

Lernbuch: Höhere Mathematik 1

Mathematik für Maschinenbau- und Wirtschaftsingenieure

Vortragsskript für Webinar und Prüfungsvorbereitung

Dr.-Ing. Kevin Suta

Version 2026

Basierend auf:

Dr. D. Wrase, „*Mathematik I für Maschinenbau- und Wirtschaftsingenieure*“

Vorlesungsskript, Universität – GH – Siegen (SS 1997).

Die Inhalte wurden für dieses Lernbuch neu strukturiert, didaktisch aufbereitet und mit zusätzlichen Beispielen, Merkkästen und Abbildungen versehen.

WICHTIG!

Dieses Skript ist eine Lernhilfe und fasst die wesentlichen Inhalte der Höheren Mathematik 1 zusammen. Es ersetzt nicht das eigenständige Durcharbeiten von Aufgaben. Mathematik versteht man nur durch aktives Mitrechnen – halte also Stift und Papier bereit!

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	3
1.1	Mengen und Aussagen	3
1.2	Reelle Zahlen	4
1.3	Ungleichungen und Betrag	5
1.4	Beweismethoden	7
1.5	Summen, Produkte und der binomische Satz	9
1.6	Zusammenfassung Kapitel 1	11
2	Räumliche Vektorrechnung	12
2.1	Vektoren – geometrisch und in Koordinaten	12
2.2	Das Skalarprodukt	13
2.3	Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)	14
2.4	Das Spatprodukt	15
2.5	Geraden und Ebenen im Raum	16
2.6	Komplexe Zahlen (Teil I)	18
2.7	Zusammenfassung Kapitel 2	19
3	Funktionen	20
3.1	Zahlenmengen und Folgen in $\mathbb{R}$	20
3.2	Reelle Funktionen einer reellen Variablen	23
3.3	Die elementaren Funktionen	25
3.4	Umkehrfunktionen	30
3.5	Umkehrfunktionen der elementaren Funktionen	31
3.6	Zusammenfassung Kapitel 3	33
4	Differentialrechnung	33
4.1	Ableitung und Tangente	34
4.2	Ableitungsregeln	35
4.3	Ableitung einer Umkehrfunktion	36
4.4	Ableitungen der elementaren Funktionen	37

4.5	Sätze über differenzierbare Funktionen	38
4.6	Anwendung: Kurvenverlauf	40
4.7	Anwendung: Relative Extremwerte	40
4.8	Anwendung: Regel von de l'Hospital	41
4.9	Anwendung: Schnittwinkel zwischen Kurven	43
4.10	Anwendung: Einfache Iteration und Newton-Verfahren	44
4.11	Zusammenfassung Kapitel 4	46
5	Integralrechnung	47
5.1	Riemannsummen und bestimmtes Integral	47
5.2	Integrationsregeln und Substitution	50
5.3	Integration rationaler Funktionen	52
5.4	Anwendungen der Integralrechnung	53
5.5	Mittelwertsätze und Taylorformel	56
5.6	Uneigentliche Integrale	56
5.7	Numerische Integration	57
5.8	Zusammenfassung Kapitel 5	60
6	Unendliche Reihen	61
6.1	Zahlenreihen und ihre Konvergenz	61
6.2	Konvergenzkriterien	63
6.3	Alternierende Reihen und das Leibnizkriterium	65
6.4	Funktionen- und Potenzreihen	66
6.5	Taylorreihen	69
6.6	Reihen der elementaren Funktionen	70
6.7	Anwendungen von Reihenentwicklungen	71
6.8	Potenzreihen in $\mathbb{C}$ und die Eulersche Formel	74
6.9	Zusammenfassung Kapitel 6	75
7	Komplexe Zahlen (Teil II)	75
7.1	Polarform und Eulersche Darstellung	76
7.2	Multiplikation und Division in Polarform	78
7.3	Potenzen und die Formel von de Moivre	79
7.4	Die n -te Wurzel: n Lösungen	79
7.5	Zusammenfassung Kapitel 7	81
8	Lineare Algebra	82
8.1	Lineare Gleichungssysteme und der Gaußsche Algorithmus	82
8.2	Der n -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$	84
8.3	Matrizen	85
8.4	Determinanten	87
8.5	Die inverse Matrix	90
8.6	Lineare Gleichungssysteme und die Cramersche Regel	92
8.7	Eigenwertprobleme	94
8.8	Koordinatentransformation	96
8.9	Ebene Koordinatentransformation: die Drehung	97
8.10	Ebene Kegelschnitte und ihre Normalformen	98
8.11	Zusammenfassung Kapitel 8	100

1 Grundlagen

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Mit Mengen und den logischen Verknüpfungen ($\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) sicher umgehen
- Die Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ unterscheiden
- Mit Ungleichungen und Beträgen rechnen und Betragsungleichungen lösen
- Die drei Beweismethoden (direkt, indirekt, vollständige Induktion) anwenden
- Mit dem Summen- und Produktzeichen umgehen und die geometrische Summe sowie den binomischen Satz einsetzen

Dieses erste Kapitel legt das Handwerkszeug für alles Weitere. Vieles davon kennst du aus der Schule – wir bringen es auf eine gemeinsame, saubere Grundlage und führen die Schreibweisen ein, die im ganzen Skript verwendet werden.

1.1 Mengen und Aussagen

Der Begriff der **Menge** ist die Grundsprache der Mathematik.

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung wohlunterscheidbarer Objekte, den **Elementen** der Menge. Man schreibt sie durch Aufzählung oder über eine Eigenschaft:

$$M = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } \dots\}.$$

$x \in M$ heißt „ x ist Element von M “; $x \notin M$ heißt „ x ist *nicht* Element von M “.

Beispiel: $M = \{x \mid x \text{ ist Buchstabe des lateinischen Alphabets}\}$. Hier gilt $a \in M$, aber $5 \notin M$.

Teilmengen und Gleichheit

Für zwei Mengen M_1, M_2 bedeutet:

- $M_1 \subset M_2$ (M_1 ist **Teilmenge** von M_2): Jedes $x \in M_1$ liegt auch in M_2 .
- $M_1 = M_2$ (**Gleichheit**): Es gilt $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_1$.
- $M_1 \not\subset M_2$: Es gibt mindestens ein $x \in M_1$ mit $x \notin M_2$.

Die **leere Menge** $\emptyset$ enthält kein Element. Sie ist Teilmenge jeder Menge.

Aussagen und ihre Verknüpfung

Eine **Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist. Sind A und B Aussagen, so schreibt man:

Symbol	Bedeutung
$A \wedge B$	„ A und B “ (beide wahr)
$A \vee B$	„ A oder B “ (mindestens eine wahr, auch beide)
$A \Rightarrow B$	„aus A folgt B “
$A \Leftrightarrow B$	„ A äquivalent zu B “, d. h. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Rechnen mit Mengen

Für Mengen A, B (Teilmengen einer Obermenge Ω) definiert man:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} && \textbf{(Vereinigung)} \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} && \textbf{(Durchschnitt)} \\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} && \textbf{(Differenz)} \\ A^C &= \Omega \setminus A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\} && \textbf{(Komplement)} \end{aligned}$$

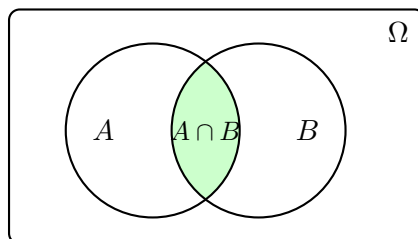


Abbildung 1: Zwei Mengen A und B . Der grün hinterlegte Bereich ist der Durchschnitt $A \cap B$, die gesamte gefärbte und umrandete Fläche die Vereinigung $A \cup B$.

Rechenregeln für $\cup$ und $\cap$

- **Kommutativ:** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- **Assoziativ:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, analog für $\cap$.
- **Distributiv:** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- **Vorrang:** Ohne Klammern bindet $\cap$ stärker als $\cup$, also $A \cup B \cap C := A \cup (B \cap C)$ – ganz analog zu „Punkt vor Strich“.

Mini-Aufgabe

Gegeben sind $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Bestimme $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$.

Lösung

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}, \quad A \cap B = \{2, 4\}, \quad A \setminus B = \{1, 3, 5\}, \quad B \setminus A = \{6, 8\}.$$

1.2 Reelle Zahlen

Wir ordnen die Zahlen, mit denen wir rechnen, in vier ineinander geschachtelte Bereiche.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$	rationale Zahlen (Brüche)
$\mathbb{R} = \text{alle Punkte der Zahlengeraden}$	reelle Zahlen

Es gilt die Kette $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Versuchen mit den Grundrechenarten $+$ und $\cdot$ bildet $\mathbb{Q}$ einen **Körper** (man kann uneingeschränkt addieren, subtrahieren, multiplizieren und $-$ außer durch 0 – dividieren).

Rationale Zahlen als Dezimalbrüche

Jede rationale Zahl lässt sich als *endlicher* oder *periodischer* Dezimalbruch schreiben – und umgekehrt:

$$\frac{1}{16} = 0,0625 \quad (\text{endlich}), \quad \frac{1}{13} = 0,\overline{076923} \quad (\text{periodisch, Periode } 076923).$$

Nicht jede Zahl ist rational. Schon die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat, $\sqrt{2}$, lässt sich *nicht* als Bruch schreiben – solche Zahlen heißen **irrational**. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ füllen genau diese Lücken und veranschaulichen sich als **Zahlengerade**: Man legt die Punkte 0 und 1 fest und trägt jede Zahl maßstabsgetreu ab – rechts der Null die positiven, links die negativen.

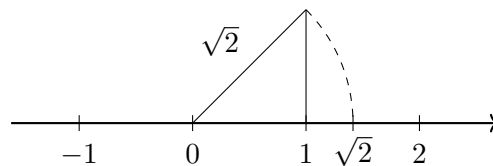


Abbildung 2: Reelle Zahlengerade. Die Diagonale des Einheitsquadrats hat die Länge $\sqrt{2}$; klappt man sie mit dem Zirkel auf die Achse, erhält man den irrationalen Punkt $\sqrt{2} \approx 1,414$.

Zahlbereiche

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Rationale Zahlen = endliche oder periodische Dezimalbrüche; irrationale Zahlen (wie $\sqrt{2}$ oder π) haben eine unendliche, nicht-periodische Dezimaldarstellung.

1.3 Ungleichungen und Betrag

Jede reelle Zahl a erfüllt *genau eine* der drei Möglichkeiten

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad a > 0 \text{ (positiv)} \quad \text{oder} \quad a < 0 \text{ (negativ)}.$$

Das nennt man die **Anordnung** der reellen Zahlen. Für $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man darauf aufbauend:

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow b - a > 0 && (\text{„}a \text{ kleiner als } b\text{“}) \\ a > b &\Leftrightarrow a - b > 0 && (\text{„}a \text{ größer als } b\text{“}) \\ a \leq b &\Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b) \\ a \geq b &\Leftrightarrow (a > b) \vee (a = b) \end{aligned}$$

Rechenregeln für Ungleichungen

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität)
2. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (Addition ist erlaubt)
3. $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ (Mal positiv: Zeichen bleibt)
4. $a < b$ und $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ (Mal negativ: Zeichen **kippt**)
5. $0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$

Das Gleiche gilt, wenn man überall $<$ durch $\leq$ ersetzt.

Achtung!

Der häufigste Fehler beim Umformen von Ungleichungen: Multipliziert oder dividiert man mit einer **negativen** Zahl, so **dreht sich das Ungleichheitszeichen um**. Aus $-2x < 6$ wird also $x > -3$ (nicht $x < -3$). Ist das Vorzeichen des Faktors unbekannt (z. B. bei einer Variablen im Nenner), muss man *Fälle unterscheiden*.

Der Betrag

Stellt man die reellen Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden dar, so haben a und $-a$ denselben *Abstand* zum Nullpunkt. Diesen Abstand nennt man den **Betrag** von a .

Betrag einer reellen Zahl:

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a, & \text{wenn } a < 0. \end{cases}$$

Damit gilt stets $|a| \geq 0$, und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Anschaulich ist $|a|$ der Abstand von a zur Null, und $|a - b|$ der Abstand zwischen a und b .

Eigenschaften des Betrages

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0), \quad \underbrace{||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|}_{\text{Dreiecksungleichung}}.$$

Mini-Aufgabe

Schreibe die Lösungsmenge von $|x - 3| \leq 2$ als Intervall. *Tipp:* $|x - 3|$ ist der Abstand von x zur Zahl 3.

Lösung

$|x - 3| \leq 2$ heißt „ x hat von 3 höchstens den Abstand 2“. Das sind alle Zahlen zwischen 1 und 5:

$$1 \leq x \leq 5, \quad \text{also} \quad x \in [1, 5].$$

Wie man mit Beträgen und Ungleichungen praktisch umgeht, zeigen die folgenden Beispiele und Aufgaben. Die Grundidee ist immer: den Betrag durch **Fallunterscheidung** auflösen oder durch eine geschickte, *vorzeichensichere* Umformung vermeiden.

Bruch-Ungleichung ohne Fälle

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq \frac{1+x}{x} \leq 2$.

Zuerst $x \neq 0$ (sonst ist der Bruch nicht definiert). Wir formen *äquivalent* um:

$$1 \leq \frac{1+x}{x} \leq 2 \iff 1 \leq \frac{1}{x} + 1 \leq 2 \iff 0 \leq \frac{1}{x} \leq 1.$$

Für $x < 0$ ist $\frac{1}{x} < 0$, die linke Ungleichung also verletzt. Bleibt $x > 0$; dann darf man mit $x > 0$ durchmultiplizieren (Zeichen bleibt):

$$0 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \iff 0 \leq 1 \leq x.$$

Ergebnis: Die Ungleichung ist genau für $x \geq 1$ erfüllt.

Mini-Aufgabe

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\left| \frac{x+4}{x+1} \right| < 2$.

Lösung

Es ist $x \neq -1$. Wegen $|x+1| > 0$ darf man mit $|x+1|$ multiplizieren, und mit $|a/b| = |a|/|b|$ wird die Ungleichung zu

$$|x+4| < 2|x+1|.$$

Jetzt Fallunterscheidung nach den Vorzeichen der Beträge:

(a) $x < -4$: $-(x+4) < -2(x+1) \Leftrightarrow x < 2$. Zusammen mit $x < -4$: $L_1 = \{x \mid x < -4\}$.

(b) $-4 \leq x < -1$: $(x+4) < -2(x+1) \Leftrightarrow 3x < -6 \Leftrightarrow x < -2$. Also $L_2 = \{x \mid -4 \leq x < -2\}$.

(c) $x \geq -1$: $(x+4) < 2(x+1) \Leftrightarrow 2 < x$. Also $L_3 = \{x \mid x > 2\}$.

Gesamtlösung: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \mid |x| > 2\}$.

1.4 Beweismethoden

In der Mathematik genügt es nicht, eine Behauptung an Beispielen zu prüfen – man muss sie *beweisen*. Keine Sorge: In der Prüfung musst du meist keine eigenen Beweise erfinden. Du solltest aber die drei Standardmethoden *wiedererkennen* und ihre Grundidee verstehen. Wir zeigen jede an genau einem kurzen Beispiel.

1. Direkter Beweis

Man geht von einer bereits als wahr bekannten Aussage aus und gelangt durch logisch einwandfreie Schlüsse zur Behauptung.

Direkter Beweis: Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

Behauptung: Für alle $a, b > 0$ gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$.

Idee: Wir starten bei der stets wahren Aussage „ein Quadrat ist nicht negativ“ und rechnen vorwärts:

$$\begin{aligned} & (a-b)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow & a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 & | + 4ab \\ \Rightarrow & a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \\ \Rightarrow & (a+b)^2 \geq 4ab & | \sqrt{}, \text{ da } a+b > 0 \\ \Rightarrow & a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ \Rightarrow & \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}. \end{aligned}$$

Da wir bei einer wahren Aussage begonnen und nur erlaubte Umformungen benutzt haben, ist die Behauptung bewiesen. $\square$

2. Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis)

Hier nutzt man aus, dass eine Aussage nur *wahr oder falsch* sein kann. Man nimmt an, die Behauptung A sei *falsch*, und leitet daraus einen Widerspruch (eine falsche Aussage) her. Dann kann die Annahme nicht stimmen – also ist A wahr.

Indirekter Beweis

Behauptung: Ist $a > 0$, so gilt $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Annahme (Gegenteil): Es gäbe ein $a > 0$ mit $a + \frac{1}{a} < 2$. Multiplikation mit $a > 0$ liefert

$$a^2 + 1 < 2a \Rightarrow a^2 - 2a + 1 < 0 \Rightarrow (a - 1)^2 < 0.$$

Das ist ein Widerspruch, denn ein Quadrat ist nie negativ: $(a - 1)^2 \geq 0$. Die Annahme ist also falsch, die Behauptung wahr. $\square$

3. Vollständige Induktion

Hängt eine Aussage A_n von einem Laufindex $n \in \mathbb{N}$ ab (sie soll für *alle* n gelten), so ist die vollständige Induktion das Mittel der Wahl. Man stelle sich eine Reihe von Dominosteinen vor: Wenn der erste fällt und jeder fallende den nächsten umwirft, fallen alle.

Die drei Schritte der Induktion

1. **Induktionsanfang:** Zeige, dass A_n für $n = 1$ gilt.
2. **Induktionsannahme:** Nimm an, A_n gelte für *ein* festes $n \geq 1$.
3. **Induktionsschluss** ($n \rightarrow n + 1$): Zeige mit Hilfe der Annahme, dass dann auch A_{n+1} gilt.

Gelingen alle drei Schritte, so gilt A_n für *alle* $n \in \mathbb{N}$. (Beginnt die Aussage erst bei $n = n_0$, startet man den Anfang eben dort.)

Induktion: Summe der ungeraden Zahlen

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Anfang ($n = 1$): Links 1, rechts $1^2 = 1$. $\checkmark$

Annahme: Für ein $n \geq 1$ gelte $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Schluss ($n \rightarrow n + 1$): Wir addieren den nächsten ungeraden Summanden $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$:

$$\underbrace{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}_{= n^2 \text{ nach Annahme}} + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Das ist genau die Behauptung für $n + 1$. Damit gilt sie für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Mini-Aufgabe: Bernoullische Ungleichung

Zeige mit vollständiger Induktion: Für alle $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Diese Ungleichung brauchst du später bei Folgen und Grenzwerten immer wieder.

Lösung

Anfang ($n = 1$): $(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$. ✓

Annahme: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für ein $n \geq 1$.

Schluss: Weil $1 + x \geq 0$ ist, darf man die Annahme mit $(1 + x)$ multiplizieren, ohne dass das Zeichen kippt:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n + 1)x. \quad \square$$

1.5 Summen, Produkte und der binomische Satz

Um lange Summen kompakt zu schreiben, benutzt man das Summenzeichen $\sum$ (großes Sigma), analog für Produkte das Produktzeichen $\prod$.

Für Zahlen $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ (mit $m \leq n$) setzt man

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n, \quad \prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n.$$

Dabei heißt k **Laufindex**, m **untere** und n **obere Grenze**. Der Name des Laufindex ist beliebig ($k, i, j, \dots$).

Schreibweisen

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = 1 - 4 + 9 - \dots + (-1)^{n-1} n^2,$$
$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Die geometrische Summe

Eine der wichtigsten Summen überhaupt ist die **geometrische Summe** $S_n(q) = \sum_{k=0}^n q^k$ (mit $q \in \mathbb{R}$). Sie steckt überall dort, wo sich etwas mit festem Faktor vervielfacht – Zinseszins, Halbwertszeiten oder die berühmten Reiskörner auf dem Schachbrett (jedes Feld doppelt so viele wie das vorige). Für $q = 1$ ist einfach $S_n(1) = 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$. Der interessante Fall ist $q \neq 1$:

Herleitung

Schreibe die Summe und ihr q -faches untereinander:

$$\begin{aligned} S_n(q) &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n, \\ q \cdot S_n(q) &= \quad q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}. \end{aligned}$$

Subtrahiert man die zweite von der ersten Zeile, fällt fast alles weg: $S_n(q) - q S_n(q) = 1 - q^{n+1}$, also $(1 - q) S_n(q) = 1 - q^{n+1}$. Division durch $1 - q \neq 0$ liefert die Formel.

Geometrische Summe (für $q \neq 1$):

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Binomialkoeffizienten und der binomische Satz

Multipliziert man $(a + b)^n$ aus, entsteht eine Summe von Termen der Form $a^{n-k}b^k$. Die zugehörigen Vorfaktoren heißen **Binomialkoeffizienten**:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n A_{n,k} a^{n-k} b^k.$$

Man erkennt sofort $A_{n,0} = A_{n,n} = 1$ (die reinen Potenzen a^n und b^n treten je einmal auf). Ein Koeffizientenvergleich in $(a + b)^{n+1} = (a + b)^n(a + b)$ liefert die zentrale **Rekursion**

$$A_{n+1,k} = A_{n,k} + A_{n,k-1}.$$

Jeder Koeffizient ist also die Summe der beiden schräg über ihm stehenden – das ist das **Pascalsche Dreieck**:

$$\begin{array}{ccccccc} n=1 & & & & 1 & & 1 \\ n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 \\ n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Abbildung 3: Pascalsches Dreieck. Am Rand steht überall 1; jede innere Zahl ist die Summe der beiden darüber.

Für große n ist das Dreieck mühsam. Eine *geschlossene* Formel liefert die Fakultät.

Fakultät: für $n \in \mathbb{N}$

$$n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdots n, \quad 0! := 1.$$

Binomialkoeffizient („ n über k “), für $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Man rechnet nach, dass $\binom{n}{k}$ tatsächlich die Rekursion und die Randwerte des Pascalschen Dreiecks erfüllt, also $\binom{n}{k} = A_{n,k}$. Damit erhält man den zentralen Satz:

Binomischer Satz:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Der binomische Satz konkret

Mit den Koeffizienten der Zeile $n = 4$ (1, 4, 6, 4, 1):

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Nützliche Spezialfälle und Eigenschaften

Einsetzen von $a = b = 1$ bzw. $a = 1, b = -1$ liefert

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Außerdem gilt die **Symmetrie** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und die Rekursion $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Mini-Aufgabe

1. Berechne $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{10}$ mit der Formel für die geometrische Summe.
2. Berechne $\binom{6}{2}$. Zu welchem Term in $(a + b)^6$ gehört dieser Koeffizient?

Lösung

1. Hier ist $q = 2$ und die obere Grenze $n = 10$:

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2047.$$

2. $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Er gehört zum Term $15a^4b^2$ in $(a + b)^6$.

1.6 Zusammenfassung Kapitel 1

Das Wichtigste aus Kapitel 1

- **Mengen:** $\cup$ (oder), $\cap$ (und), $\setminus$ (ohne), Komplement A^C ; $\cap$ bindet stärker als $\cup$.
- **Zahlbereiche:** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Rational = endlicher oder periodischer Dezimalbruch.
- **Ungleichungen:** Mal einer negativen Zahl *kippt* das Zeichen. Betrag $|a|$ = Abstand zur Null; **Dreiecksungleichung** $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- **Beweismethoden:** direkt (vorwärts von Wahrem), indirekt (Annahme des Gegenteils führt zum Widerspruch), vollständige Induktion (Anfang, Annahme, Schluss $n \rightarrow n+1$).
- **Geometrische Summe:** $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ($q \neq 1$).
- **Binomischer Satz:** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (Pascalsches Dreieck).

2 Räumliche Vektorrechnung

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Vektoren geometrisch und in Koordinaten darstellen, addieren und mit einem Skalar multiplizieren
- Skalar-, Vektor- und Spatprodukt berechnen und geometrisch deuten (Winkel, Fläche, Volumen)
- lineare Abhängigkeit, Basis und Koordinaten verstehen
- Geraden und Ebenen im Raum aufstellen (Parameter-, Normal-, Hessesche Form) und Abstände berechnen
- mit komplexen Zahlen rechnen (Grundrechenarten, Betrag, Konjugation, Gaußsche Zahlenebene)

2.1 Vektoren – geometrisch und in Koordinaten

Manche Größen sind durch eine einzige Maßzahl festgelegt – **Skalare** wie Temperatur, Masse oder Energie. Andere brauchen zusätzlich eine *Richtung*: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung. Solche gerichteten Größen beschreibt man durch **Vektoren**.

Ein **Vektor** $\vec{a}$ ist die Menge aller gerichteten Strecken (Pfeile) gleicher Länge und Richtung – ein Pfeil lässt sich also *beliebig parallel verschieben*, ohne dass sich der Vektor ändert. Die Länge heißt **Betrag** $|\vec{a}|$. Der **Nullvektor** $\vec{0}$ hat $|\vec{0}| = 0$ und keine Richtung; $-\vec{a}$ hat gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtung.

Addition und Skalarmultiplikation

Zwei Vektoren addiert man, indem man den zweiten Pfeil an die Spitze des ersten setzt (Kraftparallelogramm). Die Reihenfolge ist egal:

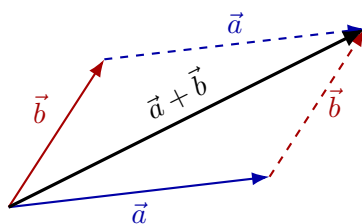


Abbildung 4: Vektoraddition im Parallelogramm: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Rechengesetze für Vektoren

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0},$$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}), \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Dabei streckt $\alpha\vec{a}$ den Vektor um den Faktor $|\alpha|$; für $\alpha < 0$ kehrt sich die Richtung um.

Basis und Koordinaten

Ein Ausdruck $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ heißt **Linearkombination**. Die Vektoren heißen **linear unabhängig**, wenn sich der Nullvektor *nur* mit allen $\alpha_k = 0$ darstellen lässt – andernfalls linear abhängig. Anschaulich: zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn sie *parallel* sind; drei, wenn sie in einer *Ebene* liegen (komplanar).

Basis im Raum

Im dreidimensionalen Raum sind höchstens **drei** Vektoren linear unabhängig. Drei solche Vektoren bilden eine **Basis**: Jeder Vektor $\vec{a}$ lässt sich dann *eindeutig* als $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ schreiben. Am bequemsten ist die **orientierte Orthonormalbasis** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: paarweise senkrecht, Länge 1, Rechtssystem. Man schreibt kurz

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1).$$

In Koordinaten rechnet man **komponentenweise**:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Mini-Aufgabe

Gegeben $\vec{a} = (2, -1, 1)$ und $\vec{b} = (1, 1, 2)$. Berechne $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Lösung

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2, -1, 1) + 2(1, 1, 2) = (2 + 2, -1 + 2, 1 + 4) = (4, 1, 5).$$

2.2 Das Skalarprodukt

Denk an die **Arbeit** in der Physik: Zieht man eine Kiste mit der Kraft $\vec{k}$ ein Stück $\vec{s}$ weit, zählt nur der Anteil der Kraft *in Wegrichtung*. Ist α der Winkel zwischen Kraft und Weg, so ist die Arbeit $W = |\vec{s}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos \alpha$. Genau diese Rechnung ist das Skalarprodukt.

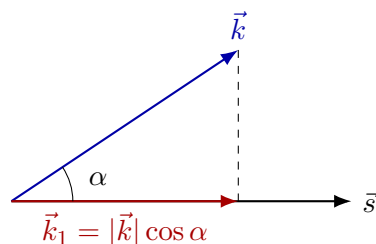


Abbildung 5: Zerlegung der Kraft $\vec{k}$ in einen Anteil $\vec{k}_1$ längs $\vec{s}$ und einen dazu senkrechten. Nur $\vec{k}_1$ leistet Arbeit.

Skalarprodukt (Innenprodukt) zweier Vektoren mit Zwischenwinkel α :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha.$$

In Koordinaten:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Das Ergebnis ist eine *Zahl* (ein Skalar), kein Vektor.

Eigenschaften des Skalarprodukts

- Kommutativ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; distributiv: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$, also $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
- **Senkrecht-Test:** für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$.

Aufgelöst nach dem Winkel liefert das Skalarprodukt die **Winkelformel**:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

$\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$. Beide haben den Betrag $\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$, und

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \implies \alpha = 60^\circ.$$

Eine schöne Anwendung ist der **Kosinussatz**: Für ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Winkel α zwischen a und b gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ (man erhält ihn, indem man $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ quadriert). Für $\alpha = 90^\circ$ wird daraus der Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$.

Mini-Aufgabe

Stehen $\vec{a} = (2, 1, -1)$ und $\vec{b} = (1, 1, 3)$ senkrecht aufeinander?

Lösung

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 2 + 1 - 3 = 0$. Ja, die Vektoren stehen senkrecht.

2.3 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Das Skalarprodukt liefert eine Zahl. Das **Vektorprodukt** $\vec{a} \times \vec{b}$ liefert dagegen einen *Vektor*, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht – ideal, um Normalenrichtungen und Flächen zu bestimmen.

Das **Vektorprodukt** $\vec{a} \times \vec{b}$ ist der Vektor mit

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha,$$

der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, so dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ein **Rechtssystem** bilden (Rechte-Hand-Regel: Daumen = $\vec{a}$, Zeigefinger = $\vec{b}$, Mittelfinger = $\vec{a} \times \vec{b}$). In Koordinaten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

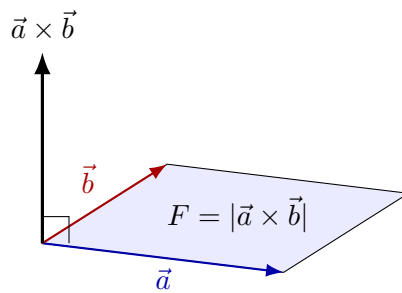


Abbildung 6: Der Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms; $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht darauf.

Geometrie und Rechenregeln

- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = Fläche des Parallelogramms; das Dreieck aus $\vec{a}, \vec{b}$ hat die Fläche $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a}, \vec{b}$ parallel (linear abhängig).
- **Antikommutativ:** $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ – die Reihenfolge dreht das Vorzeichen! Distributiv: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Achtung!

Das Vektorprodukt ist **nicht kommutativ**: $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b} \times \vec{a}$ zeigen in entgegengesetzte Richtungen. Achte immer auf die Reihenfolge.

Kreuzprodukt und Skalarprodukt konkret

$$\vec{a} = (2, -1, 1), \vec{b} = (1, 1, 2).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3,$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = ((-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2, 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) = (-3, -3, 3).$$

Kontrolle: $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 2(-3) + (-1)(-3) + 1 \cdot 3 = -6 + 3 + 3 = 0$ – das Kreuzprodukt steht tatsächlich senkrecht auf $\vec{a}$.

Mini-Aufgabe

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das von $\vec{a} = (1, 0, 0)$ und $\vec{b} = (0, 2, 0)$ aufgespannt wird.

Lösung

$\vec{a} \times \vec{b} = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 2, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0) = (0, 0, 2)$, also $|\vec{a} \times \vec{b}| = 2$. Die Dreiecksfläche ist $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

2.4 Das Spatprodukt

Kombiniert man beide Produkte, erhält man das **Spatprodukt** – eine Zahl, die das *Volumen* misst.

Spatprodukt von drei Vektoren:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

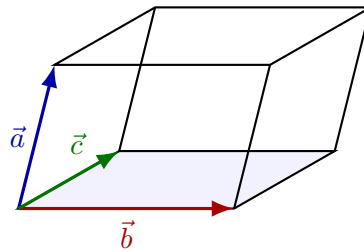


Abbildung 7: Das von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannte Spat (Parallelepipid). Sein Volumen ist $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$.

Bedeutung des Spatprodukts

- $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ ist das **Volumen des Spats**; der Tetraeder aus denselben Vektoren hat $V_{\text{Tet}} = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$.
- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind **komplanar** (linear abhängig, liegen in einer Ebene).
- Zyklisches Vertauschen ändert nichts: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$.

Volumen eines Tetraeders

$$\vec{a} = (1, -1, 1), \vec{b} = (1, 2, 2), \vec{c} = (-1, 1, 1).$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 1(2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + (-1)(2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) + 1(1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) = 0 + 3 + 3 = 6.$$

Der aufgespannte Tetraeder hat also das Volumen $V_{\text{Tet}} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$.

Mini-Aufgabe

Liegen $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 0)$ und $\vec{c} = (1, 1, 0)$ in einer Ebene?

Lösung

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 1(1 \cdot 0 - 0 \cdot 1) + 0 + 0 = 0$. Das Spatvolumen ist null, also sind die drei Vektoren komplanar – sie liegen in einer Ebene (hier der xy -Ebene).

2.5 Geraden und Ebenen im Raum

Mit Vektoren lassen sich Geraden und Ebenen bequem beschreiben. Eine **Gerade** ist festgelegt durch *einen Punkt* (Stützvektor $\vec{a}$) und *eine Richtung* (Richtungsvektor $\vec{b}$).

Parameterform der Geraden durch den Punkt $\vec{a}$ mit Richtung $\vec{b}$:

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jeder Wert von t liefert genau einen Punkt der Geraden.

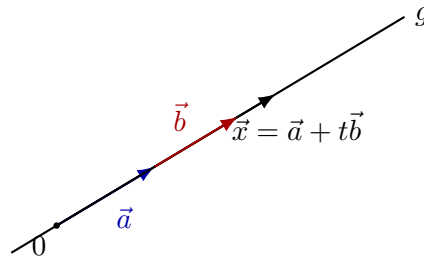


Abbildung 8: Parameterform der Geraden: vom Nullpunkt zunächst mit $\vec{a}$ auf die Gerade, dann mit $t\vec{b}$ entlang.

Gerade durch zwei Punkte

Gerade durch $A(1, -1, 1)$ und $C(2, 1, -1)$: Richtung $\vec{b} = C - A = (1, 2, -2)$, Stützvektor $\vec{a} = (1, -1, 1)$:

$$\vec{x} = (1, -1, 1) + t(1, 2, -2) = (1 + t, -1 + 2t, 1 - 2t).$$

Ebenen

Eine **Ebene** spannt man aus einem Stützpunkt $\vec{x}_0$ und zwei (nicht parallelen) Richtungen $\vec{a}, \vec{b}$ auf: $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} + \tau\vec{b}$. Praktischer für Abstände ist die **Normalenform**: Der Normalenvektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf der Ebene.

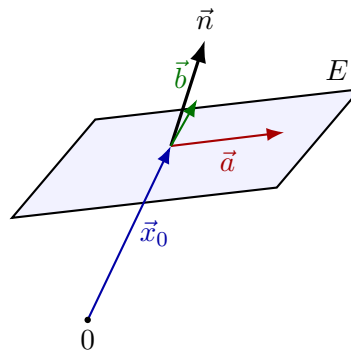


Abbildung 9: Ebene E mit Stützvektor $\vec{x}_0$, den Spannvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und dem Normalenvektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Normalenform der Ebene mit Normalenvektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ durch $\vec{x}_0$:

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n_1x + n_2y + n_3z = d, \quad d = \vec{n} \cdot \vec{x}_0.$$

Teilt man durch $|\vec{n}|$, erhält man die **Hessesche Normalform**; ihr Abstandsterm misst direkt Entfernungen:

$$\text{Abstand}(P, E) = \frac{|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

für einen Punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$.

Ebene durch drei Punkte

Ebene durch $A(1, -1, 1)$, $B(2, 1, -1)$, $C(-1, 1, 1)$. Spannvektoren $\vec{a} = B - A = (1, 2, -2)$, $\vec{b} = C - A = (-2, 2, 0)$. Normalenvektor:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (4, 4, 6), \quad d = \vec{n} \cdot A = 4 - 4 + 6 = 6.$$

Ebene: $4x + 4y + 6z = 6$, gekürzt $2x + 2y + 3z - 3 = 0$. Mit $|(2, 2, 3)| = \sqrt{17}$ lautet die Hessesche Normalform

$$\frac{2x + 2y + 3z - 3}{\sqrt{17}} = 0.$$

Lagebeziehungen

- **Zwei Geraden** sind *parallel* (Richtungen linear abhängig), *schneiden sich*, oder sind **windschief** (Richtungen und Verbindungsvektor linear unabhängig).
- **Zwei Ebenen** sind parallel (Normalen linear abhängig) oder schneiden sich in einer Geraden. Ihr **Schnittwinkel** ist der Winkel der Normalen: $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|}$.
- Der Abstand zweier **windschiefer** Geraden ist $\frac{|[\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2]|}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}$.

Mini-Aufgabe

Wie weit ist der Punkt $P = (1, 1, 1)$ von der Ebene $E : x + 2y + 2z - 6 = 0$ entfernt?

Lösung

Mit $\vec{n} = (1, 2, 2)$ ist $|\vec{n}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$, also

$$\text{Abstand} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 6|}{3} = \frac{|-1|}{3} = \frac{1}{3}.$$

2.6 Komplexe Zahlen (Teil I)

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine reelle Lösung – es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist. Man erweitert deshalb die reellen Zahlen um eine neue Zahl, die **imaginäre Einheit** i mit $i^2 = -1$.

Die **komplexen Zahlen** sind

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad i^2 = -1.$$

Für $z = x + iy$ heißt $x = \operatorname{Re} z$ der **Realteil**, $y = \operatorname{Im} z$ der **Imaginärteil**. Weiter:

$$\bar{z} = x - iy \text{ (konjugiert komplexe Zahl)}, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (Betrag)}.$$

Man stellt $z = x + iy$ als Punkt bzw. Pfeil in der **Gaußschen Zahlenebene** dar: Realteil nach rechts, Imaginärteil nach oben. Der Betrag $|z|$ ist die Länge des Pfeils.

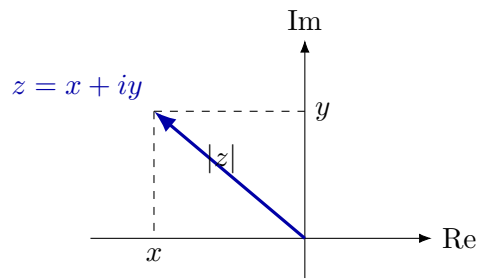


Abbildung 10: Gaußsche Zahlenebene: $z = x + iy$ als Punkt mit Realteil x und Imaginärteil y .

Rechnen mit $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$: Man rechnet wie mit Klammern und ersetzt $i^2 = -1$.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Wichtig ist $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Damit dividiert man, indem man mit dem Konjugierten des Nenners erweitert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Multiplizieren und Dividieren

$$z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = 1 - i.$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i)(1 - i) = 3 - 3i + 2i - 2i^2 = 3 - i + 2 = 5 - i.$$

Für die Division erweitert man mit $\bar{z}_2 = 1 + i$ (und $|z_2|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{2} = \frac{1 + 5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

Übrigens hat in $\mathbb{C}$ nun *jede* Wurzel eine Lösung: Für $a > 0$ ist $\sqrt{-a} = \pm i\sqrt{a}$. Wie man auch aus beliebigen komplexen Zahlen Wurzeln zieht, folgt in Kapitel 7 mit der Eulerschen Darstellung.

Mini-Aufgabe

Berechne $(2 + i)(2 - i)$ und $|2 + i|$. Was fällt dir auf?

Lösung

$$(2 + i)(2 - i) = 4 - 2i + 2i - i^2 = 4 + 1 = 5, \quad |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Es ist $(2 + i)(2 - i) = 5 = |2 + i|^2$ – gerade die Regel $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

2.7 Zusammenfassung Kapitel 2

Das Wichtigste aus Kapitel 2

- **Skalarprodukt** (Zahl): $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$; $= 0 \iff$ senkrecht.
- **Vektorprodukt** (Vektor): $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf beiden, $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ Parallelogrammfläche; antikommutativ ($\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$).

- **Spatprodukt** (Zahl): $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$; $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \text{Spatvolumen}$; $= 0 \iff$ komplanar.
- **Gerade:** $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$. **Ebene:** $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$ mit $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$; Abstand $\frac{|n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 - d|}{|\vec{n}|}$.
- **Komplexe Zahlen:** $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $|z|^2 = z\bar{z}$; Division durch Erweitern mit $\bar{z}_2$.

3 Funktionen

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Intervalle sauber schreiben und Mengen auf Beschränktheit untersuchen (Schranken, Supremum, Infimum, Maximum, Minimum)
- den Grenzwert einer Zahlenfolge bestimmen und mit dem Grenzwertsatz rechnen
- den Begriff der reellen Funktion, ihren Definitionsbereich, Symmetrie, Grenzwert und Stetigkeit verstehen
- die elementaren Funktionen (Polynome, rationale Funktionen, e^x , Hyperbel- und Winkelfunktionen) und ihre wichtigsten Eigenschaften wiedergeben
- Nullstellen von Polynomen mit dem Horner Schema abspalten
- Umkehrfunktionen bilden und die Umkehrfunktionen der elementaren Funktionen (Wurzel, ln, Area- und Arkusfunktionen) benennen

In diesem Kapitel geht es um den zentralen Begriff der Analysis: die **Funktion**. Damit wir Funktionen und ihre Grenzwerte sauber fassen können, klären wir zuerst, wie man Zahlenmengen ordnet und was es heißt, dass eine Folge von Zahlen einem Grenzwert „zustrebt“. Danach lernst du die wichtigsten elementaren Funktionen kennen – die Bausteine, aus denen fast alles Weitere zusammengesetzt ist.

3.1 Zahlenmengen und Folgen in $\mathbb{R}$

Intervalle

Ein **Intervall** ist ein zusammenhängendes Stück der Zahlengeraden. Ob die Randpunkte dazugehören, entscheidet die Klammer: eckig = „dabei“, rund = „nicht dabei“.

Für $a \leq b$ setzt man

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

offen (Ränder nicht dabei)

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

abgeschlossen (Ränder dabei)

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

halboffen

Mit dem Symbol ∞ schreibt man auch unbeschränkte Intervalle, z.B. $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$ oder $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$. Achtung: ∞ ist keine Zahl, die Klammer daneben ist *immer* rund.

Schranken, Supremum und Infimum

Manche Mengen „laufen nach oben davon“ (wie $\mathbb{N}$), andere sind eingesperrt. Das fasst der Begriff der Schranke.

Sei $M \subset \mathbb{R}$. M heißt **nach oben beschränkt**, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq s$ für alle $x \in M$; jedes solche s ist eine **obere Schranke**. Analog **nach unten beschränkt** mit einer **unteren Schranke**. M heißt **beschränkt**, wenn beides gilt.

Die *kleinste* obere Schranke heißt **Supremum** $\sup M$, die *größte* untere Schranke **Infimum** $\inf M$. Gehört das Supremum selbst zu M , so ist es das **Maximum** $\max M$; gehört das Infimum zu M , das **Minimum** $\min M$.

Supremum ohne Maximum

Für $M = (0, 1)$ ist jede Zahl ≥ 1 eine obere Schranke, die kleinste davon ist $\sup M = 1$. Da $1 \notin M$, besitzt M *kein* Maximum. Genauso ist $\inf M = 0$, aber es gibt kein Minimum. Bei $M = [0, 1]$ dagegen ist $\max M = 1$ und $\min M = 0$.

Supremum vs. Maximum

$\sup M$ und $\inf M$ existieren für jede (nach oben bzw. unten) beschränkte Menge – $\max M$ und $\min M$ nur, wenn dieser Randwert wirklich *in* M liegt. Merke: „sup und inf gibt es immer, max und min nur mit Glück.“

Mini-Aufgabe

Bestimme (falls vorhanden) $\sup$, $\inf$, $\max$ und $\min$ der Menge $M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$.

Lösung

Das größte Element ist 1 (bei $n = 1$), also $\sup M = \max M = 1$. Die Werte werden immer kleiner und nähern sich der 0, ohne sie je zu erreichen: $\inf M = 0$, aber $0 \notin M$, also gibt es *kein* Minimum.

Wichtig für alles Weitere ist noch der Begriff der **Umgebung**: Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

das offene Intervall der Breite 2ε um x_0 – also „alle Zahlen, die höchstens ε von x_0 entfernt sind“.

Zahlenfolgen

Ordnet man jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zu, so heißt diese unendliche Liste eine **Zahlenfolge** $\{a_n\}$. Man kann sie durch eine *Bestimmungsgleichung* $a_n = f(n)$ angeben oder *rekursiv* (jedes Glied aus den vorigen).

Drei Folgen

$$a_n = \frac{1}{n} : \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \quad a_n = q^n : \quad q, q^2, q^3, \dots$$

Rekursiv (das *Heron-Verfahren* für $\sqrt{2}$): $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$ liefert

$$1, 1,5, 1,41\bar{6}, 1,414216, \dots \rightarrow \sqrt{2} = 1,41421\dots$$

Grenzwert einer Folge

Der wichtigste Begriff bei Folgen: Konvergenz. Anschaulich heißt „ $\{a_n\}$ konvergiert gegen a “, dass die Folgenglieder a_n der Zahl a *beliebig nahe* kommen und dort bleiben.

Die Folge $\{a_n\}$ heißt **konvergent gegen** $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Man schreibt $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und nennt a den **Grenzwert**. Eine nicht konvergente Folge heißt **divergent**. Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**.

Die ε - n_0 -Schreibweise sieht abstrakt aus, meint aber nur: „Egal wie eng ich einen Schlauch ($a - \varepsilon, a + \varepsilon$) um a lege – ab irgendeinem n_0 liegen *alle* Folgenglieder in diesem Schlauch.“

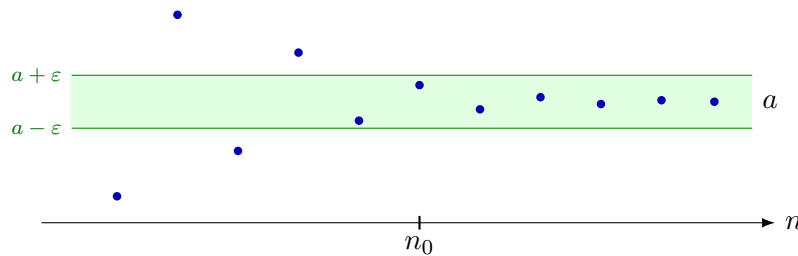


Abbildung 11: Konvergenz: Ab dem Index n_0 liegen alle Folgenglieder im grünen ε -Schlauch um den Grenzwert a .

Ein Grenzwert zu Fuß

Für $a_n = \frac{n-1}{n}$ vermuten wir $a = 1$. Der Abstand zum Grenzwert ist

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wird $\frac{1}{n} < \varepsilon$, sobald $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ab diesem Index ist der Abstand kleiner als ε , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Wächst eine Folge über jede Schranke hinaus, schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (**uneigentlicher Grenzwert**), z. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$. Das ist *keine* Konvergenz – die Folge hat keinen (endlichen) Grenzwert.

Konvergenz-Kriterien

- **Monoton + beschränkt $\Rightarrow$ konvergent:** Eine Folge, die nur wächst (oder nur fällt) und dabei beschränkt bleibt, besitzt stets einen Grenzwert.
- $\{a_n\}$ ist genau dann eine Nullfolge, wenn $\{|a_n|\}$ eine Nullfolge ist.
- $\lim a_n = a \iff \{a_n - a\}$ ist eine Nullfolge.

Am nützlichsten fürs Rechnen ist der Grenzwertsatz: Grenzwerte vertragen sich mit den Grundrechenarten.

Grenzwertsatz. Sind $a = \lim a_n$ und $b = \lim b_n$ vorhanden und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b, \quad \lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

Außerdem gilt das **Einschnürungsprinzip**: Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ und $\lim a_n = \lim b_n = a$, so ist auch $\lim c_n = a$.

Grenzwertsatz in Aktion

Gesucht $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{2n^2 - 5}$. Trick: durch die höchste Potenz n^2 kürzen:

$$\frac{3n^2 + n}{2n^2 - 5} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{5}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 0}{2 - 0} = \frac{3}{2},$$

denn $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ und $\frac{5}{n^2} \rightarrow 0$.

Mini-Aufgabe

Berechne mit demselben Trick $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 7}{n^2 + 1}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 2n}{n^3 + n^2}$.

Lösung

Erste Folge (durch n^2 kürzen): $\frac{4n + 7}{n^2 + 1} = \frac{\frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$.

Zweite Folge (durch n^3 kürzen): $\frac{5n^3 - 2n}{n^3 + n^2} = \frac{5 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{5}{1} = 5$.

3.2 Reelle Funktionen einer reellen Variablen

Jetzt zum eigentlichen Thema. Eine **Funktion** ist eine Vorschrift, die eindeutig zuordnet – jedem Eingabewert *genau einen* Ausgabewert.

Eine **Funktion** f ordnet jedem Element x einer Menge D_f (dem **Definitionsbereich**) genau ein Element $f(x)$ zu. Schreibweise:

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto f(x).$$

Ist $D_f \subset \mathbb{R}$, spricht man von einer **reellen Funktion einer reellen Variablen**. Gibt man nur die Gleichung $f(x)$ an, so ist D_f der *maximal mögliche* Definitionsbereich.

Definitionsbereich bestimmen

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x-2} : \quad D_f &= \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad (\text{Nenner} \neq 0), \\ f(x) = \sqrt{x-3} : \quad D_f &= [3, \infty) \quad (\text{Radikand} \geq 0). \end{aligned}$$

Das **Schaubild** (der Graph) von f entsteht, indem man im (x, y) -Koordinatensystem alle Punkte $(x, f(x))$ einträgt.

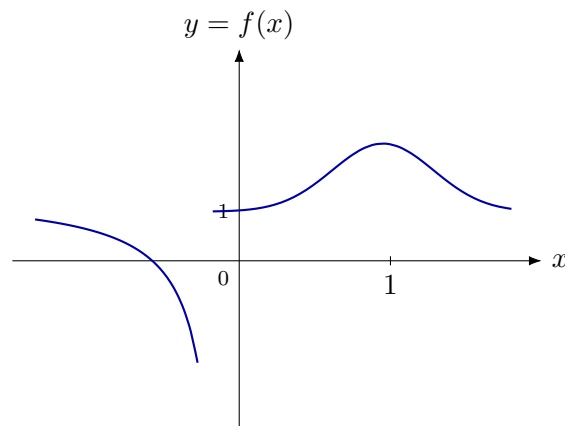


Abbildung 12: Schaubild einer Funktion: zu jedem x trägt man den Punkt $(x, f(x))$ ab. Der linke Ast strebt an einer Polstelle nach unten.

Symmetrie

Viele Funktionen haben eine spiegelbildliche Gestalt – das spart Arbeit beim Zeichnen und Rechnen.

Sei f auf $[-a, a]$ definiert. Dann heißt f

gerade $\iff f(-x) = f(x)$ (Graph symmetrisch zur y -Achse),

ungerade $\iff f(-x) = -f(x)$ (Graph punktsymmetrisch zum Ursprung).

Mini-Aufgabe

Ist $f(x) = x^4 - 3x^2$ gerade, ungerade oder keins? Und $g(x) = x^3 + x$?

Lösung

$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$ – also **gerade** (nur gerade Potenzen).

$g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x)$ – also **ungerade** (nur ungerade Potenzen).

Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

Analog zu Folgen fragt man: Wohin strebt $f(x)$, wenn x gegen eine Stelle x_0 läuft?

f besitzt bei x_0 den **Grenzwert** a , geschrieben $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, wenn $f(x)$ beliebig nahe an a liegt, sobald x nahe genug bei x_0 ist. Lässt man dabei nur $x < x_0$ zu, erhält man den **linksseitigen** Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, für $x > x_0$ den **rechtsseitigen** $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

f heißt **stetig** in x_0 , wenn der Grenzwert dort mit dem Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

f heißt **stetig auf** $[a, b]$, wenn dies in jedem Punkt gilt. Anschauung: Man kann den Graphen *ohne abzusetzen* zeichnen – kein Sprung, kein Loch.

Baukasten für stetige Funktionen

Sind f und g stetig, so sind auch $\alpha f + \beta g$, das Produkt $f \cdot g$ und (wo $g \neq 0$) der Quotient $\frac{f}{g}$ stetig. **Polynome sind überall stetig, rationale Funktionen außerhalb ihrer Polstellen.** Damit ist praktisch alles, was du aufschreibst, stetig – außer an offensichtlichen „Lücken“ (Nenner null, Sprungdefinitionen).

Ein besonders nützlicher Satz über stetige Funktionen ist der **Zwischenwertsatz**: Eine auf $[a, b]$ stetige Funktion nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an. Anschaulich: Wenn der Graph ohne abzusetzen von unten nach oben geht, muss er jede Höhe dazwischen kreuzen.

Nullstellensatz (Folgerung aus dem Zwischenwertsatz)

Ist f auf $[a, b]$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ *verschiedene Vorzeichen*, so besitzt f mindestens eine Nullstelle $x_0 \in (a, b)$, also $f(x_0) = 0$.

Mini-Aufgabe

Begründe mit dem Nullstellensatz, dass $f(x) = x^3 + x - 1$ im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle hat.

Lösung

f ist als Polynom stetig. Es ist $f(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$ und $f(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$. Die Vorzeichen sind verschieden, also liegt zwischen 0 und 1 mindestens eine Nullstelle.

3.3 Die elementaren Funktionen

Jetzt lernst du die „Grundausstattung“ kennen: die Funktionen, aus denen sich fast alle anderen zusammensetzen.

Polynome (ganzrationale Funktionen)

Ein **Polynom** (ganzrationale Funktion) vom **Grad** n hat die Form

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn *alle* ihre Koeffizienten übereinstimmen (Koeffizientenvergleich).

Der wichtigste Umgang mit Polynomen ist das **Abspalten von Nullstellen**: Ist x_0 eine Nullstelle ($P(x_0) = 0$), so lässt sich der Linearfaktor $(x - x_0)$ herausziehen,

$$P(x) = (x - x_0) P_1(x), \quad \text{grad } P_1 = n - 1.$$

Die Koeffizienten von P_1 liefert bequem das **Hornerschema**. Kann man $(x - x_0)$ sogar k -mal abspalten, so heißt x_0 eine **k -fache Nullstelle**.

Hornerschema

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ hat die Nullstelle $x_0 = 1$ (Probe: $1 - 2 - 5 + 6 = 0$). Wir spalten $(x - 1)$ ab. Man schreibt die Koeffizienten in eine Zeile und rechnet: Wert herunterziehen, mit x_0 multiplizieren, zur nächsten Spalte addieren.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ x_0 = 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \mathbf{0} \end{array}$$

Die letzte Null bestätigt: $x_0 = 1$ ist Nullstelle. Die übrigen Zahlen sind die Koeffizienten von P_1 :

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x - 3)(x + 2).$$

Die Nullstellen sind also $x = 1, 3, -2$.

Mini-Aufgabe

$P(x) = x^3 - 7x + 6$ hat die Nullstelle $x_0 = 1$. Spalte mit dem Hornerschema $(x - 1)$ ab und finde alle Nullstellen.

Lösung

Koeffizienten 1, 0, -7, 6 (der x^2 -Term fehlt, also 0!). Hornerschema mit $x_0 = 1$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \mathbf{0} \end{array}$$

Also $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$, Nullstellen $x = 1, 2, -3$.

Rationale Funktionen

Eine **rationale Funktion** ist ein Quotient zweier Polynome:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0.$$

Man setzt P und Q als **teilerfremd** voraus (keine gemeinsamen Nullstellen). Eine j -fache Nullstelle von Q heißt dann **j -fache Polstelle** von R . Außerhalb der Polstellen ist R stetig.

Definitionsbereich und Polstellen

$R(x) = \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$. Der Nenner verschwindet bei $x = 2$ und $x = -2$; dort liegen (einfache) Polstellen. Also $D_R = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Natürliche Exponentialfunktion

Eine der wichtigsten Funktionen überhaupt entsteht als Grenzwert: Man setzt $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ und lässt $n \rightarrow \infty$ gehen. Man kann zeigen, dass diese Folge für jedes feste x monoton wächst und beschränkt ist – also konvergiert.

Die **natürliche Exponentialfunktion** ist

$$e^x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Zahl $e = e^1 = 2,71828\dots$ heißt **Eulersche Zahl** (irrational, sogar transzendent). e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Rechenregeln ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$e^x > 0, \quad e^0 = 1, \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

Verhalten von e^x

e^x ist **streng monoton wachsend** und immer positiv. Für $x \rightarrow +\infty$ wächst e^x über alle Grenzen, für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^x \rightarrow 0$ (kommt der x -Achse beliebig nahe, ohne sie zu berühren). Wichtig ist der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

der später die Ableitung $(e^x)' = e^x$ erklärt.

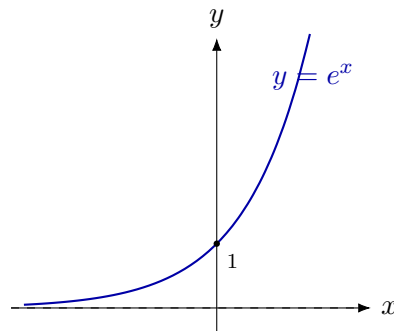


Abbildung 13: Die Exponentialfunktion e^x : überall positiv, streng wachsend, mit der x -Achse als Asymptote für $x \rightarrow -\infty$.

Mini-Aufgabe

Vereinfache $\frac{e^{3x} \cdot e^{-x}}{e^x}$ mit den Potenzgesetzen.

Lösung

Exponenten im Zähler addieren, dann den des Nenners subtrahieren:

$$\frac{e^{3x} \cdot e^{-x}}{e^x} = \frac{e^{3x-x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x.$$

Hyperbelfunktionen

Aus e^x und e^{-x} baut man die **Hyperbelfunktionen** – sie tauchen z. B. bei durchhängenden Ketten und Seilen auf.

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ (Sinus hyperbolicus),} \quad \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ (Kosinus hyperbolicus),}$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \neq 0).$$

Eigenschaften

Es gilt der „hyperbolische Pythagoras“

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Weiter ist $\sinh$ *ungerade* ($\sinh(-x) = -\sinh x$), $\cosh$ *gerade* ($\cosh(-x) = \cosh x$), und $|\tanh x| < 1$ mit $\tanh x \rightarrow 1$ für $x \rightarrow +\infty$.

Die Grundidentität nachrechnen

Mit den Definitionen:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2.$$

Die binomischen Formeln liefern $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$ und $(e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$. Die Differenz ist $\frac{1}{4}[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})] = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$.

Trigonometrische Funktionen

Winkel misst man in der Analysis im **Bogenmaß**: der Winkel α ist die Länge des Bogens, den er aus dem Einheitskreis (Radius 1) ausschneidet. Ein Vollkreis entspricht 2π , ein rechter Winkel $\frac{\pi}{2}$.

Am **Einheitskreis** definiert man zum Winkel α den Punkt $(\cos \alpha, \sin \alpha)$: die x -Koordinate ist $\cos \alpha$, die y -Koordinate $\sin \alpha$.

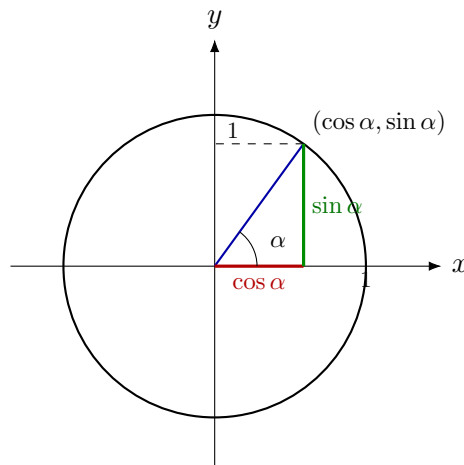


Abbildung 14: Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis: $\cos \alpha$ ist die waagerechte, $\sin \alpha$ die senkrechte Koordinate des Punktes auf dem Kreis.

Lässt man α (bzw. x) laufen, entstehen die vertrauten Wellen von Sinus und Kosinus. Beide haben die Periode 2π und Werte in $[-1, 1]$; der Kosinus ist der um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Sinus.

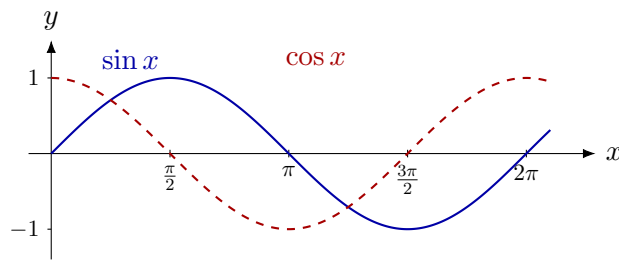


Abbildung 15: Sinus (blau) und Kosinus (rot gestrichelt): periodisch mit Periode 2π , Werte zwischen -1 und 1 .

Wichtige Beziehungen (Auswahl):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Tangens und Kotangens: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$, mit $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$.

Aus der Geometrie am Einheitskreis liest man für kleine Winkel $0 < h < \frac{\pi}{2}$ die Abschätzung $\sin h \leq h$ und $h \cos h \leq \sin h$ ab (die Bogenlänge h liegt zwischen zwei Strecken). Daraus folgt der für die Ableitung des Sinus zentrale Grenzwert.

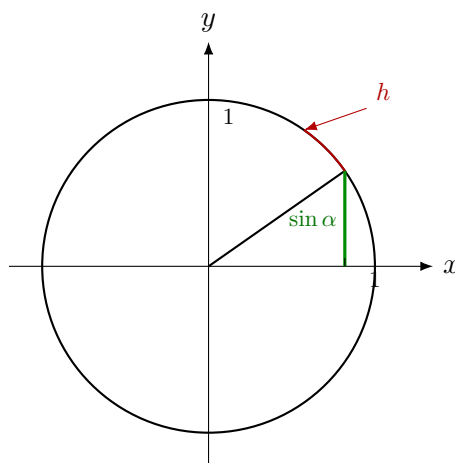


Abbildung 16: Abschätzung für den Sinus: die Bogenlänge h liegt zwischen $\sin \alpha$ und dem Tangentenabschnitt, woraus $\sin h \leq h$ folgt.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Mini-Aufgabe

Berechne mit den bekannten Werten $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ den Wert $\sin \frac{5\pi}{12}$ über das Additionstheorem. *Tipp:* $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$.

Lösung

Mit $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ und $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$:

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx 0,966.$$

3.4 Umkehrfunktionen

Oft will man eine Zuordnung „rückwärts“ lesen: Aus dem Ausgabewert y soll man den Eingabewert x zurückgewinnen. Das leistet die **Umkehrfunktion** – aber nur, wenn die Zuordnung eindeutig umkehrbar ist.

f heißt auf $[a, b]$ **eindeutig** (umkehrbar), wenn zu jedem Wert y des Bildes *genau ein* x mit $f(x) = y$ gehört. Dann existiert die **Umkehrfunktion** g mit

$$g(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(g(y)) = y.$$

Man schreibt oft $g = f^{-1}$.

Wann ist f umkehrbar?

Eine auf $[a, b]$ *stetige* Funktion ist genau dann umkehrbar, wenn sie **streng monoton** ist (streng wachsend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, oder streng fallend). Die Umkehrfunktion ist dann ebenfalls stetig und streng monoton in dieselbe Richtung.

Das Schaubild der Umkehrfunktion erhält man durch **Spiegelung an der Winkelhalbierenden** $y = x$: Vertauscht man in jedem Punkt (x, y) die Koordinaten zu (y, x) , wird aus dem Graphen von f der von g .

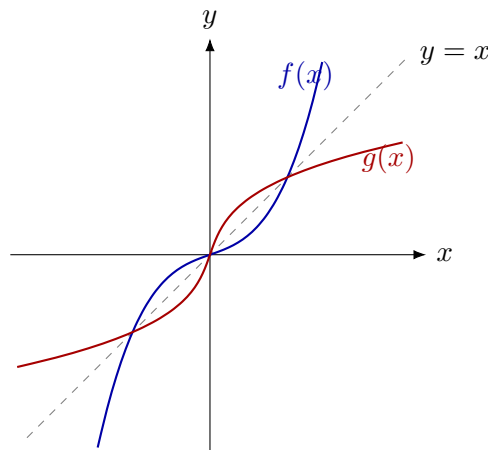


Abbildung 17: Umkehrfunktion: Der Graph von g (rot) ist die Spiegelung des Graphen von f (blau) an der Winkelhalbierenden $y = x$.

Mini-Aufgabe

Warum besitzt $f(x) = x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ *keine* Umkehrfunktion? Auf welchem Intervall wird sie umkehrbar?

Lösung

Auf ganz $\mathbb{R}$ ist f nicht eineindeutig: z. B. liefern $x = 2$ und $x = -2$ denselben Wert $f = 4$. Erst auf $[0, \infty)$ (oder auf $(-\infty, 0]$) ist f streng monoton – dort ist die Umkehrfunktion $g(x) = \sqrt{x}$.

3.5 Umkehrfunktionen der elementaren Funktionen

Wenden wir das Umkehr-Prinzip auf die elementaren Funktionen an – so entstehen Wurzeln, Logarithmus, Area- und Arkusfunktionen.

Wurzelfunktionen

$f(x) = x^{2n}$ (gerade Potenz) ist auf $[0, \infty)$ streng wachsend; die Umkehrfunktion ist die $2n$ -te Wurzel $g(x) = \sqrt[2n]{x}$, $x \geq 0$. $f(x) = x^{2n+1}$ (ungerade Potenz) ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng wachsend, die Umkehrfunktion $g(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ ist dann für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Logarithmus und allgemeine Potenz

Da e^x streng monoton wachsend ist, besitzt sie eine Umkehrfunktion – den **natürlichen Logarithmus**.

Der **natürliche Logarithmus** $\ln$ ist die Umkehrfunktion von e^x :

$$y = \ln x \ (x > 0) \iff e^y = x, \quad \ln(e^x) = x, \quad e^{\ln x} = x.$$

Logarithmusgesetze (für $a, b > 0$, $r \in \mathbb{R}$):

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln(a^r) = r \ln a$$

Speziell $\ln 1 = 0$ und $\ln e = 1$. $\ln x$ ist stetig und streng monoton wachsend.

Mit dem Logarithmus definiert man die **allgemeine Potenz** und den **Logarithmus zur Basis a** :

$$a^x := e^{x \ln a} \ (a > 0), \quad x^r := e^{r \ln x} \ (x > 0), \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \ (a > 0, \ a \neq 1).$$

Die letzte Gleichung sagt: $\log_a$ ist nur ein *Vielfaches* des $\ln$ – deshalb genügt in der Analysis fast immer der natürliche Logarithmus.

Logarithmusgesetze anwenden

$$\ln \frac{e^3}{5} = \ln(e^3) - \ln 5 = 3 - \ln 5 \approx 3 - 1,609 = 1,391.$$

$$\text{Und die Umrechnung } \log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{\ln(2^3)}{\ln 2} = \frac{3 \ln 2}{\ln 2} = 3 \text{ (denn } 2^3 = 8).$$

Mini-Aufgabe

Löse die Gleichung $e^{2x} = 7$ nach x auf. Vereinfache außerdem $\ln(a^2b) - 2 \ln a$.

Lösung

Logarithmieren: $2x = \ln 7 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln 7 \approx 0,973$.

Mit den Gesetzen: $\ln(a^2b) - 2 \ln a = \ln a^2 + \ln b - 2 \ln a = 2 \ln a + \ln b - 2 \ln a = \ln b$.

Areafunktionen

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen **Areafunktionen**. Da $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ aus e^x gebaut sind, lassen sie sich alle durch den $\ln$ ausdrücken.

Areasinus hyperbolicus

Aus $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ folgt $2y = e^x - e^{-x}$. Multiplikation mit e^x liefert die quadratische Gleichung in e^x :

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \implies e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

(nur das $+$ liefert $e^x > 0$). Logarithmieren und $x \leftrightarrow y$ tauschen ergibt die Umkehrfunktion.

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1,$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1, \quad \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1.$$

Achtung!

Achte auf die Definitionsbereiche: arcosh braucht $x \geq 1$, artanh ist nur für $|x| < 1$ erklärt, arcoth dagegen nur für $|x| > 1$ (nicht $|x| < 1$!). Setzt man einen Wert außerhalb ein, entstehen Wurzeln oder Logarithmen negativer Zahlen.

Arkusfunktionen

Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen heißen **Arkusfunktionen**. Da Sinus, Kosinus und Tangens periodisch (und damit nicht eineindeutig) sind, muss man sich auf ein Intervall beschränken, auf dem sie streng monoton sind – den **Hauptzweig**.

$$y = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |\arctan x| < \frac{\pi}{2} \quad (\text{Umkehrung von } \tan \text{ auf } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})),$$

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1], \quad |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{Umkehrung von } \sin \text{ auf } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]),$$

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1, 1], \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi \quad (\text{Umkehrung von } \cos \text{ auf } [0, \pi]).$$

Zwischen ihnen gilt der praktische Zusammenhang $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

Kehrt man die Winkelfunktion auf einem anderen (verschobenen) Intervall um, erhält man die **Nebenzweige**. Wegen $\tan(x + k\pi) = \tan x$ bzw. $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x$ gilt

$$\arctan_k x = \arctan x + k\pi, \quad \arcsin_k x = k\pi + (-1)^k \arcsin x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Auch hier entstehen die Schaubilder durch Spiegelung der Ausgangsfunktion an $y = x$.

Mini-Aufgabe

Bestimme $\arcsin \frac{1}{2}$, $\arccos \frac{1}{2}$ und $\arctan 1$ (im Bogenmaß, jeweils Hauptzweig). Prüfe damit die Beziehung $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ für $x = \frac{1}{2}$.

Lösung

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ (denn $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$), $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ (denn $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$), $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (denn $\tan \frac{\pi}{4} = 1$).

Probe: $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - \pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = \arccos \frac{1}{2}$. ✓

3.6 Zusammenfassung Kapitel 3

Das Wichtigste aus Kapitel 3

- **Schranken:** sup / inf existieren für beschränkte Mengen immer, max / min nur, wenn der Randwert dazugehört.
- **Folgen:** $\lim a_n = a$ heißt „ab n_0 liegen alle a_n im ε -Schlauch“. Grenzwertsatz + „durch höchste Potenz kürzen“; monoton + beschränkt $\Rightarrow$ konvergent.
- **Funktion:** eindeutige Zuordnung; D_f = maximaler Definitionsbereich. **Stetig** $\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (ohne Absetzen zeichenbar). Nullstellensatz: Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ Nullstelle.
- **Elementare Funktionen:** Polynome ($\rightarrow$ Nullstellen mit Horner Schema abspalten), rationale Funktionen ($\rightarrow$ Polstellen), e^x (> 0 , $e^{x+y} = e^x e^y$), sinh / cosh ($\cosh^2 - \sinh^2 = 1$), sin / cos (Periode 2π , $\sin^2 + \cos^2 = 1$, Additionstheoreme).
- **Umkehrung:** stetig + streng monoton $\Rightarrow$ umkehrbar; Graph durch Spiegelung an $y = x$.
- **Umkehrfunktionen:** Wurzel ($\leftrightarrow$ Potenz), ln ($\leftrightarrow e^x$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$), Areafunktionen (durch ln), Arkusfunktionen (arcsin, arccos, arctan auf Hauptzweigen; $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$).

4 Differentialrechnung

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten deuten und die Tangente an ein Schaubild aufstellen
- mit den Ableitungsregeln (Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) sicher differenzieren
- die Ableitung einer Umkehrfunktion bestimmen
- die Ableitungen der elementaren Funktionen aus einer Tabelle abrufen und anwenden
- mit dem Mittelwertsatz und den Sätzen über differenzierbare Funktionen umgehen
- einen Kurvenverlauf untersuchen: Monotonie, Konvexität, relative Extremwerte
- Grenzwerte mit der Regel von de l'Hospital berechnen
- den Schnittwinkel zweier Kurven bestimmen sowie Nullstellen mit einfacher Iteration und dem Newton-Verfahren näherungsweise finden

Die Differentialrechnung fragt: *Wie schnell ändert sich eine Größe?* Die Steigung einer Straße, die Momentangeschwindigkeit eines Autos, die Grenzkosten in der Produktion – all das sind **Ableitungen**. In diesem Kapitel bauen wir das Handwerkszeug auf, mit dem du jede der gängigen Funktionen ableiten und damit Kurven untersuchen und Gleichungen näherungsweise lösen kannst.

4.1 Ableitung und Tangente

Wir starten bei einer Funktion f , die auf einem Intervall (a, b) definiert ist, und einer festen Stelle x_0 darin. Verbindet man die beiden Kurvenpunkte bei x_0 und bei x durch eine Gerade (eine **Sekante**), so hat diese die Steigung

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x \neq x_0).$$

Dieser Ausdruck heißt **Differenzenquotient**. Lässt man nun x immer näher an x_0 rücken, so geht die Sekante in die **Tangente** über – und ihre Steigung nennen wir die Ableitung.

f heißt in x_0 **differenzierbar** (kurz: diffbar), wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt **Ableitung** von f in x_0 und ist die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Ist f in *jedem* Punkt von (a, b) diffbar, so ist $f'(x)$ selbst wieder eine Funktion – die **erste Ableitung**. Leitet man diese erneut ab, erhält man $f''(x)$ (zweite Ableitung), allgemein die k -te Ableitung $f^{(k)}(x)$. Übliche Schreibweisen:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x).$$

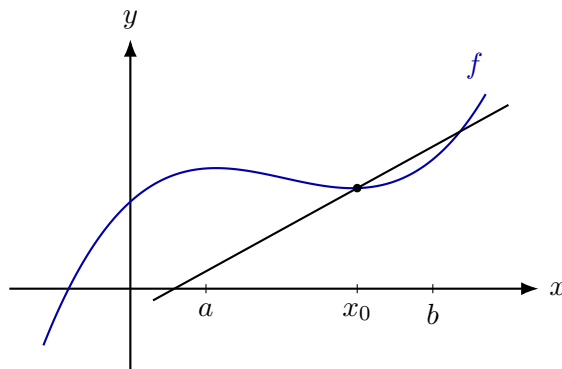


Abbildung 18: Tangente an eine Funktion. Die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ hat die Steigung $f'(x_0)$; sie schmiegt sich der Kurve dort am besten an.

Gleichung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Differentielle Schreibweise: $df = f'(x_0) dx$.

Tangente an eine Parabel

Gesucht ist die Tangente an $f(x) = x^2$ im Punkt bei $x_0 = 1$. Mit $f(1) = 1$ und $f'(x) = 2x$, also $f'(1) = 2$, wird die Tangentengleichung

$$y - 1 = 2(x - 1) \iff y = 2x - 1.$$

Die Tangente berührt die Parabel im Punkt $(1, 1)$ und hat dort die Steigung 2.

Mini-Aufgabe

Bestimme die Gleichung der Tangente an $f(x) = x^3$ im Punkt bei $x_0 = 2$. (Ableitung: $f'(x) = 3x^2$.)

Lösung

$f(2) = 8$ und $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$. Damit

$$y - 8 = 12(x - 2) \iff y = 12x - 16.$$

4.2 Ableitungsregeln

Man muss nicht jede Ableitung mühsam über den Grenzwert ausrechnen. Für zusammengesetzte Funktionen gibt es feste Regeln. Sind f und g diffbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt:

Faktor- und Summenregel:

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

Produktregel:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

Quotientenregel (an Stellen mit $g(x) \neq 0$):

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$$

Kettenregel (äußere Funktion h , innere Funktion f):

$$[h(f(x))]' = h'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Eselsbrücken

- **Produktregel:** „erste mal Ableitung der zweiten, plus Ableitung der ersten mal zweite“.
- **Quotientenregel:** Im Zähler steht ein *Minus* – die Reihenfolge $f'g - fg'$ ist wichtig! Merke: „Nenner mal Ableitung Zähler minus Zähler mal Ableitung Nenner, alles durch Nenner zum Quadrat“.
- **Kettenregel:** „äußere Ableitung mal innere Ableitung“ (Nachdifferenzieren nicht vergessen).

Produkt- und Quotientenregel

(a) **Produktregel.** $f(x) = x^2 \sin x$. Mit $(x^2)' = 2x$ und $(\sin x)' = \cos x$:

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

(b) **Quotientenregel.** $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$. Mit $(x^2 - 1)' = 2x$ und $(x + 2)' = 1$:

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2 - 1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}.$$

Kettenregel

$f(x) = \sin(3x^2 + 1)$. Äußere Funktion $h(u) = \sin u$ mit $h'(u) = \cos u$, innere Funktion $u = 3x^2 + 1$ mit $u' = 6x$. Also

$$f'(x) = \cos(3x^2 + 1) \cdot 6x = 6x \cos(3x^2 + 1).$$

Mini-Aufgabe

Leite ab:

1. $f(x) = (2x - 5)^4$ (Kettenregel)
2. $f(x) = x e^x$ (Produktregel)
3. $f(x) = e^{-x^2/2}$ (Kettenregel)

Lösung

1. $f'(x) = 4(2x - 5)^3 \cdot 2 = 8(2x - 5)^3.$
2. $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x) e^x.$
3. Innere Ableitung $\left(-\frac{x^2}{2}\right)' = -x$, also $f'(x) = -x e^{-x^2/2}.$

4.3 Ableitung einer Umkehrfunktion

Ist f diffbar und umkehrbar, so kann man auch die Umkehrfunktion g ableiten – ohne sie explizit zu kennen. Weil g die Wirkung von f rückgängig macht, gilt $f(g(x)) = x$. Leitet man beide Seiten mit der Kettenregel ab, folgt $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$, und daraus:

Ableitung der Umkehrfunktion (mit $f'(g(x)) \neq 0$):

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Wurzel als Umkehrung des Quadrats

Für $x > 0$ ist $g(x) = \sqrt{x}$ die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$. Mit $f'(x) = 2x$ ist $f'(g(x)) = 2\sqrt{x}$, also

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Das passt genau zur Potenzregel: $(x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Genau nach diesem Muster gewinnt man in der nächsten Tabelle die Ableitungen von $\ln$, $\arcsin$, $\arctan$ und den Areafunktionen.

4.4 Ableitungen der elementaren Funktionen

Die Grundbausteine sollte man auswendig können. Ein paar davon leitet man schnell selbst her, den Rest schlägt man in der Tabelle nach.

Die wichtigsten Herleitungen

Potenzfunktion x^n

Für $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) liefert der binomische Satz

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{1}{h} \left(\underbrace{nx^{n-1}h}_{k=1\text{-Term}} + \text{Terme mit } h^2, h^3, \dots \right) = nx^{n-1} + (\text{geht gegen } 0).$$

Im Grenzübergang $h \rightarrow 0$ bleibt $f'(x) = nx^{n-1}$. Allgemeiner gilt für jede reelle Potenz $(x^a)' = ax^{a-1}$ (für $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$).

Exponential- und Logarithmusfunktion

Für $f(x) = e^x$ ist

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} e^x \cdot 1, \quad \text{also } (e^x)' = e^x.$$

Den Logarithmus als Umkehrfunktion behandelt man wie oben: aus $e^{\ln x} = x$ folgt $e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = 1$, also $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ für $x > 0$. Für $x \neq 0$ gilt sogar $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

Damit ergeben sich auch die allgemeine Potenz und die allgemeine Exponentialfunktion über $a^x = e^{x \ln a}$ bzw. $x^a = e^{a \ln x}$:

$$(a^x)' = (\ln a) a^x \quad (a > 0), \quad (x^a)' = a x^{a-1} \quad (x > 0).$$

Tabelle der Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^a, a \in \mathbb{R}$	$a x^{a-1}$	$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
$a^x, a > 0$	$a^x \ln a$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\log_a x $	$\frac{1}{x \ln a}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$		

Logarithmische Ableitung

Steht eine Variable sowohl in der Basis als auch im Exponenten, hilft der Trick $(f(x))^{g(x)} := e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ (für $f(x) > 0$). Praktisch ist auch die **logarithmische Ableitung**: für $f(x) > 0$ gilt

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Mini-Aufgabe

Leite mit Hilfe der Tabelle ab:

1. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
2. $f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$

Lösung

1. Kettenregel mit $(\ln u)' = \frac{1}{u}$ und $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
2. $f'(x) = 3 \cos x - 2 \cdot (-\sin x) = 3 \cos x + 2 \sin x$.

4.5 Sätze über differenzierbare Funktionen

Bevor wir Kurven untersuchen, brauchen wir ein paar Grundtatsachen. Sie klingen theoretisch, sind aber die Basis für alles Folgende.

Differenzierbar $\Rightarrow$ stetig

Ist f auf $[a, b]$ diffbar, so ist f dort auch **stetig**. (Anschaulich: Wo eine Tangente existiert, kann die Kurve keinen Sprung machen.) Die Umkehrung gilt *nicht* – z. B. hat $|x|$ bei 0 einen Knick: stetig, aber nicht diffbar.

Extremstellen und stationäre Punkte

Ein Punkt x_0 heißt **relatives Maximum** (bzw. Minimum), wenn $f(x_0)$ in einer kleinen Umgebung von x_0 der größte (bzw. kleinste) Wert ist. Der Schlüssel zum Auffinden solcher Stellen ist der folgende Satz.

Notwendige Bedingung für ein Extremum: Ist f auf $[a, b]$ diffbar und besitzt f an einer *inneren* Stelle $x_0 \in (a, b)$ ein relatives Extremum, so gilt

$$f'(x_0) = 0$$

Die Nullstellen von f' heißen **stationäre Stellen** (oder kritische Punkte). **Achtung:** $f'(x_0) = 0$ ist *notwendig*, aber nicht hinreichend – es könnte auch ein Sattelpunkt sein (siehe unten).

Warum $f'(x_0) = 0$?

Hat f bei x_0 ein relatives Maximum, so ist $f(x) - f(x_0) \leq 0$ für alle x nahe x_0 . Für den Differenzenquotienten bedeutet das

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x > x_0, \\ \geq 0 & \text{für } x < x_0. \end{cases}$$

Im Grenzübergang $x \rightarrow x_0$ muss der (existierende) Grenzwert $f'(x_0)$ zugleich ≤ 0 und ≥ 0 sein – also $f'(x_0) = 0$. Für ein Minimum verläuft das Argument analog. $\square$

Der Mittelwertsatz

Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Ist f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) diffbar, so existiert mindestens eine Zwischenstelle $\eta \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\eta)$$

WICHTIG!

Der Mittelwertsatz sagt: Irgendwo zwischen a und b ist die *Momentansteigung* $f'(\eta)$ genau so groß wie die *mittlere Steigung* über das ganze Intervall. Bildlich: Fährst du in 2 Stunden 180 km (Schnitt 90 km/h), so zeigt dein Tacho mindestens einmal genau 90 km/h an. Der Sonderfall $f(a) = f(b)$ heißt **Satz von Rolle**: dann gibt es ein η mit $f'(\eta) = 0$.

Satz von Rolle konkret

Auf welche Zwischenstelle η führt der Satz von Rolle für $f(x) = x^2 - 4x$ auf dem Intervall $[0, 4]$? (Es ist $f(0) = f(4) = 0$.)

Lösung

$f'(x) = 2x - 4$. Aus $f'(\eta) = 0$ folgt $\eta = 2$ – genau die Mitte des Intervalls (der Scheitel der Parabel).

4.6 Anwendung: Kurvenverlauf

Mit der ersten und zweiten Ableitung lässt sich der Verlauf eines Schaubilds vollständig beschreiben.

Monotonie

Ist f auf $[a, b]$ diffbar und hat f' dort nur endlich viele Nullstellen, so gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \text{ auf } [a, b] &\Rightarrow f \text{ streng monoton } \mathbf{wachsend}, \\ f'(x) \leq 0 &\Rightarrow f \text{ streng monoton } \mathbf{fallend}. \end{aligned}$$

Konvex und konkav

Eine Funktion heißt auf $[a, b]$ **konvex** (linksgekrümmt), wenn ihr Schaubild zwischen je zwei Kurvenpunkten *unterhalb* der Verbindungsstrecke verläuft. Formal: für alle x_1, x_2 und $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$t f(x_1) + (1 - t) f(x_2) \geq f(tx_1 + (1 - t)x_2).$$

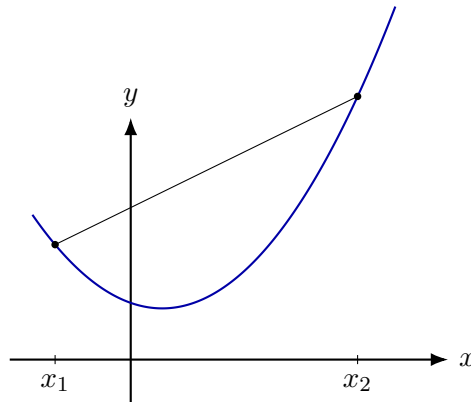


Abbildung 19: Konvexe (linksgekrümmte) Funktion. Zwischen zwei Kurvenpunkten liegt das Schaubild unterhalb der Verbindungsstrecke.

Krümmungskriterium (falls f'' existiert):

$$\begin{aligned} f''(x) \geq 0 \text{ auf } [a, b] &\Rightarrow f \text{ } \mathbf{konvex} \text{ (linksgekrümmt)}, \\ f''(x) \leq 0 &\Rightarrow f \text{ } \mathbf{konkav} \text{ (rechtsgekrümmt)}. \end{aligned}$$

4.7 Anwendung: Relative Extremwerte

Jetzt kombinieren wir alles zu einem festen Kochrezept für Extremstellen.

Rezept: relative Extrema bestimmen

f sei (zweimal) stetig diffbar.

1. **Kandidaten:** löse $f'(x) = 0$ (notwendige Bedingung).

2. **Vorzeichenwechsel von f'** an der Stelle x_0 :

- f' wechselt von $+$ nach $- \Rightarrow$ relatives **Maximum**;
- f' wechselt von $-$ nach $+$ $\Rightarrow$ relatives **Minimum**;
- **kein** Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ **Sattelpunkt**.

3. **Alternative (2. Ableitung)** bei $f'(x_0) = 0$:

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{Minimum}, \quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{Maximum}, \quad f''(x_0) = 0 \Rightarrow \text{keine Aussage.}$$

Vollständige Kurvenuntersuchung

Untersuche $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ auf Extrema.

1. **Ableitungen:** $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$, $f''(x) = 6x - 12$.

2. **Stationäre Stellen:** $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

3. **Art der Extrema** über f'' :

$$f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum bei } x = 1,$$

$$f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum bei } x = 3.$$

4. **Funktionswerte:** $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$, $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$.

Ergebnis: Hochpunkt $(1, 5)$, Tiefpunkt $(3, 1)$. Der Wendepunkt liegt bei $f''(x) = 0$, also $x = 2$ (dort $f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$).

Mini-Aufgabe

Bestimme die relativen Extrema von $f(x) = x^3 - 3x$. (Es ist $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$.)

Lösung

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ oder } x = 1.$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Maximum bei } x = -1, \quad f(-1) = -1 + 3 = 2,$$

$$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Minimum bei } x = 1, \quad f(1) = 1 - 3 = -2.$$

Hochpunkt $(-1, 2)$, Tiefpunkt $(1, -2)$.

4.8 Anwendung: Regel von de l'Hospital

Grenzwerte der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ sind zunächst **unbestimmt** – Einsetzen hilft nicht. Die Regel von de l'Hospital rettet die Lage: man leitet Zähler und Nenner *getrennt* ab.

Regel von de l'Hospital. Gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (oder beide $\rightarrow \pm\infty$) und ist $g'(x) \neq 0$ nahe x_0 , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der rechte Grenzwert existiert. Das gilt auch für $x_0 = \pm\infty$.

Achtung!

De l'Hospital darf man **nur** bei einem unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ anwenden. Und Achtung: Es wird *nicht* die Quotientenregel benutzt – Zähler und Nenner werden **einzeln** abgeleitet! Führt der erste Versuch wieder auf $\frac{0}{0}$, darf man die Regel erneut anwenden.

Drei Grenzwerte mit de l'Hospital

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ist von der Form $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (Form $\frac{0}{0}$, zweimal anwenden):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ (Form $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1.$$

Andere unbestimmte Formen

Ausdrücke wie $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ oder ∞^0 formt man *zuerst* in einen Bruch um, damit $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ entsteht:

$$0 \cdot \infty : f \cdot g = \frac{f}{1/g}, \quad \infty - \infty : \text{ auf einen Bruch bringen, } \quad 0^0, 1^\infty, \infty^0 : f^g = e^{g \ln f}.$$

Mini-Aufgabe

Berechne mit de l'Hospital:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ (Tipp: als $\frac{\ln x}{1/x}$ schreiben)

Lösung

1. Form $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ ist von der Form $\frac{-\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

4.9 Anwendung: Schnittwinkel zwischen Kurven

Schneiden sich zwei Kurven f und g bei $x = x_0$, so besitzen beide dort eine Tangente. Der Winkel α zwischen diesen Tangenten heißt **Schnittwinkel**. Weil eine Tangente die Steigung $\tan \alpha_1 = f'(x_0)$ bzw. $\tan \alpha_2 = g'(x_0)$ mit der x -Achse einschließt und $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ ist, liefert das Additionstheorem für den Tangens:

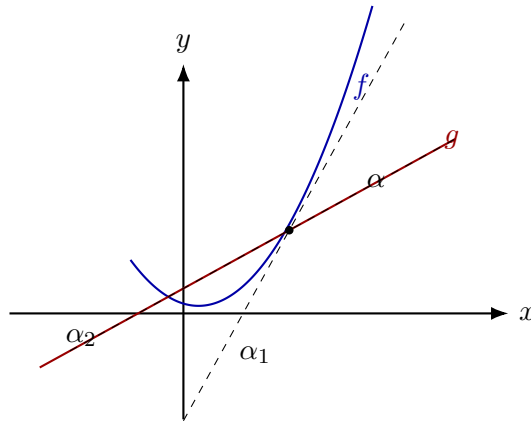


Abbildung 20: Schnittwinkel zwischen zwei Kurven. Die Tangenten an f und g im Schnittpunkt schließen den Winkel $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ ein.

Schnittwinkel α zweier Kurven im Schnittpunkt bei x_0 :

$$\tan \alpha = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \quad (\text{für } f'(x_0)g'(x_0) \neq -1).$$

Senkrecht schneiden sich die Kurven genau dann, wenn $f'(x_0)g'(x_0) = -1$.

Schnittwinkel Parabel und Wurzel

Die Kurven $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ schneiden sich im Punkt bei $x_0 = 1$ (dort $f(1) = g(1) = 1$). Die Steigungen sind

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2, \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = \frac{1}{2}.$$

Damit

$$\tan \alpha = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = \arctan(0,75) \approx 36,87^\circ.$$

Mini-Aufgabe

Unter welchem Winkel schneidet die Gerade $g(x) = x$ die Parabel $f(x) = x^2$ im Ursprung $x_0 = 0$?

Lösung

$f'(0) = 0$ und $g'(0) = 1$. Also

$$\tan \alpha = \frac{0 - 1}{1 + 0 \cdot 1} = -1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

(Der Betrag liefert den Schnittwinkel 45° ; die Gerade ist ja die Winkelhalbierende.)

4.10 Anwendung: Einfache Iteration und Newton-Verfahren

Viele Gleichungen $f(x) = 0$ lassen sich nicht mehr „per Hand“ lösen (etwa $x^3 - x - 1 = 0$). Dann bestimmt man die Nullstelle $\bar{x}$ **näherungsweise** durch wiederholtes Anwenden einer Rechenvorschrift – eine **Iteration**.

Einfache Iteration (Fixpunktverfahren)

Man schreibt das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ zunächst in ein **Fixpunktproblem** $x = g(x)$ um, z. B. über $g(x) = x + \alpha f(x)$ mit einem $\alpha \neq 0$. Eine Lösung $\bar{x} = g(\bar{x})$ heißt **Fixpunkt**. Mit einer groben Startnäherung x_0 iteriert man dann

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

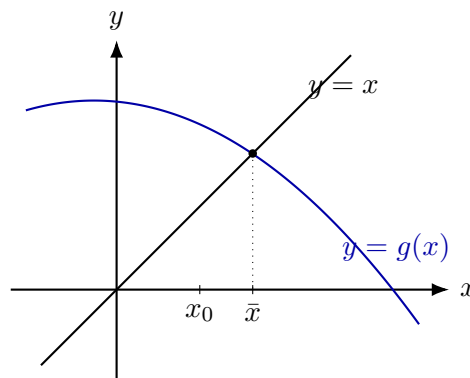


Abbildung 21: Einfache Iteration. Der gesuchte Fixpunkt $\bar{x}$ ist der Schnittpunkt der Kurve $y = g(x)$ mit der Winkelhalbierenden $y = x$.

Konvergenzbedingung

Die Folge $\{x_n\}$ konvergiert gegen den Fixpunkt $\bar{x}$, wenn $|g'(x)| \leq q < 1$ auf einem Intervall um $\bar{x}$ gilt, das die Startnäherung enthält. Je kleiner $|g'|$, desto schneller die Konvergenz. Ist $|g'| > 1$, läuft die Iteration weg.

Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist eine besonders schnelle Iteration. Die Idee: Ersetze die Kurve bei x_n durch ihre **Tangente** und nimm deren Nullstelle als nächste Näherung. Aus der Tangentengleichung $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ mit $y = 0$ folgt der Schnittpunkt mit der x -Achse:

Newton-Verfahren (mit $f'(x_n) \neq 0$):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

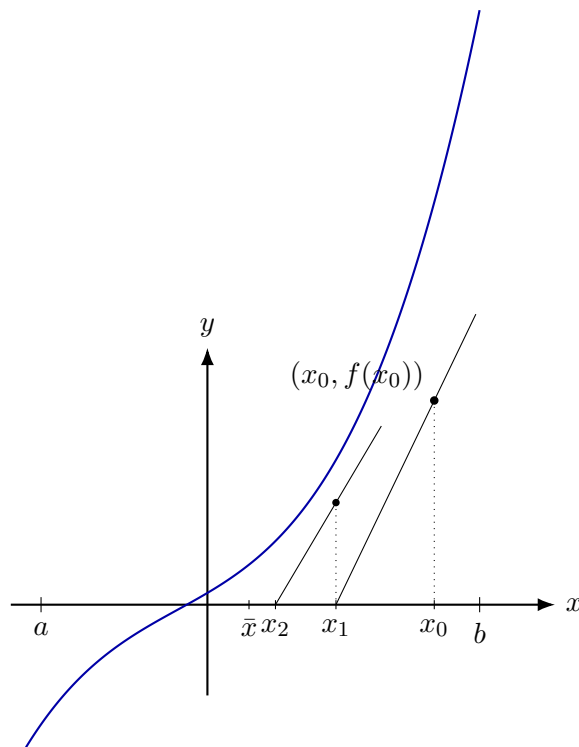


Abbildung 22: Newton-Verfahren. Die Tangente in $(x_n, f(x_n))$ schneidet die x -Achse bei x_{n+1} ; die Näherungen $x_0, x_1, x_2, \dots$ rücken rasch an die Nullstelle $\bar{x}$ heran.

Newton-Verfahren für $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ ist die positive Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$. Mit $f'(x) = 2x$ lautet die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Start mit $x_0 = 2$:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = 1,5,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(1,5 + \frac{2}{1,5} \right) = 1,41\bar{6},$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(1,41\bar{6} + \frac{2}{1,41\bar{6}} \right) \approx 1,414216,$$

$$x_4 \approx 1,414214.$$

Zum Vergleich: $\sqrt{2} = 1,414214\dots$ – schon nach vier Schritten stimmen sechs Nachkommastellen. Man sieht die berühmte *quadratische* Konvergenz des Verfahrens: Die Zahl der korrekten Stellen verdoppelt sich pro Schritt.

Hinreichende Konvergenzbedingung

Ist f zweimal diffbar und gilt auf einem Intervall um $\bar{x}$, das die Startnäherung enthält,

$$\left| \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq q < 1,$$

so konvergiert die Newton-Folge $\{x_n\}$ gegen $\bar{x}$. In der Praxis: Startwert nahe genug an der Nullstelle wählen und $f'(x_n) \neq 0$ beachten.

Mini-Aufgabe

Führe für $f(x) = x^3 - x - 1$ (Nullstelle nahe $x_0 = 1,5$) *einen* Newton-Schritt aus. (Es ist $f'(x) = 3x^2 - 1$.)

Lösung

$f(1,5) = 3,375 - 1,5 - 1 = 0,875$ und $f'(1,5) = 3 \cdot 2,25 - 1 = 5,75$. Damit

$$x_1 = 1,5 - \frac{0,875}{5,75} \approx 1,5 - 0,15217 = 1,34783.$$

(Weitere Schritte führen auf $\bar{x} \approx 1,32472$.)

4.11 Zusammenfassung Kapitel 4

Das Wichtigste aus Kapitel 4

- **Ableitung:** $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ist die Tangentensteigung; Tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
- **Ableitungsregeln:** Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$; Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$; Kettenregel $[h(f(x))]' = h'(f(x)) f'(x)$; Umkehrfunktion $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.
- **Elementare Ableitungen:** $(x^a)' = ax^{a-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ (Rest: Tabelle).
- **Mittelwertsatz:** $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\eta)$ für ein $\eta \in (a, b)$; Sonderfall $f(a) = f(b)$: Satz von Rolle.
- **Kurvenverlauf:** $f' > 0$ wachsend, $f' < 0$ fallend; $f'' > 0$ konvex, $f'' < 0$ konkav.
- **Relative Extrema:** notwendig $f'(x_0) = 0$; hinreichend Vorzeichenwechsel von f' bzw. $f''(x_0) > 0$ (Minimum) / $f''(x_0) < 0$ (Maximum); kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ Sattelpunkt.
- **de l'Hospital:** bei $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$ (Zähler und Nenner *einzel*n ableiten).
- **Schnittwinkel:** $\tan \alpha = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}$; senkrecht $\Leftrightarrow f'(x_0)g'(x_0) = -1$.
- **Newton-Verfahren:** $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ – schnelle Nullstellennäherung; einfache Iteration: $x_{n+1} = g(x_n)$ mit $|g'| < 1$.

5 Integralrechnung

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- das bestimmte Integral als Grenzwert von Riemannsummen (Flächeninhalt) und den **Hauptsatz** $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ verstehen und anwenden
- Stammfunktionen mit der Grundintegral-Tabelle, mit Substitution und mit partieller Integration bestimmen
- rationale Funktionen über die **Partialbruchzerlegung** integrieren
- Flächen, Bogenlängen, Rotationsvolumen, Schwerpunkte und Mittelwerte mit Integralen berechnen
- **uneigentliche** Integrale (unendliche Grenzen oder Polstellen) auswerten
- Integrale mit der **Trapez-** und der **Simpsonformel** numerisch nähern und die Fehler abschätzen

Das Differenzieren aus Kapitel 4 beantwortet die Frage „Wie schnell ändert sich etwas?“. Die Integralrechnung dreht den Spieß um: Sie sammelt viele kleine Beiträge zu einer Gesamtgröße auf – eine Fläche unter einer Kurve, eine zurückgelegte Strecke aus einer Geschwindigkeit, eine Masse aus einer Dichte. Der **Hauptsatz** verbindet beide Welten: Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens. Genau das macht das Rechnen mit Integralen so mächtig.

5.1 Riemannsummen und bestimmtes Integral

Wie misst man den Flächeninhalt unter dem Schaubild einer Funktion f über einem Intervall $[a, b]$, wenn der Rand krumm ist? Die Idee ist einfach: Wir zerschneiden das Intervall in schmale Streifen und nähern jeden Streifen durch ein **Rechteck**.

Eine **Zerlegung** von $[a, b]$ ist eine Kette von Teilpunkten

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k.$$

Wählt man in jedem Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$ eine Stützstelle η_k , so heißt

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k) \Delta x_k$$

eine **Riemannsumme** – die Gesamtfläche der Rechtecke mit Breite Δx_k und Höhe $f(\eta_k)$.

Nimmt man in jedem Streifen den *größten* Funktionswert als Höhe, erhält man die **Obersumme** $\bar{S}_n$; nimmt man den *kleinsten*, die **Untersumme** $\underline{S}_n$. Es gilt stets $\underline{S}_n \leq S_n \leq \bar{S}_n$.

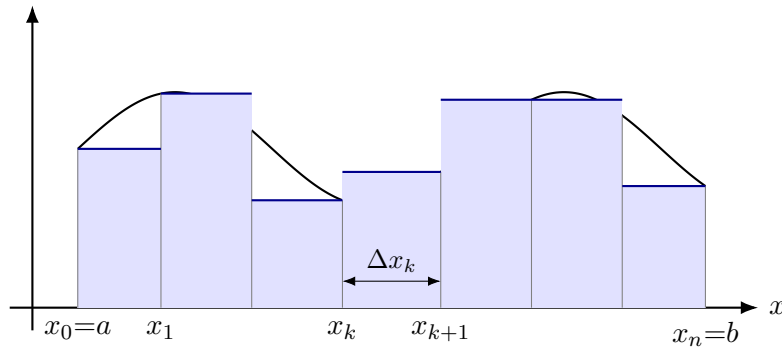


Abbildung 23: Riemannsumme: Die Fläche unter f wird durch Rechtecke der Breite Δx_k angenähert. Macht man die Streifen immer feiner ($\Delta x_k \rightarrow 0$), streben Ober- und Untersumme gegen denselben Wert – das bestimmte Integral.

Ist f auf $[a, b]$ stückweise stetig und beschränkt, so streben Ober- und Untersumme bei immer feinerer Zerlegung gegen *denselben* Grenzwert. Dieser heißt **bestimmtes Integral** von f über $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k) \Delta x_k$$

a heißt **untere**, b **obere Grenze**. Ist $f(x) \geq 0$, so ist $\int_a^b f(x) \, dx$ der **Flächeninhalt** zwischen Kurve und x -Achse.

„Stückweise stetig“ genügt

f heißt auf $[a, b]$ **stückweise stetig**, wenn f dort höchstens *endlich viele* Sprungstellen besitzt. Solche Funktionen sind integrierbar – endlich viele Sprünge tragen zur Fläche nichts bei.

Rechenregeln

Für bestimmte Integrale gilt ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx \quad (\text{Linearität})$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (\text{Zerlegung, } a < c < b)$$

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx, \quad \int_a^a f(x) \, dx = 0.$$

Außerdem: aus $f(x) \geq g(x)$ folgt $\int_a^b f \geq \int_a^b g$, und für $b > a$ gilt $|\int_a^b f(x) \, dx| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$.

Der Hauptsatz: Integrieren als Umkehrung des Ableitens

Die Definition über Riemannsummen ist unhandlich. Der **Hauptsatz** liefert das Werkzeug für die Praxis. Betrachte die *Flächenfunktion*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt \quad (\text{Fläche von } a \text{ bis zur variablen Grenze } x).$$

Erhöht man x um ein kleines Δx , kommt ein schmaler Streifen der Breite Δx und der Höhe $\approx f(x)$ hinzu, also $F(x + \Delta x) - F(x) \approx f(x) \Delta x$. Teilt man durch Δx und lässt $\Delta x \rightarrow 0$, folgt $F'(x) = f(x)$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Ist f auf $[a, b]$ stetig, so ist $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ differenzierbar mit

$$F'(x) = f(x).$$

Jede Funktion F mit $F' = f$ heißt **Stammfunktion** von f . Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante. Ist F irgendeine Stammfunktion, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

Das **unbestimmte Integral** $\int f(x) dx = F(x) + c$ bezeichnet die Menge *aller* Stammfunktionen.

Achtung!

Die Integrationskonstante c beim *unbestimmten* Integral nicht vergessen! Beim *bestimmten* Integral fällt sie beim Einsetzen der Grenzen weg ($F(b) + c - (F(a) + c)$), dort schreibt man sie deshalb nicht.

Liest man die Ableitungstabelle aus Kapitel 4 rückwärts, erhält man die **Grundintegrale**. Diese solltest du auswendig können.

$$\begin{array}{ll} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1) & \int \sin x dx = -\cos x + c \\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c & \int \cos x dx = \sin x + c \\ \int e^x dx = e^x + c & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1) & \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c \\ \int \sinh x dx = \cosh x + c & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \\ \int \cosh x dx = \sinh x + c & \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} x + c \end{array}$$

Grundintegrale konkret

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}, \quad \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 1 - (-1) = 2.$$

Kontrolle beim ersten Integral: $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$. ✓

Mini-Aufgabe

Berechne $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ und $\int_0^1 e^x dx$.

Lösung

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1, \quad \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1 \approx 1,718.$$

5.2 Integrationsregeln und Substitution

Aus den Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel) werden durch „Rückwärtslesen“ die beiden wichtigsten Integrationsregeln.

Partielle Integration (aus der Produktregel):

$$\int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u(x) v'(x) dx.$$

Substitutionsregel (aus der Kettenregel): mit $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du.$$

Zwei Spezialfälle der Substitution, die du oft brauchst

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c \quad (a \neq 0), \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$$

Die zweite Formel heißt **logarithmische Integration**: Steht im Zähler genau die Ableitung des Nenners, ist das Integral ein Logarithmus.

Lineare Substitution

$$\int \cos(3x + 1) dx = \frac{1}{3} \sin(3x + 1) + c.$$

Kontrolle: $(\frac{1}{3} \sin(3x + 1))' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cos(3x + 1) = \cos(3x + 1)$. ✓

Logarithmische Integration

Der Nenner ist $f(x) = x^2 + 1$ mit $f'(x) = 2x$ – steht genau im Zähler:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) + c.$$

(Der Betrag darf entfallen, da $x^2 + 1 > 0$.)

Substitution mit Grenzen

$\int_0^1 2x e^{x^2} dx$. Substituiere $u = x^2$, $du = 2x dx$; die Grenzen wandern mit: $x = 0 \Rightarrow u = 0$, $x = 1 \Rightarrow u = 1$:

$$\int_0^1 2x e^{x^2} dx = \int_0^1 e^u du = [e^u]_0^1 = e - 1 \approx 1,718.$$

Achtung!

Substituiert du im *bestimmten* Integral, musst du entweder die **Grenzen mitsubstituieren** (wie oben) oder am Ende *zurücksubstituieren*, bevor du einsetzt. Vergisst man beides, setzt man x -Grenzen in eine u -Stammfunktion ein – das ist falsch.

Partielle Integration

$\int x e^x dx$. Wähle $v = x$ (wird beim Ableiten einfacher) und $u' = e^x$, also $u = e^x$, $v' = 1$:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x + c = (x - 1)e^x + c.$$

Kontrolle: $((x - 1)e^x)' = e^x + (x - 1)e^x = x e^x$. ✓

Ein hübscher Trick: Auch $\ln x$ integriert man partiell, indem man $u' = 1$ setzt.

Der $\ln$ -Trick

Mit $u' = 1$ ($u = x$) und $v = \ln x$ ($v' = \frac{1}{x}$):

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c.$$

Kontrolle: $(x \ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. ✓

Mini-Aufgabe

Berechne

1. $\int \frac{1}{2x+5} dx$,
2. $\int_0^1 x e^{-x} dx$ (partielle Integration).

Lösung

1. Nenner $f = 2x + 5$, $f' = 2$; mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ passt es: $\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+5| + c$.

2. $v = x$, $u' = e^{-x}$, also $u = -e^{-x}$, $v' = 1$:

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e} \approx 0,264.$$

Spezielle Substitutionen als „Rezepte“

Manche Integrale werden durch eine geschickte Substitution auf *rationale* oder *trigonometrische* Standardintegrale zurückgeführt:

- $\int R(e^x) dx$: setze $t = e^x$ (dann $dx = \frac{dt}{t}$).
- $\int R(\cos x, \sin x) dx$: die **Weierstraß-Substitution** $t = \tan \frac{x}{2}$ liefert $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.
- $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$: setze $x = \sin t$; $\int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx$: setze $x = \sinh t$.

Man muss diese Rezepte nicht auswendig herleiten – es genügt zu wissen, *dass* solche Wurzel- und Winkelintegrale so lösbar werden.

5.3 Integration rationaler Funktionen

Eine **rationale Funktion** ist ein Quotient zweier Polynome, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Solche Funktionen kann man *immer* integrieren – man zerlegt sie in einfache Bausteine. Das Verfahren heißt **Partialbruchzerlegung**.

Fahrplan der Partialbruchzerlegung

1. **Grad prüfen.** Ist $\text{grad } P \geq \text{grad } Q$, zuerst **Polynomdivision**: $R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$ mit $\text{grad } P_2 < \text{grad } Q$. Das Polynom P_1 ist leicht zu integrieren.
2. **Nenner faktorisieren.** Zerlege Q in reelle Linearfaktoren $(x - x_\nu)$ und ggf. unzerlegbare quadratische Faktoren $(x^2 + \alpha x + \beta)$.
3. **Ansatz aufstellen.** Zu jedem Faktor gehört ein Partialbruch (bei Mehrfachfaktoren je einer pro Potenz).
4. **Koeffizienten bestimmen** durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzen geeigneter x -Werte.
5. **Bausteine integrieren.**

Ansatz. Zu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit $Q(x) = (x - x_1)^{r_1} \cdots (x^2 + \alpha x + \beta)^s \cdots$ macht man den Ansatz

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{\nu} \sum_{k=1}^{r_{\nu}} \frac{A_{\nu,k}}{(x - x_{\nu})^k} + \sum_{\mu} \sum_{k=1}^{s_{\mu}} \frac{B_{\mu,k} x + C_{\mu,k}}{(x^2 + \alpha_{\mu} x + \beta_{\mu})^k}.$$

Die Bausteine integriert man so:

$$\int \frac{dx}{x - x_{\nu}} = \ln |x - x_{\nu}| + c, \quad \int \frac{Bx + d}{x^2 + \alpha x + \beta} dx = \frac{B}{2} \ln(x^2 + \alpha x + \beta) + (\arctan\text{-Term}).$$

Zwei einfache Linearfaktoren

Gesucht $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$. Der Nenner faktorisiert: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Ansatz:

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}.$$

Multiplizieren mit dem Nenner: $1 = A(x + 1) + B(x - 1)$. Einsetzen von $x = 1$: $1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. Einsetzen von $x = -1$: $1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$. Also

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + c.$$

Kontrolle: $(\frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1|)' = \frac{1}{2} (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1}$. ✓

Mit Polynomdivision

Gesucht $\int \frac{x^2}{x-1} dx$. Wegen $\text{grad}(x^2) \geq \text{grad}(x-1)$ zuerst dividieren:

$$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

(Denn $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$, es fehlt 1.) Damit

$$\int \frac{x^2}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c.$$

Mini-Aufgabe

Bestimme die Partialbruchzerlegung von $\frac{5x-1}{x^2-x-2}$ und integriere. *Tipp:* $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.

Lösung

Ansatz $\frac{5x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$, also $5x-1 = A(x+1) + B(x-2)$. Einsetzen $x=2$: $9 = 3A \Rightarrow A=3$. Einsetzen $x=-1$: $-6 = -3B \Rightarrow B=2$. Somit

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1} \right) dx = 3 \ln|x-2| + 2 \ln|x+1| + c.$$

5.4 Anwendungen der Integralrechnung

Jetzt zählt sich das Werkzeug aus: Integrale messen Flächen, Längen, Volumen, Schwerpunkte und Mittelwerte. Die Formeln entstehen alle nach demselben Muster – eine Größe in unendlich viele kleine Beiträge zerlegen und aufsummieren.

Fläche zwischen zwei Kurven

Sind f, g stetig auf $[a, b]$, so ist der Inhalt der von den Schaubildern eingeschlossenen Fläche

$$F = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Gilt $f(x) \geq g(x)$ auf ganz $[a, b]$, entfällt der Betrag: $F = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

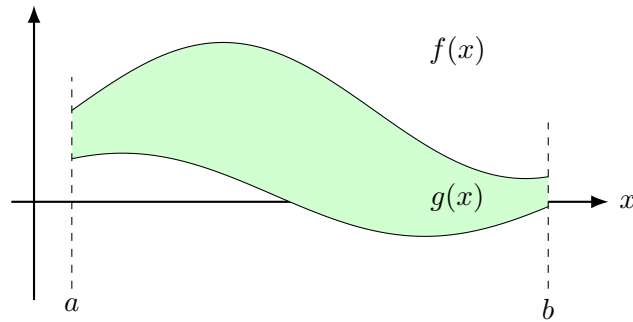


Abbildung 24: Fläche zwischen den Kurven f und g über $[a, b]$. Man integriert die Differenz „obere minus untere Kurve“; wechselt welche Kurve oben liegt, arbeitet man mit dem Betrag.

Fläche zwischen Parabel und Gerade

Welche Fläche schließen $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ ein? Schnittpunkte: $x = x^2 \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$. Auf $[0, 1]$ liegt $f(x) = x$ oben ($x \geq x^2$):

$$F = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Bogenlänge

Die **Länge** des Kurvenbogens $y = f(x)$ über $[a, b]$ (mit stetig differenzierbarem f) ist

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Rotationskörper

Lässt man das Schaubild von $f \geq 0$ um eine Achse rotieren, entsteht ein **Rotationskörper**.

Rotation um die x -Achse – Volumen und Mantelfläche:

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx, \quad A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Rotation um die y -Achse (für streng monotonen, stetig differenzierbares f , $a \geq 0$):

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 f'(x) dx.$$

Volumen einer Kugel

Der obere Halbkreis $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ erzeugt bei Rotation um die x -Achse über $[-r, r]$ eine Kugel:

$$V_x = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Das ist die bekannte Kugelvolumenformel – eine schöne Bestätigung.

Mini-Aufgabe

Der Graph von $f(x) = \sqrt{x}$ rotiert über $[0, 4]$ um die x -Achse. Berechne das Volumen V_x .

Lösung

$$V_x = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \cdot 8 = 8\pi.$$

Schwerpunkt und Mittelwert

Flächenschwerpunkt $S(x_s, y_s)$ der von $f \geq g$ berandeten Fläche $F = \int_a^b (f - g) dx$:

$$x_s = \frac{1}{F} \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx, \quad y_s = \frac{1}{2F} \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$

Mittelwert einer stetigen Funktion f über $[a, b]$:

$$f_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Schwerpunkt eines Bogens

Für den *Bogen* $y = f(x)$ (Länge s) treten dieselben Gewichte $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ wie in der Bogenlänge auf:

$$x_s = \frac{1}{s} \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \quad y_s = \frac{1}{s} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Praktisch nützlich sind die **Guldinschen Regeln**: Mantelfläche = Bogenlänge $\times$ Umfang des Schwerpunktkreises; Rotationsvolumen = Flächeninhalt $\times$ Umfang des Schwerpunktkreises.

Mittelwert

Der Mittelwert von $f(x) = x^2$ über $[0, 3]$:

$$f_m = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{3} = 3.$$

Der **1. Mittelwertsatz** garantiert: Es gibt eine Stelle $\eta \in (0, 3)$ mit $f(\eta) = 3$, hier $\eta = \sqrt{3} \approx 1,73$.

Mini-Aufgabe

Bestimme den Mittelwert von $f(x) = \sin x$ über $[0, \pi]$.

Lösung

$$f_m = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^\pi = \frac{1}{\pi} (1 - (-1)) = \frac{2}{\pi} \approx 0,637.$$

5.5 Mittelwertsätze und Taylorformel

Die **Mittelwertsätze** präzisieren die Anschauung „irgendwo nimmt die Funktion ihren Durchschnittswert an“.

1. Mittelwertsatz. Ist f stetig auf $[a, b]$, so gibt es ein $\eta \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\eta) (b - a).$$

Verallgemeinert: Ist zusätzlich g integrierbar und ohne Vorzeichenwechsel, so gibt es ein $\eta \in (a, b)$ mit $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\eta) \int_a^b g(x) dx$.

Der Hauptsatz erlaubt eine besonders elegante Herleitung der **Taylorformel** aus Kapitel 4: Man schreibt $f(x)$ als Integral und integriert wiederholt partiell. Das Restglied ergibt sich dann direkt in Integralform.

Taylorformel (Integraldarstellung des Restglieds). Ist f auf $[a, b]$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$, so gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz wird daraus die bekannte **Lagrange-Form**

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x.$$

Taylor per partieller Integration (Kurzfassung)

Setze $x_0 = 0$. Nach dem Hauptsatz ist $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$. Partielle Integration mit $u = f'(t)$ und $v' = 1$, aber geschickt $v = -(x - t)$ (denn t ist die Variable, x fest), liefert

$$\int_0^x f'(t) dt = [- (x - t) f'(t)]_0^x + \int_0^x (x - t) f''(t) dt = f'(0) x + \int_0^x (x - t) f''(t) dt.$$

Setzt man dieses partielle Integrieren fort, wächst mit jedem Schritt der Grad von $(x - t)$ und die Ableitungsordnung von f – man erhält Glied für Glied die Taylorsumme, und übrig bleibt genau das Integral-Restglied.

5.6 Uneigentliche Integrale

Bisher war $[a, b]$ endlich und f beschränkt. Ist eine Grenze ∞ oder hat f eine **Polstelle**, definiert man das Integral über einen **Grenzwert**.

Unendliche Grenze:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

falls der Grenzwert existiert (analog bei $-\infty$). **Polstelle** bei x_0 : man lässt die Grenze bis dicht an x_0 laufen und bildet ebenfalls den Grenzwert. Existiert der Grenzwert (endlich), heißt das Integral **konvergent**, sonst **divergent**.

Konvergent trotz unendlichem Intervall

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

Die Fläche unter $\frac{1}{x^2}$ ist *endlich*, obwohl das Intervall unendlich lang ist.

Divergent – die „Grenzfunktion“ $1/x$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

Nur eine „Kleinigkeit langsamer“ abfallend als $\frac{1}{x^2}$ – und schon divergiert das Integral. Merke: $\int_1^{\infty} x^{-p} dx$ konvergiert genau für $p > 1$.

Polstelle am Rand

Bei $x = 0$ hat $\frac{1}{\sqrt{x}}$ einen Pol. Trotzdem:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Die Fläche ist endlich, obwohl die Kurve am linken Rand über alle Grenzen wächst.

Mini-Aufgabe

Untersuche $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ auf Konvergenz und berechne ggf. den Wert.

Lösung

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

Das Integral konvergiert, sein Wert ist 1.

5.7 Numerische Integration

Viele Integrale – etwa $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ – besitzen *keine* elementare Stammfunktion. Dann nähert man den Wert numerisch, indem man f stückweise durch einfache Polynome ersetzt und diese integriert. Solche Näherungen heißen **Quadraturformeln**.

Trapezformel

Ersetzt man f auf jedem Teilintervall durch die **Sekante** (verbindende Gerade), so wird die Fläche eines Streifens zu einem **Trapez**.

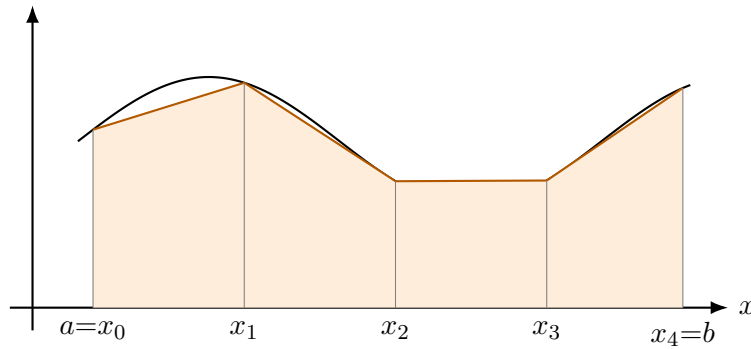


Abbildung 25: Trapezformel: f wird auf jedem Streifen durch die Sekante ersetzt. Die Summe der Trapezflächen nähert das Integral.

Trapezformel mit n gleich breiten Streifen der Breite $h = \frac{b-a}{n}$ und $x_k = a + k h$:

$$T_n(f) = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})) \right]$$

Fehler (für $f \in C^2$): $R_n = \int_a^b f \, dx - T_n(f) = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta)$ für ein $\eta \in (a, b)$. Der Fehler fällt also wie $\frac{1}{n^2}$.

Trapezformel konkret

Näherung für $\int_0^1 e^{-x^2} \, dx$ mit $n = 2$ (also $h = 0,5$, Stützstellen $0; 0,5; 1$). Mit $f(0) = 1$, $f(0,5) = e^{-0,25} \approx 0,778801$, $f(1) = e^{-1} \approx 0,367879$:

$$T_2 = \frac{0,5}{2} \left[1 + 0,367879 + 2 \cdot 0,778801 \right] = 0,25 \cdot 2,925481 \approx 0,731370.$$

Der exakte Wert ist $\approx 0,746824$ – die grobe Zerlegung liegt also schon nah dran.

Rombergverfahren

Halbiert man die Schrittweite fortlaufend ($n = 1, 2, 4, 8, \dots$), kann man aus je zwei Trapezwerten durch geschickte Kombination einen viel genaueren Wert gewinnen – das **Rombergverfahren**.

Sei $T_{j,0}$ die Trapezsumme mit Schrittweite $h = \frac{b-a}{2^j}$. Dann liefert die **Extrapolation**

$$T_{j,\mu} = \frac{1}{2^{2\mu} - 1} \left[2^{2\mu} T_{j,\mu-1} - T_{j-1,\mu-1} \right]$$

eine Folge immer besserer Näherungen (Spalte $\mu = 1$: Faktor $\frac{1}{3}$ mit 4; Spalte $\mu = 2$: Faktor $\frac{1}{15}$ mit 16).

Romberg für $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

Aus den Trapezwerten $T_{0,0} \approx 0,683940$, $T_{1,0} \approx 0,731370$, $T_{2,0} \approx 0,742998$, $T_{3,0} \approx 0,745866$ baut man das Schema (Spalten $\frac{4}{3}$, $\frac{16}{15}$, $\frac{64}{63}$):

0,683940			
0,731370	0,747181		
0,742998	0,746855	0,746834	
0,745866	0,746826	0,746824	0,746824

Schon in der dritten Zeile stabilisieren sich die Ziffern: $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,7468$.

Simpsonformel

Statt Geraden legt man durch je *drei* Punkte eine **Parabel** – das schmiegt sich viel besser an und ist die Grundlage der **Simpsonformel**. Man braucht dazu eine *gerade* Streifenzahl $n = 2m$.

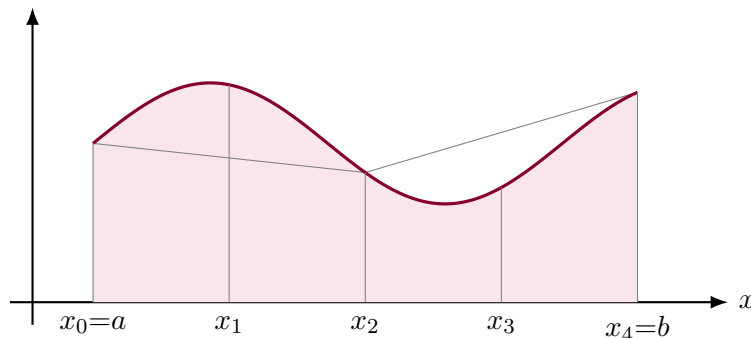


Abbildung 26: Simpsonformel: Über je zwei Streifen wird f durch eine Parabel durch drei Stützpunkte ersetzt (fette Kurve). Sie folgt der Krümmung deutlich genauer als die Sekanten (dünn) der Trapezformel.

Simpsonformel mit $n = 2m$ Streifen, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k h$:

$$S_n(f) = \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{\nu=0}^{m-1} f(x_{2\nu+1}) + 2 \sum_{\nu=1}^{m-1} f(x_{2\nu}) \right]$$

Kurz: Randwerte $\times 1$, ungerade Stützstellen $\times 4$, innere gerade Stützstellen $\times 2$. **Fehler** (für $f \in C^4$):

$$|R_n| = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} |f^{(4)}(\eta)|.$$

Der Fehler fällt wie $\frac{1}{n^4}$ – Simpson ist bei gleicher Streifenzahl weit genauer als die Trapezformel.

Simpson konkret

Näherung für $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ mit $n = 2$ ($m = 1$, $h = 0,5$). Nur die drei Werte $f(0) = 1$, $f(0,5) \approx 0,778801$, $f(1) \approx 0,367879$:

$$S_2 = \frac{0,5}{3} [1 + 0,367879 + 4 \cdot 0,778801] = \frac{1}{6} \cdot 4,483085 \approx 0,747181.$$

Mit denselben drei Funktionswerten wie die Trapezformel oben ($T_2 \approx 0,731370$) trifft Simpson den exakten Wert 0,746824 auf drei Nachkommastellen – ein deutlicher Gewinn.

Praktische Fehlerkontrolle

Die theoretischen Fehlerformeln braucht man f'' bzw. $f^{(4)}$ – oft unbekannt. In der Praxis verdoppelt man daher die Streifenzahl und schätzt den Fehler heuristisch aus zwei aufeinanderfolgenden Simpsonwerten s_n, s_{2n} :

$$\Delta_n = \frac{1}{15} |s_{2n} - s_n|.$$

Ist Δ_n kleiner als die geforderte Toleranz, nimmt man s_{2n} als hinreichend genau.

Mini-Aufgabe

Näherung von $\int_0^2 \frac{1}{1+x} dx$ mit der Simpsonformel für $n = 2$ ($h = 1$, Stützstellen 0; 1; 2).
Vergleiche mit dem exakten Wert $\ln 3$.

Lösung

Mit $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{3}$:

$$S_2 = \frac{1}{3} [f(0) + f(2) + 4f(1)] = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{10}{9} \approx 1,111.$$

Exakt ist $\int_0^2 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^2 = \ln 3 \approx 1,0986$. Die Simpson-Näherung mit nur drei Stützstellen weicht um rund 1% ab.

5.8 Zusammenfassung Kapitel 5

Das Wichtigste aus Kapitel 5

- **Bestimmtes Integral** = Grenzwert von Riemannsummen = Fläche unter der Kurve.
- **Hauptsatz:** $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ mit $F' = f$. Integrieren ist Umkehrung des Ableitens.
- **Regeln:** Grundintegral-Tabelle; **Substitution** (Grenzen mitnehmen!); **partielle Integration** $\int u'v = uv - \int uv'$ (auch ln-Trick).
- **Rationale Funktionen:** Grad senken (Polynomdivision), Nenner faktorisieren, **Partialbruchzerlegung**, Bausteine als $\ln/\arctan$ integrieren.
- **Anwendungen:** Fläche $\int |f-g| dx$; Bogenlänge $\int \sqrt{1+f'^2} dx$; Rotationsvolumen $V_x = \pi \int f^2 dx$; Mittelwert $\frac{1}{b-a} \int_a^b f dx$; Schwerpunkte.

- **Uneigentliche Integrale:** unendliche Grenze oder Pol $\rightarrow$ Grenzwert; $\int_1^\infty x^{-p} dx$ konvergiert genau für $p > 1$.
- **Numerik:** Trapezformel T_n (Fehler $\sim n^{-2}$), **Simpsonformel** S_n (Fehler $\sim n^{-4}$, Muster 1, 4, 2, ..., 4, 1), Romberg-Extrapolation.

6 Unendliche Reihen

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- eine **unendliche Reihe** als Grenzwert ihrer Partialsummen verstehen und die **geometrische** sowie die **harmonische** Reihe einordnen
- mit den Konvergenzkriterien (**Majoranten-**, **Quotienten-**, **Wurzel-**, **Leibnizkriterium**) an konkreten Reihen die Konvergenz prüfen
- den **Konvergenzradius** einer Potenzreihe bestimmen und Potenzreihen gliedweise ableiten und integrieren
- die **Taylorreihe** einer Funktion aufstellen und die Reihen von e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ sowie die **binomische Reihe** anwenden
- mit Reihenentwicklungen **Funktionswerte**, **Integrale** und **Grenzwerte** näherungsweise berechnen
- die **Eulersche Formel** $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ aus der Potenzreihe herleiten

Bislang haben wir endliche Summen betrachtet. Jetzt addieren wir *unendlich viele* Zahlen – und das Erstaunliche ist: Manchmal kommt dabei eine endliche Zahl heraus. Genau darum geht es in diesem Kapitel. Reihen sind das Werkzeug, mit dem sich e^x , $\sin x$ oder $\ln 2$ überhaupt erst *ausrechnen* lassen; jeder Taschenrechner steckt voller Reihen.

6.1 Zahlenreihen und ihre Konvergenz

Der Trick, um einer unendlichen Summe einen Sinn zu geben, ist einfach: Wir summieren erst nur die ersten Glieder auf und schauen, wohin diese **Partialsummen** wandern.

Sind $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$, so heißt die Folge der **Partialsummen**

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad \dots, \quad s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

eine **unendliche Reihe**, geschrieben $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Konvergiert die Folge (s_n) gegen einen Wert s , so heißt die Reihe **konvergent** und man schreibt

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Andernfalls heißt sie **divergent**. Den Rest $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s - s_n$ nennt man **Reihenrest**; bei Konvergenz gilt $|r_n| \rightarrow 0$.

Achtung!

Verwechsle nicht die *Glieder* a_k mit den *Partialsummen* s_n . Eine Reihe konvergiert, wenn die s_n (die aufaddierten Summen) sich einer Zahl nähern – nicht die einzelnen a_k .

Ein notwendiges Kriterium

Aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen folgt eine einfache, aber wichtige Bedingung: Damit die Summanden die Partialsummen nicht immer weiter treiben, müssen sie am Ende verschwinden.

Nullfolgen-Kriterium (notwendig)

Konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, dann gilt notwendigerweise $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Umkehrschluss (sehr nützlich): Ist $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ (oder existiert er nicht), so **divergiert** die Reihe sofort.

Achtung!

Das Kriterium ist *nur notwendig, nicht hinreichend!* Aus $a_k \rightarrow 0$ folgt *nicht* Konvergenz. Das klassische Gegenbeispiel ist die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$: Ihre Glieder $\frac{1}{k}$ gehen gegen 0, trotzdem divergiert sie (die Partialsummen wachsen über alle Grenzen).

Mini-Aufgabe

Divergiert oder konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$? Begründe mit einem Blick auf die Glieder.

Lösung

Die Glieder sind $a_k = \frac{k}{k+1} \rightarrow 1 \neq 0$. Da die Summanden *nicht* gegen Null gehen, kann die Reihe nicht konvergieren – sie **divergiert**.

Die geometrische Reihe – die wichtigste überhaupt

Aus der geometrischen *Summe* $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (Kapitel 1) wird durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ die geometrische *Reihe*. Entscheidend ist das Verhalten von q^{n+1} : Für $|q| < 1$ geht es gegen 0, für $|q| \geq 1$ nicht.

Geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

Für $|q| \geq 1$ ist die Reihe **divergent**.

Ein unendlicher Kuchen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

Nimm die Hälfte eines Kuchens, dann die Hälfte des Rests, dann wieder die Hälfte – summierst du unendlich lange, hast du *genau* den ganzen Kuchen. Rechnerisch: Mit $q = \frac{1}{2}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k =$

$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$; zieht man das Glied $k = 0$ (also 1) ab, bleibt $2 - 1 = 1$.

Mini-Aufgabe

Berechne den Wert von $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ und von $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

Lösung

Beide Male ist $|q| < 1$, wir dürfen die Formel $\frac{1}{1-q}$ benutzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Absolute Konvergenz

Eine Reihe kann konvergieren, weil sich positive und negative Glieder wegheben. Robuster ist es, wenn schon die *Beträge* eine konvergente Reihe bilden.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Warum absolute Konvergenz stärker ist

Jede absolut konvergente Reihe ist auch *gewöhnlich* konvergent. Der Vorteil: Absolut konvergente Reihen darf man beliebig **umordnen** (die Summanden in anderer Reihenfolge addieren), ohne dass sich der Wert ändert. Eine nur *bedingt konvergente* Reihe (konvergent, aber nicht absolut) verliert diese Eigenschaft: Durch geschicktes Umordnen kann man sie sogar auf *jeden beliebigen* Wert bringen.

6.2 Konvergenzkriterien

Meist kennt man den Reihenwert nicht – man will nur wissen, *ob* eine Reihe konvergiert. Dafür gibt es Kriterien. Die Idee des ersten: Man vergleicht die unbekannte Reihe mit einer bekannten.

Majoranten- und Minorantenkriterium

Majoranten-/Minorantenkriterium. Gilt ab einem Index $0 \leq b_n \leq |a_n| \leq c_n$, dann:

- (1) Konvergiert die **Majorante** $\sum c_n$, so ist $\sum a_n$ *absolut* konvergent (die größere Reihe „deckelt“ die kleinere).
- (2) Divergiert die **Minorante** $\sum b_n$, so divergiert auch $\sum a_n$ (die kleinere schiebt die größere nach oben).

Vergleich mit der geometrischen Reihe

Konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + k}$?

Für alle k ist $2^k + k \geq 2^k$, also $\frac{1}{2^k + k} \leq \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Die Majorante $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ist eine konvergente geometrische Reihe. Nach (1) **konvergiert** die Reihe.

Mini-Aufgabe

Zeige mit einer geeigneten Minorante, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergiert. *Tipp:* Vergleiche mit der harmonischen Reihe.

Lösung

Für $k \geq 1$ ist $\sqrt{k} \leq k$, also $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$. Die Minorante $\sum \frac{1}{k}$ ist die divergente harmonische Reihe. Nach (2) **divergiert** auch $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Quotienten- und Wurzelkriterium

Beide entstehen aus dem Vergleich mit der geometrischen Reihe: Verhält sich eine Reihe „im Wesentlichen“ wie $\sum q^k$ mit $q < 1$, so konvergiert sie.

Für die Reihe $\sum a_k$ existiere einer der Grenzwerte

$$(\text{Quotient}) \quad q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{bzw.} \quad (\text{Wurzel}) \quad q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dann gilt in beiden Fällen:

$$q < 1 \Rightarrow \text{absolut konvergent}, \quad q > 1 \Rightarrow \text{divergent}, \quad q = 1 \Rightarrow \text{keine Aussage.}$$

Achtung!

Bei $q = 1$ liefern beide Kriterien **keine** Information – die Reihe kann konvergieren oder divergieren. Man muss dann ein anderes Kriterium heranziehen.

Quotientenkriterium an drei Reihen

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\cosh k}$: Mit $\cosh k = \frac{1}{2}(e^k + e^{-k})$ berechnet man

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^{n+1}}{\cosh(n+1)} \cdot \frac{\cosh n}{2^n} = 2 \frac{e^n + e^{-n}}{e^{n+1} + e^{-n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e} \approx 0,736 < 1.$$

Also **konvergent**.

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{\cosh k}$: ganz analog $q = \frac{3}{e} \approx 1,104 > 1$, also **divergent**.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$: hier ist $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ – **keine Aussage** (die Reihe konvergiert übrigens, wie wir gleich sehen).

Mini-Aufgabe

Untersuche $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ mit dem Quotientenkriterium.

Lösung

Mit $a_k = \frac{k}{2^k}$ ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1.$$

Die Reihe ist **absolut konvergent**.

Welches Kriterium wann?

- **Fakultäten oder Potenzen** q^k im Glied $\Rightarrow$ meist **Quotientenkriterium** (der Bruch a_{n+1}/a_n kürzt sich schön).
- **k-te Potenzen** wie $a_k = (\dots)^k \Rightarrow$ oft **Wurzelkriterium**.
- Glieder wie $\frac{1}{k^p}$ (rationaler Abfall) $\Rightarrow$ Quotienten-/Wurzelkriterium versagen ($q = 1$); hier hilft das **Majorantenkriterium** oder das **Integralkriterium**.

Das Integralkriterium

Für Reihen mit $q = 1$ ist manchmal das **Integralkriterium** nützlich: Man vergleicht die Reihe mit einer Fläche unter einer Funktion.

Ist f auf $[n_0, \infty)$ stetig, positiv und *monoton fallend* mit $f(k) = a_k$, dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ konvergent} \quad (a \geq n_0).$$

Die Reihe $\sum 1/k^2$

Für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ scheiterten Quotienten- und Wurzelkriterium. Wähle $f(x) = \frac{1}{x^2}$ auf $[1, \infty)$. Das Integral existiert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 1 < \infty.$$

Also **konvergiert** die Reihe. (Ihr Wert ist übrigens $\frac{\pi^2}{6}$ – das können wir hier aber noch nicht zeigen.)

6.3 Alternierende Reihen und das Leibnizkriterium

Eine Reihe, deren Glieder **beständig das Vorzeichen wechseln**, heißt **alternierend**. Man schreibt sie als

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \text{mit } a_k > 0.$$

Für solche Reihen gibt es ein besonders bequemes Kriterium.

Leibnizkriterium. Bilden die a_k (ab einem n_0) eine **monoton fallende Nullfolge** – also $a_k \geq a_{k+1}$ und $a_k \rightarrow 0$ –, dann **konvergiert** die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Außerdem ist der **Fehler** handlich abschätzbar: Für die n -te Partialsumme s_n gilt

$$|s - s_n| = |r_n| \leq a_{n+1}$$

– der Reihenrest ist höchstens so groß wie das *erste weggelassene* Glied.

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Die Glieder $a_k = \frac{1}{k}$ fallen monoton gegen 0. Nach Leibniz **konvergiert** die Reihe – obwohl die zugehörige Betragsreihe (die harmonische Reihe!) divergiert. Sie ist also *bedingt*, nicht absolut konvergent. (Ihr Wert ist $\ln 2$, siehe weiter unten.)

Mini-Aufgabe

Wie viele Glieder von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ musst du addieren, damit der Fehler garantiert kleiner als 0,01 ist?

Lösung

Hier ist $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$. Wir fordern $\frac{1}{n+2} < 0,01$, also $n+2 > 100$, d. h. $n > 98$. Man braucht die Partialsumme s_{99} (Glieder $k = 0$ bis 99, also 100 Summanden), dann ist $|r_{99}| \leq a_{100} = \frac{1}{101} < 0,01$.

6.4 Funktionen- und Potenzreihen

Bisher waren die a_k feste Zahlen. Lässt man die Glieder von einer Variablen x abhängen, so entsteht eine **Funktionenreihe** $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$. Für jedes feste x_0 ist das wieder eine gewöhnliche Zahlenreihe; konvergiert sie für jedes x eines Intervalls, so wird durch $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ eine neue Funktion definiert.

Besonders wichtig ist der Fall, dass die f_k einfache Potenzen sind.

Eine **Potenzreihe** mit **Entwicklungszentrum** x_0 ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}.$$

Man kann sie als „unendlich langes Polynom“ auffassen.

Der Konvergenzradius

Wendet man das Quotientenkriterium auf $b_k = a_k (x - x_0)^k$ an, so entscheidet der Abstand $|x - x_0|$ über Konvergenz oder Divergenz. Es gibt einen Radius r , innerhalb dessen die Reihe konvergiert.

Konvergenzradius. Existiert $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ (oder $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$), so ist

$$\boxed{r = \frac{1}{q}} \quad (r = \infty \text{ falls } q = 0, \quad r = 0 \text{ falls } q = \infty).$$

Die Potenzreihe **konvergiert** für alle x mit $|x - x_0| < r$ und **divergiert** für $|x - x_0| > r$. Die Menge $\{x : |x - x_0| < r\}$ heißt **Konvergenzbereich**.

Achtung!

Über die *Ränder* $|x - x_0| = r$ macht der Konvergenzradius keine Aussage – dort muss man die Reihe gesondert untersuchen.

Konvergenzradius bestimmen

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (die Exponentialreihe): Mit $a_k = \frac{1}{k!}$ ist

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 \implies r = \infty.$$

Die Reihe konvergiert für **alle** $x \in \mathbb{R}$.

Mini-Aufgabe

Bestimme den Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ und von $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$.

Lösung

Erste Reihe: $a_k = \frac{1}{k}$, also $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1 \implies r = 1$.

Zweite Reihe: $a_k = k!$, also $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \rightarrow \infty \implies q = \infty$, damit $r = 0$: Die Reihe konvergiert *nur* für $x = 0$.

Ableiten und Integrieren von Potenzreihen

Der Grund, warum Potenzreihen so mächtig sind: Innerhalb des Konvergenzbereichs darf man sie **gliedweise** ableiten und integrieren wie ein Polynom – und der Konvergenzradius bleibt derselbe.

Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit Konvergenzradius $r > 0$, dann ist f beliebig oft differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, \quad \int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}.$$

Beide Reihen haben denselben Konvergenzradius r .

Aus der geometrischen Reihe wird $\ln$

Für $|x| < 1$ ist $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Integriert man beide Seiten von 0 bis x (und beachtet $\int \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)$), so folgt gliedweise

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Setzt man speziell $x = \frac{1}{2}$, erhält man eine hübsche Reihe für $\ln 2$:

$$\ln 2 = -\ln \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \dots$$

Aus der geometrischen Reihe wird $\arctan$

Setzt man in $\frac{1}{1-q} = \sum q^k$ nun $q = -t^2$ (für $|t| < 1$), so entsteht

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

Gliedweise Integration von 0 bis x liefert (wegen $\int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t$)

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Mini-Aufgabe

Leite die Potenzreihe von $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$) einmal gliedweise ab und bestimme so die Reihe von $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Lösung

Aus $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ folgt gliedweise

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Rechenregeln und der Identitätssatz

Rechnen mit Potenzreihen

Sind $f(x) = \sum a_k x^k$ (Radius r_1) und $g(x) = \sum b_k x^k$ (Radius r_2), so gilt für $r \geq \min(r_1, r_2)$:

- **Linearkombination:** $\alpha f + \beta g = \sum (\alpha a_k + \beta b_k) x^k$.
- **Cauchy-Produkt:** $f \cdot g = \sum c_k x^k$ mit $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$.

Identitätssatz: Zwei Potenzreihen mit gleichem Zentrum stellen genau dann dieselbe Funktion dar, wenn *alle* Koeffizienten übereinstimmen: $a_k = b_k$ für alle k . (Man darf also „Koeffizienten vergleichen“.)

Cauchy-Produkt konkret

Multipliziere $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (alle $a_k = 1$) mit sich selbst. Der Cauchy-Koeffizient ist

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j a_{k-j} = \sum_{j=0}^k 1 = k+1.$$

Also $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$ – dasselbe Ergebnis wie eben durch Ableiten. Zwei Wege, ein Ziel.

6.5 Taylorreihen

Bisher sind wir von einer Reihe ausgegangen und haben gefragt, welche Funktion sie darstellt. Jetzt drehen wir die Frage um: *Gegeben eine Funktion f – welche Potenzreihe gehört zu ihr?*

Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, so liefert wiederholtes gliedweises Ableiten und Einsetzen von $x = x_0$ sofort die Koeffizienten: $f^{(j)}(x_0) = j! a_j$, also $a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)$.

Taylorreihe von f an der Stelle x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Für $x_0 = 0$ heißt sie **Mac-Laurin-Reihe**. Man erhält sie aus der **Taylorformel**

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x, x_0), \quad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1},$$

indem man den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ bildet.

WICHTIG!

Die Taylorreihe stellt f nur dort dar, wo das **Restglied verschwindet**, also $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0$. Die entscheidende Arbeit beim Entwickeln einer Funktion ist oft der Nachweis $R_n \rightarrow 0$.

Achtung!

Es gibt beliebig oft differenzierbare Funktionen, deren Taylorreihe *nicht* die Funktion darstellt! Das Standardbeispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

denn hier ist $f^{(k)}(0) = 0$ für *alle* k ; die Taylorreihe ist also die Nullreihe, obwohl $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$. Ableitungen allein garantieren die Reihendarstellung nicht.

6.6 Reihen der elementaren Funktionen

Für die wichtigsten Funktionen berechnet man die Taylorreihen einmal und benutzt sie dann als „Baukasten“. Wir sammeln die Ergebnisse; die Restgliednachweise $R_n \rightarrow 0$ lassen wir bis auf einen Fall weg.

Exponential- und Hyperbelfunktionen

Für $f(x) = e^x$ ist $f^{(k)}(x) = e^x$, also $f^{(k)}(0) = 1$. Hier lohnt der eine Restgliednachweis, weil er so typisch ist:

e^x – Nachweis $R_n \rightarrow 0$

Es ist $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\delta_n x}$ mit $0 < \delta_n < 1$. Für festes $|x| \leq m$ gilt

$$|R_n(x)| \leq \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} e^m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

denn die Fakultät $(n+1)!$ im Nenner wächst schneller als jede Potenz m^{n+1} . Da $m > 0$ beliebig war, gilt die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$.

Reihen von Exponential- und Hyperbelfunktionen (alle für $x \in \mathbb{R}$):

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sinh x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad \cosh x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Die Reihen für $\sinh$ und $\cosh$ folgen sofort aus $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ bzw. $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$: In e^{-x} wechseln die ungeraden Glieder das Vorzeichen, so dass sich bei der Subtraktion die geraden, bei der Addition die ungeraden Glieder aufheben.

Sinus und Kosinus

Für $f(x) = \sin x$ sind die Ableitungen zyklisch: $\sin, \cos, -\sin, -\cos, \dots$; an der Stelle 0 liefert das $f^{(2k)}(0) = 0$ und $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Nur die ungeraden Potenzen überleben.

Reihen von Sinus und Kosinus (für alle $x \in \mathbb{R}$):

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Die Kosinusreihe erhält man auch durch gliedweises Ableiten der Sinusreihe.

Mini-Aufgabe

Bestimme mit den obigen Reihen den Taylorkoeffizienten von x^5 in der Entwicklung von $\sin x$ und den Koeffizienten von x^4 in $\cosh x$.

Lösung

Bei $\sin x$ gehört x^5 zu $k = 2$: der Koeffizient ist $\frac{(-1)^2}{5!} = \frac{1}{120}$.

Bei $\cosh x$ gehört x^4 zu $j = 2$: der Koeffizient ist $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$.

Die binomische Reihe

Die Reihe von $(1+x)^\alpha$ verallgemeinert den binomischen Satz auf *beliebige* (auch negative oder gebrochene) Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$.

Binomische Reihe: für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{mit} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Der Konvergenzradius ist $r = 1$ (für $\alpha \in \mathbb{N}$ bricht die Reihe ab und man erhält den gewöhnlichen binomischen Satz).

Ein Wurzel-Näherungswert

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ ist $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$. Die ersten Koeffizienten:

$$\binom{1/2}{0} = 1, \quad \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2} = -\frac{1}{8},$$

also $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$. Für $x = 0,2$ liefert das $\sqrt{1,2} \approx 1 + 0,1 - 0,005 = 1,095$ (exakt 1,0954...).

Arkus- und Areafunktionen

Setzt man in der binomischen Reihe $\alpha = -\frac{1}{2}$ und ersetzt x durch $-t^2$, so wird

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1+(-t^2))^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} t^{2k}, \quad |t| < 1.$$

Gliedweise Integration von 0 bis x liefert die Reihen der Umkehrfunktionen.

Arkussinus und Arcasinus (für $|x| < 1$):

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-1/2}{k} x^{2k+1}, \quad \operatorname{arsinh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \binom{-1/2}{k} x^{2k+1}.$$

6.7 Anwendungen von Reihenentwicklungen

Jetzt zählt sich alles aus: Mit Reihen lassen sich **Funktionswerte**, **Integrale** und **Grenzwerte** berechnen, an die man sonst kaum herankommt. Die gemeinsame Idee: Man bricht die Reihe nach n Gliedern ab und schätzt den Reihenrest $|r_n|$ ab, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist.

Näherungsweise Funktionswerte

$\sqrt{e}$ auf 6 Nachkommastellen

Gesucht ist $\sqrt{e} = e^{1/2}$ mit Fehler $\Delta < 5 \cdot 10^{-7}$. Aus $e^x = \sum \frac{x^k}{k!}$ mit $x = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot 2^k}.$$

Man schätzt den Rest ab zu $|r_n| < \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^n}$; für $n = 7$ ist $(n+1)! \cdot 2^n \cdot 5 = 8! \cdot 128 \cdot 5 > 10^7$, also $|r_7| < 5 \cdot 10^{-7}$. Aufaddieren der acht Glieder:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} + \frac{1}{46080} + \frac{1}{645120} \pm 5 \cdot 10^{-7} = 1,648721 \pm 5 \cdot 10^{-7}.$$

Die Zahl π

Aus $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ folgt $\pi = 6 \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$. Mit der Arkustangens-Reihe:

$$\pi = 6 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}^{2k+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k} = 2\sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}.$$

Da die Reihe alterniert und $\frac{1}{(2k+1)3^k}$ monoton fällt, greift die bequeme Leibniz-Abschätzung $|r_n| \leq a_{n+1}$. Man summiert, bis das nächste Glied $< 5 \cdot 10^{-6}$ ist (das ist ab $k = 9$ der Fall):

$$\pi = 2\sqrt{3} \left[1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} + \dots - \frac{1}{19 \cdot 19683} \right] = 3,141591 \pm 5 \cdot 10^{-6}.$$

Mini-Aufgabe

Berechne $\cos(0,1)$ näherungsweise mit den ersten *zwei* von Null verschiedenen Gliedern der Kosinusreihe und schätze mit dem nächsten Glied den Fehler ab.

Lösung

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$ Mit $x = 0,1$:

$$\cos(0,1) \approx 1 - \frac{0,01}{2} = 0,995.$$

Das erste weggelassene Glied ist $\frac{x^4}{24} = \frac{10^{-4}}{24} \approx 4,2 \cdot 10^{-6}$; da die Reihe alterniert, ist der Fehler kleiner als $5 \cdot 10^{-6}$. (Exakt: $\cos 0,1 = 0,995004\dots$)

Berechnung von Integralen

Viele Integrale besitzen *keine* elementare Stammfunktion – über die Reihe geht es trotzdem, weil man Potenzreihen gliedweise integriert.

Ein nicht elementar lösbares Integral

Gesucht ist $I = \int_0^1 \frac{1}{x} (e^{x^2} - 1) dx$ mit $\Delta I < 5 \cdot 10^{-6}$. Aus $e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$ folgt

$$\frac{1}{x} (e^{x^2} - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{k!}, \quad I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^{2k-1} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k \cdot k!}.$$

Man weist $|r_n| < \frac{1}{(n+1)(n+1)!}$ nach; für $n = 7$ ist das $< 5 \cdot 10^{-6}$. Also (nach Ausklammern von $\frac{1}{2}$):

$$I = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{4320} + \frac{1}{35280} \right) \pm 5 \cdot 10^{-6} = 0,658949 \pm 5 \cdot 10^{-6}.$$

Näherungslösungen von Differentialgleichungen

Man kann eine gesuchte Funktion als Potenzreihe mit *unbekannten* Koeffizienten ansetzen, in die Differentialgleichung einsetzen und die Koeffizienten per Koeffizientenvergleich bestimmen.

Reihenansatz für eine DGL

Gesucht f mit $f''(x) + 2xf'(x) + 2f(x) = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Ansatz $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Aus den Anfangswerten folgt $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Einsetzen und Ordnen nach Potenzen liefert die **Rekursion**

$$a_2 = -a_0, \quad a_{k+2} = -\frac{2}{k+2} a_k.$$

Wegen $a_1 = 0$ verschwinden alle ungeraden Koeffizienten, und für die geraden ergibt sich $a_{2j} = \frac{(-1)^j}{j!}$. Damit

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} x^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^j}{j!} = e^{-x^2}.$$

Der Reihenansatz hat die geschlossene Lösung $f(x) = e^{-x^2}$ geliefert.

Berechnung von Grenzwerten

Haben Zähler und Nenner bei x_0 eine Nullstelle hoher Ordnung, ist die Regel von de l'Hospital mühsam (man müsste sie oft anwenden). Über die Reihen liest man den Grenzwert direkt ab.

Grenzwert aus den Reihen

Ist $f(x) = a_{k_1}(x - x_0)^{k_1} + \dots$ und $g(x) = b_{k_2}(x - x_0)^{k_2} + \dots$ (jeweils erstes nicht verschwindendes Glied), dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0, & k_1 > k_2, \\ \frac{a_{k_1}}{b_{k_2}}, & k_1 = k_2, \\ \pm\infty, & k_1 < k_2. \end{cases}$$

Man muss also nur die *niedrigsten* Potenzen von Zähler und Nenner vergleichen.

Ein Grenzwert ohne l'Hospital

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x^3}{\sinh^3 x \cdot \arctan x^2}.$$

Mit den führenden Gliedern $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \dots$, $\sin x^3 = x^3 - \dots$, $\sinh^3 x = x^3 + \dots$, $\arctan x^2 = x^2 - \dots$ wird

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2} - \dots\right) (x^3 - \dots)}{(x^3 + \dots) (x^2 - \dots)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^5 - \dots}{x^5 + \dots} = \frac{1}{2}.$$

Zähler und Nenner beginnen beide bei x^5 ; das Verhältnis der führenden Koeffizienten ist $\frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$. (Mit l'Hospital hätte man fünfmal ableiten müssen.)

Mini-Aufgabe

Berechne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ mit Hilfe der Sinusreihe.

Lösung

Es ist $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$, also $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$. Damit

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} - \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6}.$$

6.8 Potenzreihen in $\mathbb{C}$ und die Eulersche Formel

Alles über Potenzreihen lässt sich wörtlich auf **komplexe** Zahlen übertragen: Man ersetzt die reelle Variable x durch $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum a_k(z - z_0)^k$ heißt absolut konvergent für $|z - z_0| < R$, wenn die reelle Reihe $\sum |a_k| |z - z_0|^k$ konvergiert; der Konvergenzradius berechnet sich wie im Reellen. Der Konvergenzbereich ist jetzt eine *Kreisscheibe* in der Gaußschen Zahlenebene – daher der Name „Radius“.

Da $\sum \frac{1}{k!} z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert und für reelles z die Funktion e^x ergibt, *definiert* man die komplexe Exponentialfunktion genau so:

Komplexe Exponentialfunktion:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Setzt man rein imaginäres $z = iy$ ein und sortiert nach geraden und ungeraden Potenzen, so tauchen – dank $i^{2j} = (-1)^j$ – genau die Reihen von $\cos y$ und $\sin y$ auf:

Die Eulersche Formel

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} y^{2j}}_{=\cos y} + i \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} y^{2j+1}}_{=\sin y}.$$

Eulersche Formel:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Insbesondere ist $|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$ und damit $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Es gelten wie im Reellen $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ und $(e^z)^n = e^{nz}$.

Die schönste Formel der Mathematik

Setzt man $y = \pi$ in die Eulersche Formel, so wird $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, also

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Diese **Eulersche Identität** verbindet die fünf wichtigsten Konstanten e , i , π , 1 und 0 in einer einzigen Gleichung – ein direktes Geschenk der Potenzreihen.

6.9 Zusammenfassung Kapitel 6

Das Wichtigste aus Kapitel 6

- **Reihe** = Grenzwert der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. **Notwendig:** $a_k \rightarrow 0$ (aber *nicht hinreichend* – harmonische Reihe divergiert!).
- **Geometrische Reihe:** $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$, sonst divergent.
- **Kriterien:** Majorante/Minorante (Vergleich), Quotient bzw. Wurzel ($q < 1$ konvergent, $q > 1$ divergent, $q = 1$ keine Aussage), Integralkriterium; **Leibniz** für alternierende Reihen mit Fehler $|r_n| \leq a_{n+1}$.
- **Konvergenzradius** einer Potenzreihe: $r = 1/q$ mit $q = \lim |a_{k+1}/a_k|$ (oder $\lim \sqrt[k]{|a_k|}$). Konvergenz für $|x - x_0| < r$.
- **Potenzreihen** darf man gliedweise **ableiten** und **integrieren** (gleicher Radius). **Identitätssatz:** Koeffizientenvergleich erlaubt.
- **Taylorreihe:** $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, gültig wo $R_n \rightarrow 0$.
- **Standardreihen:** $e^x = \sum \frac{x^k}{k!}$, $\sin x = \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $\cos x = \sum \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $\sinh/\cosh$ analog, binomische Reihe $(1+x)^\alpha = \sum \binom{\alpha}{k} x^k$ ($|x| < 1$).
- **Anwendungen:** Funktionswerte, Integrale ohne elementare Stammfunktion, DGL-Reihenansatz, Grenzwerte über führende Reihenglieder.
- **Euler:** $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, speziell $e^{i\pi} + 1 = 0$.

7 Komplexe Zahlen (Teil II)

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- eine komplexe Zahl aus der kartesischen Form $z = x + iy$ in die **Polarform** $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$ umrechnen und zurück
- **Betrag** $r = |z|$ und **Argument** $\varphi = \arg z$ bestimmen – auch mit dem richtigen

Quadranten

- komplexe Zahlen in Polarform **multiplizieren** und **dividieren** (Beträge mal/geteilt, Winkel plus/minus)
- Potenzen mit der **Formel von de Moivre** berechnen
- alle n komplexen **n -ten Wurzeln** einer Zahl bestimmen und als Ecken eines regelmäßigen Vielecks deuten

In Kapitel 2 hast du komplexe Zahlen als Punkte $z = x + iy$ in der Gaußschen Zahlenebene kennengelernt und in kartesischer Form addiert, subtrahiert und multipliziert. Für *Multiplikation*, *Potenzen* und vor allem *Wurzeln* ist die kartesische Form aber unhandlich. Hier setzt Kapitel 7 an: Wir beschreiben denselben Punkt nicht durch seine Koordinaten x und y , sondern durch **Länge** und **Winkel** des Zeigers vom Nullpunkt. Das macht das Rechnen oft verblüffend einfach.

7.1 Polarform und Eulersche Darstellung

Ein Punkt $z = x + iy \neq 0$ in der Ebene ist eindeutig festgelegt, sobald man zwei Dinge kennt: den **Abstand** $r = |z|$ zum Nullpunkt und den **Winkel** φ , den der Zeiger von 0 nach z mit der positiven reellen Achse einschließt (im Gegenuhrzeigersinn gemessen).

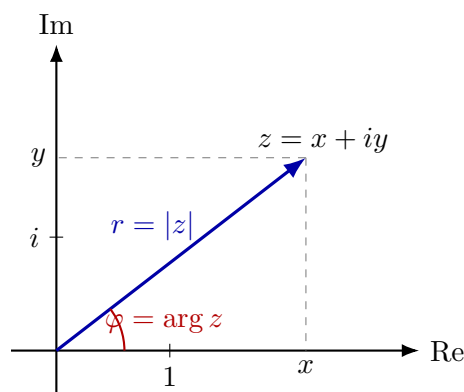


Abbildung 27: Abb. 7.1: Komplexe Zahl in Polardarstellung. Der Zeiger hat die Länge $r = |z|$ und schließt mit der reellen Achse den Winkel $\varphi = \arg z$ ein. Aus dem rechtwinkligen Dreieck liest man $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ ab.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck in Abb. 7.1 liest man direkt ab, wie kartesische und Polarkoordinaten zusammenhängen:

Polarform / Eulersche Darstellung einer komplexen Zahl:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

und damit

$$z = x + iy = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

Dabei ist $r = |z| \geq 0$ der **Betrag** und $\varphi = \arg z$ das **Argument** von z . Die kompakte Schreibweise $z = r e^{i\varphi}$ heißt **Eulersche Darstellung**.

Die Abkürzung $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ist zunächst nur eine praktische Schreibweise. Sie ist aber genau so gemacht, dass sich $e^{i\varphi}$ beim Rechnen wie eine gewöhnliche Potenz verhält – und daraus zieht dieses ganze Kapitel seinen Nutzen.

Achtung!

Das Argument φ ist **nicht eindeutig**: Dreht man den Zeiger um eine volle Umdrehung 2π weiter, landet man wieder bei z . Es gilt also

$$z = r e^{i(\varphi+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zwei Zahlen in Polarform sind daher genau dann gleich, wenn ihre *Beträge* übereinstimmen und sich ihre *Winkel* nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden. Diese Mehrdeutigkeit ist kein Schönheitsfehler – sie ist der Schlüssel zu den n -ten Wurzeln weiter unten!

Betrag und Argument aus x und y berechnen

Ist umgekehrt $z = x + iy$ gegeben, so bekommt man den Betrag über den Satz des Pythagoras, und den Winkel über den Tangens. Beim Winkel ist *Vorsicht* geboten: Der Taschenrechner-arctan liefert nur Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, kennt also den Unterschied zwischen dem ersten und dem dritten Quadranten nicht. Deshalb muss man je nach Lage von z nachbessern.

Betrag:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Argument (für $z \neq 0$), passend zum Quadranten:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Merkhilfe für den Quadranten

Zeichne z **immer erst grob in die Ebene**! Der Punkt zeigt dir sofort, in welchem Quadranten φ liegen muss. Ist der Realteil $x < 0$ (linke Halbebene), musst du zum Taschenrechnerwert $\arctan \frac{y}{x}$ noch π ($= 180^\circ$) addieren. Eine Skizze schützt vor dem häufigsten Fehler bei Polarkoordinaten – dem falschen Quadranten.

Von kartesisch nach polar: $z = 1 + i\sqrt{3}$

Gesucht ist die Eulersche Darstellung von $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Betrag:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Argument: Wegen $x = 1 > 0$ nehmen wir einfach den Arkustangens:

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \quad (= 60^\circ).$$

Ergebnis:

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 e^{i\pi/3}.$$

Probe: $2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$. ✓

Mini-Aufgabe

Bestimme Betrag r und Argument φ und schreibe $z = -\sqrt{3} + i$ in Eulerscher Darstellung.
Tipp: Skizziere den Punkt zuerst – in welchem Quadranten liegt er?

Lösung

Der Punkt liegt oben links (2. Quadrant), also muss φ zwischen 90° und 180° liegen.

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

Wegen $x = -\sqrt{3} < 0$ addieren wir π :

$$\varphi = \arctan \frac{1}{-\sqrt{3}} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \quad (= 150^\circ).$$

Also $z = 2e^{i5\pi/6}$. Probe: $2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$. ✓

7.2 Multiplikation und Division in Polarform

Jetzt zeigt sich, warum sich der Umweg über Betrag und Winkel lohnt. Da sich $e^{i\varphi}$ wie eine Potenz verhält ($e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$), wird das Multiplizieren zum Kinderspiel:

Für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0).$$

In Worten

Multiplizieren: Beträge *malnehmen*, Winkel *addieren*.

Dividieren: Beträge *teilen*, Winkel *subtrahieren*.

Eine Multiplikation ist also geometrisch eine **Drehstreckung**: Der Zeiger wird um den Faktor r_2 gestreckt und um den Winkel φ_2 gedreht.

Multiplikation

$z_1 = 2e^{i\pi/3}$ und $z_2 = 3e^{i\pi/6}$. Dann ist

$$z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot 3) e^{i(\pi/3+\pi/6)} = 6e^{i\pi/2} = 6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 6i.$$

Die Winkel 60° und 30° addieren sich zu 90° – das Produkt liegt genau auf der imaginären Achse.

Mini-Aufgabe

Berechne $\frac{z_1}{z_2}$ für $z_1 = 6e^{i5\pi/6}$ und $z_2 = 2e^{i\pi/3}$.

Lösung

Beträge teilen, Winkel subtrahieren:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2} e^{i(5\pi/6-\pi/3)} = 3e^{i(5\pi/6-2\pi/6)} = 3e^{i\pi/2} = 3i.$$

7.3 Potenzen und die Formel von de Moivre

Multipliziert man eine Zahl m -mal mit sich selbst, so wird ihr Betrag m -mal multipliziert (also potenziert) und ihr Winkel m -mal addiert (also mit m multipliziert). Das ist schon die ganze Idee:

Ganzzahlige Potenzen: für $z = r e^{i\varphi}$ und $m \in \mathbb{N}$

$$z^m = r^m e^{im\varphi} = r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi)$$

Setzt man hier speziell $r = 1$ (also $z = e^{i\varphi}$), erhält man eine der schönsten Formeln der Mathematik:

Formel von de Moivre: für $n \in \mathbb{N}$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Potenz über die Polarform: $(1+i)^8$

Direkt auszumultiplizieren wäre mühsam. In Polarform geht es in zwei Zeilen.

1. Polarform von $1+i$: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$. Also $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$.

2. Potenzieren:

$$(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i \cdot 8 \cdot \pi/4} = 2^4 e^{i2\pi} = 16 \cdot 1 = 16.$$

Der Winkel $8 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi$ ist eine volle Umdrehung, deshalb landen wir auf der positiven reellen Achse: das Ergebnis ist die reelle Zahl 16.

Mini-Aufgabe

Berechne $(1+i)^4$ mit Hilfe der Polarform.

Lösung

Mit $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$:

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i \cdot 4 \cdot \pi/4} = 4 e^{i\pi} = 4 (\cos \pi + i \sin \pi) = 4 \cdot (-1) = -4.$$

7.4 Die n -te Wurzel: n Lösungen

Im Reellen hat $\sqrt[3]{8}$ genau einen Wert. Im Komplexen ist das anders: Die Gleichung $z^n = \alpha$ hat für $\alpha \neq 0$ immer genau n verschiedene Lösungen. Der Grund ist die Mehrdeutigkeit des Arguments – genau die $2k\pi$, vor denen wir oben gewarnt haben.

n -te Wurzeln in $\mathbb{C}$: Gesucht sind alle z mit $z^n = \alpha$, wobei $\alpha = |\alpha| e^{i\phi} \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Sie lauten

$$z_k = \sqrt[n]{|\alpha|} e^{i \frac{\phi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

oder ausgeschrieben in kartesischer Form

$$z_k = \sqrt[n]{|\alpha|} \left[\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right].$$

Dabei ist $\sqrt[n]{|\alpha|}$ die gewöhnliche (reelle, positive) n -te Wurzel des Betrages.

Alle n Wurzeln haben **denselben Betrag** $\sqrt[n]{|\alpha|}$ – sie liegen also auf einem **Kreis** um den Nullpunkt. Ihre Winkel unterscheiden sich um jeweils $\frac{2\pi}{n}$. Die Wurzeln bilden daher die Ecken eines **regelmäßigen n -Ecks**. Ab $k = n$ wiederholt sich alles (man dreht um volle 2π), deshalb gibt es genau n verschiedene Werte.

Wir rechnen das wichtigste Beispiel aus der Vorlesung vollständig durch.

Die drei dritten Wurzeln von $-2 + 2i$

Gesucht sind alle z mit $z^3 = -2 + 2i$, also $z = \sqrt[3]{-2 + 2i}$.

1. Polarform von $\alpha = -2 + 2i$:

$$|\alpha| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

Wegen $x = -2 < 0$ (2. Quadrant) ist

$$\phi = \arctan \frac{2}{-2} + \pi = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}, \quad \text{also} \quad \alpha = \sqrt{8} e^{i(3\pi/4 + 2k\pi)}.$$

2. Wurzel ziehen. Der Vorfaktor ist $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = 8^{1/6} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$, und

$$z_k = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

3. Die drei Werte einzeln:

$$k = 0: \quad z_0 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i,$$

$$k = 1: \quad z_1 = z_0 \cdot e^{i2\pi/3} = (1 + i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1)i,$$

$$k = 2: \quad z_2 = z_0 \cdot e^{i4\pi/3} = (1 + i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1)i.$$

Die drei Punkte liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ und bilden ein gleichseitiges Dreieck (Winkelabstand 120°).

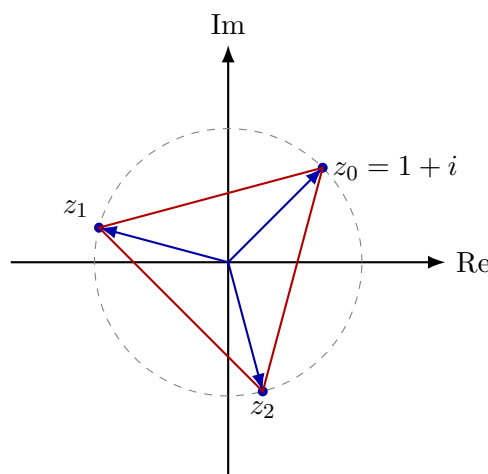


Abbildung 28: Abb. 7.2: Die drei dritten Wurzeln von $-2 + 2i$ liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ und bilden ein gleichseitiges Dreieck. Benachbarte Wurzeln unterscheiden sich um den Winkel $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$.

Mini-Aufgabe

Bestimme alle **vierten Einheitswurzeln**, also alle Lösungen von $z^4 = 1$. Wo liegen sie in der Ebene?

Lösung

Hier ist $\alpha = 1$, also $|\alpha| = 1$ und $\phi = 0$. Mit $\sqrt[4]{1} = 1$:

$$z_k = e^{i \frac{0+2k\pi}{4}} = e^{i k\pi/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Das ergibt der Reihe nach

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i\pi/2} = i, \quad z_2 = e^{i\pi} = -1, \quad z_3 = e^{i3\pi/2} = -i.$$

Die vier Werte $1, i, -1, -i$ liegen auf dem Einheitskreis und bilden ein Quadrat.

Mini-Aufgabe

Bestimme beide Quadratwurzeln von $\alpha = 2i$, also die Lösungen von $z^2 = 2i$.

Lösung

Polarform: $|\alpha| = |2i| = 2$ und $\phi = \frac{\pi}{2}$ (positive imaginäre Achse). Mit $\sqrt{2}$ als Vorfaktor:

$$z_k = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + k\pi)}, \quad k = 0, 1.$$

$$k = 0 : z_0 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i, \quad k = 1 : z_1 = \sqrt{2} e^{i5\pi/4} = -1 - i.$$

Probe: $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. ✓ Die beiden Wurzeln sind $z_1 = -z_0$, liegen sich also genau gegenüber.

7.5 Zusammenfassung Kapitel 7

Das Wichtigste aus Kapitel 7

- **Polarform:** $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$ mit Betrag $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und Argument $\varphi = \arg z$. Umrechnung: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.
- **Argument mit Quadrant:** $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ für $x > 0$; **plus** π für $x < 0$. Immer zuerst skizzieren!
- **Mehrdeutigkeit:** φ nur bis auf $+2k\pi$ bestimmt.
- **Multiplizieren / Dividieren:** Beträge mal/geteilt, Winkel plus/minus: $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.
- **Potenzen (de Moivre):** $z^m = r^m e^{im\varphi}$, speziell $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.
- **n -te Wurzeln:** genau n Stück, $z_k = \sqrt[n]{|\alpha|} e^{i \frac{\phi + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$; sie bilden ein regelmäßiges n -Eck auf einem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{|\alpha|}$.

8 Lineare Algebra

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit dem Gaußschen Algorithmus lösen und erkennen, ob keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen existieren
- mit Vektoren des $\mathbb{R}^n$ und mit Matrizen rechnen (addieren, mit Skalar multiplizieren, Matrizen multiplizieren, transponieren)
- Determinanten berechnen – mit der Regel von Sarrus, durch Entwicklung und mit den Rechenregeln
- die inverse Matrix bestimmen (über Adjunkten und mit dem Gauß-Jordan-Verfahren) und die Cramersche Regel anwenden
- Eigenwerte über das charakteristische Polynom und die zugehörigen Eigenvektoren berechnen
- Koordinatentransformationen (insbesondere Drehungen) durchführen und die ebenen Kegelschnitte Ellipse, Hyperbel und Parabel anhand ihrer Normalform erkennen

Dieses Kapitel ist das umfangreichste des Skripts – und zugleich eines der prüfungsrelevantesten. Die gute Nachricht: Fast alles läuft am Ende auf *Rechenhandwerk* hinaus. Wer ein LGS sauber lösen, eine Determinante berechnen und eine Matrix invertieren kann, hat den Großteil geschafft. Halte also Stift, Papier und Geduld bereit – und rechne jedes Beispiel mit.

8.1 Lineare Gleichungssysteme und der Gaußsche Algorithmus

Sehr viele Aufgaben in Technik und Wirtschaft führen auf mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten, die *gleichzeitig* erfüllt sein müssen. Wenn dabei die Unbekannten nur *linear* (also ohne Potenzen, Produkte oder Wurzeln) vorkommen, spricht man von einem linearen Gleichungssystem.

Ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** aus m Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ hat die Form

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

mit $a_{jk}, b_j \in \mathbb{R}$. Ein Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ heißt **Lösung**, wenn es *alle* m Gleichungen erfüllt. Sind alle $b_j = 0$, heißt das LGS **homogen**, sonst **inhomogen**.

Äquivalenzumformungen

Wie löst man so ein System? Die Idee ist, das LGS schrittweise zu *vereinfachen*, ohne die Lösungsmenge zu verändern. Umformungen, die man rückgängig machen kann, heißen **Äquivalenzumformungen**.

Erlaubte Umformungen eines LGS

Die Lösungsmenge ändert sich *nicht*, wenn man

1. zwei Zeilen **vertauscht**,

2. eine Zeile mit einer Zahl $\alpha \neq 0$ **multipliziert**,
3. ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile **addiert**.

Die Grundidee des Gauß-Algorithmus

Mit diesen Umformungen bringt man das System auf **Stufenform (Dreiecksgestalt)**: Man räumt Spalte für Spalte die Unbekannten unterhalb der Diagonalen aus. Am Ende steht in der letzten Gleichung nur noch eine Unbekannte, die man direkt ablesen kann. Von unten nach oben setzt man dann ein (**Rückwärtseinsetzen**).

WICHTIG!

Da beim Gauß-Verfahren nur die *Koeffizienten* umgeformt werden, lässt man die Variablen weg und schreibt nur das Zahlenschema – die **erweiterte Koeffizientenmatrix**. Der senkrechte Strich trennt die linke Seite von der rechten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

Das spart enorm Schreibarbeit und Übersicht.

Ein LGS mit eindeutiger Lösung

Wir lösen

$$x + y + z = 6$$

$$2x + y - z = 1$$

$$x - y + 2z = 5.$$

Wir schreiben die erweiterte Matrix und räumen die erste Spalte aus: Zeile 2 wird $\text{II} - 2 \cdot \text{I}$, Zeile 3 wird $\text{III} - \text{I}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Nun die zweite Spalte: Zeile 3 wird $\text{III} - 2 \cdot \text{II}$:

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array} \right).$$

Jetzt hat das System Dreiecksgestalt. **Rückwärtseinsetzen:**

$$7z = 21 \Rightarrow z = 3, \quad -y - 3 \cdot 3 = -11 \Rightarrow y = 2, \quad x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1.$$

Also $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. **Probe** (immer machen!): $1 + 2 + 3 = 6 \checkmark$, $2 - 2 - 3 = -3$? Vorsicht: $2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1 \checkmark$, $1 - 2 + 6 = 5 \checkmark$.

Wann keine, wann unendlich viele Lösungen?

Nicht jedes LGS ist eindeutig lösbar. Beim Gauß-Verfahren erkennt man den Fall sofort an der Stufenform:

Die drei Fälle beim Gauß-Verfahren

Nach Herstellen der Stufenform gilt:

- Entsteht eine Zeile der Form $0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c$ mit $c \neq 0$, so ist das eine Aussage „ $0 = c$ “ – ein Widerspruch. Das LGS hat **keine Lösung**.
- Sind alle Nullzeilen von der Form $0 \ \dots \ 0 \mid 0$ und bleiben nach Streichen freie Variablen übrig, so gibt es **unendlich viele Lösungen** (parameterabhängig).
- Ist die linke Seite eine „volle“ Dreiecksform (jede Unbekannte hat ihren Pivot), so gibt es **genau eine Lösung**.

Ein LGS mit unendlich vielen Lösungen

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 5\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise räumt man Zeile für Zeile aus. Nach vollständiger Elimination bleibt (mit den üblichen Zeilenoperationen) unter anderem die Zeile $0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 0$ übrig – eine Unbekannte ist also *frei* wählbar. Setzt man $x_3 = t$ ($t \in \mathbb{R}$), so liefert das Rückwärtseinsetzen

$$-6x_4 = -6 \Rightarrow x_4 = 1, \quad x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \Rightarrow x_2 = t, \quad x_1 = 1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2.$$

Lösung: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, t, t, 1)$ mit $t \in \mathbb{R}$ – also eine ganze Lösungsgerade.

Dasselbe System, aber unlösbar

Ändert man in der letzten Gleichung des vorigen Systems nur die rechte Seite von 5 auf 0, so entsteht beim Ausräumen am Ende die Zeile

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 5.$$

Das ist die falsche Aussage „ $0 = 5$ “. Das System besitzt daher **keine Lösung**. Man sieht: An einer einzigen Zahl auf der rechten Seite kann die Lösbarkeit hängen.

Mini-Aufgabe

Löse mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned}2x + y &= 5 \\x - y &= 1.\end{aligned}$$

Lösung

Aus der zweiten Gleichung $x = 1 + y$. Einsetzen in die erste: $2(1+y) + y = 5 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$, also $x = 2$. **Probe:** $2 \cdot 2 + 1 = 5$ ✓, $2 - 1 = 1$ ✓. Lösung $(x, y) = (2, 1)$.

8.2 Der n -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

Aus der Vektorrechnung kennst du bereits den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. Für die lineare Algebra brauchen wir Vektoren mit *beliebig vielen* Komponenten.

Der n -dimensionale euklidische Raum ist

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}.$$

Man schreibt einen Vektor als Zeile $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ oder als Spalte $\vec{x}^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Gerechnet wird – ganz wie im $\mathbb{R}^3$ – **komponentenweise**:

Für $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \quad \alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n).$$

Skalarprodukt und **Betrag**:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

Diese Operationen erfüllen dieselben Rechengesetze wie im $\mathbb{R}^3$ (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität). Die Vektoren

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

bilden die **Standardbasis (Orthonormalbasis)**: Es gilt $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = 1$ für $j = k$ und $= 0$ für $j \neq k$, und jeder Vektor schreibt sich als $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + \dots + a_n \vec{e}_n$.

Lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ heißen **linear unabhängig**, wenn aus

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_m \vec{a}_m = \vec{0} \quad \text{folgt:} \quad c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0.$$

Lässt sich der Nullvektor dagegen mit nicht sämtlich verschwindenden c_k darstellen, sind sie **linear abhängig**.

Mini-Aufgabe

Gegeben $\vec{a} = (1, 0, 2, -1)$ und $\vec{b} = (2, 1, 0, 3)$ im $\mathbb{R}^4$. Berechne $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $|\vec{a}|$.

Lösung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 = 2 - 3 = -1, \quad |\vec{a}| = \sqrt{1 + 0 + 4 + 1} = \sqrt{6}.$$

8.3 Matrizen

Ordnet man Zahlen in einem rechteckigen Schema an, so erhält man eine Matrix. Matrizen sind das zentrale Werkzeug der linearen Algebra – sie beschreiben LGS, Drehungen, Projektionen und vieles mehr in einem einzigen kompakten Objekt.

Ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{jk})$$

heißt $m \times n$ -**Matrix**. Dabei ist j der **Zeilenindex**, k der **Spaltenindex**. Die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots$ bilden die **Hauptdiagonale**.

Spezielle Matrizen

- **Nullmatrix** 0 : alle Elemente sind 0 .
- **Diagonalmatrix**: alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen sind 0 .
- **Dreiecksmatrix**: alle Elemente unterhalb (oder alle oberhalb) der Hauptdiagonalen sind 0 .
- **Quadratische Matrix**: Zeilenzahl = Spaltenzahl ($n \times n$ -Matrix).
- **Einheitsmatrix** E : Diagonalmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen.

Addition und Multiplikation mit einer Zahl

Zwei $m \times n$ -Matrizen $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ addiert man **elementweise**, und mit $\alpha \in \mathbb{R}$ multipliziert man jedes Element:

$$A + B = (a_{jk} + b_{jk}), \quad \alpha A = (\alpha a_{jk}).$$

Das Matrizenprodukt

Das Produkt zweier Matrizen ist *nicht* elementweise definiert, sondern über Zeilen mal Spalten – ganz wie eine Sammlung von Skalarprodukten.

Ist A eine $m \times n$ -Matrix und B eine n, r -Matrix (die *Spaltenzahl von A* muss gleich der *Zeilenzahl von B* sein!), so ist das Produkt AB eine m, r -Matrix. Das Element in Zeile j , Spalte k ist das Skalarprodukt aus der j -ten Zeile von A und der k -ten Spalte von B :

$$(AB)_{jk} = \sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ik}$$

Ein Matrizenprodukt

Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Achtung!

Das Matrizenprodukt ist **nicht kommutativ**: Im Allgemeinen ist $AB \neq BA$! Für die Matrizen oben etwa ist

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq AB.$$

Es kann sogar sein, dass AB existiert, BA aber gar nicht bildbar ist – oder ein anderes Format hat.

Rechenregeln für Matrizen

Sofern die Produkte existieren, gilt:

$$A(BC) = (AB)C, \quad A(B+C) = AB+AC, \quad (A+B)C = AC+BC, \quad AE = EA = A.$$

Es gilt *nicht* $AB = BA$ und *nicht* die Kürzungsregel (aus $AB = 0$ folgt nicht $A = 0$ oder $B = 0$).

Die transponierte Matrix

Vertauscht man in A Zeilen und Spalten (spiegelt man an der Hauptdiagonalen), so erhält man die **transponierte Matrix** A^T . Aus einer $m \times n$ -Matrix wird eine $n \times m$ -Matrix. Gilt $A^T = A$, so heißt A **symmetrisch**.

Transponieren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mini-Aufgabe

Berechne AB für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Welches Format hat das Ergebnis?

Lösung

A ist 2×3 , B ist 3×2 – passt, das Ergebnis ist 2×2 :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.4 Determinanten

Jeder *quadratischen* Matrix A ordnet man eine reelle Zahl zu, die **Determinante** $|A|$ (auch $\det A$). Sie beantwortet die für uns wichtigste Frage: $|A| \neq 0$ genau dann, wenn die Zeilen (bzw. Spalten) linear unabhängig sind – und genau dann ist A invertierbar und ein zugehöriges LGS eindeutig lösbar. Geometrisch ist $|A|$ der (orientierte) Flächen- bzw. Volumeninhalt des von den Zeilenvektoren aufgespannten Parallelogramms bzw. Spats.

Zweireihige Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{Hauptdiagonale minus Nebendiagonale}).$$

Zweireihige Determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10.$$

Dreireihige Determinanten – die Regel von Sarrus

Für 3×3 -Matrizen gibt es ein bequemes Merkschema: Man schreibt die ersten beiden Spalten noch einmal rechts daneben und bildet die Produkte längs der Diagonalen – die drei nach rechts unten laufenden mit $+$, die drei nach rechts oben laufenden mit $-$.

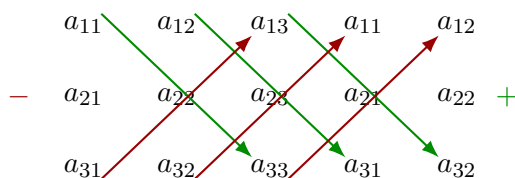


Abbildung 29: Regel von Sarrus: die ersten beiden Spalten werden wiederholt. Grüne Diagonalen (nach rechts unten) zählen positiv, rote (nach rechts oben) negativ.

Regel von Sarrus (nur für 3×3 -Matrizen!):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Sarrus konkret

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 1}_6 + \underbrace{(-1) \cdot 2 \cdot 0}_0 + \underbrace{0 \cdot 1 \cdot 1}_0 - \underbrace{0 \cdot 3 \cdot 0}_0 - \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 1}_4 - \underbrace{(-1) \cdot 1 \cdot 1}_{-1} = 6 - 4 + 1 = 3.$$

Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte

Für größere Matrizen (und als Alternative bei 3×3) benutzt man den **Entwicklungssatz von Laplace**. Er führt eine n -reihige Determinante auf $(n-1)$ -reihige zurück.

Streicht man aus A die j -te Zeile und die k -te Spalte, so erhält man die **Unterdeterminante** $|\tilde{A}_{jk}|$. Die **Adjunkte** (das algebraische Komplement) ist

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} |\tilde{A}_{jk}|.$$

Man kann nach jeder Zeile j oder jeder Spalte k **entwickeln**:

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk} \quad (\text{nach Zeile } j), \quad |A| = \sum_{j=1}^n a_{jk} A_{jk} \quad (\text{nach Spalte } k).$$

Das Vorzeichenmuster $(-1)^{j+k}$ ist ein Schachbrettmuster:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Tipp: nach der günstigsten Zeile/Spalte entwickeln

Man entwickelt am besten nach der Zeile oder Spalte mit den *meisten Nullen* – für jede Null entfällt ein ganzer Summand.

Entwicklung nach einer Spalte

Wir entwickeln nach der ersten Spalte (sie enthält eine Null):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}}_{0-24=-24} - 0 + 5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}_{8-3=5} = 1 \cdot (-24) + 5 \cdot 5 = -24 + 25 = 1.$$

(Beachte die Vorzeichen $+, -, +$ der ersten Spalte.)

Rechenregeln für Determinanten

Diese Regeln sparen oft viel Arbeit – besonders Regel 5 (Zeilenumformungen) und Regel 7 (Dreiecksmatrix).

Determinantenregeln

1. $|A^T| = |A|$ (Transponieren ändert nichts).
2. Vertauscht man zwei Zeilen (oder Spalten), so **wechselt das Vorzeichen**.
3. Multipliziert man eine Zeile mit α , so wird die Determinante mit α multipliziert.
4. Ist eine Zeile (Spalte) komplett 0, so ist $|A| = 0$.
5. Addiert man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, so **ändert sich $|A|$ nicht**.
6. $|A| \neq 0 \iff$ die Zeilen (Spalten) sind linear unabhängig.
7. Bei einer **Dreiecks-** oder Diagonalmatrix ist $|A|$ das Produkt der Hauptdiagonalelemente.
8. **Produktregel:** $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Determinante clever über Dreiecksform

Statt einer 4×4 -Determinante direkt zu Leibe zu rücken, formt man sie mit Regel 5 auf Dreiecksgestalt um – dann ist sie nach Regel 7 einfach das Produkt der Diagonalelemente.

Bringt man etwa eine 4×4 -Matrix durch Zeilenoperationen (die die Determinante nicht ändern) und nach Ausklammern gemeinsamer Faktoren auf die Form

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12,$$

so liest man das Ergebnis direkt ab.

Mini-Aufgabe

Berechne mit Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Lösung

$$2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 12 + 0 + 0 - 0 - 2 - 2 = 8.$$

8.5 Die inverse Matrix

Bei den reellen Zahlen gibt es zu $a \neq 0$ die Kehrzahl $a^{-1} = \frac{1}{a}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$. Das Gegenstück bei Matrizen ist die inverse Matrix.

Gibt es zu einer quadratischen Matrix A eine Matrix A^{-1} mit

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

so heißt A^{-1} die zu A **inverse Matrix**. Sie existiert **genau dann, wenn** $|A| \neq 0$.

Warum die Bedingung $|A| \neq 0$? Wegen $|A| \cdot |A^{-1}| = |A A^{-1}| = |E| = 1$ müsste sonst $0 \cdot |A^{-1}| = 1$ gelten – unmöglich. Also ist $|A| \neq 0$ notwendig; man kann zeigen, dass es auch hinreicht.

Weg 1: über die Adjunkten

Ist $|A| \neq 0$, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{jk})^{\top}$$

wobei $A_{jk} = (-1)^{j+k} |\tilde{A}_{jk}|$ die Adjunkten sind. **Wichtig:** Die Matrix der Adjunkten wird noch *transponiert*!

Für 2×2 -Matrizen ergibt das eine sehr handliche Formel:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad |A| = ad - bc \neq 0 \implies A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(Merke: Hauptdiagonale tauschen, Nebendiagonale mit -1 , alles durch die Determinante.)

Inverse einer 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad |A| = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1. \text{ Also}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Probe: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

Inverse einer 3×3 -Matrix über Adjunkten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Zuerst die Determinante (Entwicklung nach der dritten Spalte):}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 9 \neq 0.$$

Nun bildet man alle neun Adjunkten $A_{jk} = (-1)^{j+k} |\tilde{A}_{jk}|$, ordnet sie zur Matrix (A_{jk}) und *transponiert*:

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Probe (unbedingt machen!): $A \cdot A^{-1}$ ergibt tatsächlich E . Etwa die erste Zeile mal erste Spalte: $\frac{1}{9}(1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 3) = \frac{1}{9} \cdot 9 = 1 \checkmark$

Weg 2: das Gauß-Jordan-Verfahren

Für 3×3 -Matrizen und größer ist das Adjunkten-Verfahren mühsam (man muss viele Unterdeterminanten bilden). Bequemer ist folgende Idee: Man schreibt A und die Einheitsmatrix nebeneinander und formt mit Zeilenoperationen die *linke* Seite zu E um. Dann steht rechts automatisch A^{-1} .

Gauß-Jordan: Forme $(A \mid E)$ durch Zeilenoperationen um, bis links die Einheitsmatrix steht:

$$(A \mid E) \longrightarrow (E \mid A^{-1}).$$

Im Unterschied zum gewöhnlichen Gauß-Verfahren hört man *nicht* bei der Dreiecksform auf, sondern räumt auch oberhalb der Diagonalen aus und normiert die Pivots auf 1.

Inverse mit Gauß-Jordan

Wir invertieren dieselbe Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ($|A| = 9 \neq 0$) und starten mit $(A \mid E)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(erst II−I und III+I). Jetzt oberhalb ausräumen und Pivots normieren; nach einigen weiteren Schritten steht links E und rechts erscheint

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{9} & 0 & \frac{3}{9} \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beruhigend: Es kommt dasselbe heraus wie über die Adjunkten.

Mini-Aufgabe

Bestimme die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ und mache die Probe.

Lösung

$|A| = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1$. Mit der 2×2 -Formel:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Probe: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+9 & 12-12 \\ -6+6 & 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

8.6 Lineare Gleichungssysteme und die Cramersche Regel

Mit Matrizen schreibt sich ein LGS ganz kurz als

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad A = (a_{jk}), \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

A heißt **Koeffizientenmatrix**. Für ein *quadratisches* System (n Gleichungen, n Unbekannte) mit $|A| \neq 0$ existiert A^{-1} , und man erhält die Lösung direkt:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Lösbarkeit im Überblick

Wann ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar?

Für das quadratische System ($n \times n$) gilt:

- **Genau eine** Lösung $\iff |A| \neq 0$.
- Das *homogene* System $A\vec{x} = \vec{0}$ hat **nichttriviale** Lösungen ($\vec{x} \neq \vec{0}$) $\iff |A| = 0$.
- Ist $|A| = 0$, so hat das inhomogene System entweder keine oder unendlich viele Lösungen (je nach rechter Seite $\vec{b}$).

Ist $\vec{x}_p$ eine spezielle Lösung des inhomogenen und $\vec{x}_h$ die allgemeine Lösung des homogenen Systems, so ist $\vec{x}_A = \vec{x}_h + \vec{x}_p$ die **allgemeine Lösung** des inhomogenen Systems.

Die Cramersche Regel

Für kleine Systeme mit $|A| \neq 0$ gibt es eine elegante Determinantenformel. Sie ist vor allem praktisch, wenn man nur *eine* der Unbekannten braucht.

Cramersche Regel: Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $|A| \neq 0$, so ist

$$x_k = \frac{D_k}{|A|}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

wobei D_k aus $|A|$ entsteht, indem man die k -te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt.

Cramersche Regel

Wir lösen

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\-x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2.\end{aligned}$$

Zunächst die Koeffizientendeterminante (Sarrus):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Nun ersetzt man nacheinander die 1., 2., 3. Spalte durch $\vec{b} = (1, 2, 2)^\top$:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9.$$

Daraus

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|} = \frac{12}{12} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{|A|} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \quad x_3 = \frac{D_3}{|A|} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Probe in Gleichung 1: $1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1 \checkmark$

Achtung!

Die Cramersche Regel funktioniert **nur** für quadratische Systeme mit $|A| \neq 0$. Für große Systeme ist sie sehr rechenaufwendig (viele Determinanten!) – dann ist der Gauß-Algorithmus deutlich schneller. Für 2×2 - und 3×3 -Systeme ist sie aber eine schnelle, fehlerarme Alternative.

Mini-Aufgabe

Löse mit der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned}2x + y &= 5 \\x + 3y &= 5.\end{aligned}$$

Lösung

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 10, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

$$x = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{5}{5} = 1.$$

Probe: $2 \cdot 2 + 1 = 5 \checkmark$, $2 + 3 = 5 \checkmark$.

8.7 Eigenwertprobleme

Multipliziert man einen Vektor $\vec{a}$ mit einer Matrix A , so wird er im Allgemeinen gedreht *und* gestreckt. Für manche besonderen Vektoren ändert sich aber *nur die Länge, nicht die Richtung*: A streckt sie einfach um einen Faktor λ . Solche Vektoren heißen Eigenvektoren – sie spielen in Technik (Hauptträgheitsachsen, Schwingungen, Stabilität) und Wirtschaft eine große Rolle.

Zur quadratischen Matrix A sucht man Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ und Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ mit

$$A\vec{a} = \lambda\vec{a}.$$

λ heißt **Eigenwert**, $\vec{a}$ **Eigenvektor** von A .

So findet man die Eigenwerte

Wegen $\vec{a} = E\vec{a}$ schreibt sich die Gleichung als

$$A\vec{a} = \lambda E\vec{a} \iff (A - \lambda E)\vec{a} = \vec{0}.$$

Das ist ein *homogenes* LGS. Es hat nichttriviale Lösungen $\vec{a} \neq \vec{0}$ genau dann, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

Die **Eigenwerte** sind die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms**

$$P(\lambda) = |A - \lambda E| = 0.$$

Für eine $n \times n$ -Matrix ist $P(\lambda)$ ein Polynom n -ten Grades in λ .

Vorgehen beim Eigenwertproblem

1. Charakteristisches Polynom $P(\lambda) = |A - \lambda E|$ aufstellen und die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bestimmen.
2. Zu jedem λ_k das homogene LGS $(A - \lambda_k E)\vec{a} = \vec{0}$ lösen – das liefert die zugehörigen Eigenvektoren.

Für die 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Eigenwerte:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - (-2) \cdot 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3).$$

Also $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

2. Eigenvektoren. Für $\lambda_1 = 2$ löst man $(A - 2E)\vec{a} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Probe: $A\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{a}_1 \checkmark$ und $A\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\vec{a}_2 \checkmark$

Achtung!

Ein Eigenvektor ist nie eindeutig: Ist $\vec{a}$ Eigenvektor zu λ , so auch jedes Vielfache $t\vec{a}$ ($t \neq 0$). Man gibt daher meist einen *möglichst einfachen* Vektor an oder normiert auf $|\vec{a}| = 1$.

Eigenwerte einer 3×3 -Matrix (symmetrisch)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$|A - \lambda E| = -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 165\lambda + 242 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 11, \quad \lambda_3 = 2.$$

(Der Eigenwert 11 ist *doppelt*.) Für $\lambda_3 = 2$ löst man $(A - 2E)\vec{a} = \vec{0}$, also

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \vec{a} = \vec{0}.$$

Die Zeilenumformungen liefern $x_1 = x_2 = x_3$, also $\vec{a}_3 = t(1, 1, 1)$; normiert $\vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Zum doppelten Eigenwert $\lambda = 11$ führt $(A - 11E)\vec{a} = \vec{0}$ auf die einzige Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ – eine ganze Ebene von Eigenvektoren, aus der man zwei zueinander senkrechte auswählen kann, etwa $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$ und $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$.

Probe der Eigenwerte im Polynom: $P(2) = -8 + 96 - 330 + 242 = 0 \checkmark$ und $P(11) = -1331 + 2904 - 1815 + 242 = 0 \checkmark$

Diagonalisierung symmetrischer Matrizen

Sind alle n Eigenwerte reell und die Eigenvektoren linear unabhängig, so bildet man aus den Eigenvektoren als Spalten die Matrix $U = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Dann ist

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D,$$

d.h. A wird auf **Diagonalform** gebracht. Für **symmetrische** Matrizen ($A^\top = A$) klappt das immer: Ihre Eigenwerte sind reell, und man kann die Eigenvektoren paarweise senkrecht mit Betrag 1 wählen. Dann ist U **unitär** ($U^\top = U^{-1}$), und es gilt sogar

$$U^\top AU = D.$$

Mini-Aufgabe

Bestimme die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und je einen Eigenvektor.

Lösung

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1), \text{ also } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1.$$

$$\bullet \lambda_1 = 3: (A - 3E) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow \vec{a}_1 = (1, 1).$$

$$\bullet \lambda_2 = -1: (A + E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow \vec{a}_2 = (1, -1).$$

$$\textbf{Probe: } A(1, 1)^\top = (3, 3)^\top = 3(1, 1)^\top \checkmark$$

8.8 Koordinatentransformation

Die Standardbasis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ ist bequem, aber nicht die einzig mögliche. Wählt man eine *andere* Basis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ (also n linear unabhängige Vektoren), so hat jeder Vektor $\vec{a}$ auch *bezüglich dieser Basis* eindeutige Koordinaten:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n.$$

Wie hängen die neuen Koordinaten $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit den alten $(a_1, \dots, a_n)$ zusammen? Schreibt man die neuen Basisvektoren als Spalten der Matrix $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, so gilt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{und da } A^{-1} \text{ existiert:} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten transformieren sich also mit A^{-1} .

Besonders schön wird es, wenn die neue Basis wieder **orthonormal** ist (paarweise senkrecht, Betrag 1). Dann ist $AA^\top = E$, also $A^{-1} = A^\top$ – die Matrix ist **unitär**, und man muss zum Umrechnen gar nicht invertieren, sondern nur transponieren. Solche Transformationen erhalten *Längen und Winkel*: $|U\vec{a}| = |\vec{a}|$.

8.9 Ebene Koordinatentransformation: die Drehung

Im $\mathbb{R}^2$ ist der wichtigste Basiswechsel die **Drehung** des Koordinatensystems um den Ursprung. Dreht man die Achsen um den Winkel α , so gehen $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ in eine neue orthonormale Basis $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ über.

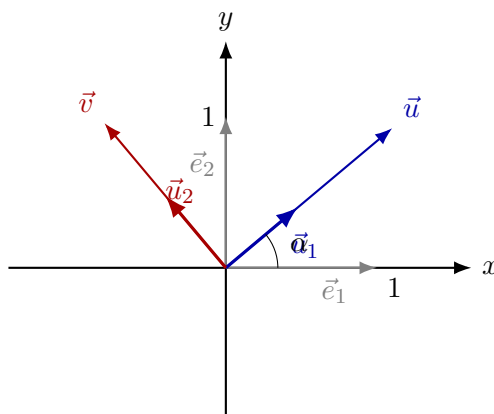


Abbildung 30: Koordinatentransformation durch Drehung: Das (x, y) -System wird um den Winkel α in das neue (u, v) -System gedreht. $\vec{u}_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\vec{u}_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$.

Die **Drehmatrix** um den Winkel α ist

$$U = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Ein Punkt $\vec{x} = (x, y)$ hat im gedrehten System die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Es gilt $|U| = 1$ und $U^T = U^{-1}$. Eine reine **Verschiebung** (Translation) des Ursprungs nach (x_0, y_0) ist dagegen $u = x - x_0$, $v = y - y_0$.

Drehung um 90°

Für $\alpha = 90^\circ$ ist $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = 1$, also

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $(x, y) = (2, 0)$ geht über in $U \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ – der Punkt auf der x -Achse landet auf der y -Achse, wie es eine Vierteldrehung erwarten lässt.

Mini-Aufgabe

Gib die Drehmatrix für $\alpha = 45^\circ$ an und berechne, wohin der Punkt $(1, 1)$ abgebildet wird ($\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Der Punkt liegt danach auf der y -Achse – klar, denn $(1,1)$ zeigt genau in Richtung 45° .

8.10 Ebene Kegelschnitte und ihre Normalformen

Schneidet man einen Doppelkegel mit einer Ebene, so entstehen – je nach Neigung – Kreis, Ellipse, Hyperbel oder Parabel. Algebraisch werden all diese Kurven durch *eine* Sorte Gleichung beschrieben.

Die allgemeine Gleichung eines **ebenen Kegelschnitts** ist

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y = a_0.$$

Durch geeignete **Drehung** (beseitigt den gemischten Term xy) und **Verschiebung** (beseitigt die linearen Terme) bringt man sie auf eine **Normalform**, an der man den Kurventyp abliest.

Die drei Grundtypen

1. Ellipse (Vorfaktoren gleiches Vorzeichen):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a, b sind die **Halbachsen**. Für $a = b$ entsteht ein **Kreis** mit Radius a . Parameterform:
 $x = a \cos t, y = b \sin t$.

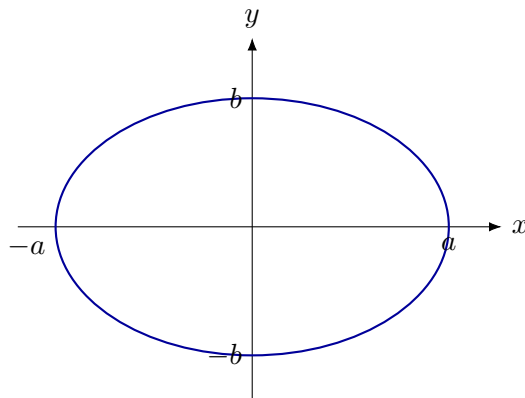


Abbildung 31: Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit den Halbachsen a (in x -Richtung) und b (in y -Richtung).

2. Hyperbel (Vorfaktoren verschiedenes Vorzeichen):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Kurve besteht aus zwei Ästen und nähert sich für große $|x|$ den **Asymptoten** $y = \pm \frac{b}{a}x$ an.

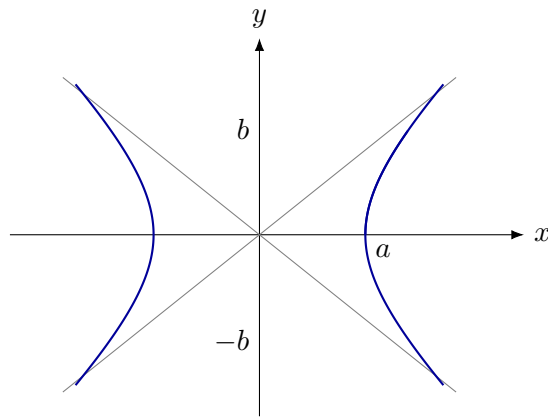


Abbildung 32: Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit den beiden Ästen und den Asymptoten $y = \pm \frac{b}{a}x$ (grau).

3. Parabel (nur ein quadratischer Term):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y = a_0 \quad \text{bzw. nach } y \text{ aufgelöst} \quad y = px^2 + q.$$

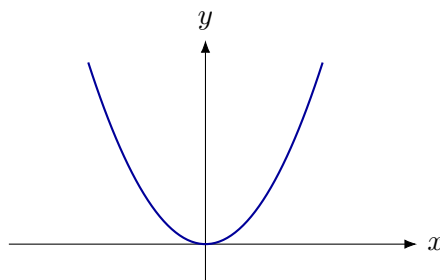


Abbildung 33: Parabel $y = ax^2$ (hier nach oben geöffnet). Ändert man das Vorzeichen, öffnet sie nach unten.

Wie man den Typ erkennt

Für den zentrierten, gedrehten Kegelschnitt $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = a_0$ (mit $a_0 > 0$):

- a_{11}, a_{22} **beide positiv** $\Rightarrow$ **Ellipse** (bzw. Kreis für $a_{11} = a_{22}$).
- a_{11}, a_{22} **verschiedenes Vorzeichen** ($a_{11} \cdot a_{22} < 0$) $\Rightarrow$ **Hyperbel**.
- Fehlt ein quadratischer Term und ist der zugehörige lineare vorhanden $\Rightarrow$ **Parabel**.

Die Halbachsen erhält man durch Normieren auf 1: $a = \sqrt{a_0/a_{11}}$, $b = \sqrt{a_0/|a_{22}|}$.

Von der Gleichung zur Normalform

Gegeben $4x^2 + 9y^2 = 36$. Wir teilen durch 36, um rechts eine 1 zu erhalten:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \iff \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Beide Vorfaktoren sind positiv – eine **Ellipse** mit den Halbachsen $a = \sqrt{9} = 3$ und $b = \sqrt{4} = 2$.

Mini-Aufgabe

Um welchen Kegelschnitt handelt es sich bei $9x^2 - 16y^2 = 144$? Gib die Halbachsen an.

Lösung

Teilen durch 144:

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \iff \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Verschiedene Vorzeichen $\Rightarrow$ **Hyperbel** mit $a = \sqrt{16} = 4$ und $b = \sqrt{9} = 3$; die Asymptoten sind $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Kegelschnitte und Eigenwerte – der Zusammenhang

Der gemischte Term $2a_{12}xy$ verschwindet genau dann, wenn man das Koordinatensystem in die Richtung der **Eigenvektoren** der Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ dreht. Die *Eigenwerte* dieser (symmetrischen!) Matrix sind dann genau die Vorfaktoren der quadratischen Terme in der Normalform. So schließt sich der Kreis zwischen Eigenwertproblem, Koordinatentransformation und Kegelschnitten.

8.11 Zusammenfassung Kapitel 8

Das Wichtigste aus Kapitel 8

- **Gauß-Algorithmus:** LGS über die erweiterte Matrix auf Dreiecksform bringen, dann rückwärts einsetzen. Fälle: keine Lösung (Zeile $0 \dots 0 \mid c$, $c \neq 0$), unendlich viele (freie Variablen), genau eine.
- **Matrizen:** elementweise addieren; Produkt über Zeile mal Spalte, $(AB)_{jk} = \sum_i a_{ji}b_{ik}$; **nicht kommutativ** ($AB \neq BA$); Transponieren spiegelt an der Diagonalen.
- **Determinante:** 2×2 : $ad - bc$; 3×3 : Regel von Sarrus oder Entwicklung nach Zeile/Spalte; Regeln nutzen (Dreiecksform $\rightarrow$ Produkt der Diagonale). $|A| \neq 0 \iff$ invertierbar.
- **Inverse:** $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{jk})^T$ (Adjunkten, transponiert!) oder Gauß-Jordan $(A \mid E) \rightarrow (E \mid A^{-1})$. 2×2 -Formel: Diagonale tauschen, Nebendiagonale mit -1 , durch $|A|$.
- **LGS mit Matrizen:** $A\vec{x} = \vec{b}$; für $|A| \neq 0$ ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. **Cramer:** $x_k = D_k/|A|$ (k -te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt).
- **Eigenwerte:** Nullstellen von $P(\lambda) = |A - \lambda E|$; Eigenvektoren aus $(A - \lambda E)\vec{a} = \vec{0}$. Symmetrische Matrizen sind stets diagonalisierbar ($U^T A U = D$).
- **Drehung** in der Ebene: $U = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, unitär ($U^T = U^{-1}$), längentreu.
- **Kegelschnitte:** Normalform $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Ellipse), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Hyperbel), $y = px^2 + q$ (Parabel); Halbachsen durch Normieren auf 1.