Webinar: Operations Research
Thema: Simplex-Algorithmus

Aufgabe: Maximierungsproblem

Ein Landwirt besitzt einen Stall für 10 Kühe und 20 Hektar Land. Insgesamt kann er pro Jahr 2.400 Arbeitsstunden aufwenden. Um eine Kuh zu unterhalten benötigt er jährlich 0,5 Hektar Land sowie 200 Arbeitsstunden. Für den Anbau von 1 Hektar Weizen benötigt der Landwirt 100 Arbeitsstunden. Durch eine Kuh erzielt er im Jahr 350 € Gewinn, 1 Hektar Weizen bringt ihm im gleichen Zeitraum 260,- € an Gewinnen ein.

Bestimmte das optimale Produktionsprogramm, damit der Landwirt seinen Gewinn maximiert.

Lösung des Maximierungsproblems

Wichtig ist sich hier klar zu machen, was genau gesucht wird. Der Bauer möchte seinen Gewinn maximieren. Einen Gewinn erzielt er durch die Kühe und durch den Anbau von Weizen. Wir haben hier also zwei Variablen gegeben, die den Gewinn beeinflussen. Aufgrund der Restriktionen (Beschränkungen), wie u.a. Anzahl der Kühe, kann er aber nicht unbeschränkt produzieren. Mittels Simplex wird nun die optimale Menge an Kühen und Anbaufläche ermittelt die den Gewinn des Bauers maximiert.

Wir beginnen damit die obigen Bedingungen in die mathematische Form zu überführen. Wir legen fest, dass x_1 der Anzahl der Kühe entspricht und x_2 der Fläche auf welcher der Weizen angebaut werden soll.

Das Maximierungsproblem ergibt sich dann wie folgt:

ZF: $350\,x_1 + 260\,x_2 \rightarrow \max$

udN

(1) $200\,x_1 + 100\,x_2 \leq 2.400$ (Arbeitsstunden)
(2) $x_1 \leq 10$ (Anzahl Kühe)
(3) $0{,}5\,x_1 + x_2 \leq 20$ (Landfläche)

(4) $x_1, x_2 \geq 0$ (Nichtnegativitätsbedingung)

Oben ist die **Standardform** gegeben:

- Maximierungsproblem,
- kleiner/gleich Ungleichungen,
- Nichtnegativitätsbedingung

Um den primalen Simplex-Algorithmus anwenden zu können, muss das lineare Optimierungsproblem in Standardform vorliegen.

Als nächstes wird die Standardform in die **Normalform** überführt:

- Maximierungsproblem,
- Gleichungen
- Nichtnegativitätsbedingung

Standardform in Normalform überführen:

Hierfür muss die Ungleichheitsbedingung $\leq$ der Standardform in eine Gleichheitsbedingung = umgeformt werden. Hierzu werden die Schlupfvariablen $x_{n+1}, \ldots, x_N$ eingeführt. Diese werden innerhalb der Zielfunktion mit Null bewertet. Es müssen so viele Schlupfvariablen hinzugefügt werden, wie Ungleichungen in Gleichungen überführt werden müssen.

Wie man die Standardform in die Normalform überführt soll im folgenden Beispiel gezeigt werden.

ZF: $340\, x_1 + 270\, x_2 \rightarrow \max$

udN

(5) $200\, x_1 + 100\, x_2 + x_3 = 2.400$ (Arbeitsstunden)
(6) $x_1 + x_4 = 10$ (Anzahl Kühe)
(7) $0{,}5\, x_1 + x_2 + x_5 = 20$ (Landfläche)

(8) $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ (Nichtnegativitätsbedingung)

Voraussetzung für die Anwendung des **primalen Simplex-Verfahrens**

1. Es muss die Standardform vorliegen (Maximierungsproblem, Kleiner/Gleich-Nebenbedingung, Nichtnegativitätsbedingung)
2. Die Standardform muss dann in die Normalform überführt werden (Gleichheitsbedingung) mittels Einführung von Schlupfvariablen.
3. Es müssen nicht-negative Koeffizienten auf der Rechten-Seite der Nebenbedingungen vorliegen ($b_i \geq 0$, für alle i).

Man sagt auch das lineare Optimierungsmodell liegt in **kanonischer Form** vor (Werte der rechten Seite sind alle positiv und es liegt die Standardform/Normalform vor).

Bei der Anwendung des primalen Simplexalgorithmus ist zu Beginn eine zulässige Lösung gegeben.

Zulässige Lösung des Ausgangsproblems

x_1 und x_2 sind die Nichtbasisvariablen (NBV) und die Schlupfvariablen x_3, x_4 und x_5 die Basisvariablen (BV).

Die **NBV** nehmen dabei immer den Wert **Null** an und die **BV** den Wert der **rechten Seite**:

$x_1, x_2 = 0$

und damit:

$x_3 = 2.400$, $x_4 = 10$ und $x_5 = 20$

Zu Beginn sind unsere Entscheidungsvariablen x_1 und x_2 also auf Null gesetzt. Da die Nichtnegativitätsbedingung $x_i \geq 0$ gegeben ist, die Variablen also auch den Wert Null annehmen dürfen, existiert bereits zu Beginn eine zulässige Basislösung:

$x = (0,0,2400,10,20)$

Anwendung des Simplex-Algorithmus'

Wir tragen nun das lineare Optimierungsproblem (Normalform) in das Tableau ein.

	x_1	x_2	b_i
x_3	200	100	2400
x_4	1	0	10
x_5	0,5	1	20
ZF	-350	-260	0

Die Nichtbasisvariablen werden in die 1. Zeile eingetragen, die Basisvariablen in die 1. Spalte. Die rechte Seite wird in die letzte Spalte eingetragen, die Zielfunktion um **umgekehrten** Vorzeichen in die letzte Zeile.

	x_1	x_2	b_i
x_3	2	1	24
x_4	1	0	10
x_5	0,5	1	20
ZF	-350	-260	0

Simplex-Algorithmus:

Nachdem das Tableau für das lineare Optimierungsproblem im vorherigen Abschnitt aufgestellt worden ist, soll nun die erste Iteration für das primale Simplexverfahren durchgeführt werden. Für jede Iteration müssen die folgenden Schritte durchgeführt werden:

1. Wahl der **Pivotspalte** t: Enthält die untere Zeile, in welche die Werte aus der Zielfunktion eingetragen werden, nur nicht-negative Werte, so ist die optimale Lösung gefunden. Ansonsten wird diejenige Spalte mit dem kleinsten negativen Wert ausgewählt. Sind mehrere Spalten mit kleinstem negativen Wert gegeben, so kann unter diesen eine beliebige Spalte ausgewählt werden.
2. Wahl der **Pivotzeile** s: Sind in der Pivotspalte aus 1. alle $a_{it} \leq 0$, so existiert für das Problem keine optimale Lösung. Das Verfahren muss abgebrochen werden. Ansonsten wird die rechte Seite für alle Elemente $a_{it} > 0$ der Pivotspalte betrachtet und diejenige Pivotzeile ausgewählt, für die gilt **min(b_{ij}/a_{ij})**. Dort wo sich die Pivotspalte und die Pivotzeile schneiden, liegt das Pivotelement.
3. Nachdem die Pivotspalte und die Pivotzeile sowie das Pivotelement bestimmt worden sind, wird nun in einem nächsten Schritt die Basisvariable der Pivotzeile mit der Nichtbasisvarbiablen der Pivotspalte getauscht und ein neues Tableau aufgestellt.

	x_1	x_2	b_i	
x_3	2	1	24	24/2 = 12
x_4	**1**	0	10	10/1 = 10
x_5	0,5	1	20	20/0,5 = 40
ZF	**-350**	-260	0	

Es kann nun das neue Tableau aufgestellt werden, welches zunächst noch leer ist. **Die Basisvariable der Pivotzeile** x_3 **und die Nichtbasisvariable der Pivotspalte** x_1 werden vertauscht. Für die Bestimmung der neuen Werte des Tableaus müssen nun einige Rechenschritte durchgeführt werden.

Bei einem Austauschschritt berechnet sich das neue Simplextableau folgendermaßen:

- Dort wo das Pivotelement stand wird der neue Wert bestimmt, indem der Kehrwert gebildet wird.

- Die neuen Werte in der **Pivotzeile** werden bestimmt, indem die alten Werte durch das Pivotelement dividiert werden. Dies gilt auch für den Wert der rechten Seite der Pivotzeile.

- Die neuen Werte der **Pivotspalte** werden bestimmt, indem die alten Werte durch das Pivotelement dividiert und mit einem Minuszeichen versehen werden. Dies gilt auch für den neuen Wert der Zielfunktionszeile der Pivotspalte.

- Die **restlichen Werte** werden bestimmt, indem von dem alten Wert das Produkt aus zugehörigem Element der Pivotspalte und Pivotzeile dividiert mit dem Pivotelement abgezogen wird.

	x_4	x_2	b_i
x_3	-2	1	4
x_1	1	0	10
x_5	-0,5	1	15
ZF	**350**	-260	**3.500**

Zielfunktionswert: $350x_1 + 260\ x_2$ mit $x_1 = 10$ und $x_2 = 0$

2. Austauschschritt: Wir wählen wieder Pivotspalte, Pivotzeile und Pivotelement aus:

	x_4	x_2	b_i	
x_3	-2	**1**	4	4/1 = 4
x_1	1	0	10	-
x_5	-0,5	1	15	15/1 = 15
ZF	**350**	-260	**3.500**	

Simplexschritte durchführen:

	x_4	x_3	b_i
x_2	-2	1	4
x_1	1	0	10
x_5	1,5	-1	11
ZF	-170	260	**4.540**

Zielfunktionswert: $350x_1 + 260\ x_2$ mit $x_1 = 10$ und $x_2 = 4$

3. Ausstauschschritt: Wir wählen wieder Pivotspalte, Pivotzeile und Pivotelement aus (es sind noch negative Werte in der Zielfunktionszeile gegeben):

	x_4	x_3	b_i	
x_2	-2	1	4	-
x_1	1	0	10	10/1 = 10
x_5	**1,5**	-1	11	11/1,5 = 7,33
ZF	-170	260	**4.540**	

Simplexschritte durchführen (Variablen tauschen):

	x_5	x_3	b_i
x_2	4/3	-1/3	56/3
x_1	-2/3	2/3	8/3
x_4	**2/3**	-2/3	22/3
ZF	340/3	440/3	**5.786,67**

Zielfunktionswert: $350x_1 + 260\ x_2$ mit $x_1 = 8/3$ und $x_2 = 56/3$

Interpretation des Tableaus:

x_5 und x_3 stehen in der Nichtbasis, diese nehmen also den Wert Null an:

$x_3, x_5 = 0$

Diese Schlupfvariablen gehören zu den Restriktionen (1) und (3).

ZF: $340\ x_1 + 270\ x_2 \rightarrow max$

udN

(1) $200\ x_1 + 100\ x_2 + x_3 = 2.400$	(Arbeitsstunden)
(2) $x_1 + x_4 = 10$	(Anzahl Kühe)
(3) $0{,}5\ x_1 + x_2 + x_5 = 20$	(Landfläche)
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	(Nichtnegativitätsbedingung)

Da die Schlupfvariablen x_3 und x_5 die Werte Null annehmen, wird die Kapazität der beiden Restriktionen (1) und (3) vollständig ausgeschöpft. Hier ist kein Puffer mehr vorhanden.

(1) $200 * 8/3 + 100 * 56/3 = 2.400$
(3) $0{,}5 * 8/3 + 56/3 = 20$

Aus dem Tableau können wir außerdem ablesen, dass x4 eine Basisvariable darstellt und damit den Wert der rechten Seite annimmt: $x_4 = 22/3$

Die Schlupfvariable gehört zu Restriktion (2). Wir sehen an dem Wert von 22/3, dass hier noch Kapazität verfügbar ist. Der Landwirt hat also einen Kapazitätsüberschuss an Kühen in Höhe von 22/3, welche er nicht unterhalten kann, weil die anderen Kapazitäten dafür nicht ausreichen.

Ganzzahlige Lösung

Grundsätzlich wird bei solchen Problemen immer der ganzzahlige Wert gesucht. 8/3 Kühe ist schwer zu realisieren. Also:

$x_1 = 8/3 = 2$
$x_2 = 56/3 = 18$

Wir runden zunächst immer ab. Wir können nun versuchen einen Wert aufzurunden und anhand der Restriktionen zu prüfen, ob es möglich ist (hier: $x_2 = 19$):

(1) 200 * 2 + 100 * 19 = 2300 (Arbeitsstunden)
(2) 2 = 2 (Anzahl Kühe)
(3) 0,5 *2 + 19 = 20 (Landfläche)

Wenn wir $x_1 = 2$ und $x_2 = 19$ setzen, so sind alle Restriktionen erfüllt. Wir haben dann aber zusätzlich noch mehr Kapazitäten zur Verfügung (Arbeitsstunden: 100, Anzahl Kühe: 8).

Wir testen das Ganze nun mit $x_1 = 3$ und $x_2 = 18$:

(1) 200 * 3 + 100 * 18 = 2400 (Arbeitsstunden)
(2) 3 = 3 (Anzahl Kühe)
(3) 0,5 *2 + 19 = 19,5 (Landfläche)

Auch bei dieser Variante werden alle Restriktionen erfüllt, wir haben aber auch hier noch Kapazitäten übrig (Anzahl Kühe:7, Landfläche: 0,5 Hektar).

Wir prüfen den Gewinn und entscheiden dann:

1.Variante: 350 * 2 + 260 * 19 = 5640
2.Variante: 350 * 3 + 260 * 18 = 5730

Die 2. Variante erzielt einen größeren Gewinn!