} = 150 \cdot 0,650 \cdot 1,775 = 173,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\tau_{zul} = 59 \cdot \frac{2(1 - 0,17 \cdot 0,180)}{1,17(1 - 0,180)} = 59 \cdot 2,022 = 119,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

## 4. Interaktionsnachweis (d):

$$\left(\frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{zul}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\parallel}}{\tau_{zul}}\right)^2 = \left(\frac{127,1}{173,0}\right)^2 + \left(\frac{12,7}{119,3}\right)^2 = 0,540 + 0,011 = 0,551 \leq 1 \checkmark$$

Die Naht ist **dauerfest** (Auslastung  $\approx 55\%$ ); die Biegung dominiert klar, der Schubanteil ist bei dem großen Hebelarm  $e$  fast vernachlässigbar.

**5. Federrate und Federweg (e):** Wickelverhältnis  $w = D/d = 48/6 = 8$ .

$$R = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} = \frac{81500 \cdot 6^4}{8 \cdot 48^3 \cdot 7} = 17,05 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad s = \frac{F}{R} = \frac{900}{17,05} = 52,8 \text{ mm}.$$

## 6. Spannung und Auslastung (f):

$$\tau = \frac{8 F D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 900 \cdot 48}{\pi \cdot 6^3} = 509,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad k = \frac{w + 0,5}{w - 0,75} = \frac{8,5}{7,25} = 1,172,$$

$$\tau_k = k \cdot \tau = 1,172 \cdot 509,3 = 597,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Zulässige Spannung (SH,  $d = 6 \text{ mm}$ ):  $R_m = 2330 - 900 \lg 6 = 1629,7 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{zul} = 0,5 R_m = 814,8 \text{ N/mm}^2$ .

$$\frac{\tau_k}{\tau_{zul}} = \frac{597,1}{814,8} = 73,3\% < 100\% \checkmark$$

**7. Blocklänge und Mindestabstand (g):** kaltgeformt  $\Rightarrow n_t = n + 2 = 9$ ,  $d_{max} = d + e_s = 6,035 \text{ mm}$ :

$$L_c \approx n_t \cdot d_{max} = 9 \cdot 6,035 = 54,3 \text{ mm},$$

$$S_a = \left[0,0015 \cdot \frac{D^2}{d} + 0,1 d\right] \cdot n = \left[0,0015 \cdot \frac{48^2}{6} + 0,6\right] \cdot 7 = 1,176 \cdot 7 = 8,23 \text{ mm},$$

$$L_n = L_c + S_a = 54,3 + 8,23 = 62,5 \text{ mm}.$$

Länge unter der Betriebskraft  $F$ :  $L_2 = L_0 - s = 120 - 52,8 = 67,2 \text{ mm}$ .

$$L_2 = 67,2 \text{ mm} > L_n = 62,5 \text{ mm} \checkmark$$

Die Feder geht bei  $F = 900 \text{ N}$  **nicht auf Block** – es bleibt ein Sicherheitsabstand von  $L_2 - L_n = 4,7 \text{ mm}$  zur kleinsten zulässigen Länge.

**Plausibilitätskontrolle:** Der Nahtanschluss ist mit  $55\%$  ausgelastet, die Feder mit  $73\%$  – beide liegen im sinnvollen Auslegungsbereich mit Reserve für Toleranzen. Kontrolle der Blockspannung: bei voll zusammengedrückter Feder ( $s_c = L_0 - L_c = 65,7 \text{ mm}$ ) wäre  $\tau_c = 634 \text{ N/mm}^2 < \tau_{c,zul} = 0,56 R_m = 913 \text{ N/mm}^2$  – selbst der Blockzustand bliebe unkritisch. Beide Bauteile sind sachgerecht ausgelegt.

## 10.4 Zusammenfassung Kapitel 10

### Das Wichtigste aus Kapitel 10

- **Wellenaufgabe (Kap. 8+9+3):**  $T = 9550 P/n$  ( $P$  in kW!)  $\rightarrow$  Zahnkräfte  $\rightarrow$  Lagerreaktionen  $\rightarrow M_{b,\max} \rightarrow$  Vergleichsmoment  $M_v = \sqrt{M_b^2 + 0,75(\alpha_0 T)^2}$  ( $\alpha_0 = 0,7$ )  $\rightarrow$  Entwurf  $d = 2,17 \sqrt[3]{M_v/\sigma_{b,zul}}$   $\rightarrow$  Passfeder ( $l' = l - b!$ ) und gestaltfester Nachweis ( $K_{Db}$ -Kette,  $S_D = \sigma_{bGA}/\sigma_{ba} \geq 1,5$ ).
- **Schraubenaufgabe (Kap. 5):**  $\Phi = n \delta_T/(\delta_S + \delta_T) \rightarrow F_Z = f_Z/(\delta_S + \delta_T) \rightarrow F_{VM} = k_A[F_{Kl} + F_B(1 - \Phi) + F_Z] \rightarrow$  Schraube mit  $F_{sp} \geq F_{VM}$  (Reserve!)  $\rightarrow$  Nachweise  $\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3\tau_t^2} \leq 0,9 R_{p0,2}$  und  $S_D = \sigma_A/\sigma_a \geq 1,2$ .
- **Schweiß-/Federaufgabe (Kap. 4+7):** DVS 1612:  $F_{max/min}$  mit  $K_A \rightarrow \kappa = \sigma_{min}/\sigma_{max} \rightarrow$  Kerbfalllinie  $\rightarrow \sigma_{zul}, \tau_{zul} \rightarrow$  Interaktion  $(\sigma_{\perp}/\sigma_{zul})^2 + (\tau_{\parallel}/\tau_{zul})^2 \leq 1$ . Feder:  $R = Gd^4/(8D^3n)$ ,  $\tau_k = k \cdot 8FD/(\pi d^3)$ , Blocklänge  $L_c \approx n_t d_{max}$ ,  $L_2 > L_n$  prüfen.
- **Typische Fallen:**  $l' = l - b$  (rundstirnig);  $\Phi$  und  $F_Z$  nicht vergessen;  $W_t = 2W_b$ ;  $W_t = \pi d_0^3/12$  (Schraube, überelastisch);  $\kappa = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ ;  $G$  statt  $E$  (Feder);  $n$  statt  $n_t$  in  $R$ .
- **Merksatz:** In der Klausur entscheidet nicht die schwierigste Formel, sondern die saubere **Kette** – Skizze, Formel, Einheiten, Zwischenergebnis, Plausibilität. Und: *ein* scheitern der Nachweis (hier die Passfeder) ist kein Fehler, sondern das Signal für die Korrekturmaßnahme.

## 11 Formelsammlung kompakt

Dieses Kapitel fasst die zentralen Formeln aus Kapitel 1–9 als Spickzettel für die Wiederholung zusammen – ohne Herleitung, ohne Beispiele. Notation identisch zu den Fachkapiteln.

### Achtung!

Drei Stolpersteine der Notation, die beim schnellen Blättern verwirren können:

- Das Zeichen  $R$  hat je nach Kapitel drei Bedeutungen: **Normzahlreihe**  $R_{10}$  (Kap. 1), **Spannungsverhältnis**  $R = \sigma_u/\sigma_o$  (Kap. 3) und **Federrate**  $R$  (Kap. 7). Beim Schweißnachweis (Kap. 4) heißt das Spannungsverhältnis deshalb  $\kappa$ .
- $K_A$  (großes K) ist der **Anwendungsfaktor** für Stöße im Betrieb;  $k_A$  (kleines k) ist der **Anziehungsfaktor** der Schraubenmontage – zwei völlig verschiedene Größen!
- Die Mindestsicherheit  $S_{D,\min}$  ist bauteilabhängig: 1,5 bei Wellen (Kap. 3/8), 1,2 bei Schrauben (Kap. 5). Lerne die Zahl immer zusammen mit ihrem Kontext.

## Kap. 1: Einführung, Normen und Normzahlen



**Stufensprung** (DIN 323, TB 1-16) und abgeleitete Reihe:

$$\boxed{q_r = \sqrt[r]{10}} \quad q_{r/p} = q_r^p$$

**Geometrisch ähnliche Baureihen** (Längenmaßstab  $q_L$ ):

$$q_A = q_L^2 \quad q_V = q_L^3 \quad q_F = q_L^2 \text{ (gleiche Spannung)} \quad q_P = q_L^2 \text{ (gleiche Umfangsgeschw.)}$$

| Reihe | $R_5$ | $R_{10}$ | $R_{20}$ | $R_{40}$ |
|-------|-------|----------|----------|----------|
| $q_r$ | 1,585 | 1,259    | 1,122    | 1,059    |

## Kap. 2: Toleranzen, Passungen und Oberflächen

**Grenzmaße:**  $G_{oB} = N + ES$ ,  $G_{uB} = N + EI$  (Bohrung);  $G_{oW} = N + es$ ,  $G_{uW} = N + ei$  (Welle). **Maßtoleranz:**

$$\boxed{T = G_o - G_u} \quad T_B = ES - EI \quad T_W = es - ei \quad ES = EI + IT, \quad es = ei + IT$$

**Passung** ( $P = I_B - I_W$ ), Höchst-/Mindestpassung, Passtoleranz:

$$\boxed{P_o = ES - ei} \quad \boxed{P_u = EI - es} \quad P_T = P_o - P_u = T_B + T_W$$

| Passungsart      | Bedingung             | Kennwerte                              |
|------------------|-----------------------|----------------------------------------|
| Spielpassung     | $P_o > 0, P_u \geq 0$ | $S_o = P_o, S_u = P_u$                 |
| Übergangspassung | $P_o \geq 0, P_u < 0$ | mal Spiel, mal Übermaß                 |
| Übermaßpassung   | $P_o \leq 0, P_u < 0$ | $\ddot{U}_o = -P_u, \ddot{U}_u = -P_o$ |

**Rauheits-Faustformel:**

$$\boxed{R_z \leq k \cdot T}$$

$k \approx 0,5$  (keine bes. Anford.),  $0,25$  (gering),  $0,1$  (hoch),  $0,05$  (sehr hoch).  $R_a \approx \frac{1}{3} \dots \frac{1}{7} R_z$  (nur Erfahrungswert, keine feste Formel).

## Kap. 3: Festigkeitsberechnung

**Schwingspiel-Kenngrößen:**

$$\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} \quad \boxed{\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2}} \quad R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$$

| Bereich          | $R$      | $\sigma_m$     | Lastfall (Bach) |
|------------------|----------|----------------|-----------------|
| ruhend           | $R = 1$  | $= \sigma_o$   | I               |
| schwellend       | $R = 0$  | $= \sigma_o/2$ | II              |
| wechselnd (rein) | $R = -1$ | $= 0$          | III             |

| Beanspr.  | Nennsp.   | $A/W$ (Kreis $d$ ) |
|-----------|-----------|--------------------|
| Zug/Druck | $F/A$     | $A = \pi d^2/4$    |
| Biegung   | $M_b/W_b$ | $W_b = \pi d^3/32$ |
| Torsion   | $T/W_t$   | $W_t = \pi d^3/16$ |
| Abscheren | $F_s/A$   | $A = \pi d^2/4$    |

**Vergleichsspannung** – GEH (zäh) bzw. NH (spröde):

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2} \quad (\text{GEH}) \quad \sigma_v = \frac{1}{2} \left[ \sigma_b + \sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_t^2} \right] \quad (\text{NH})$$

Bei unterschiedlichem Lastfall:  $\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3(\alpha_0 \tau_t)^2}$ ;  $\alpha_0 \approx 0,7$  (Biegung wechselnd/Torsion ruhend), 1,0 (gleicher Lastfall), 1,5 (Biegung ruhend/Torsion wechselnd).

**Statische Sicherheiten:**

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{\max}} \geq S_{F,\min} \quad S_B = \frac{R_m}{\sigma_{\max}} \geq S_{B,\min}$$

**Faustformeln Wechselfestigkeit** (DIN 743, Rundstahl):  $\sigma_{bW} \approx 0,5R_m$ ,  $\sigma_{zdW} \approx 0,4R_m$ ,  $\tau_{tW} \approx 0,3R_m$ .

| Mindestsicherheit   | $S_{F,\min}$ | $S_{B,\min}$ | $S_{D,\min}$ |
|---------------------|--------------|--------------|--------------|
| Walz-/Schmiedestahl | 1,5          | 2,0          | 1,5          |

**Formzahl / Kerbwirkungszahl:**  $\alpha_k = \sigma_{\max}/\sigma_n$ ,  $\beta_k = \sigma_W/\sigma_{GW}$ ,  $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$ .

**Konstruktionsfaktor und Gestaltwechselfestigkeit:**

$$K_{Db} = \frac{\beta_{kb}}{K_g} + \frac{1}{K_{Os}} - \frac{1}{K_V} \quad \sigma_{bGW} = \frac{\sigma_{bW}}{K_{Db}}$$

**Gestaltausschlagfestigkeit** je Überlastungsfall: Fall 1 ( $\sigma_m = \text{const}$ ):  $\sigma_{bGA} = \sigma_{bGW} - \psi_\sigma \sigma_{mn}$ ; Fall 2 ( $R = \text{const}$ , Regelfall):  $\sigma_{bGA} = \sigma_{bGW}/(1 + \psi_\sigma \sigma_{mn}/\sigma_{ba})$ ; Fall 3 ( $\sigma_u = \text{const}$ ):  $\sigma_{bGA} = [\sigma_{bGW} - \psi_\sigma(\sigma_{mn} - \sigma_{ba})]/(1 + \psi_\sigma)$ . Bei  $\sigma_m = 0$ :  $\sigma_{bGA} = \sigma_{bGW}$  (alle Fälle gleich).

**Dynamischer Nachweis:**

$$S_D = \frac{\sigma_{bGA}}{\sigma_{ba}} \geq S_{D,\min} = 1,5 \quad \frac{1}{S_D} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bGA}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ta}}{\tau_{tGA}}\right)^2}$$

## Kap. 4: Schweißverbindungen

**a-Maß-Grenzen:**  $3 \text{ mm} \leq a \leq 0,7 t_{\min}$  und  $a \geq \sqrt{t_{\max}} - 0,5$ . **Wirksame Nahtlänge** (nicht umlaufend):

$$l_{eff} = L - 2a$$

**Rechnerische Nahtfläche:**

$$A_w = a \cdot l \quad (\text{Doppelkehlnaht: } A_w = 2 a l)$$

| Lastfall          | Nennspannung                         | Querschnittswert        |
|-------------------|--------------------------------------|-------------------------|
| T-Stoß, Zug/Druck | $\sigma_\perp = F_z/(2ah)$           | $A_w = 2ah$             |
| T-Stoß, Biegung   | $\sigma_\perp = M_x/W_x$             | $W_x = \frac{1}{3}ah^2$ |
| T-Stoß, Schub     | $\tau_\parallel = F_y/(2ah)$         | $A_w = 2ah$             |
| Rundnaht, Zug     | $\sigma_\perp = F_z/(a\pi d)$        | –                       |
| Rundnaht, Torsion | $\tau_{\parallel t} = T/(2a\pi r^2)$ | –                       |

**Interaktionsgleichung** (Alternative zur Vergleichsspannung  $\sigma_{wv} = 0,5(\sigma_{\perp} + \sqrt{\sigma_{\perp}^2 + 4\tau_k^2})$ ):

$$\left(\frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{w,zul}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\parallel}}{\tau_{w,zul}}\right)^2 \leq 1$$

**Spannungsverhältnis** (Vorzeichen beachten!):

$$F_{max} = F_m + K_A F_a \quad F_{min} = F_m - K_A F_a \quad \kappa = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{F_{min}}{F_{max}}$$

**Zulässige Nahtspannung nach DVS 1612** ( $x$  = Kerbfallexponent, TB 6-12c):

$$\sigma_{zul} = 150 \frac{N}{mm^2} \cdot 1,04^{-x} \cdot \frac{2(1 - 0,3\kappa)}{1,3(1 - \kappa)} \quad \tau_{zul} = \tau_{zul,\kappa=-1} \cdot \frac{2(1 - 0,17\kappa)}{1,17(1 - \kappa)}$$

**Dickenbeiwert** ( $t > 10 \text{ mm}$ ):  $\beta = (10 \text{ mm}/t_{max})^{0,1}$ , sonst  $\beta = 1$ .

## Kap. 5: Schraubenverbindungen

**Steigungswinkel:**  $\tan \varphi = P_h/(d_2\pi)$ . Spannungsquerschnitt  $A_s = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d_2+d_3}{2}\right)^2$ . **Festigkeitsklasse**  $x.y$ :  $R_m = x \cdot 100$ ,  $R_{p0,2} = \frac{y}{10} R_m$ .

**Anziehdrehmoment:**

$$M_A = F_{VM} \left[ 0,159P + 0,577\mu_G d_2 + \mu_K \frac{d_K}{2} \right] \approx 0,17 F_{VM} d$$

Selbsthemmung:  $\varphi < \rho'$ , mit  $\tan \rho' = 1,155\mu_G$ .

**Kraftverhältnis** am Verspannungsdreieck:

$$\Phi = n \cdot \Phi_k = n \cdot \frac{\delta_T}{\delta_S + \delta_T}$$

**Betriebskräfte:**  $F_{BS} = \Phi F_B$ ,  $F_{BT} = F_B(1 - \Phi)$ ,  $F_{Kl} = F_V - F_{BT}$ ,  $F_{Sges} = F_V + F_{BS}$ .  
Dynamisch:  $F_a = \frac{F_{Bo} - F_{Bu}}{2} \Phi$ . Setzkraftverlust  $F_Z = f_Z/(\delta_S + \delta_T)$ ,  $f_Z \approx 11 \mu\text{m}$ .

**Montagevorspannkraft:**

$$F_{VM} = k_A [F_{Kl} + F_B(1 - \Phi) + F_Z]$$

| Anziehverfahren                  | $k_A$   |
|----------------------------------|---------|
| streckgrenz-/drehwinkelgesteuert | 1,2–1,4 |
| Drehmomentschlüssel, messend     | 1,4–1,6 |
| Drehmomentschlüssel, geschätzt   | 1,6–2,5 |
| Schlagschrauber/von Hand         | 2,5–4,0 |

**Montagebeanspruchung** ( $W_t = \pi d_0^3/12$ , überelastisch!):

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3\tau_t^2} \leq 0,9R_{p0,2}$$

**Statische Sicherheit:**  $S_F = R_{p0,2}/\sigma_{red,B} \geq 1,0$ . **Dauerfestigkeit** (unabhängig von Festig-

keitsklasse!):

$$\sigma_a = \frac{F_a}{A_s} \leq \sigma_A \quad S_D = \frac{\sigma_A}{\sigma_a} \geq 1,2 \quad \sigma_A \approx 0,85 \left( \frac{150}{d} + 45 \right) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

**Flächenpressung:**  $p = (F_{sp} + \Phi F_B)/A_p \leq p_G$ . **Reibschluss (Querlast):**

$$F_{Kl, erf} = \frac{F_Q \cdot S_R}{\mu_T \cdot z \cdot q_F}$$

## Kap. 6: Niet-, Bolzen- und Stiftverbindungen

**Niet – Abscheren und Lochleibung** ( $m$ : Scherfugen/Niet,  $n$ : Nietzahl):

$$\tau_a = \frac{F}{m n A_0} \leq \tau_{a, zul}$$

$$\sigma_l = \frac{F}{n d_0 t_{\min}} \leq \sigma_{l, zul}$$

$\tau_{a, zul} \approx 0,6 R_m/S$ ;  $\sigma_{l, zul} \approx 1,5 R_m/S$ . Zweischnittig:  $t_{\min} = \min(t_1, 2t_2)$ .

**Bolzen –  $M_{b, \max}$  je Einbaufall** ( $t_S$ : Stangenkopf,  $t_G$ : eine Gabelwange):

Fall 1 (Spiel überall):  $M_{b, \max} = \frac{F(t_S + 2t_G)}{8}$  Fall 2 (Übermaß Gabel):  $M_{b, \max} = \frac{F t_S}{8}$

Fall 3 (Übermaß Stange):  $M_{b, \max} = \frac{F t_G}{4}$

Entwurf:  $d \geq k \sqrt{K_A F_{nenn} / \sigma_{b, zul}}$  ( $k = 1,6/1,1/1,1$ , gleitend  $1,9/1,4/1,2$ ). Nachweise:  $\sigma_b = K_A M_{b, nenn} / (0,1d^3)$ ,  $\tau_{\max} = \frac{4}{3} K_A F_{nenn} / A_S$ ,  $p = K_A F_{nenn} / A_{proj}$  ( $A_{proj}$  Gabel =  $2dt_G$ ).

| Belastung (bez. $R_m$ ) | $\sigma_{b, zul}$ | $\tau_{a, zul}$ | $p_{zul}$ |
|-------------------------|-------------------|-----------------|-----------|
| ruhend                  | $0,3R_m$          | $0,2R_m$        | $0,35R_m$ |
| schwellend              | $0,2R_m$          | $0,15R_m$       | $0,25R_m$ |
| wechselnd               | $0,15R_m$         | $0,1R_m$        | –         |

**Querstift** ( $d$  Stift,  $d_W$  Welle,  $s$  Nabenwand):

$$p_N = \frac{K_A T_{nenn}}{d s (d_W + s)} \quad p_W = \frac{6 K_A T_{nenn}}{d d_W^2} \quad (\text{Faktor 6, meist maßgebend!}) \quad \tau_a = \frac{4 K_A T_{nenn}}{d^2 \pi d_W}$$

## Kap. 7: Elastische Federn

**Federrate und Federungsarbeit** (lineare Kennlinie):

$$R = \tan \alpha = \frac{F_1 - F_2}{s_1 - s_2}$$

$$W = \frac{F \cdot s}{2} = \frac{R s^2}{2}$$

**Schaltungen:** Parallel  $R_{ges} = R_1 + R_2$  (steifer); Reihe  $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  (weicher).

**Geometrie Schraubendruckfeder:**  $w = D/d$  (mittl. Windungsdurchmesser  $D$ !),  $n_t = n + 2$  (kaltgeformt) bzw.  $n + 1,5$  (warmgeformt); in  $R, s, F, W$  geht stets  $n$  ein, nie  $n_t$ .

**Schubspannung:**

$$\tau = \frac{8FD}{\pi d^3}$$

$$\tau_k = k \cdot \tau$$

$$k = \frac{w + 0,5}{w - 0,75}$$

**Federrate/Weg/Windungszahl:**

$$R = \frac{Gd^4}{8D^3n} \quad n = \frac{Gd^4}{8D^3R_{soll}} \quad s = \frac{8D^3nF}{Gd^4} \quad G = 81\,500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ (Torsion, nicht } E\text{!)}$$

Vorwahl Drahtdurchmesser:  $d \approx k_1 \sqrt[3]{F \cdot D_e}$  ( $k_1 = 0,15\text{--}0,18$  je Drahtsorte).

**Blocklänge, Mindestabstand, Längen** (kaltgeformt,  $d_{max} = d + e_s$ ):

$$S_a = \left[ 0,0015 \frac{D^2}{d} + 0,1d \right] n \quad L_c \approx n_t d_{max} \quad L_n = L_c + S_a \quad L_0 = s_c + L_c$$

**Zulässige Spannung** statisch:  $\tau_{zul} = 0,5R_m(d)$ ; Blockspannung:  $\tau_{c,zul} = 0,56R_m(d)$ .  $R_m = 2330 - 900 \lg d$  (SH/DH),  $R_m = 1980 - 740 \lg d$  (SM/DM),  $R_m = 1720 - 660 \lg d$  (SL).

**Kap. 8: Achsen und Wellen****Torsionsmoment aus Leistung/Drehzahl** ( $P$  in kW!):

$$T \approx 9550 \cdot \frac{P}{n}$$

$$T_{eq} = K_A \cdot T_{nenn}$$

**Zahnkräfte:**  $F_t = 2T/d_0$ ,  $F_r = F_t \tan \alpha$ ,  $F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2}$ .

**Lagerreaktionen** (Einzelkraft  $F$  bei  $a$  von  $A$ ,  $b$  von  $B$ ,  $l = a + b$ ):

$$F_A = F \frac{b}{l} \quad F_B = F \frac{a}{l} \quad M_{b,max} = F \frac{ab}{l}$$

**Entwurf** (Fall 2, reine Torsion):  $d'_0 \approx 570 \sqrt[3]{K_A P / (n \tau_{tD})}$ .

**Vergleichsmoment** (Fall 1, Biegung+Torsion, GEH):

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + 0,75 (\alpha_0 T)^2} \quad \alpha_0 = \frac{\sigma_{b,zul}}{\varphi \tau_{t,zul}}, \quad \varphi = \sqrt{3}$$

Entwurfsdurchmesser:  $d_{erf} \geq \sqrt[3]{32M_v / (\pi \sigma_{b,zul})} = 2,17 \sqrt[3]{M_v / \sigma_{b,zul}}$ ,  $\sigma_{b,zul} = \sigma_{bW} / S_D$ ,  $S_D \approx 4$  (Entwurf).

**Gestaltfester Nachweis** – exakt die Kette aus Kap. 3 ( $K_{Db} \rightarrow \sigma_{bGW} \rightarrow \sigma_{bGA}$ ), hier für Biegung ( $W_b = \pi d^3 / 32$ ,  $\tau_{ta} = T_{eq} / W_t$ ,  $W_t = 2W_b$ ):

$$S_D = \frac{\sigma_{bGA}}{\sigma_{ba}} \geq 1,5 \quad \frac{1}{S_D} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bGA}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{ta}}{\tau_{tGA}} \right)^2}$$

**Kritische Drehzahl:**  $\omega_k = \sqrt{c/m}$ ;  $n_{kb} \approx k \cdot 946 \sqrt{1/f}$  [ $\text{min}^{-1}$ ,  $f$  in mm],  $k = 1$  (frei), 1,3 (eingespannt). Betriebsdrehzahl 10–20 % Abstand halten.

## Kap. 9: Welle-Nabe-Verbindungen

### Passfeder-Flächenpressung:

$$p_m = \frac{F_t}{h' l' n \varphi} = \frac{2T}{d h' l' n \varphi} \leq p_{zul}$$

$h' \approx 0,45 h$ ;  $l' = l - b$  (rundstirnig, Form A/C/E) bzw.  $l' = l$  (geradstirnig).  $\varphi \approx 0,75$  bei  $n = 2$ .

### Pressverband – Auslegungskette (7 Schritte):

$$F_{Rt} = S_H F_t, \quad F_t = \frac{2T}{D_F}, \quad p_{Fk} = \frac{F_{Rt}}{A_F \mu}, \quad A_F = D_F \pi l_F \quad (\text{erf. Fugenpressung})$$

$$K = \frac{E_A}{E_I} \left( \frac{1+Q_I^2}{1-Q_A^2} - \nu_I \right) + \frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A, \quad Z_k = \frac{p_{Fk} D_F K}{E_A} \quad (\text{kleinstes Haftmaß})$$

$$G \approx 0,8(R_{zA} + R_{zI}), \quad \ddot{U}_u = Z_k + G \quad (\text{Glättung, kl. Übermaß})$$

$$p_{Fg} \leq \frac{R_{eA}}{S_{FA}} \cdot \frac{1-Q_A^2}{\sqrt{3}}, \quad Z_g = \frac{p_{Fg} D_F K}{E_A}, \quad \ddot{U}_o = Z_g + G \quad (\text{Grenzpressung, gr. Übermaß})$$

$$PT = \ddot{U}_o - \ddot{U}_u = T_B + T_W, \quad T_B \approx 0,6 PT \quad (\text{Passtoleranz})$$

$$\vartheta_A \approx \vartheta + \frac{\ddot{U}_o + S_u}{\alpha_A D_F} \quad (\text{Fügetemperatur})$$

mit  $Q_A = D_F/D_{Aa}$  (Außenteil),  $Q_I = D_{Ii}/D_F$  (Innenteil, = 0 bei Vollwelle).

## 12 Prüfungstipps und Lösungsrezepte

### Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- deine Klausurvorbereitung in sinnvolle Phasen gliedern,
- in der Klausur selbst Zeit und Punkte klug einteilen,
- zu jedem Aufgabentyp aus Kapitel 2–9 sofort das passende Lösungsrezept abrufen,
- die häufigsten Fehlerquellen erkennen, bevor sie dir unterlaufen.

Die Kapitel 2 bis 9 haben dir das Handwerkszeug gegeben – Formeln, Nachweis Ketten, durchgerechnete Beispiele. Dieses letzte Kapitel bündelt es zu einer Landkarte: Was tust du wann, worauf achtest du zuerst, und welcher der acht Rechentypen steckt eigentlich hinter der Aufgabenstellung vor dir?

### 12.1 Strategie vor der Klausur

Maschinenelemente lernt man nicht durch Zuschauen, sondern durch Nachrechnen – in drei Stufen mit steigendem Schwierigkeitsgrad:

1. **Beispiele nachrechnen.** Arbeite jede **beispielbox** aus Kapitel 2–9 mit eigenem Blatt und Taschenrechner durch, *bevor* du die **loesungsbox** liest. Vergleiche Schritt für Schritt – nicht nur das Endergebnis.
2. **Mini-Aufgaben blind lösen.** Wenn die Beispiele sitzen, löse die Mini-Aufgaben am Kapitelende ohne Blick ins Kapitel. Hier zeigt sich, ob du die Formel wirklich abrufen kannst oder nur die Lösung im Kopf hattest.

3. **Klausuraufgaben unter Zeitdruck.** Erst zum Schluss: alte Klausuren oder Übungsaufgaben mit Stoppuhr, ohne Skript. Das trainiert genau die Situation, die am Prüfungstag zählt.

#### Achtung!

Wer direkt mit Stufe 3 einsteigt, verwechselt Wiedererkennen mit Können. Die Lösung nachzuvollziehen fühlt sich nach Verstehen an – ob du sie selbst produzieren kannst, zeigt sich erst beim Blattpapier ohne Vorlage.

## 12.2 Strategie in der Klausur

- **Erst sichten, dann rechnen.** Verschaff dir in den ersten Minuten einen Überblick über alle Aufgaben. Notiere spontan, welchem Rezept (siehe unten) jede Aufgabe zuzuordnen ist.
- **Punkte-Zeit-Verhältnis beachten.** Teile deine Zeit proportional zur Punktzahl ein, nicht proportional zur gefühlten Schwierigkeit. Eine 5-Punkte-Teilaufgabe verdient keine 20 Minuten, egal wie reizvoll sie ist.
- **Einheiten von Anfang an mitführen.** Rechne konsequent in N und mm (Ergebnis dann automatisch in  $\text{N/mm}^2$ ) und schreib jede Einheit mit – so fällt ein Faktor-1000-Fehler (kW vs. W, Nm vs. Nmm) sofort auf, statt sich unbemerkt durchzuschleppen.
- **Erst die Formel, dann die Zahlen.** Schreib jede Formel symbolisch hin, bevor du Werte einsetzt. Das macht Zwischenschritte für den Korrektor nachvollziehbar – und dir selbst fällt ein falsch übernommener Wert eher auf.
- **Plausibilität kontrollieren.** Am Ende jeder Teilaufgabe: Liegt die Größenordnung im plausiblen Bereich? Stimmt eine Rückrechnung? Passt das Vorzeichen zur physikalischen Erwartung? Diese eine Minute rettet öfter Punkte, als sie kostet.

## 12.3 Die Lösungsrezepte im Überblick

Jede Klausuraufgabe lässt sich einem der folgenden acht Grundtypen zuordnen. Erkennst du den Typ, kennst du bereits die Schrittfolge.

| Aufgabentyp                     | Lösungsrezept (Kurzform)                                                                                                                                                                                                                      | Kap. |
|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Passungsrechnung                | Funktion analysieren $\rightarrow$ Passungsart (TB 2-9) $\rightarrow$ Grenzabmaße (TB 2-4) $\rightarrow P_o/P_u/P_T \rightarrow$ Plausibilität                                                                                                | 2    |
| Dynamischer Festigkeitsnachweis | Werkstoffwerte auf $d$ umrechnen $\rightarrow$ Betriebsspannungen $\rightarrow$ Einflussfaktoren $\rightarrow K_{Db} \rightarrow \sigma_{bGW} \rightarrow \sigma_{bGA} \rightarrow S_D$ vs. $S_{D,\min}$                                      | 3    |
| Schweißnahtnachweis             | $F_{max}/F_{min}$ mit $K_A \rightarrow$ Nennspannung $\rightarrow \kappa = \sigma_{min}/\sigma_{max} \rightarrow$ Kerbfalllinie (TB 6-11) $\rightarrow \sigma_{zul}$ (TB 6-12c) $\rightarrow$ ggf. Dickenbeiwert $\beta \rightarrow$ Nachweis | 4    |
| Vorgespannte Schraube           | $\delta_S, \delta_T \rightarrow \Phi_k \rightarrow \Phi \rightarrow F_{KI}$ festlegen $\rightarrow F_Z$ (Setzverlust) $\rightarrow F_{VM} \rightarrow$ Schraube wählen $\rightarrow$ Nachweise (Montage, statisch, dynamisch, Pressung)       | 5    |
| Federauslegung                  | $d$ überschlägig (Gl. 10.42), auf Normwert runden $\rightarrow D, w = D/d \rightarrow \tau$ (ggf. mit $k$ ) $\rightarrow \tau_{zul}$ prüfen $\rightarrow$ Federrate/-weg/-arbeit                                                              | 7    |
| Wellenentwurf + Nachweis        | Torsionsmoment aus $P, n \rightarrow$ Entwurfsdurchmesser (pauschal $S_D \approx 4$ ) $\rightarrow$ Lagerkräfte, Biegemomentenverlauf $\rightarrow$ scharfer Nachweis nach Kap. 3-Kette ( $K_{Db}/K_{Dt}$ , GEH bei Kombination)              | 8    |
| Passfeder                       | $T$ bekannt $\rightarrow l' = l - b$ (Form A!) $\rightarrow p_m = 2T/(d h' l' n \varphi) \rightarrow$ Vergleich mit $p_{zul} \rightarrow$ Normlänge wählen                                                                                    | 9    |
| Pressverband                    | $p_{Fk}$ aus $S_H, \mu \rightarrow K, Z_k \rightarrow$ Glättung $G \rightarrow \ddot{U}_u \rightarrow$ Grenzpressung $\rightarrow \ddot{U}_o \rightarrow$ Passtoleranz $\rightarrow$ Fügetemperatur $\vartheta_A$                             | 9    |

### WICHTIG!

Die Rezepte sind Gerüste, keine Ersatz für Verständnis. Sitzt ein Zwischenschritt nicht, hilft das Nachschlagen in der zugehörigen **merke**-Box im jeweiligen Kapitel schneller als stures Auswendiglernen der Schrittliste.

## 12.4 Die 12 häufigsten Fehler

Diese Liste destilliert die Klausurfallen aus allen **warnung**-Boxen des Buchs – wer sie kennt, hat schon einen Großteil der typischen Punktabzüge vermieden.

1. **ES/EI und es/ei vertauschen.** Großbuchstaben gehören immer zur Bohrung, Kleinbuchstaben zur Welle (Kap. 2).
2. **T und P verwechseln.** Die Maßtoleranz  $T$  ist immer positiv (Betrag), die Passung  $P$  vorzeichenbehaftet (Kap. 2).
3. **Lastfall falsch bestimmt.** Entscheidend ist der Vorzeichenwechsel von  $\sigma_u$  zu  $\sigma_o$ , nicht bloß schwankende Last –  $R = 0$  ist schwellend, nicht wechselnd (Kap. 3).
4. **Falsche Spannung im Nenner von  $S_D$ .** Es steht immer die Ausschlagsspannung  $\sigma_{ba}$  dort, nie  $\sigma_o$  oder  $\sigma_{\max}$  (Kap. 3).
5. **a-Maß und Schenkellänge  $z$  verwechselt.** Gerechnet wird mit  $a \approx 0,7z$ , nicht mit der gezeichneten Kantenlänge  $z$  selbst (Kap. 4).
6.  **$A_s$  und  $A_3$  vertauscht.** Für Zug- und Vorspannkraft zählt der Spannungsquerschnitt  $A_s$ , nicht der kleinere Kernquerschnitt  $A_3$  (Kap. 5).
7. **Kraftverhältnis  $\Phi$  vergessen oder falsch angesetzt.**  $F_{BS} = \Phi F_B$  mit  $\Phi = n \cdot \Phi_k$  – die Schraube spürt nur einen Bruchteil der Betriebskraft (Kap. 5).



8.  **$G$  statt  $E$  eingesetzt.** Schraubenfedern werden auf Torsion beansprucht ( $G$ ), Blattfedern/Drehstäbe auf Biegung ( $E$ ) – Verwechslung verfälscht die Federrate um Faktor 2,5 (Kap. 7).
9. **Einheitenfalle bei  $T = 9550 \cdot P/n$ .**  $P$  muss in kW eingesetzt werden, sonst ist  $T$  um den Faktor 1000 zu groß (Kap. 8).
10.  **$W_b$  und  $W_t$  verwechselt.**  $W_t = 2 W_b$  – wer das durcheinanderbringt, hat die Torsionsspannung um Faktor 2 falsch (Kap. 8).
11.  **$l' = l - b$  bei rundstirnigen Passfedern vergessen.** Die runden Enden tragen nicht mit – wer mit voller Länge  $l$  rechnet, unterschätzt die Pressung (Kap. 9).
12. **Glättung  $G$  oder Einführspiel  $S_u$  beim Pressverband vergessen.** Ohne  $G$  wird die Passung zu knapp gewählt, ohne  $S_u$  die Fügetemperatur zu niedrig berechnet (Kap. 9).

## 12.5 Zusammenfassung Kapitel 12

### Das Wichtigste aus Kapitel 12

- **Lernreihenfolge:** Beispiele nachrechnen → Mini-Aufgaben blind → Klausuraufgaben unter Zeitdruck. Wiedererkennen ist nicht Können.
- **In der Klausur:** sichten, Zeit nach Punkten einteilen, Einheiten mitführen, erst Formel dann Zahlen, am Ende immer Plausibilität prüfen.
- **Acht Rezepte, ein Muster:** Größe/Kenngröße bestimmen → Kette aus Tabellenbuchwerten und Formeln abarbeiten → gegen zulässigen Wert prüfen → kontrollieren.
- **Die 12 Fehler** sind keine Ausnahmen, sondern Wiederholungstäter – wer die Liste kennt, liest jede neue Aufgabe automatisch kritischer.

Du hast jetzt alle acht Bausteine der Maschinenelemente 1 einmal komplett durchdacht – von der Passung bis zum Pressverband. Das ist mehr, als am Anfang des Semesters nach einem zusammenhängenden Stoffgebiet aussah. Die Rezepte in diesem Kapitel ersetzen nicht das Rechnen, aber sie nehmen dir die Unsicherheit, womit du anfangen sollst. Rechne die Beispiele noch einmal durch, vertrau der Schrittfolge – und geh mit der Ruhe in die Klausur, die aus echtem Verständnis kommt, nicht aus Auswendiglernen.