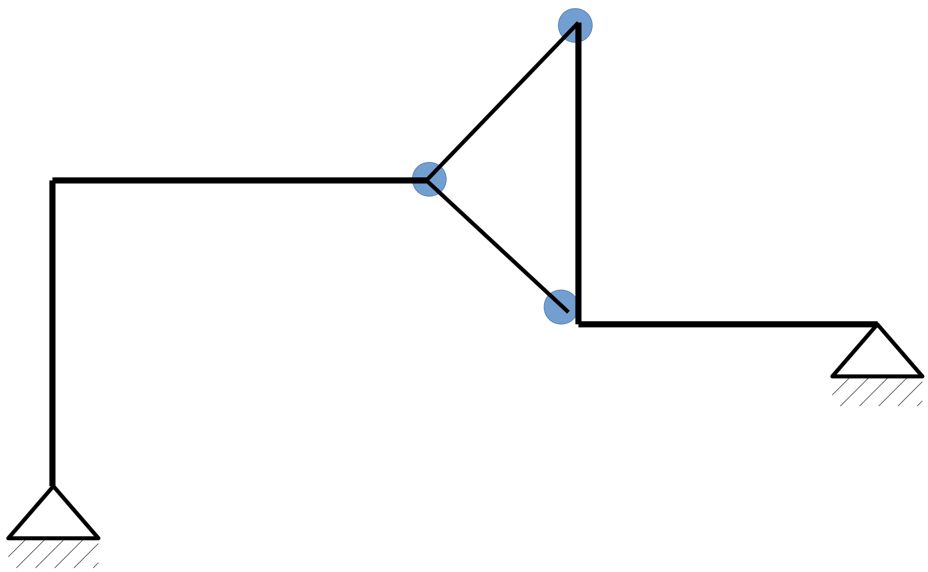
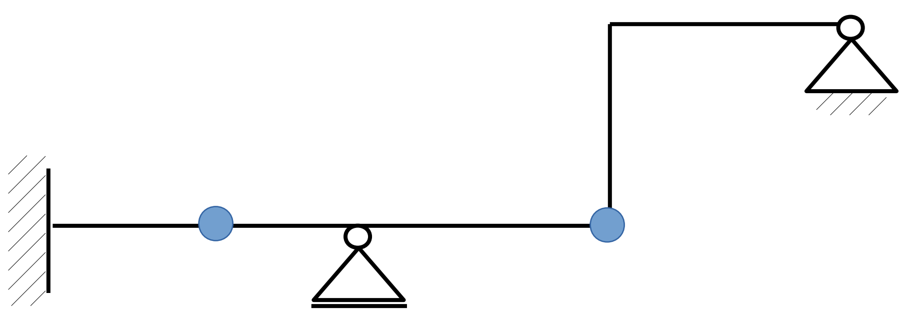
Crashkurs: Statik Teil 2
Thema: Statische Bestimmtheit, Fachwerke, Prinzip der virtuellen Arbeit

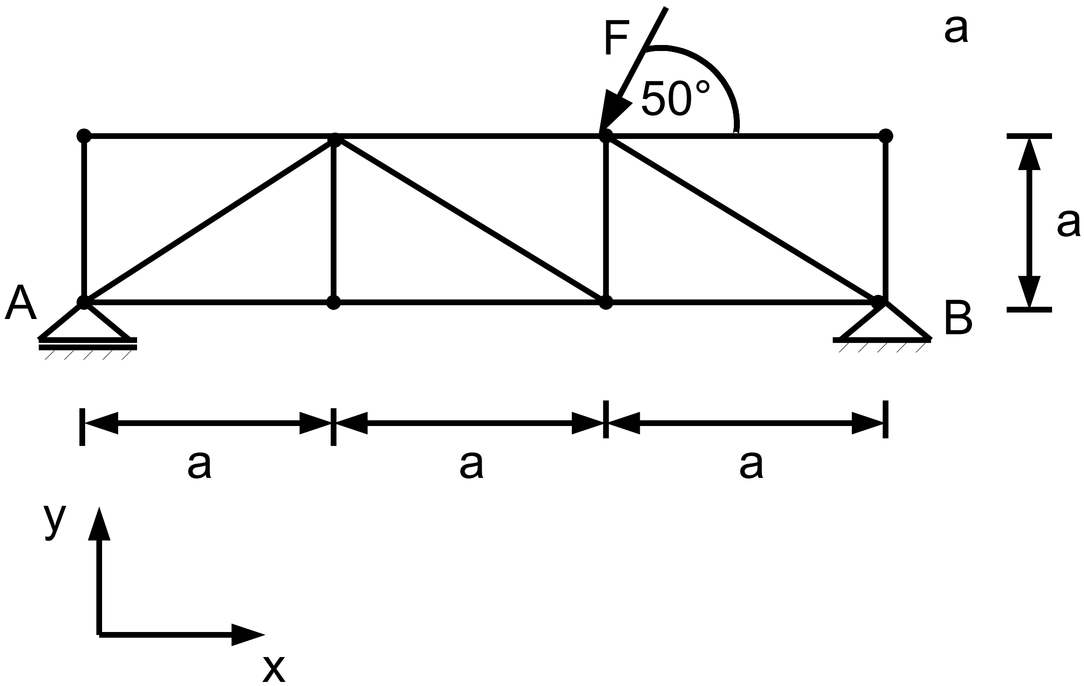
Aufgabe 1 zur statischen Bestimmtheit (Abzählformel)





Prüfe die obigen Systeme auf statische Bestimmtheit mittels der Abzählformel!

Aufgabe zum Knotenpunktverfahren



Es gilt a = 2m und F = 20 kN!

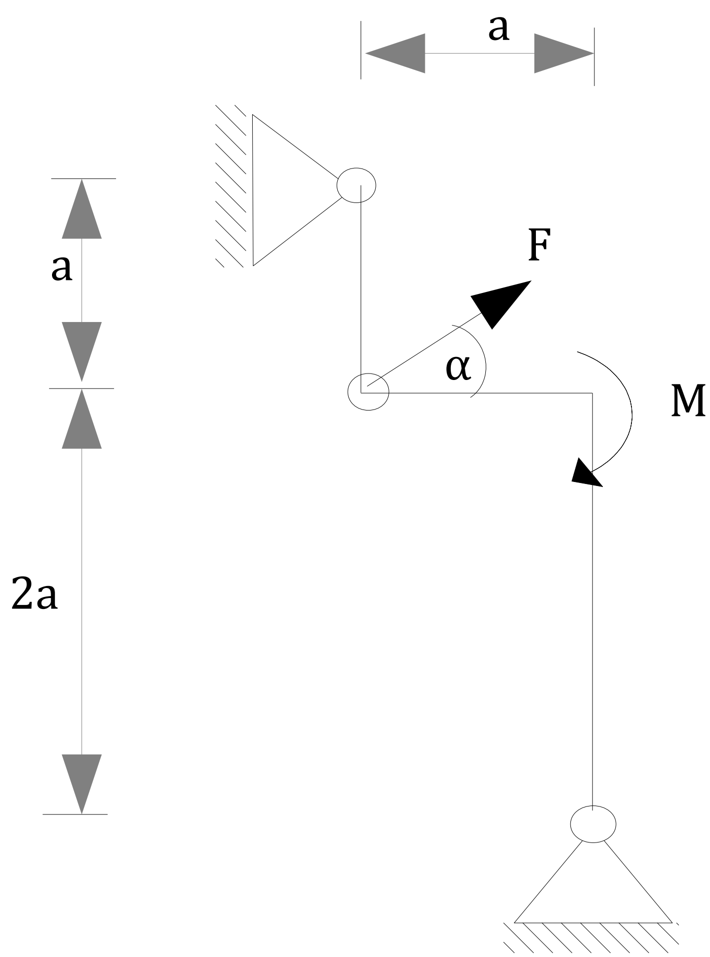
a) Prüfe das Fachwerk auf statische Bestimmtheit!

b) Bestimme die Auflagerkräfte!

c) Überprüfe das Fachwerk auf Nullstäbe!

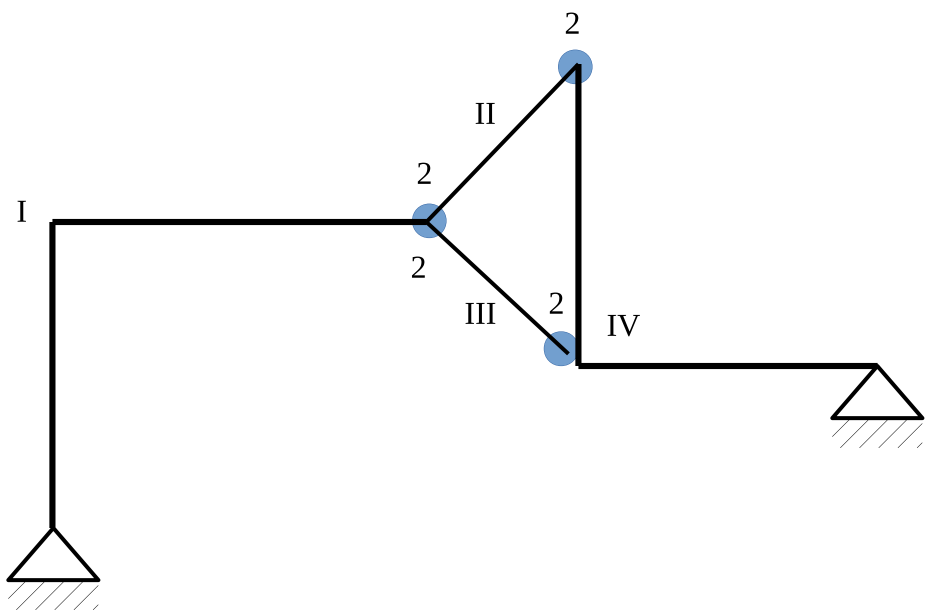
d) Bestimme die Stabkräfte mittels Knotenpunktverfahren!

Aufgabe zum Prinzip der virtuellen Arbeit (inkl. Polplan)



Gegeben: F, M = F a, α = 35°   Bestimme mittels Prinzip der virtuellen Arbeit die vertikale Auflagerkraft im Lager B.

Lösung der Aufgabe 1



Die Abzählformel lautet:

$$f = a + z - 3n$$

mit:

a = Anzahl der Auflagerreaktionen

z = Anzahl der Zwischenreaktionen (Gelenkkräfte)

n = Anzahl der Teilsysteme

In dem obigen System sind:

a = 4 Auflagerreaktionen

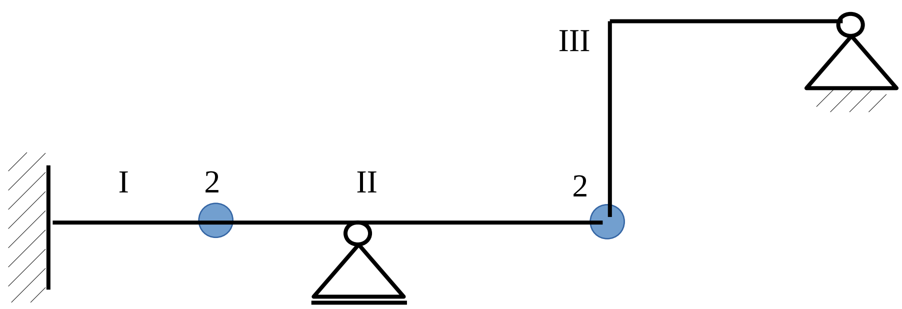
z = 8

n = 4

Einsetzen in die Abzählformel ergibt:

$$f = 4 + 8 - 3 \cdot 4 = 0$$

Das System ist statisch bestimmt!



Die Abzählformel lautet:

$$f = a + z - 3n$$

mit:

a = Anzahl der Auflagerreaktionen

z = Anzahl der Zwischenreaktionen (Gelenkkräfte)

n = Anzahl der Teilsysteme

In dem obigen System sind:

a = 6 Auflagerreaktionen

z = 4 Gelenkkräfte

n = 3 Teilsysteme

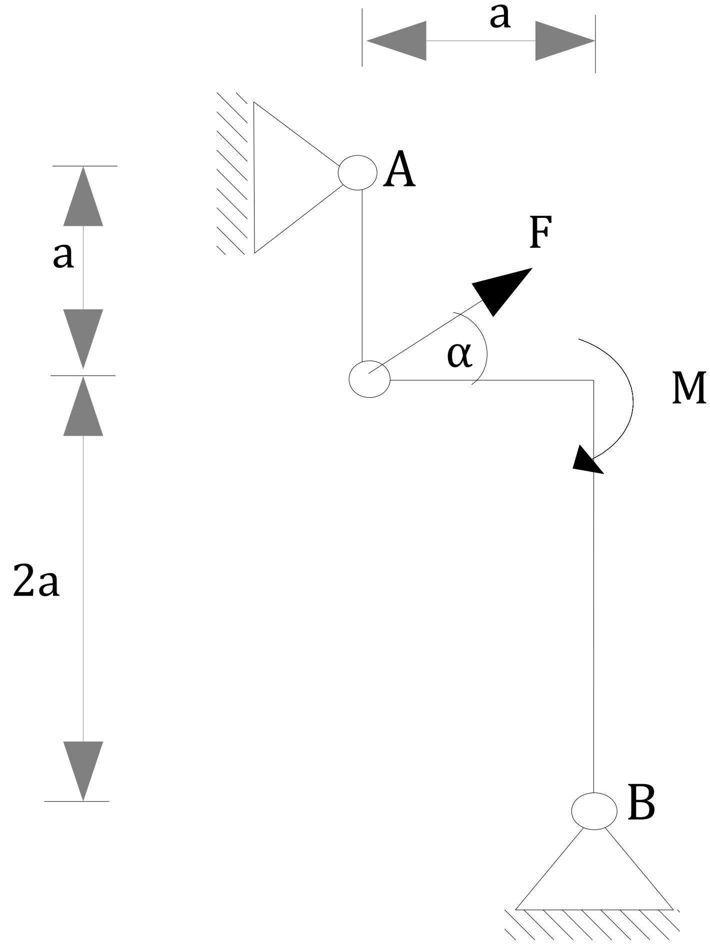
Einsetzen in die Abzählformel ergibt:

$$f = 6 + 4 - 3 \cdot 3 = 1$$

Das System ist statisch überbestimmt! Es sind mehr unbekannte Auflagerkräfte gegeben (10) als Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen (9). Das bedeutet, dass die unbekannten Kräfte nicht aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können. Es kann zum Beispiel das Kraftgrößenverfahren oder das Weggrößenverfahren angewendet werden, um die unbekannte Lagerkraft zu bestimmen.

Lösung der Aufgabe 2 siehe Folien zum Crashkurs Statik Teil 2

Lösung der Aufgabe 3

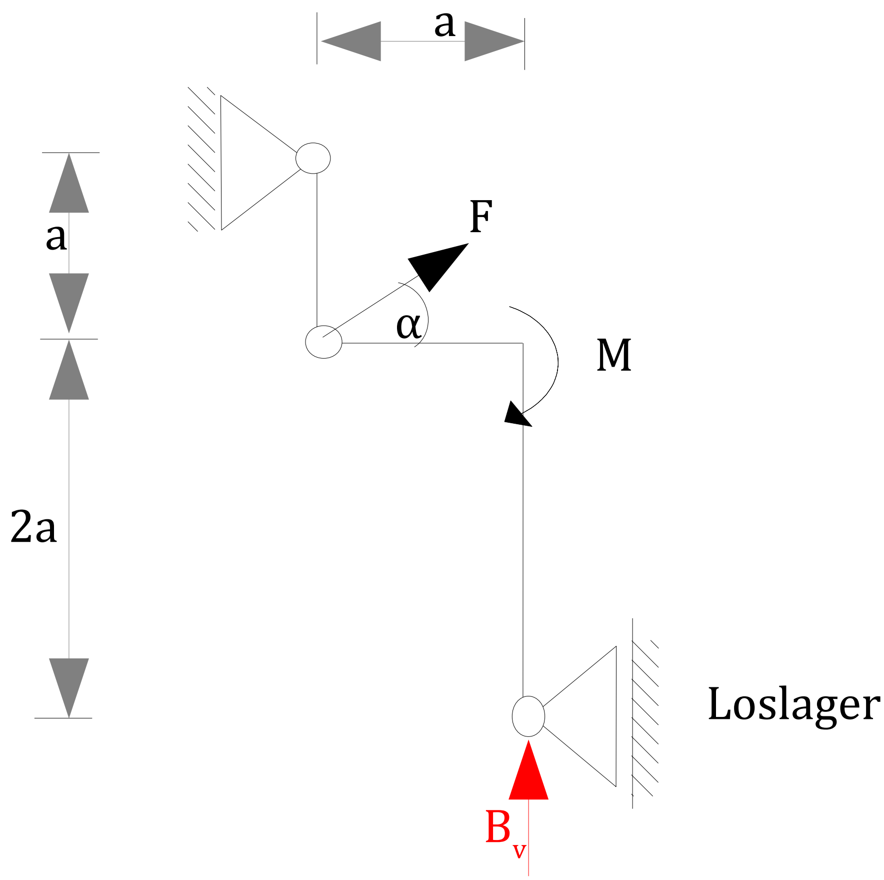


Gegeben: F, M = Fa, α = 35°

Bestimme mittels Prinzip der virtuellen Arbeit die **vertikale** Auflagerkraft im Lager B.

Lösung der Aufgabe:

Zur Bestimmung der vertikalen Auflagerkraft B lösen wir diese und tragen sie als äußere Kraft an. Das Lager in B darf demnach nur noch eine horizontale Kraft übertragen. Wir müssen also das Festlager durch ein Loslager ersetzen. Das Loslager wird so angeordnet, dass eine horizontale Auflagerkraft übertragen wird:



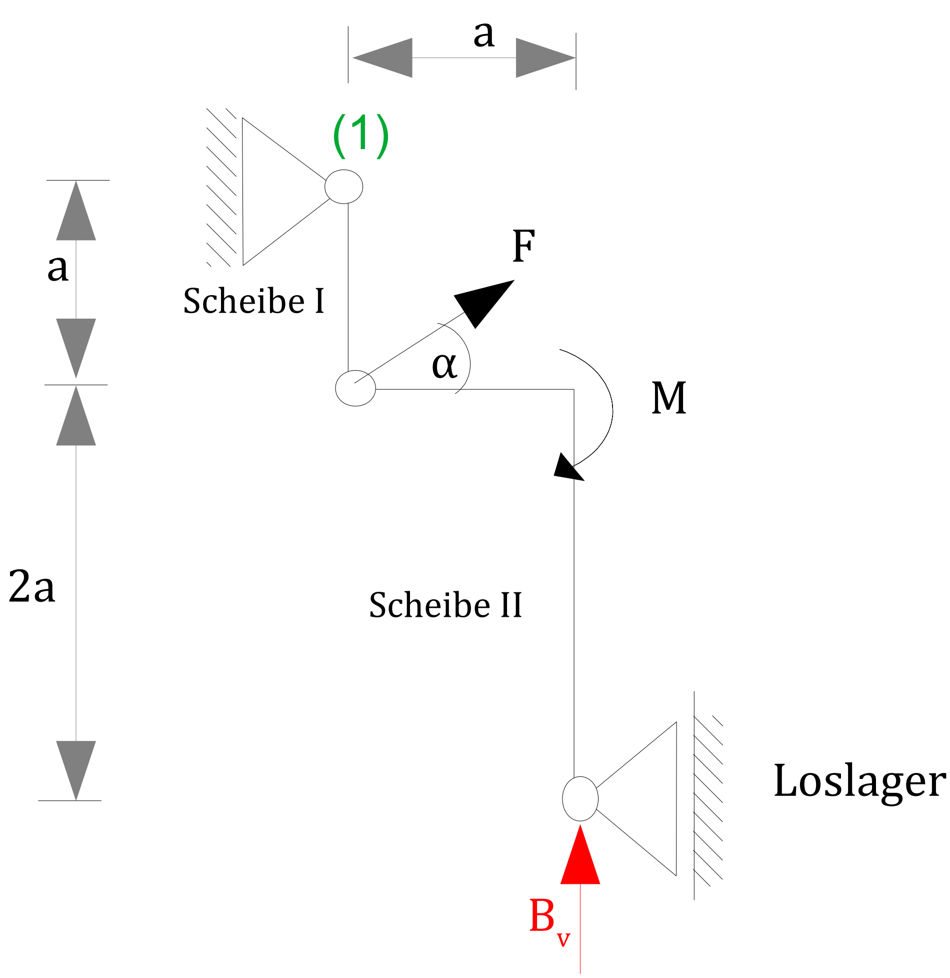
Als nächstes müssen wir den Polplan aufstellen, um die Hauptpole zu finden. Da ein Gelenk gegeben ist, handelt es sich hierbei um ein System aus zwei Scheiben. Demnach müssen wir zwei Hauptpole finden. Wir benötigen für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte ein kinematisches System. Das System ist dann kinematisch, wenn die zwei Hauptpole und der Nebenpol (Gelenk) widerspruchsfrei gefunden werden.

Wir wenden hierfür die **Polplanregeln** an:

Regel (2): Ein **Festlager** ist der **Hauptpol** (i) der dort angeschlossenen Scheibe.

Hier: Das **Festlager** A ist der **Hauptpol** (1) der dort angeschlossenen Scheibe I.

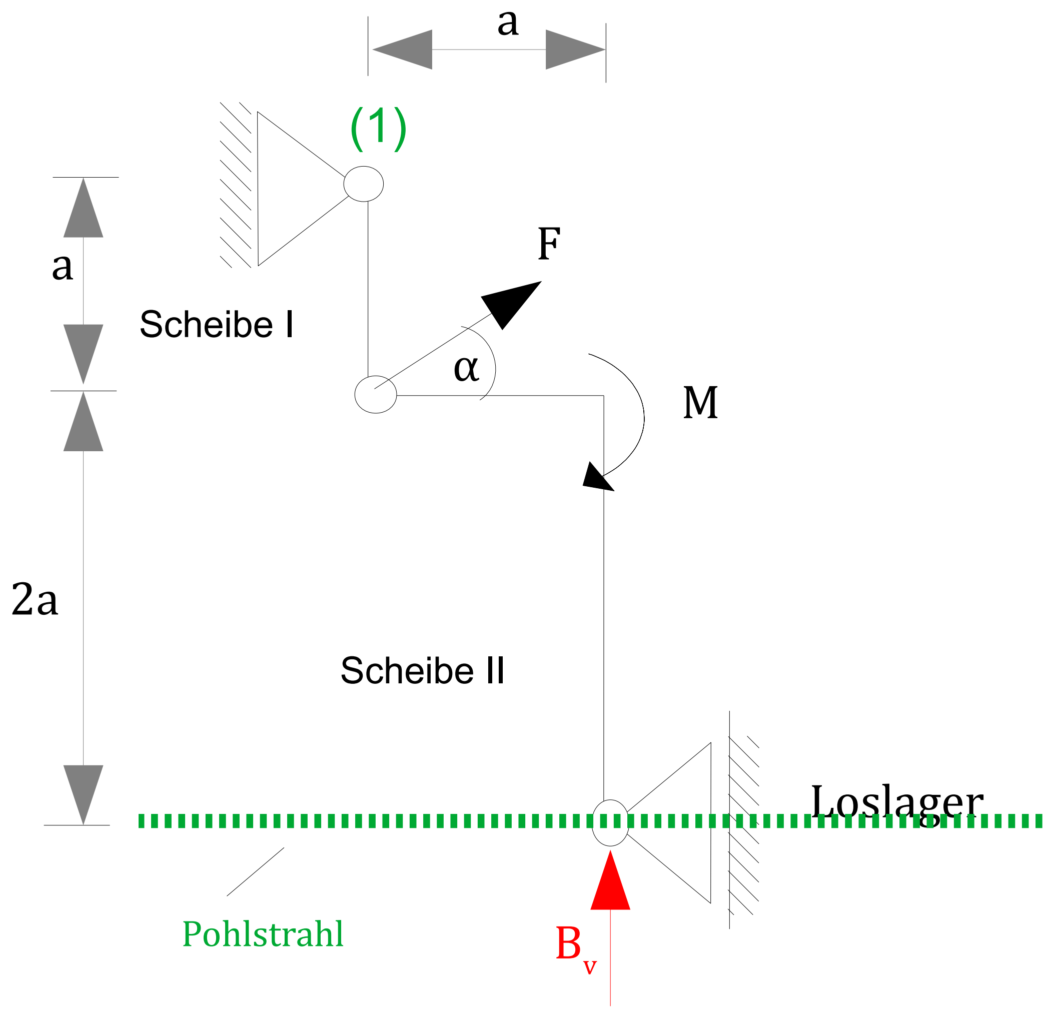
Hauptpol (1) ist demnach gefunden:



Regel (3): Der **Hauptpol (i)** einer Scheibe, die auf einem **verschieblichen Lager** gelagert ist, liegt auf einer Geraden (Polstrahl) **senkrecht** zur Bewegungsmöglichkeit dieses Lagers.

Hier: Der Hauptpol (2) einer Scheibe II, die auf einem verschieblichen Lager (=Loslager B) gelagert ist, liegt auf einer Geraden (Polstrahl) senkrecht zur Bewegungsmöglichkeit dieses Lagers.

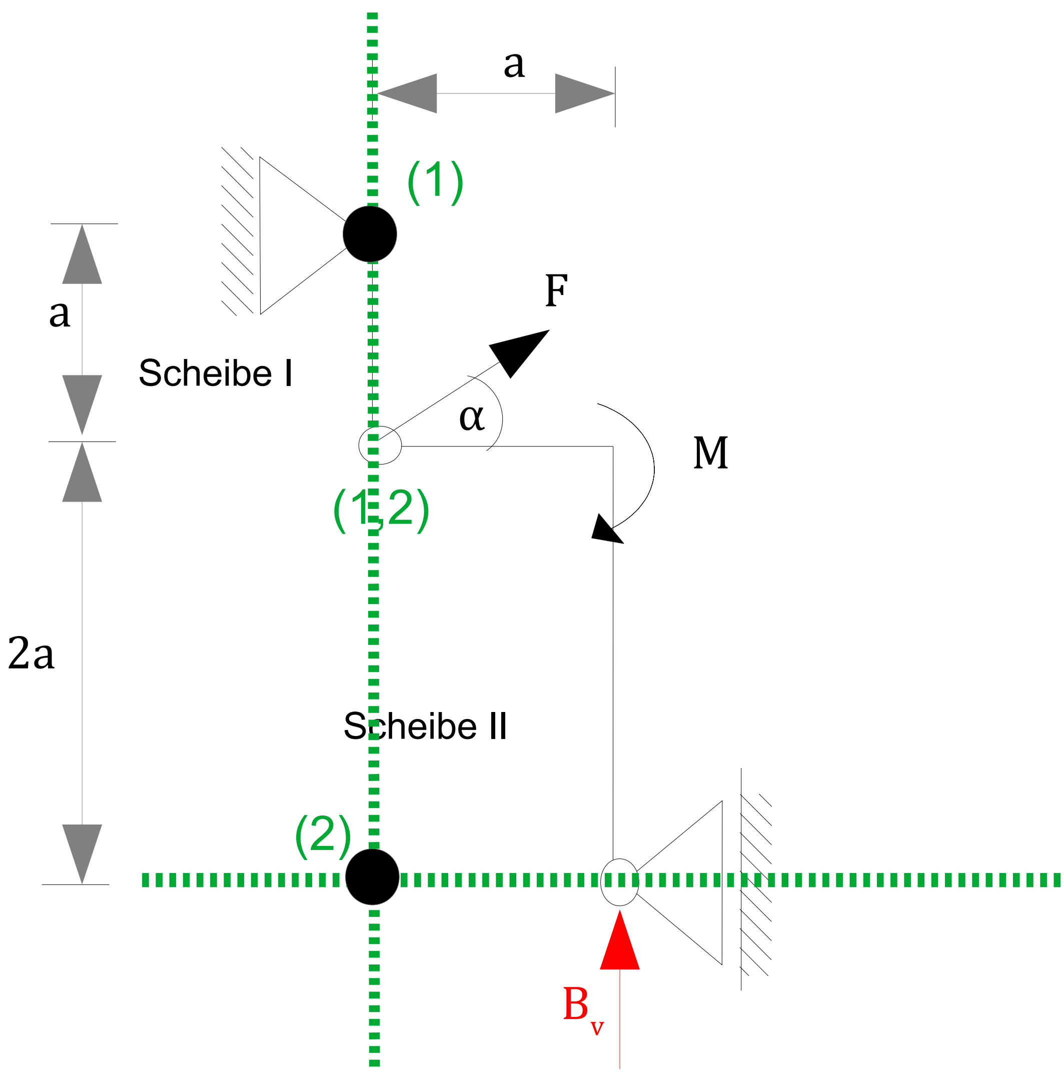
Das Lager ist vertikal verschieblich, der **Polstrahl** liegt senkrecht dazu, ist also eine horizontale Gerade:



Regel (4): Das **Gelenk**, welches zwei Scheiben miteinander verbindet, ist deren gemeinsamer **Nebenpol.** Der Nebenpol ist ein relativer Drehpol.

Regel (5): Der Nebenpol (i,j) liegt stets auf der **Verbindungslinie** der beiden Hauptpole (i) und (j).

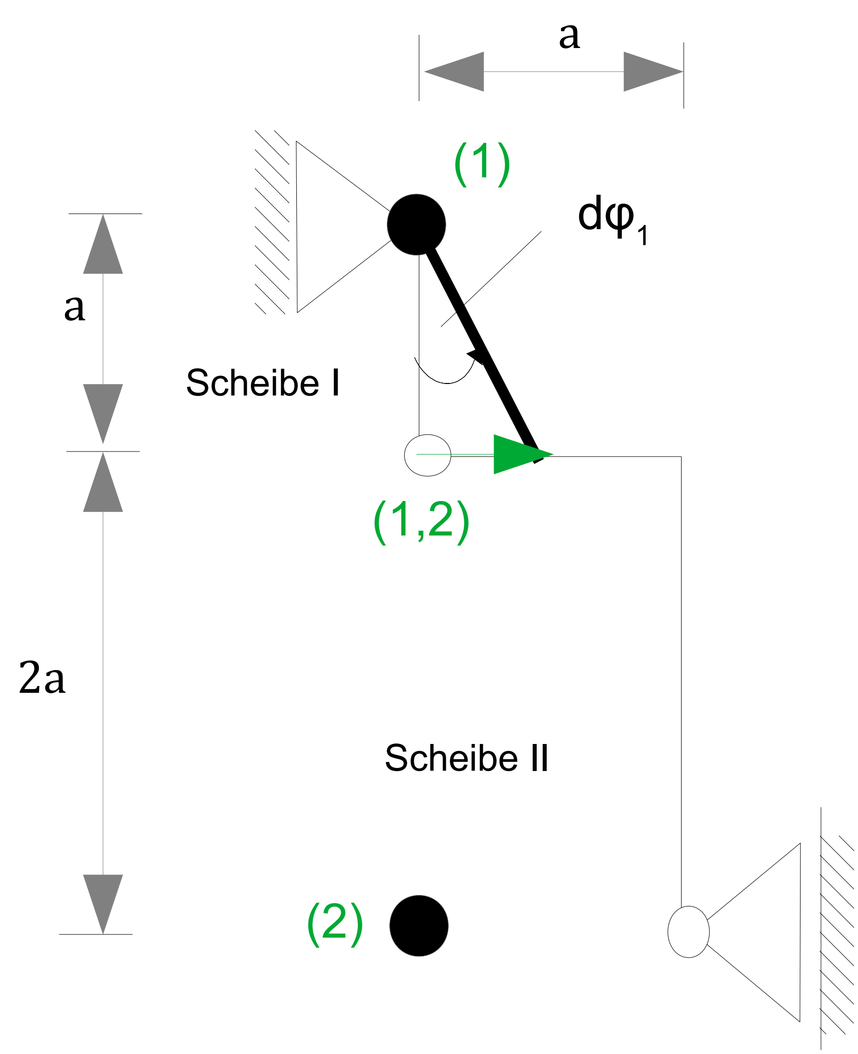
Hier: Das Gelenk verbindet die Beiden Scheiben I und II miteinander und ist deren gemeinsamer Nebenpol (1,2). Dieser liegt auf der Verbindungslinie der beiden Hauptpole (1) und (2). Zur Bestimmung von Hauptpol (2) ziehen wir also eine Gerade durch (1) und (1,2). Dort wo diese Gerade den Polstrahl schneidet (Regel 3) liegt der **Hauptpol (2)**:



Da alle Hauptpole und Nebenpole gefunden wurden, ist das System kinematisch, also verschieblich. Die Voraussetzung für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit ist damit gegeben.

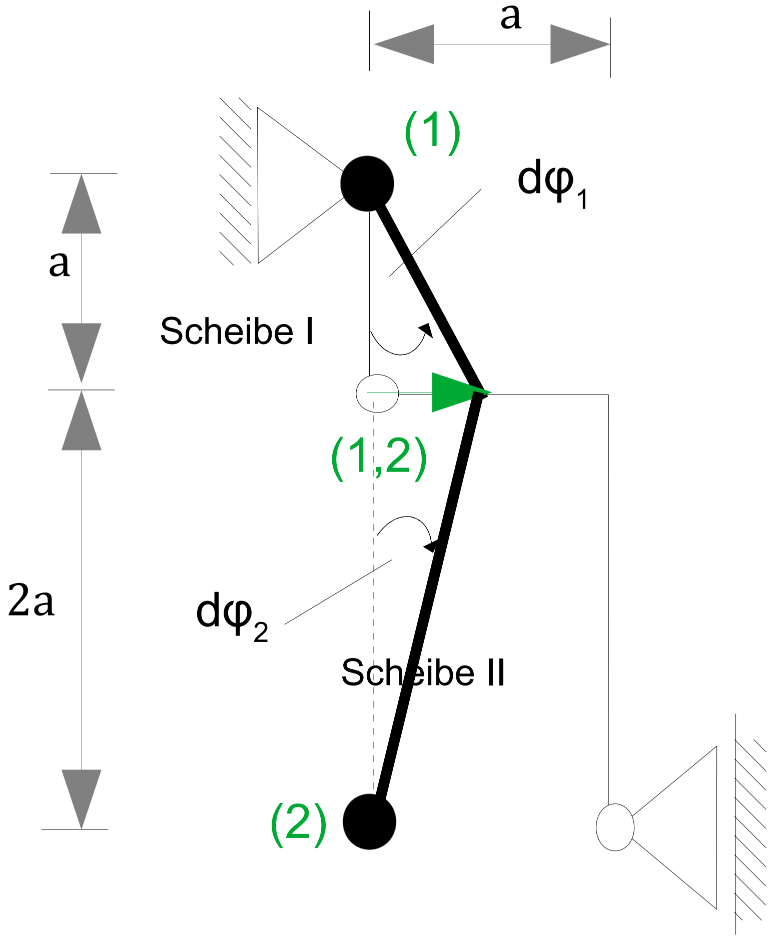
In einem nächsten Schritt wird die **Verschiebungsfigur** gezeichnet. Wir betrachten dazu einen der Hauptpole und legen eine virtuelle Verdrehung um dφ fest.

Betrachten wir den Hauptpol (1) und legen die Drehung um den Hauptpol (1) um dφ im Gegenuhrzeigersinn fest, so ergibt sich:



Infolge der Drehung um den Hauptpol (1) um $d\varphi_1$ verschiebt sich der Nebenpol senkrecht zur Scheibe I (Ausgangsposition).

Betrachten wir als nächstes den Hauptpol (2), so ist vor der Drehung der Scheibe I die Verbindung zum Gelenk vertikal. Danach sieht die Verbindung zum neuen Gelenkpunkt wie folgt aus:



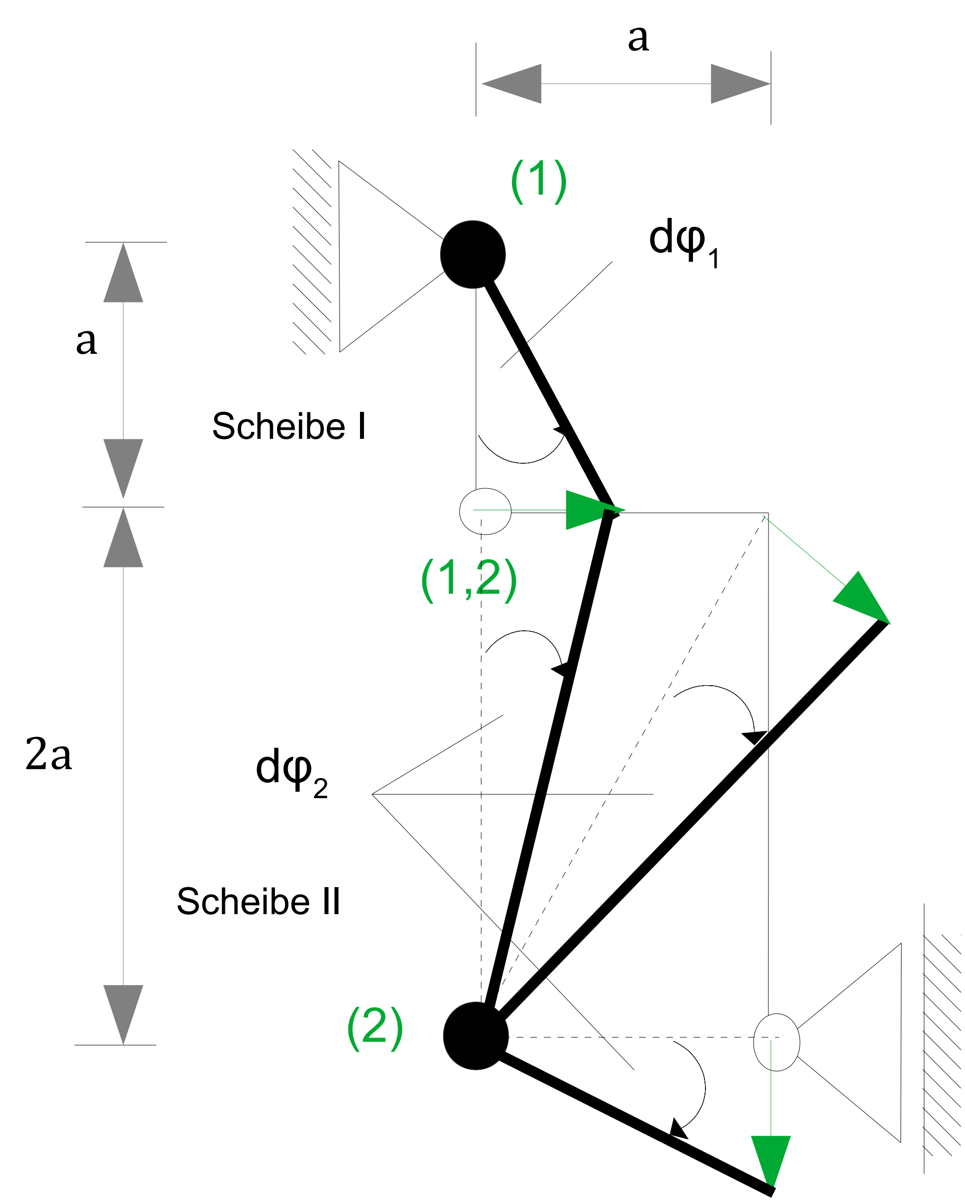
Die Drehung erfolgt hier um den Hauptpol (2) **im Uhrzeigersinn.**

Wichtig: Die Drehung um die Hauptpole ist aufgrund des Gelenks für beide Pole unterschiedlich.

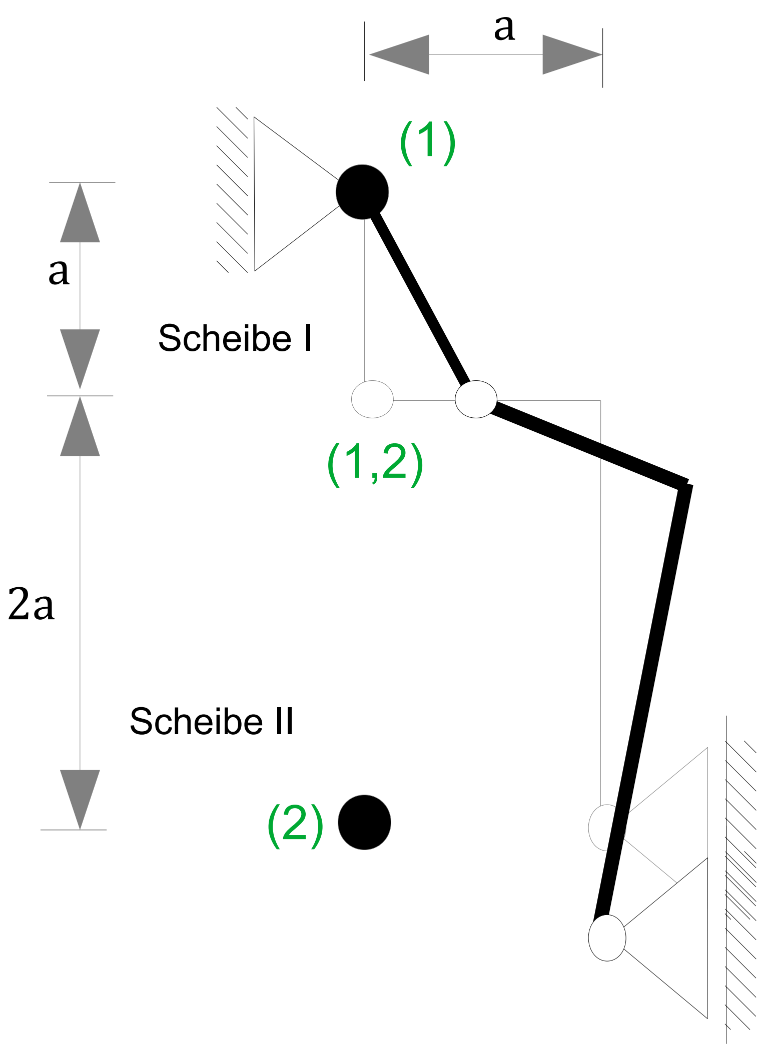
Die Scheibe II weist noch weitere Punkte auf, die einer Verschiebung unterliegen. Zum einen die Ecke und zum anderen das Loslager in B.

Zunächst wird vom Hauptpol (2) ausgehend eine gestrichelte Linie zur Ecke gezogen (Ausgangsposition vor der Drehung). Danach wird zur gestrichelten Linie eine dazu senkrechte Verschiebung eingezeichnet (grüner Pfeil) und der neue Verschiebungspunkt mit dem Hauptpol (2) verbunden (dicke schwarze Linie). Dies ist die Position der Ecke nach der Drehung.

Danach betrachten wir das Loslager B und ziehen eine gestrichelte Linie vom Hauptpol (2) zum Loslager B. Danach wird zur gestrichelten Linie eine dazu senkrechte Verschiebung eingezeichnet und der neue Verschiebungspunkt mit dem Hauptpol (2) verbunden. Dies ist die neue Position des Loslagers B nach der Drehung:



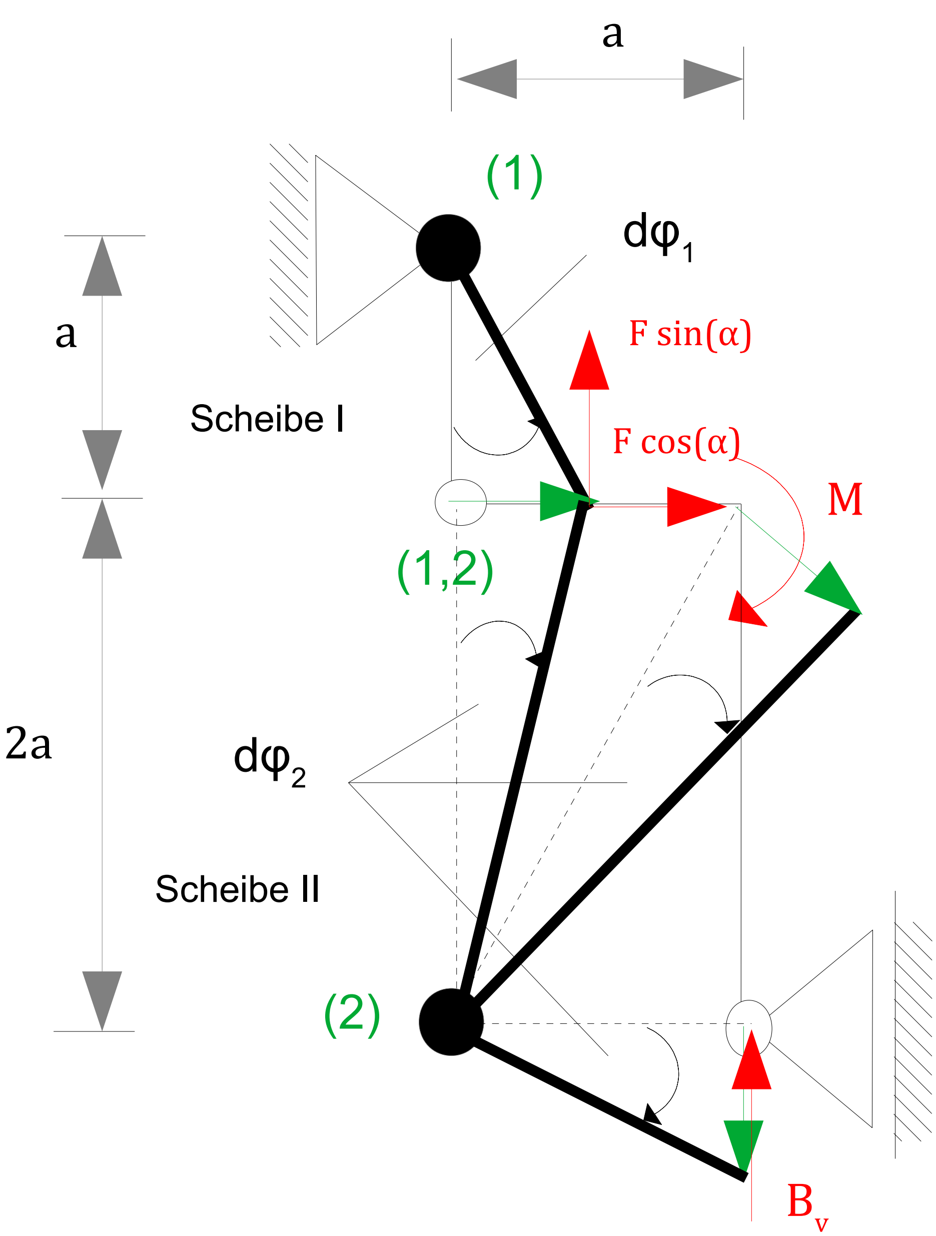
Die Verbindung der neuen Punkte führt zur **Verschiebungsfigur**:



Es kann als nächstes das Prinzip der virtuellen Arbeiten angewendet werden. Hier bedienen wir uns der vorherigen Grafik unter Berücksichtigung aller äußeren Kräfte und Momente und wenden die folgende Gleichung an:

$$dW = \sum F_i \cdot da_i + \sum M_i \cdot d\varphi = 0$$

Dabei ist zu beachten, ob die Kraft F_i mit der Verschiebung (positiv) oder dagegen wirken (negativ). Dasselbe gilt auch für die äußeren Momente.



Da wir nun zwei Winkel gegeben haben, müssen wir zunächst einen Zusammenhang zwischen $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ herstellen. Diesen können wir über das Gelenk herstellen. Dazu betrachten wir die Verschiebung des Gelenks vom Hauptpol (1) und (2) ausgehend:

$$dv_G = a \cdot d\varphi_1$$

$$dv_G = 2a \cdot d\varphi_2$$

Gleichsetzen führt zu:

$$d\varphi_1 = 2\,d\varphi_2 \quad \text{bzw.} \quad d\varphi_2 = \frac{1}{2}\,d\varphi_1$$

Wir stellen nun als nächstes die virtuelle Arbeitsgleichung auf:

$$dA = F\cos(\alpha) \cdot dv_G + M \cdot d\varphi_2 + B_v \cdot dv_B = 0$$

Die Verschiebungen können auch mittels Winkel ausgedrückt werden:

$$dA = F\cos(\alpha) \cdot 2a \cdot d\varphi_2 + M \cdot d\varphi_2 - B_v \cdot a \cdot d\varphi_2 = 0$$

Auflösen nach Bv:

$$B_v \cdot a \cdot d\varphi_2 = F\cos(\alpha) \cdot 2a \cdot d\varphi_2 + M \cdot d\varphi_2$$

$$B_v \cdot a = F\cos(\alpha) \cdot 2a + M$$

$$B_v = F\cos(\alpha) \cdot 2 + \frac{M}{a} \quad \text{mit } M = Fa$$

$$B_v = F\cos(35°) \cdot 2 + F$$

$$B_v = 2{,}638\,F$$

Drücken wir die Gleichung über den Winkel $d\varphi_1$ aus,:

$$dA = F\cos(\alpha)\cdot 2a\cdot d\varphi_2 + M\cdot d\varphi_2 - B_v\cdot a\cdot d\varphi_2 = 0$$

Einsetzen von

$$d\varphi_2 = \frac{1}{2}d\varphi_1$$

Ergibt:

$$dA = F\cos(\alpha)\cdot 2a\cdot\frac{1}{2}d\varphi_1 + M\cdot\frac{1}{2}d\varphi_1 - B_v\cdot a\cdot\frac{1}{2}d\varphi_1 = 0$$

$$dA = F\cos(\alpha)\cdot a\cdot d\varphi_1 + M\cdot\frac{1}{2}d\varphi_1 - B_v\cdot a\cdot\frac{1}{2}d\varphi_1 = 0$$

$$B_v\cdot a\cdot\frac{1}{2}d\varphi_1 = F\cos(\alpha)\cdot a\cdot d\varphi_1 + M\cdot\frac{1}{2}d\varphi_1$$

$$B_v = 2F\cos(35°) + \frac{M}{a}$$ mit M = Fa

$$B_v = 2F\cos(35°) + F = 2{,}638\,F$$