

Lernbuch: Maschinenelemente 2

Konstruktionslehre für den Maschinenbau

Vortragsskript mit Beispielaufgaben für Prüfungsvorbereitung

Dr.-Ing. Kevin Suta

Version 2026
examio

Basierend auf: Haberhauer, H.:
Maschinenelemente – Gestaltung, Berechnung, Anwendung
Springer Verlag, 18. Auflage 2018

WICHTIG!

Dieses Skript dient als Lernhilfe und fasst die wesentlichen Inhalte der Konstruktionslehre zusammen. Es enthält **ausführlich gelöste Beispielaufgaben** zu jedem Kapitel. Für ein tiefes Verständnis ist das aktive Mitrechnen unerlässlich!

Aufbau der Aufgaben:

Jede Aufgabe folgt dem Schema:

1. **Gegeben:** Alle bekannten Größen mit Einheiten
2. **Gesucht:** Was soll berechnet werden?
3. **Lösung:** Schritt-für-Schritt mit Erklärungen
4. **Einheitenkontrolle:** Prüfung der Dimensionen
5. **Ergebnis:** Mit technischer Interpretation

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	5
1.1 Was sind Maschinenelemente?	5
2 Schweißverbindungen (Kap. 2.1)	5
2.1 Grundlagen	5
2.1.1 Vorteile geschweißter Konstruktionen	6
2.1.2 Nachteile	6
2.2 Schweißverfahren	6
2.3 Schweißbarkeit	6
2.4 Schweißnahtarten	7
2.5 Berechnung von Schweißverbindungen	7
2.5.1 Stumpfnähte	7
2.5.2 Kehlnähte	7
2.6 Gestaltungsregeln für Schweißkonstruktionen	8
2.7 Beispielaufgaben: Schweißverbindungen	8
3 Schraubenverbindungen (Kap. 2.7)	11
3.1 Definition und Grundlagen	11
3.2 Gewindegeometrie	11
3.3 Gewindearten	12
3.4 Systematik der Schraubenberechnung nach VDI 2230	12
3.5 Nachgiebigkeiten	12
3.5.1 Nachgiebigkeit der Schraube	12
3.5.2 Nachgiebigkeit der verspannten Teile (Platten)	14
3.6 Kraftverhältnisse	14
3.6.1 Krafteinleitungsfaktor n	14
3.6.2 Kraftverhältnis und Arbeitskräfte	15
3.7 Mindestklemmkraft und Montagevorspannkraft	15
3.7.1 Erforderliche Mindestklemmkraft	15
3.7.2 Montagevorspannkraft	16
3.8 Setzkraft und Vorspannkraft	16
3.9 Das Verspannungsschaubild	16
3.9.1 Stufe 1: Nach der Montage	17
3.9.2 Stufe 2: Nach Anziehen und Setzen	17
3.9.3 Stufe 3: Unter Betriebslast (vollständig)	18
3.10 Gewindekräfte und -momente	19
3.10.1 Anziehdrehmoment	19
3.10.2 Selbsthemmung	19
3.11 Festigkeitsnachweis – Sicherheiten nach VDI 2230	19
3.11.1 Sicherheit gegen Gleiten in der Trennfuge	19
3.11.2 Sicherheit gegen Fließgrenzenüberschreitung	20
3.11.3 Sicherheit gegen Grenzflächenpressung	20
3.11.4 Sicherheit gegen Dauerbruch	20
3.11.5 Detaillierte Nachgiebigkeitsberechnung	20
3.11.6 Einsteck- und Durchsteckverbindung	22
3.11.7 Plattennachgiebigkeit nach VDI 2230	22
3.11.8 Vollständiges Verspannungsschaubild mit allen Kräften	23
3.12 Gewindekräfte und -momente	24
3.12.1 Anziehdrehmoment	24

3.12.2 Selbsthemmung	24
3.13 Festigkeitsnachweis	24
3.13.1 Spannungen in der Schraube	24
3.14 Schraubensicherungen	24
3.15 Beispielaufgaben: Schraubenverbindungen	25
4 Elastische Verbindungen – Federn (Kap. 2.8)	28
4.1 Grundlagen	28
4.1.1 Aufgaben von Federn	28
4.2 Federkennlinie	28
4.3 Federarbeit	29
4.4 Federschaltungen	29
4.4.1 Parallelschaltung	29
4.4.2 Reihenschaltung	29
4.5 Wichtige Federarten	30
4.5.1 Zugstabfeder	30
4.5.2 Drehstabfeder	30
4.5.3 Zylindrische Schraubenfeder	30
4.6 Beispielaufgaben: Federn	31
5 Achsen und Wellen (Kap. 4.1 & 4.2)	34
5.1 Unterschied zwischen Achse und Welle	34
5.2 Achsen	34
5.2.1 Arten von Achsen	34
5.2.2 Auslegung einer Achse	34
5.3 Wellen	35
5.3.1 Auslegung einer Welle	35
5.3.2 Festigkeitsnachweis	35
5.3.3 Kritische Drehzahl	35
5.4 Beispielaufgaben: Achsen und Wellen	36
6 Lager (Kap. 4.3)	38
6.1 Übersicht	38
6.2 Wälzlager	38
6.2.1 Lagerbezeichnung	38
6.2.2 Lebensdauerberechnung	38
6.2.3 Äquivalente Lagerbelastung	39
6.2.4 Fest-Los-Lagerung	39
6.3 Beispielaufgaben: Wälzlager	39
6.4 Gleitlager	41
6.4.1 Grundlagen und Einsatzgebiete	41
6.4.2 Schmierzustände und Stribeck-Kurve	41
6.4.3 Die drei Schmierzustände	42
6.4.4 Hydrodynamische Schmierungstheorie	42
6.4.5 Wichtige Kenngrößen	43
6.4.6 Berechnung mit der Sommerfeldzahl	43
6.4.7 Richtwerte für die spezifische Lagerbelastung	44
6.4.8 Wärmehaushalt und Reibungsverluste	44
6.4.9 Konvektionskühlung und Wärmeabfuhr	45
6.4.10 Gleitlagerwerkstoffe	46
6.4.11 Gestaltungshinweise	46
6.5 Beispielaufgaben: Gleitlager	47

7 Kupplungen und Bremsen (Kap. 4.4)	48
7.1 Kupplungsarten	49
7.2 Reibungskupplungen	49
7.3 Bremsen	49
7.4 Beispielaufgaben: Kupplungen und Bremsen	50
8 Stirnradgetriebe (Kap. 6.1)	50
8.1 Grundlagen	51
8.2 Verzahnungsgeometrie	51
8.3 Zahnkräfte	51
8.4 Evolventenverzahnung und Involutfunktion	52
8.5 Profilverschiebung	52
8.6 Festigkeitsnachweis nach DIN 3990 / ISO 6336	54
8.6.1 Zahnfußtragfähigkeit	54
8.6.2 Flankentragfähigkeit (Pitting-Sicherheit)	55
8.7 Beispielaufgaben: Zahnräder	56
9 Riementriebe (Kap. 6.8)	58
9.1 Kräfte im Riementrieb	58
9.2 Euler-Eytelwein-Formel	58
9.3 Vorspannung	59
9.4 Beispielaufgaben: Riementriebe	59
10 Kettentriebe (Kap. 6.9)	61
10.1 Grundlagen und Kettenarten	61
10.2 Geometrie des Kettentriebs	61
10.3 Der Polygoneffekt	61
10.4 Kräfte im Kettentrieb	63
10.5 Auslegung von Kettentrieben	63
10.6 Beispielaufgaben: Kettentriebe	64
11 Formelsammlung	66
11.1 Schweißverbindungen	66
11.2 Schraubenverbindungen	66
11.3 Federn	66
11.4 Achsen und Wellen	66
11.5 Wälzlager	66
11.6 Kupplungen und Bremsen	66
11.7 Zahnräder	66
11.8 Riementriebe	66
11.9 Kettentriebe	66
12 Hinweise zur Prüfungsvorbereitung	67

1 Einführung

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Die verschiedenen Verbindungsarten klassifizieren
- Zwischen Stoff-, Reib- und Formschluss unterscheiden
- Die grundlegenden Maschinenelemente benennen

1.1 Was sind Maschinenelemente?

Maschinenelemente sind die **Grundbausteine** des Maschinenbaus. Sie werden benötigt, um einzelne Elemente zu technischen Systemen wie Baugruppen, Geräte und Maschinen zusammenzufügen.

Die Verbindung von Maschinenteilen kann erfolgen durch:

- a) **Stoffschluss**: Mit oder ohne Zusatzwerkstoffe werden die Bauteile an den Stoßstellen zu einer *unlösaren Einheit* vereinigt (z.B. Schweißen, Löten, Kleben)
- b) **Reibschluss**: Durch Verspannen entstehen Reibungskräfte, die den zu übertragenden Verschiebekräften entgegenwirken (z.B. Schraubenverbindungen, Pressverbände)
- c) **Formschluss**: Die Kraftübertragung erfolgt über Formelemente, die als Mitnehmer wirken (z.B. Passfedern, Verzahnungen)

WICHTIG!

Kombinierte Wirkprinzipien (z.B. geklebte Pressverbindung = Stoffschluss + Reibschluss) sind **nicht eindeutig berechenbar**! Solche Verbindungen sollten nur eingesetzt werden, wenn gesicherte Erkenntnisse durch Versuche vorliegen.

2 Schweißverbindungen (Kap. 2.1)

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Die wichtigsten Schweißverfahren benennen
- Die Schweißbarkeit von Werkstoffen beurteilen
- Schweißnähte berechnen und gestalten
- Schweißsymbole in Zeichnungen interpretieren

2.1 Grundlagen

Durch Schweißen werden **unlösare, stoffschlüssige Verbindungen** hergestellt. Es zählt zu den wichtigsten Fertigungsverfahren im Maschinen- und Apparatebau.

Merke

Definition: Unter Schweißen versteht man das Vereinigen oder das Beschichten von Werkstoffen unter Anwendung von **Wärme und/oder Druck** mit oder ohne Schweißzusatzwerkstoffe.

2.1.1 Vorteile geschweißter Konstruktionen

- Vielseitige Anwendbarkeit bezüglich Werkstoffe und Produktionsprozesse
- Gewichtsersparnis gegenüber Nietverbindungen (keine Überlappungen, Laschen, Nietköpfe)
- Gewichtsersparnis gegenüber Gusskonstruktionen (geringere Wandstärken)
- Wirtschaftliche Herstellung bei Einzel- und Kleinserienfertigung
- Kürzere Lieferzeiten (keine Modell- und Formkosten)

2.1.2 Nachteile

- Schwer erfassbare Schrumpfspannungen und Verzug
- Ungleichmäßigkeiten in der Nahtgüte
- Gefahr von Sprödbrüchen durch mehrachsige Spannungszustände

2.2 Schweißverfahren

Die wichtigsten Metallschweißverfahren sind:

Schmelzschweißen	Pressschweißen
Gasschmelzschweißen	Feuerschweißen
Lichtbogenhandschweißen	Widerstandsschweißen
Schutzgasschweißen (MIG/MAG, WIG)	Reibschweißen
Unterpulverschweißen	Ultraschallschweißen
Laserstrahlschweißen	Diffusionsschweißen

Tabelle 1: Übersicht der Schweißverfahren

2.3 Schweißbarkeit

Die Schweißbarkeit hängt von drei Einflussgrößen ab:

1. **Schweißeignung** der Werkstoffe
2. **Schweißsicherheit** der Konstruktion
3. **Schweißmöglichkeit** der Fertigung

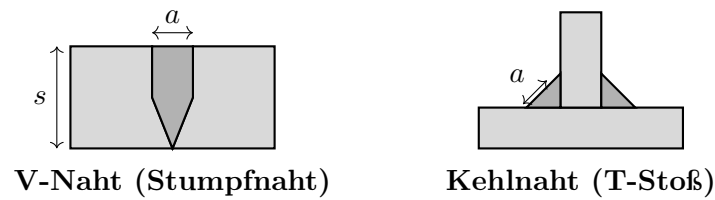
Die Schweißeignung von Stahl wird wesentlich vom **Kohlenstoffgehalt** bestimmt:

Werkstoff	C-Gehalt [%]	Schweißeignung
S235	0,17	gut schweißbar
S355	0,22	bedingt schweißbar
C45	0,45	schwer schweißbar

Tabelle 2: Schweißeignung unlegierter Stähle

WICHTIG!

Bei einem zu hohen Kohlenstoffgehalt besteht die Gefahr der **Aufhärtung** mit Sprödbruchneigung und Spannungsrissen!

Abbildung 1: Schweißnahtarten: Stumpfnahht und Kehlnaht mit rechnerischer Nahtdicke a

Nahtart	Beschreibung
Stumpfnahht	Bauteile liegen stumpf aneinander (I-, V-, X-Naht)
Kehlnaht	T- oder Eckverbindungen (Flachnaht, Hohlnaht, Wölbnahht)
Stirנהkehlناht	Kehlnaht mit Nahtichtung quer zur Kraftrichtung
Flankenkehlناht	Kehlnaht mit Nahtichtung parallel zur Kraftrichtung

Tabelle 3: Schweißnahtarten

2.4 Schweißnahtarten

2.5 Berechnung von Schweißverbindungen

2.5.1 Stumpfnähte

Bei dynamisch beanspruchten Stumpfnähten gilt für die **Normalspannung**:

Formel

$$\sigma_{\perp} = \frac{F}{a \cdot l} \leq \sigma_{w,zul}$$

mit:

- a = Nahtdicke (bei durchgeschweißter Naht: $a = s$ = Blechdicke)
- l = Nahtlänge
- $\sigma_{w,zul}$ = zulässige Schweißnahtspannung

2.5.2 Kehlnähte

Die rechnerische Nahtdicke a bei Kehlnähten ist der Abstand vom Wurzelpunkt zur Nahtoberfläche:

Formel

$$a = 0,7 \cdot s_{min} \quad (\text{Richtwert})$$

wobei s_{min} die kleinere der beiden Blechdicken ist.

Für die **Vergleichsspannung** in einer Kehlnaht gilt:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\perp}^2 + \tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2} \leq \sigma_{w,zul}$$

2.6 Gestaltungsregeln für Schweißkonstruktionen

1. **Schweißgerechte Werkstoffwahl** – nur schweißgeeignete Stähle verwenden
2. **Nahtanhäufungen vermeiden** – keine Kreuzungen von Schweißnähten
3. **Schweißnähte aus hochbeanspruchten Zonen herauslegen**
4. **Zugänglichkeit** für Schweißbrenner gewährleisten
5. **Symmetrische Anordnung** der Nähte zur Vermeidung von Verzug
6. **Kerbwirkung minimieren** – Nahtübergänge verschleifen

2.7 Beispielaufgaben: Schweißverbindungen

Musteraufgabe: Stumpfnahht unter Zugbelastung

Ein Stahlblech (S235) mit der Dicke $s = 10 \text{ mm}$ und der Breite $b = 150 \text{ mm}$ wird durch eine V-Naht (durchgeschweißt) mit einem anderen Blech verbunden. Die Verbindung wird durch eine Zugkraft $F = 120 \text{ kN}$ belastet.

Gegeben:

- Blechdicke: $s = 10 \text{ mm}$
- Nahtlänge: $l = b = 150 \text{ mm}$
- Zugkraft: $F = 120 \text{ kN} = 120\,000 \text{ N}$
- Zulässige Schweißnahtspannung (S235, ruhend): $\sigma_{w,zul} = 160 \text{ N/mm}^2$

Gesucht:

- a) Spannung in der Schweißnaht
- b) Ist die Verbindung ausreichend dimensioniert?
- c) Wie groß ist die Sicherheit?

Ausführliche Lösung**Schritt 1: Nahtdicke bestimmen**

Bei einer durchgeschweißten V-Naht entspricht die Nahtdicke der Blechdicke:

$$a = s = 10 \text{ mm}$$

Schritt 2: Spannung berechnen

Die Normalspannung in der Stumpfnahht beträgt:

$$\sigma_{\perp} = \frac{F}{a \cdot l} = \frac{120\,000 \text{ N}}{10 \text{ mm} \cdot 150 \text{ mm}} = \frac{120\,000 \text{ N}}{1500 \text{ mm}^2} = 80 \text{ N/mm}^2$$

Schritt 3: Einheitenkontrolle

$$\frac{[N]}{[mm] \cdot [mm]} = \frac{[N]}{[mm^2]} = \left[\frac{N}{mm^2} \right] \quad \checkmark$$

Schritt 4: Festigkeitsnachweis

$$\sigma_{\perp} = 80 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{w,zul} = 160 \text{ N/mm}^2 \quad \checkmark$$

Die Verbindung ist **ausreichend dimensioniert**.

Schritt 5: Sicherheit berechnen

$$S = \frac{\sigma_{w,zul}}{\sigma_{\perp}} = \frac{160 \text{ N/mm}^2}{80 \text{ N/mm}^2} = 2,0$$

Ergebnis:

- Spannung: $\sigma_{\perp} = 80 \text{ N/mm}^2$
- Die Verbindung ist mit einer Sicherheit von $S = 2,0$ ausreichend dimensioniert.

Musteraufgabe: Kehlnaht-Berechnung bei T-Stoß

Ein Winkelprofil wird mit zwei Flankenkehlnähten (beidseitig) an eine Grundplatte angeschweißt. Es wirkt eine Zugkraft $F = 85 \text{ kN}$ parallel zu den Schweißnähten. Die dünnere Blechdicke beträgt $s_{min} = 8 \text{ mm}$, die Nahtlänge je Seite $l = 100 \text{ mm}$.

Gegeben:

- Blechdicke: $s_{min} = 8 \text{ mm}$
- Nahtlänge (je Naht): $l = 100 \text{ mm}$
- Anzahl Nähte: $n = 2$ (beidseitig)
- Zugkraft: $F = 85 \text{ kN} = 85\,000 \text{ N}$
- Zulässige Spannung: $\sigma_{w,zul} = 150 \text{ N/mm}^2$

Gesucht:

- Rechnerische Nahtdicke a
- Schubspannung in den Nähten
- Nachweis der Tragfähigkeit

Ausführliche Lösung**Schritt 1: Nahtdicke berechnen**

Nach der Faustregel für Kehlnähte:

$$a = 0,7 \cdot s_{min} = 0,7 \cdot 8 \text{ mm} = 5,6 \text{ mm}$$

In der Praxis wird auf ganze mm gerundet: $a = 6 \text{ mm}$

Schritt 2: Gesamte Nahtfläche berechnen

Bei Flankenkehlnähten (Kraft parallel zur Naht) wird die Nahtquerschnittsfläche beansprucht:

$$A_{Naht} = n \cdot a \cdot l = 2 \cdot 6 \text{ mm} \cdot 100 \text{ mm} = 1200 \text{ mm}^2$$

Schritt 3: Schubspannung berechnen

Bei Flankenkehlnähten wirkt die Kraft parallel zur Naht, es entsteht Schubspannung $\tau_{\parallel}$:

$$\tau_{\parallel} = \frac{F}{A_{Naht}} = \frac{85\,000 \text{ N}}{1200 \text{ mm}^2} = 70,8 \text{ N/mm}^2$$

Schritt 4: Vergleichsspannung

Da nur $\tau_{\parallel}$ vorhanden ist ($\sigma_{\perp} = 0$, $\tau_{\perp} = 0$):

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\perp}^2 + \tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2} = \sqrt{0 + 0 + (70,8)^2} = 70,8 \text{ N/mm}^2$$

Schritt 5: Festigkeitsnachweis

$$\sigma_v = 70,8 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{w,zul} = 150 \text{ N/mm}^2 \quad \checkmark$$

Ergebnis:

- Nahtdicke: $a = 6 \text{ mm}$
- Schubspannung: $\tau_{\parallel} = 70,8 \text{ N/mm}^2$
- Sicherheit: $S = 150/70,8 = 2,1$ – Die Verbindung ist tragfähig.

Übungsaufgabe 2.1 – Zum Selbstrechnen

Eine Stumpfnah (V-Naht, durchgeschweißt) verbindet zwei Bleche der Dicke $s = 12 \text{ mm}$. Die Nahtlänge beträgt $l = 200 \text{ mm}$. Welche maximale Zugkraft kann übertragen werden, wenn $\sigma_{w,zul} = 140 \text{ N/mm}^2$ ist?

Lösung: $F_{max} = 336 \text{ kN}$

Übungsaufgabe 2.2 – Zum Selbstrechnen

Ein Flachstahl ($b = 80 \text{ mm}$, $s = 10 \text{ mm}$) wird mit zwei Stirnkehlnähten an eine Platte geschweißt. Berechnen Sie die erforderliche Nahtdicke a , wenn $F = 60 \text{ kN}$ und $\sigma_{w,zul} = 120 \text{ N/mm}^2$.

Hinweis: Bei Stirnkehlnähten (Kraft quer zur Naht) wirkt $\sigma_{\perp}$.

Lösung: $a \geq 3,1 \text{ mm}$, gewählt $a = 4 \text{ mm}$

3 Schraubenverbindungen (Kap. 2.7)

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Die Geometrie von Gewinden beschreiben
- Das Verspannungsschaubild erklären und anwenden
- Schraubenverbindungen auf Festigkeit berechnen
- Geeignete Schraubensicherungen auswählen

3.1 Definition und Grundlagen

Die Schraube ist eines der ältesten und am häufigsten verwendeten Maschinenelemente. Man unterscheidet:

- **Befestigungsschraube:** Lösbare Verbindung von Bauteilen
- **Bewegungsschraube:** Bewegungs- und Kraftübertragung (Antriebselement)

3.2 Gewindegeometrie

Formel

Steigungswinkel:

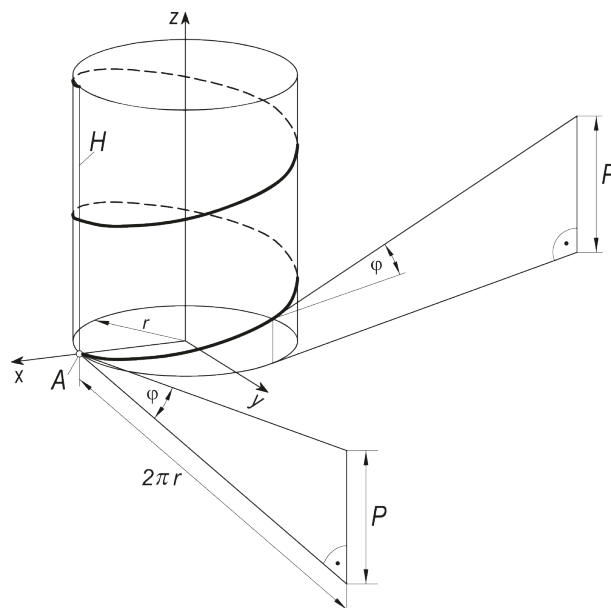
$$\tan \varphi = \frac{P}{\pi \cdot d_2}$$

mit:

- P = Steigung (Ganghöhe)
- d_2 = Flankendurchmesser

Bei mehrgängigen Gewinden (Gangzahl n):

$$P_h = n \cdot P \quad (\text{Steigung} = \text{Gangzahl} \times \text{Teilung})$$



3.3 Gewindearten

Gewindeart	Symbol	Anwendung
Metrisches ISO-Spitzgewinde	M	Befestigungsschrauben
Metrisches ISO-Feingewinde	M...x...	Dünnwandige Teile, Einstellschrauben
Trapezgewinde	Tr	Bewegungsschrauben
Sägewinde	S	Einseitige Belastung

Tabelle 4: Gewindearten und ihre Anwendung

3.4 Systematik der Schraubenberechnung nach VDI 2230

Merke

Berechnungsablauf:

1. **Vorarbeiten:** Geometrie, Werkstoff, Belastungen erfassen
2. **Vorauslegung:** Schraubengröße abschätzen (VDI 2230, Tab. A7)
3. **Nachgiebigkeiten** berechnen (Schraube und Platten)
4. **Kraftverhältnisse** bestimmen (Krafteinleitung, Kraftaufteilung)
5. **Vorspannkkräfte** berechnen (Montage, Setzen, Betrieb)
6. **Verspannungsschaubild** erstellen
7. **Sicherheiten** nachweisen (Gleiten, Fließen, Pressung, Dauer)

3.5 Nachgiebigkeiten

3.5.1 Nachgiebigkeit der Schraube

Die Gesamtnachgiebigkeit der Schraube setzt sich aus **fünf Einzelanteilen** zusammen:

Formel

$$\delta_S = \sum \delta_{i,S} = \delta_K + \delta_1 + \delta_f + \delta_G + \delta_M$$

Einzelnachgiebigkeiten:*Schraubenkopf:*

$$\delta_K = \frac{0,4 \cdot d}{E_S \cdot A_N} \quad \text{mit } A_N = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

Freier Schaftbereich:

$$\delta_1 = \frac{l_1}{E_S \cdot A_1} \quad \text{mit } A_1 = A_N \text{ (bei unverjüngtem Schaft)}$$

Freies Gewinde (belastet, nicht eingeschraubt):

$$\delta_f = \frac{l_f}{E_S \cdot A_3} \quad \text{mit } A_3 = \frac{\pi}{4} \cdot d_3^2 \text{ (Kernquerschnitt)}$$

Eingeschraubtes Gewinde:

$$\delta_G = \frac{0,5 \cdot d}{E_S \cdot A_3}$$

Mutter (bzw. Muttergewinde):

$$\delta_M = \frac{0,4 \cdot d}{E_S \cdot A_N}$$

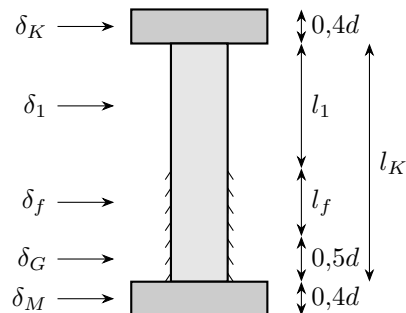


Abbildung 2: Einzelnachgiebigkeiten der Schraube nach VDI 2230

3.5.2 Nachgiebigkeit der verspannten Teile (Platten)

Formel

Plattennachgiebigkeit:

$$\delta_P = \frac{l_K}{E_P \cdot A_{ers}}$$

Ersatzquerschnitt (vereinfacht nach Rötscher):

$$A_{ers} = \frac{\pi}{4} \left[\left(d_W + \frac{l_K}{5} \right)^2 - d_h^2 \right]$$

mit:

- l_K = Klemmlänge (Dicke der verspannten Teile)
- E_P = E-Modul der Platten
- d_W = Außendurchmesser Kopfauflage
- d_h = Bohrungsdurchmesser
- D_A = Außendurchmesser der verspannten Hülse/Platte

WICHTIG!

Die vereinfachte Formel gilt nur für $d_W + l_K < D_A$. Falls der Druckkegel durch den Plattenrand begrenzt wird (D_A kleiner), muss A_{ers} nach VDI 2230 mit angepassten Formeln berechnet werden.

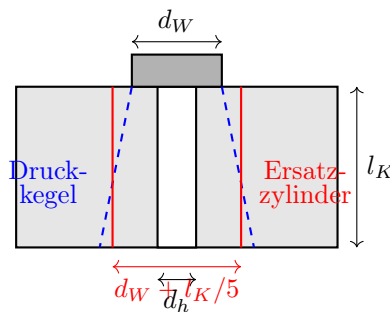


Abbildung 3: Druckkegel und Ersatzquerschnitt nach Rötscher

3.6 Kraftverhältnisse

3.6.1 Krafteinleitungsfaktor n

Der **Krafteinleitungsfaktor** n beschreibt, *wo* die Betriebskraft in die Verschraubung eingeleitet wird:

Formel

- $n = 1$: Kraft direkt unter Schraubenkopf/Mutter eingeleitet
- $n \approx 0,5$: Kraft in der Mitte der Klemmlänge eingeleitet
- $n \approx 0,3$: Kraft nahe der Trennfuge eingeleitet

Merke

Je kleiner n , desto günstiger für die Schraube, da weniger Zusatzkraft entsteht. Eine Krafteinleitung **nahe der Trennfuge** ist konstruktiv anzustreben!

3.6.2 Kraftverhältnis und Arbeitskräfte**Formel**

Kraftverhältnis:

$$\Phi = \frac{\delta_P}{\delta_S + \delta_P}$$

Schraubenzusatzkraft (mit Krafteinleitungsfaktor):

$$F_{SA} = n \cdot \Phi \cdot F_A$$

Plattenentlastung:

$$F_{PA} = (1 - n \cdot \Phi) \cdot F_A$$

Aufteilung der Betriebskraft:

$$F_A = F_{SA} + F_{PA}$$

Restklemmkraft:

$$F_{KR} = F_V - F_{PA} = F_V - (1 - n \cdot \Phi) \cdot F_A$$

WICHTIG!

Die Restklemmkraft muss stets größer sein als die erforderliche Mindestklemmkraft:

$$F_{KR} \geq F_{Kerf}$$

Ist $F_{KR} \leq 0$, klappt die Verbindung auf!

3.7 Mindestklemmkraft und Montagevorspannkraft**3.7.1 Erforderliche Mindestklemmkraft****Formel**

$$F_{Kerf} = \max(F_{Kerf,Q}; F_{Kerf,P})$$

Zur Übertragung von Querkräften (Reibschluss):

$$F_{Kerf,Q} = \frac{\sum F_Q}{\mu_T}$$

Zur Sicherung der Dichtigkeit:

$$F_{Kerf,P} = p_{Medium} \cdot A_{Dicht}$$

mit μ_T = Reibbeiwert in der Trennfuge, p_{Medium} = Mediendruck

3.7.2 Montagevorspannkraft

Formel

Maximale Montagekraft (bei Ausnutzung der Streckgrenze):

$$F_{M,max} = \frac{\pi}{4} \cdot d_0^2 \cdot \frac{\nu \cdot R_{p0,2}}{\sqrt{1 + 3 \cdot \left(\frac{3 \cdot d_2}{2 \cdot d_0} \cdot \left(\frac{P}{\pi \cdot d_2} + 1,155 \cdot \mu_G \right) \right)^2}}$$

mit:

- ν = Streckgrenzenausnutzungsgrad (typisch $\nu = 0,9$)
- $R_{p0,2}$ = Streckgrenze der Schraube
- d_0 = minimaler Schraubendurchmesser (Kernquerschnitt)
- μ_G = Gewindereibbeiwert
- P = Gewindesteigung

Minimale Montagekraft:

$$F_{M,min} = \frac{F_{M,max}}{\alpha_A}$$

mit α_A = **Anziehungsfaktor** (berücksichtigt Streuung beim Anziehen):

- Drehmomentschlüssel: $\alpha_A \approx 1,4 \dots 1,6$
- Drehwinkelverfahren: $\alpha_A \approx 1,0 \dots 1,2$
- Streckgrenzgesteuertes Anziehen: $\alpha_A \approx 1,0$

3.8 Setzkraft und Vorspannkraft

Formel

Setzweg (empirisch nach VDI 2230):

$$f_Z = 3,29 \cdot \left(\frac{l_K}{d} \right)^{0,34} \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Setzkraftverlust:

$$F_Z = \frac{f_Z}{\delta_S + \delta_P}$$

Vorspannkraften nach dem Setzen:

$$F_{V,min} = F_{M,min} - F_Z = F_V \quad (\text{= Vorspannkraft im Verspannungsschaubild!})$$

$$F_{V,max} = F_{M,max} - F_Z$$

WICHTIG!

Die Vorspannkraft F_V im Verspannungsschaubild ist **nicht** die Montagevorspannkraft, sondern die Kraft **nach dem Setzen**: $F_V = F_{M,min} - F_Z$.

Die Montagevorspannkraft muss daher stets höher gewählt werden, um nach dem Setzen noch die erforderliche Vorspannkraft zu erreichen!

3.9 Das Verspannungsschaubild

Das Verspannungsschaubild wird in drei Stufen aufgebaut:

3.9.1 Stufe 1: Nach der Montage

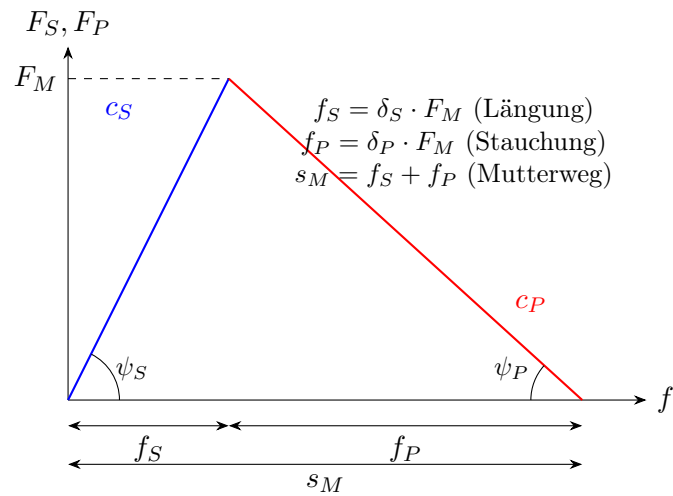
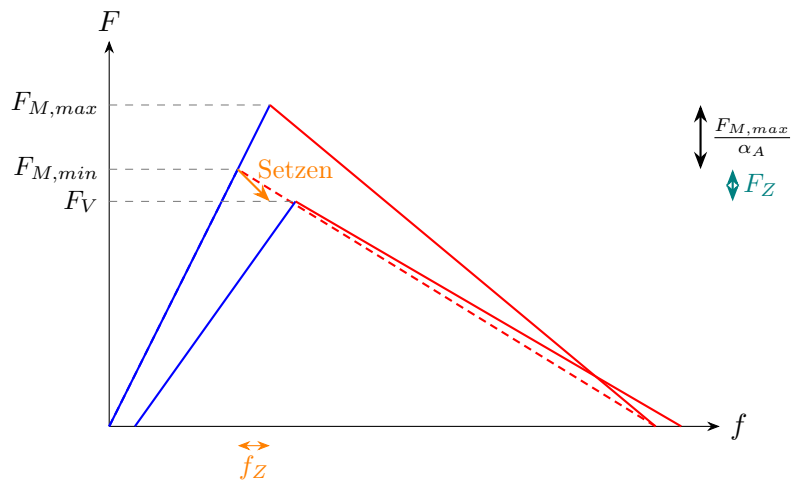


Abbildung 4: Verspannungsschaubild – Stufe 1: Nach der Montage

3.9.2 Stufe 2: Nach Anziehen und Setzen

Abbildung 5: Verspannungsschaubild – Stufe 2: Nach Anziehen und Setzen ($F_V = F_{M,min} - F_Z$)

3.9.3 Stufe 3: Unter Betriebslast (vollständig)

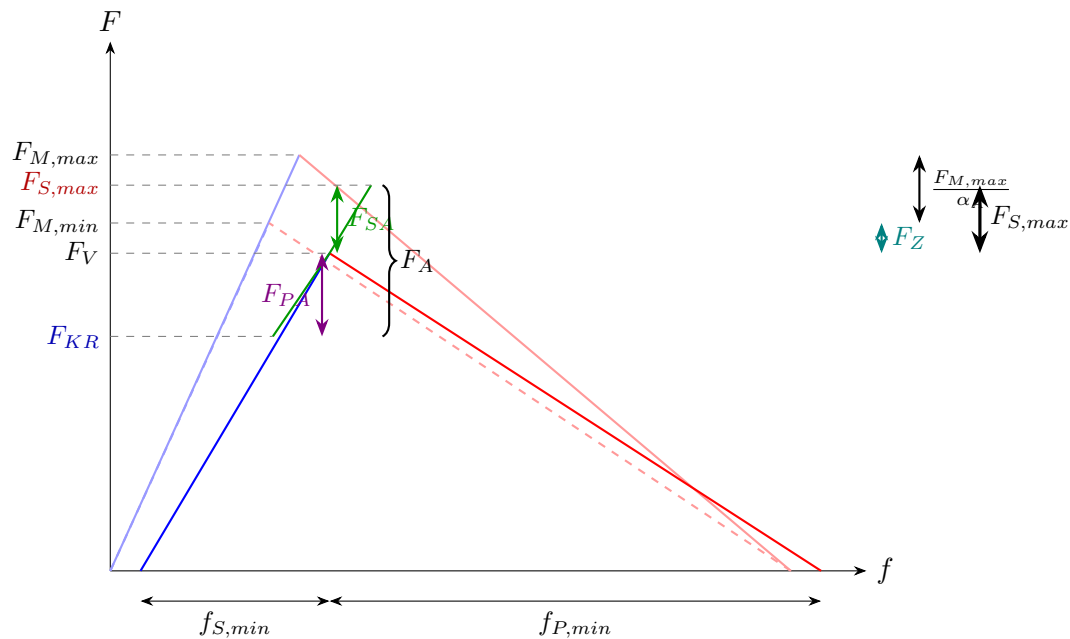


Abbildung 6: Vollständiges Verspannungsschaubild unter Betriebslast mit allen relevanten Kräften

Formel

Zusammenfassung aller Kräfte im Verspannungsschaubild:

Montage und Setzen:

$F_{M,max}$ Maximale Montagekraft (aus Streckgrenzenausnutzung)

$$F_{M,min} = F_{M,max} / \alpha_A \quad (\text{minimale Montagekraft})$$
$$F_Z = f_Z / (\delta_S + \delta_P) \quad (\text{Setzkraftverlust})$$
$$F_V = F_{M,min} - F_Z \quad (\text{Betriebsvorspannkraft})$$

Unter Betriebslast F_A :

$$F_{SA} = n \cdot \Phi \cdot F_A \quad (\text{Schraubenzusatzkraft})$$
$$F_{PA} = (1 - n \cdot \Phi) \cdot F_A \quad (\text{Plattenentlastung})$$
$$F_{S,max} = F_V + F_{SA} \quad (\text{maximale Schraubenkraft})$$
$$F_{KR} = F_V - F_{PA} \quad (\text{Restklemmkraft})$$
$$F_{KR} \geq F_{Kerf} \quad (\text{muss eingehalten werden!})$$

3.10 Gewindekräfte und -momente

3.10.1 Anziehdrehmoment

Formel

$$M_A = F_V \cdot \left(0,159 \cdot P + 0,577 \cdot d_2 \cdot \mu_G + \frac{1}{2} \cdot D_{Km} \cdot \mu_K \right)$$

Mittlerer Kopfaufledgedurchmesser:

$$D_{Km} = \frac{d_W + d_h}{2}$$

mit:

- P = Gewindesteigung
- d_2 = Flankendurchmesser
- μ_G = Gewindereibbeiwert
- μ_K = Kopfreibbeiwert
- d_W = Kopfaufledgedurchmesser, d_h = Bohrungsdurchmesser

3.10.2 Selbsthemmung

Merke

Selbsthemmung liegt vor, wenn:

$$\varphi < \rho' \quad \text{bzw.} \quad \tan \varphi < \mu'$$

Bei metrischen ISO-Gewinden ist Selbsthemmung **immer** gegeben!

3.11 Festigkeitsnachweis – Sicherheiten nach VDI 2230

3.11.1 Sicherheit gegen Gleiten in der Trennfuge

Formel

$$s_R = \frac{F_{KR}}{F_{Kerf}} > 1$$

mit $F_{KR} = F_{V,min} - F_{PA}$ (Restklemmkraft)

3.11.2 Sicherheit gegen Fließgrenzenüberschreitung

Formel

$$s_{stat} = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{red,B}} > 1$$

Reduzierte Vergleichsspannung im Betrieb:

$$\sigma_{red,B} = \sqrt{\sigma_{z,max}^2 + \frac{3}{2} \cdot \tau_{max}^2}$$

Maximale Zugspannung:

$$\sigma_{z,max} = \frac{F_{S,max}}{\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{d_2+d_3}{2}\right)^2}$$

Maximale Torsionsspannung (beim Anziehen):

$$\tau_{max} = \frac{F_{M,max} \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \left(\frac{P}{\pi \cdot d_2} + 1,155 \cdot \mu_G\right)}{\frac{\pi}{16} \cdot \left(\frac{d_2+d_3}{2}\right)^3}$$

3.11.3 Sicherheit gegen Grenzflächenpressung

Formel

$$s_{press} = \frac{p_{Grenz}}{p_{vorh}} > 1$$

Vorhandene Flächenpressung (im Montagezustand):

$$p_{vorh} = \frac{F_{M,max}}{A_{p,min}} \quad \text{mit } A_{p,min} = \frac{\pi}{4} \cdot (d_W^2 - d_h^2)$$

3.11.4 Sicherheit gegen Dauerbruch

Formel

$$s_{dyn} = \frac{\sigma_{ASV}}{\sigma_a} \geq 1,2$$

Dauerfestigkeit des Schraubenwerkstoffs:

$$\sigma_{ASV} = 0,85 \cdot (150/d + 45) \quad [N/mm^2]$$

Betriebskraftamplitude:

$$\sigma_a = \frac{0,5 \cdot (F_{SA,max} - F_{SA,min})}{\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{d_2+d_3}{2}\right)^2}$$

3.11.5 Detaillierte Nachgiebigkeitsberechnung

Die Gesamtnachgiebigkeit der Schraube setzt sich aus mehreren Anteilen zusammen:

Sicherheit	Formel	Mindestwert
Gleiten	$s_R = F_{KR}/F_{Kerf}$	$> 1,0$
Fließen (statisch)	$s_{stat} = R_{p0,2}/\sigma_{red,B}$	$> 1,0$
Flächenpressung	$s_{press} = p_{Grenz}/p_{vorh}$	$> 1,0$
Dauerfestigkeit	$s_{dyn} = \sigma_{ASV}/\sigma_a$	$\geq 1,2$

Tabelle 5: Übersicht der Sicherheitsnachweise nach VDI 2230

Formel**Schraubennachgiebigkeit (vollständig):**

$$\delta_S = \delta_{SK} + \delta_{Schaft,1} + \delta_{Schaft,2} + \delta_G + \delta_M + \delta_{ES}$$

Einzelanteile:*Schraubenkopf:*

$$\delta_{SK} = \frac{0,4 \cdot d}{E_S \cdot A_N}$$

Freier Schaftbereich (unbelastet):

$$\delta_{Schaft} = \frac{l_{Schaft}}{E_S \cdot A_{Schaft}}$$

Freier Gewindebereich:

$$\delta_G = \frac{l_G}{E_S \cdot A_3}$$

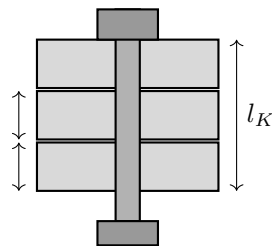
Eingeschraubte Gewindelänge (Mutter):

$$\delta_M = \frac{0,5 \cdot d}{E_S \cdot A_N}$$

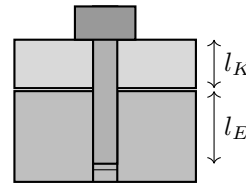
Einschraubtiefe (nur bei Einschraubverbindung):

$$\delta_{ES} = \frac{0,33 \cdot d}{E_S \cdot A_N}$$

mit $A_N = \frac{\pi}{4}d^2$ (Nennquerschnitt) und $A_3 = \frac{\pi}{4}d_3^2$ (Kernquerschnitt)

Durchsteckverbindung

Durchgangsbohrung
in allen Teilen

Einschraubverbindung

Gewinde im
Grundkörper

Abbildung 7: Durchsteck- und Einschraubverbindung: Unterschiedliche Krafteinleitung

3.11.6 Einsteck- und Durchsteckverbindung**Merke****Durchsteckverbindung:**

- Schraube durchdringt alle Bauteile
- Kraftübertragung durch Mutter und Schraubenkopf
- Nachgiebigkeit enthält δ_{SK} und δ_M

Einschraubverbindung:

- Schraube greift in Grundkörper ein (z.B. Gehäuse)
- Keine Mutter erforderlich
- Nachgiebigkeit enthält δ_{SK} und δ_{ES}
- Einschraubtiefe mindestens $l_E \geq 1,0 \cdot d$ (Stahl) bzw. $l_E \geq 1,5 \cdot d$ (Alu)

3.11.7 Plattennachgiebigkeit nach VDI 2230**Formel****Ersatzquerschnitt nach Rötischer:**

Der Druckkegel unter dem Schraubenkopf wird durch einen Ersatzzylinder angenähert:

$$A_{ers} = \frac{\pi}{4} \left[\left(d_W + \frac{l_K}{5} \right)^2 - d_h^2 \right]$$

mit:

- d_W = Außendurchmesser Kopfauflage
- d_h = Bohrungsdurchmesser
- l_K = Klemmlänge

Plattennachgiebigkeit:

$$\delta_P = \frac{l_K}{E_P \cdot A_{ers}}$$

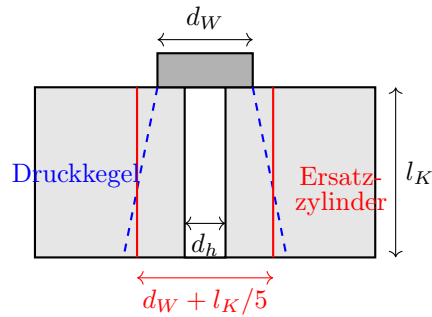


Abbildung 8: Druckkegel und Ersatzquerschnitt nach Rötischer

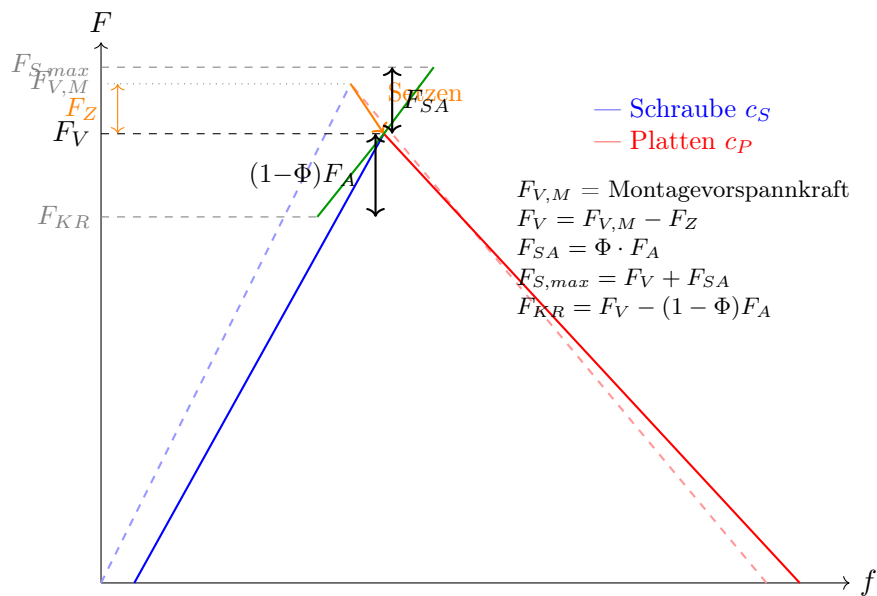


Abbildung 9: Vollständiges Verspannungsschaubild mit Setzen und allen Kräften

3.11.8 Vollständiges Verspannungsschaubild mit allen Kräften

Formel

Zusammenfassung aller Kräfte:

Vor der Belastung:

$F_{V,M}$ = Montagevorspannkraft (beim Anziehen)

$F_Z = f_Z \cdot (c_S + c_P)$ (Setzkraft)

$F_V = F_{V,M} - F_Z$ (Betriebsvorspannkraft)

Unter Betriebslast F_A :

$F_{SA} = \Phi \cdot F_A$ (Schraubenzusatzkraft)

$F_{PA} = (1 - \Phi) \cdot F_A$ (Plattenentlastung)

$F_{S,max} = F_V + F_{SA}$ (max. Schraubenkraft)

$F_{KR} = F_V - (1 - \Phi) \cdot F_A$ (Restklemmkraft)

3.12 Gewindekräfte und -momente

3.12.1 Anziehdrehmoment

Das Anziehdrehmoment setzt sich zusammen aus:

Formel

$$M_A = M_G + M_K = F_V \cdot \left(\frac{d_2}{2} \cdot \tan(\varphi + \rho') + \mu_K \cdot \frac{D_{Km}}{2} \right)$$

mit:

- M_G = Gewindemoment
- M_K = Kopfreibmoment
- ρ' = Reibungswinkel im Gewinde
- μ_K = Reibkoeffizient unter dem Kopf
- D_{Km} = mittlerer Kopfaufgedurchmesser

3.12.2 Selbsthemmung

Merke

Selbsthemmung liegt vor, wenn:

$$\varphi < \rho' \quad \text{bzw.} \quad \tan \varphi < \mu'$$

Bei metrischen ISO-Gewinden ist Selbsthemmung **immer** gegeben!

3.13 Festigkeitsnachweis

3.13.1 Spannungen in der Schraube

Formel

Zugspannung:

$$\sigma_z = \frac{F_V + F_{SA}}{A_S}$$

Torsionsspannung (während des Anziehens):

$$\tau_t = \frac{M_G}{W_p} = \frac{16 \cdot M_G}{\pi \cdot d_3^3}$$

Vergleichsspannung:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_z^2 + 3 \cdot \tau_t^2} \leq \sigma_{zul}$$

3.14 Schraubensicherungen

Schraubensicherungen verhindern das selbsttätige Lösen der Verbindung:

Art	Beispiele
Kraftschlüssig (Klemmend)	Federring, Fächerscheibe, Kontermutter
Formschlüssig (Sperrend)	Kronenmutter mit Splint, Sicherungsblech
Stoffschlüssig	Schraubensicherungslack, Kleber

Tabelle 6: Schraubensicherungen

3.15 Beispielaufgaben: Schraubenverbindungen

Musteraufgabe: Verspannungsschaubild – Klassische Prüfungsaufgabe

Eine Schraubenverbindung (M12, Festigkeitsklasse 8.8) wird mit einer Vorspannkraft $F_V = 40 \text{ kN}$ angezogen. Die Verbindung wird durch eine axiale Betriebskraft $F_A = 15 \text{ kN}$ belastet. Das Kraftverhältnis beträgt $\Phi = 0,15$.

Gegeben:

- Schraube M12, Festigkeitsklasse 8.8: $R_{p0,2} = 640 \text{ N/mm}^2$
- Spannungsquerschnitt: $A_S = 84,3 \text{ mm}^2$
- Vorspannkraft: $F_V = 40 \text{ kN} = 40\,000 \text{ N}$
- Betriebskraft: $F_A = 15 \text{ kN} = 15\,000 \text{ N}$
- Kraftverhältnis: $\Phi = 0,15$

Gesucht:

- Schraubenzusatzkraft F_{SA}
- Maximale Schraubenkraft $F_{S,max}$
- Restklemmkraft F_{KR}
- Klafft die Verbindung auf?
- Zugspannung in der Schraube und Sicherheit

Ausführliche Lösung**Schritt 1: Schraubenzusatzkraft berechnen**

Die Schraubenzusatzkraft ist der Anteil der Betriebskraft, der die Schraube zusätzlich belastet:

$$F_{SA} = \Phi \cdot F_A = 0,15 \cdot 15\,000\text{ N} = 2250\text{ N}$$

Schritt 2: Maximale Schraubenkraft

$$F_{S,max} = F_V + F_{SA} = 40\,000\text{ N} + 2250\text{ N} = 42\,250\text{ N}$$

Schritt 3: Restklemmkraft berechnen

Die Restklemmkraft ist die verbleibende Pressung zwischen den Platten:

$$F_{KR} = F_V - (1 - \Phi) \cdot F_A = 40\,000\text{ N} - (1 - 0,15) \cdot 15\,000\text{ N}$$

$$F_{KR} = 40\,000\text{ N} - 0,85 \cdot 15\,000\text{ N} = 40\,000\text{ N} - 12\,750\text{ N} = 27\,250\text{ N}$$

Schritt 4: Aufklaffen prüfen

Die Verbindung klafft auf, wenn $F_{KR} \leq 0$.

$$F_{KR} = 27\,250\text{ N} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kein Aufklaffen} \quad \checkmark$$

Zusätzlich prüfen: $F_{KR} \geq 0,1 \cdot F_V$?

$$0,1 \cdot F_V = 0,1 \cdot 40\,000\text{ N} = 4000\text{ N}$$

$$F_{KR} = 27\,250\text{ N} > 4000\text{ N} \quad \checkmark$$

Schritt 5: Zugspannung und Sicherheit

Die maximale Zugspannung (ohne Torsion, vereinfacht):

$$\sigma_z = \frac{F_{S,max}}{A_S} = \frac{42\,250\text{ N}}{84,3\text{ mm}^2} = 501\text{ N/mm}^2$$

Sicherheit gegen Fließen:

$$S = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_z} = \frac{640\text{ N/mm}^2}{501\text{ N/mm}^2} = 1,28$$

Ergebnis:

- Schraubenzusatzkraft: $F_{SA} = 2250\text{ N} = 2,25\text{ kN}$
- Maximale Schraubenkraft: $F_{S,max} = 42,25\text{ kN}$
- Restklemmkraft: $F_{KR} = 27,25\text{ kN}$ – **kein Aufklaffen**
- Zugspannung: $\sigma_z = 501\text{ N/mm}^2$
- Sicherheit: $S = 1,28$ – ausreichend für statische Belastung

Interpretation: Das niedrige Kraftverhältnis $\Phi = 0,15$ ist günstig, da nur 15% der Betriebskraft die Schraube zusätzlich belasten. Die restlichen 85% entlasten lediglich die verspannten Platten.

Musteraufgabe: Erforderliche Vorspannkraft bestimmen

Für eine Flanschverbindung soll die erforderliche Vorspannkraft berechnet werden. Die Verbindung wird durch eine Betriebskraft $F_A = 25 \text{ kN}$ belastet. Das Kraftverhältnis ist $\Phi = 0,2$. Die Restklemmkraft soll mindestens 20% der Vorspannkraft betragen.

Gegeben:

- Betriebskraft: $F_A = 25 \text{ kN}$
- Kraftverhältnis: $\Phi = 0,2$
- Anforderung: $F_{KR} \geq 0,2 \cdot F_V$

Gesucht: Mindestvorspannkraft F_V

Ausführliche Lösung

Ansatz: Aus der Bedingung für die Restklemmkraft
Die Restklemmkraft muss die Bedingung erfüllen:

$$F_{KR} = F_V - (1 - \Phi) \cdot F_A \geq 0,2 \cdot F_V$$

Schritt 1: Gleichung umformen

$$F_V - (1 - \Phi) \cdot F_A \geq 0,2 \cdot F_V$$

$$F_V - 0,2 \cdot F_V \geq (1 - \Phi) \cdot F_A$$

$$0,8 \cdot F_V \geq (1 - 0,2) \cdot F_A$$

$$0,8 \cdot F_V \geq 0,8 \cdot 25 \text{ kN}$$

Schritt 2: Nach F_V auflösen

$$F_V \geq \frac{0,8 \cdot 25 \text{ kN}}{0,8} = 25 \text{ kN}$$

Allgemeine Formel:

$$F_V \geq \frac{(1 - \Phi) \cdot F_A}{1 - k} \quad \text{mit } k = \frac{F_{KR,min}}{F_V}$$

Hier: $k = 0,2$, also:

$$F_V \geq \frac{(1 - 0,2) \cdot 25 \text{ kN}}{1 - 0,2} = \frac{0,8 \cdot 25 \text{ kN}}{0,8} = 25 \text{ kN}$$

Ergebnis: Die Mindestvorspannkraft beträgt $F_V = 25 \text{ kN}$.

In der Praxis wird ein Zuschlag von 10-20% empfohlen: $F_V \approx 30 \text{ kN}$

Übungsaufgabe 3.1 – Zum Selbstrechnen

Eine M16-Schraube (8.8, $A_S = 157 \text{ mm}^2$) wird mit $F_V = 60 \text{ kN}$ vorgespannt. Bei $\Phi = 0,12$ und $F_A = 20 \text{ kN}$: Berechnen Sie F_{SA} , F_{KR} und die Zugspannung.

Lösungen: $F_{SA} = 2,4 \text{ kN}$, $F_{KR} = 42,4 \text{ kN}$, $\sigma_z = 397 \text{ N/mm}^2$

Übungsaufgabe 3.2 – Zum Selbstrechnen

Bei welcher Betriebskraft F_A klappt eine Verbindung auf, wenn $F_V = 50 \text{ kN}$ und $\Phi = 0,18$?

Hinweis: Setze $F_{KR} = 0$ und löse nach F_A auf.

Lösung: $F_A = 61 \text{ kN}$

4 Elastische Verbindungen – Federn (Kap. 2.8)**Lernziele**

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Die Aufgaben von Federn im Maschinenbau erklären
- Die Federkennlinie interpretieren
- Federschaltungen berechnen
- Die wichtigsten Federarten unterscheiden und dimensionieren

4.1 Grundlagen

Federn sind Maschinenelemente, die sich unter Belastung **elastisch verformen** und dabei Energie speichern.

4.1.1 Aufgaben von Federn

- **Energiespeicherung** (z.B. Uhrfeder)
- **Krafterzeugung** (z.B. Ventalfeder)
- **Schwingungsdämpfung** (z.B. Fahrzeugfederung)
- **Rückstellung** (z.B. Tastenfeder)
- **Ausgleich von Toleranzen**

4.2 Federkennlinie

Die Federkennlinie beschreibt den Zusammenhang zwischen Kraft F und Federweg s :

Formel

Lineare Feder (Hooke'sches Gesetz):

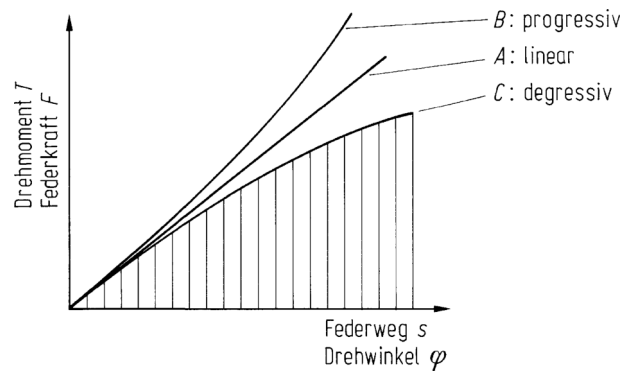
$$F = c \cdot s$$

Federsteifigkeit (Federrate):

$$c = \frac{F}{s} = \frac{dF}{ds} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$$

Federnachgiebigkeit:

$$\delta = \frac{1}{c} = \frac{s}{F} \quad \left[\frac{\text{mm}}{\text{N}} \right]$$



4.3 Federarbeit

Die in einer Feder gespeicherte Energie ergibt sich aus der Fläche unter der Federkennlinie:

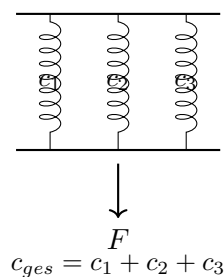
Formel

Federarbeit (lineare Feder):

$$W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot c \cdot s^2 = \frac{F^2}{2c}$$

4.4 Federschaltungen

Parallelschaltung



Reihenschaltung

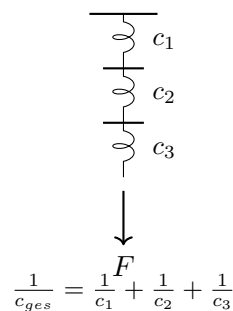


Abbildung 10: Federschaltungen: Parallel- und Reihenschaltung

4.4.1 Parallelschaltung

Bei Parallelschaltung haben alle Federn den **gleichen Federweg**:

Formel

$$c_{ges} = c_1 + c_2 + c_3 + \dots = \sum_i c_i$$

Die Gesamtsteifigkeit ist **größer** als die Einzelsteifigkeiten!

4.4.2 Reihenschaltung

Bei Reihenschaltung wirkt auf alle Federn die **gleiche Kraft**:

Formel

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots = \sum_i \frac{1}{c_i}$$

bzw.

$$\delta_{ges} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots$$

Die Gesamtsteifigkeit ist **kleiner** als die kleinste Einzelsteifigkeit!**4.5 Wichtige Federarten****4.5.1 Zugstabfeder**

Einfachste Federform – ein Stab auf Zug beansprucht.

Formel

$$c = \frac{E \cdot A}{l} \quad ; \quad s = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

4.5.2 Drehstabfeder

Beanspruchung auf Torsion.

Formel

$$c_\varphi = \frac{M}{\varphi} = \frac{G \cdot I_p}{l} = \frac{G \cdot \pi \cdot d^4}{32 \cdot l}$$

4.5.3 Zylindrische Schraubenfeder

Die häufigste Federart im Maschinenbau!

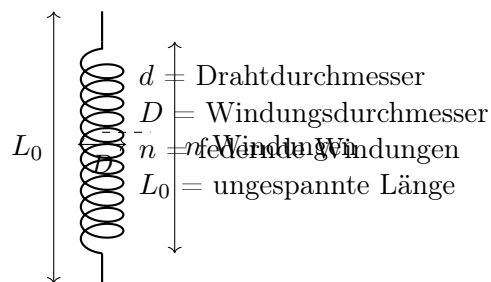


Abbildung 11: Zylindrische Schraubenfeder mit Bezeichnungen

Formel**Federsteifigkeit:**

$$c = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n}$$

Federweg:

$$s = \frac{8 \cdot F \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}$$

mit:

- d = Drahtdurchmesser
- D = mittlerer Windungsdurchmesser
- n = Anzahl der federnden Windungen
- G = Schubmodul (Stahl: $G \approx 81\,500 \text{ N/mm}^2$)

WICHTIG!**Wickelverhältnis:**

$$w = \frac{D}{d} \approx 4 \dots 12$$

Bei $w < 4$ ist die Herstellung schwierig, bei $w > 12$ besteht Knickgefahr!**Merke****Schichtung von Tellerfedern:**

- Gleiche Richtung (parallel): höhere Kraft, gleicher Weg
- Wechselnde Richtung (Reihe): gleiche Kraft, größerer Weg

4.6 Beispielaufgaben: Federn**Musteraufgabe: Schraubenfeder dimensionieren**

Eine zylindrische Schraubendruckfeder aus Federstahldraht soll bei einer Kraft von $F = 500 \text{ N}$ einen Federweg von $s = 25 \text{ mm}$ aufweisen. Der mittlere Windungsdurchmesser ist konstruktiv auf $D = 40 \text{ mm}$ festgelegt.

Gegeben:

- Kraft: $F = 500 \text{ N}$
- Federweg: $s = 25 \text{ mm}$
- Mittlerer Windungsdurchmesser: $D = 40 \text{ mm}$
- Schubmodul Stahl: $G = 81\,500 \text{ N/mm}^2$
- Wickelverhältnis: $w = 8$ (gewählt)

Gesucht:

- Erforderliche Federrate c
- Drahtdurchmesser d
- Anzahl der federnden Windungen n
- Gespeicherte Federarbeit W

Ausführliche Lösung**Schritt 1: Federrate berechnen**

$$c = \frac{F}{s} = \frac{500 \text{ N}}{25 \text{ mm}} = 20 \text{ N/mm}$$

Schritt 2: Drahtdurchmesser aus Wickelverhältnis

$$w = \frac{D}{d} \Rightarrow d = \frac{D}{w} = \frac{40 \text{ mm}}{8} = 5 \text{ mm}$$

Schritt 3: Windungszahl berechnen

Aus der Formel für die Federsteifigkeit nach n umstellen:

$$c = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} \Rightarrow n = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot c}$$

Einsetzen:

$$n = \frac{81\,500 \text{ N/mm}^2 \cdot (5 \text{ mm})^4}{8 \cdot (40 \text{ mm})^3 \cdot 20 \text{ N/mm}}$$

$$n = \frac{81500 \cdot 625}{8 \cdot 64000 \cdot 20} = \frac{50937500}{10240000} = 4,97 \approx 5$$

Schritt 4: Einheitenkontrolle

$$\frac{[N/mm^2] \cdot [mm^4]}{[mm^3] \cdot [N/mm]} = \frac{[N \cdot mm^2]}{[N \cdot mm^2]} = [-] \quad \checkmark$$

Schritt 5: Federarbeit berechnen

$$W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot 500 \text{ N} \cdot 25 \text{ mm} = 6250 \text{ N} \cdot \text{mm} = 6,25 \text{ J}$$

Ergebnis:

- Federrate: $c = 20 \text{ N/mm}$
- Drahtdurchmesser: $d = 5 \text{ mm}$
- Federnde Windungen: $n = 5$
- Federarbeit: $W = 6,25 \text{ J}$

Hinweis: Die Gesamtwindungszahl ist $n_{ges} = n + 2 = 7$ (mit je einer angelegten Windung oben und unten).

Musteraufgabe: Federschaltung – Parallel und Reihe

Drei Federn mit den Federraten $c_1 = 10 \text{ N/mm}$, $c_2 = 15 \text{ N/mm}$ und $c_3 = 20 \text{ N/mm}$ werden kombiniert. Berechnen Sie die Gesamtsteifigkeit für:

- a) Alle drei Federn parallel geschaltet
- b) Alle drei Federn in Reihe geschaltet
- c) c_1 und c_2 parallel, diese Kombination in Reihe mit c_3

Ausführliche Lösung**a) Parallelschaltung aller drei Federn**

$$c_{ges} = c_1 + c_2 + c_3 = 10 + 15 + 20 = 45 \text{ N/mm}$$

b) Reihenschaltung aller drei Federn

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{6 + 4 + 3}{60} = \frac{13}{60}$$

$$c_{ges} = \frac{60}{13} = 4,62 \text{ N/mm}$$

Kontrolle: Die Gesamtsteifigkeit (4,62 N/mm) ist kleiner als die kleinste Einzelsteifigkeit (10 N/mm). ✓

c) Gemischte Schaltung: ($c_1 \parallel c_2$) in Reihe mit c_3

Erst die Parallelschaltung von c_1 und c_2 :

$$c_{12} = c_1 + c_2 = 10 + 15 = 25 \text{ N/mm}$$

Dann Reihenschaltung von c_{12} mit c_3 :

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{25} + \frac{1}{20} = \frac{4 + 5}{100} = \frac{9}{100}$$

$$c_{ges} = \frac{100}{9} = 11,1 \text{ N/mm}$$

Ergebnis:

- Parallelschaltung: $c_{ges} = 45 \text{ N/mm}$ (steifer)
- Reihenschaltung: $c_{ges} = 4,62 \text{ N/mm}$ (weicher)
- Gemischt: $c_{ges} = 11,1 \text{ N/mm}$

Übungsaufgabe 4.1 – Zum Selbstrechnen

Eine Schraubenfeder ($d = 4 \text{ mm}$, $D = 32 \text{ mm}$, $n = 8$, $G = 81\,500 \text{ N/mm}^2$) wird mit $F = 150 \text{ N}$ belastet. Berechnen Sie den Federweg s und die gespeicherte Energie W .

Lösungen: $s = 17,6 \text{ mm}$, $W = 1,32 \text{ J}$

Übungsaufgabe 4.2 – Zum Selbstrechnen

Zwei Federn ($c_1 = 25 \text{ N/mm}$, $c_2 = 50 \text{ N/mm}$) werden in Reihe geschaltet und mit $F = 300 \text{ N}$ belastet. Berechnen Sie den Gesamtfederweg und die Einzelfederwege s_1 und s_2 .

Lösungen: $c_{ges} = 16,67 \text{ N/mm}$, $s_{ges} = 18 \text{ mm}$, $s_1 = 12 \text{ mm}$, $s_2 = 6 \text{ mm}$

5 Achsen und Wellen (Kap. 4.1 & 4.2)

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

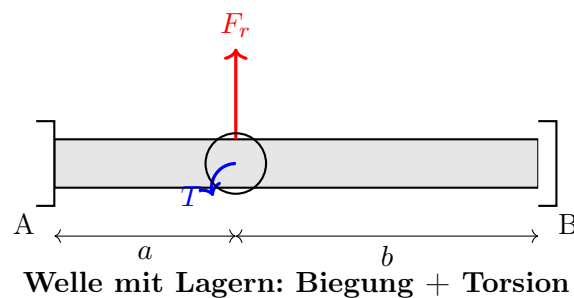
- Den Unterschied zwischen Achsen und Wellen erklären
- Achsen und Wellen auf Biegung und Torsion auslegen
- Einen Festigkeitsnachweis durchführen
- Wellen auf kritische Drehzahlen prüfen

5.1 Unterschied zwischen Achse und Welle

WICHTIG!

Wesentlicher Unterschied:

- **Achse:** Überträgt **kein** Drehmoment, nur Querkräfte und Biegemomente. Kann stillstehen oder sich drehen.
- **Welle:** Überträgt **immer** ein Drehmoment. Dreht sich immer.



Welle mit Lagern: Biegung + Torsion

Abbildung 12: Welle mit Lagern und Zahnradkräften (Freikörperbild)

5.2 Achsen

Achsen dienen zur Aufnahme von Rollen, Seiltrommeln, Laufrädern etc.

5.2.1 Arten von Achsen

- **Feststehende Achsen:** Maschinenteile drehen sich auf der Achse → ruhende/schwellende Biegebeanspruchung
- **Umlaufende Achsen:** Achse dreht sich in Lagern → wechselnde Biegebeanspruchung

5.2.2 Auslegung einer Achse

Formel

Für einen Vollkreisquerschnitt:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_b}{\pi \cdot \sigma_{b,zul}}}$$

5.3 Wellen

Wellen übertragen Drehmomente und werden durch Torsion und Biegung beansprucht.

5.3.1 Auslegung einer Welle

Formel

Überschlägige Auslegung (nur Torsion):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T}{\pi \cdot \tau_{t,zul}}}$$

Drehmoment aus Leistung:

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi n} = \frac{9550 \cdot P[\text{kW}]}{n[\text{min}^{-1}]} \quad [\text{Nm}]$$

5.3.2 Festigkeitsnachweis

Formel

Vergleichsmoment (nach Gestaltänderungsenergiehypothese):

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T)^2}$$

Vergleichsspannung:

$$\sigma_v = \frac{M_v}{W_b} = \frac{32 \cdot M_v}{\pi \cdot d^3} \leq \sigma_{zul}$$

5.3.3 Kritische Drehzahl

Formel

Kritische Drehzahl (Einmassensystem):

$$n_{krit} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{f}}$$

mit f = statische Durchbiegung unter der Masse m .

WICHTIG!

Betriebsdrehzahl:

- Unterkritischer Betrieb: $n < 0,8 \cdot n_{krit}$
- Überkritischer Betrieb: $n > 1,2 \cdot n_{krit}$

Der Bereich $0,8 \cdot n_{krit} < n < 1,2 \cdot n_{krit}$ ist **verboten!**

5.4 Beispielaufgaben: Achsen und Wellen

Musteraufgabe: Wellenauslegung – Klassische Prüfungsaufgabe

Eine Getriebewelle soll eine Leistung von $P = 15 \text{ kW}$ bei einer Drehzahl von $n = 1450 \text{ min}^{-1}$ übertragen. Der Werkstoff ist C45 mit $\tau_{t,zul} = 50 \text{ N/mm}^2$.

Gegeben:

- Leistung: $P = 15 \text{ kW}$
- Drehzahl: $n = 1450 \text{ min}^{-1}$
- Zulässige Torsionsspannung: $\tau_{t,zul} = 50 \text{ N/mm}^2$

Gesucht:

- a) Drehmoment T
- b) Minstdurchmesser d (überschlägige Auslegung)

Ausführliche Lösung

Schritt 1: Drehmoment berechnen

Mit der Formel für das Drehmoment aus Leistung und Drehzahl:

$$T = \frac{9550 \cdot P[\text{kW}]}{n[\text{min}^{-1}]} = \frac{9550 \cdot 15}{1450} = 98,8 \text{ Nm}$$

Einheitenkontrolle: Die Formel $T = 9550 \cdot P/n$ gilt, wenn P in kW und n in min^{-1} eingesetzt wird. Das Ergebnis ist dann in Nm.

Schritt 2: Minstdurchmesser berechnen

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T}{\pi \cdot \tau_{t,zul}}}$$

Umrechnung: $T = 98,8 \text{ Nm} = 98\,800 \text{ Nmm}$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 98800}{\pi \cdot 50}} = \sqrt[3]{\frac{1580800}{157,08}} = \sqrt[3]{10064} = 21,6 \text{ mm}$$

Ergebnis:

- Drehmoment: $T = 98,8 \text{ Nm} \approx 100 \text{ Nm}$
- Minstdurchmesser: $d_{min} = 21,6 \text{ mm}$
- **Gewählt (genormt):** $d = 25 \text{ mm}$

Hinweis: Bei zusätzlicher Biegung muss der Durchmesser größer gewählt werden! Dies ist nur die überschlägige Auslegung für reine Torsion.

Musteraufgabe: Welle mit kombinierter Beanspruchung

Eine Welle überträgt ein Drehmoment $T = 200 \text{ Nm}$ und wird gleichzeitig durch ein Biegemoment $M_b = 150 \text{ Nm}$ beansprucht (beide ruhend, $\alpha_0 = 1$). Der Werkstoff ist 42CrMo4 mit $\sigma_{zul} = 120 \text{ N/mm}^2$.

Gegeben:

- Drehmoment: $T = 200 \text{ Nm} = 200\,000 \text{ Nmm}$
- Biegemoment: $M_b = 150 \text{ Nm} = 150\,000 \text{ Nmm}$
- Anstrengungsverhältnis: $\alpha_0 = 1$
- Zulässige Spannung: $\sigma_{zul} = 120 \text{ N/mm}^2$

Gesucht: Erforderlicher Wellendurchmesser d

Ausführliche Lösung**Schritt 1: Vergleichsmoment berechnen**

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 \cdot T)^2}$$

$$M_v = \sqrt{150000^2 + 0,75 \cdot (1 \cdot 200000)^2}$$

$$M_v = \sqrt{22,5 \cdot 10^9 + 0,75 \cdot 40 \cdot 10^9} = \sqrt{22,5 \cdot 10^9 + 30 \cdot 10^9}$$

$$M_v = \sqrt{52,5 \cdot 10^9} = 229\,129 \text{ Nmm} \approx 229 \text{ Nm}$$

Schritt 2: Erforderlichen Durchmesser berechnen

Aus der Vergleichsspannung:

$$\sigma_v = \frac{32 \cdot M_v}{\pi \cdot d^3} \leq \sigma_{zul}$$

Nach d umgestellt:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_v}{\pi \cdot \sigma_{zul}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 229129}{\pi \cdot 120}}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{7332128}{376,99}} = \sqrt[3]{19450} = 26,9 \text{ mm}$$

Ergebnis:

- Vergleichsmoment: $M_v = 229 \text{ Nm}$
- Mindestdurchmesser: $d_{min} = 26,9 \text{ mm}$
- **Gewählt:** $d = 30 \text{ mm}$

Interpretation: Das Vergleichsmoment (229 Nm) ist größer als beide Einzelmomente, da sich die Beanspruchungen überlagern. Das verdeutlicht die Wichtigkeit der kombinierten Betrachtung!

Übungsaufgabe 5.1 – Zum Selbstrechnen

Eine Antriebswelle überträgt $P = 7,5 \text{ kW}$ bei $n = 2800 \text{ min}^{-1}$. Berechnen Sie das Drehmoment und den Mindestdurchmesser für $\tau_{t,zul} = 45 \text{ N/mm}^2$.

Lösungen: $T = 25,6 \text{ Nm}$, $d_{min} = 14,3 \text{ mm}$, gewählt $d = 16 \text{ mm}$

6 Lager (Kap. 4.3)

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Zwischen Gleitlagern und Wälzlagern unterscheiden
- Wälzlager auswählen und deren Lebensdauer berechnen
- Lagerungen konstruktiv gestalten

6.1 Übersicht

	Gleitlager	Wälzlager
Reibung	Gleitreibung	Rollreibung
Anlaufreibung	hoch	gering
Geräusch	leise	lauter
Lebensdauer	theoretisch unbegrenzt	begrenzt (Ermüdung)

Tabelle 7: Vergleich Gleit- und Wälzlager

6.2 Wälzlager

6.2.1 Lagerbezeichnung

Beispiel

6205: Rillenkugellager (6), leichte Reihe (2), Bohrung $05 \times 5 = 25$ mm

6.2.2 Lebensdauerberechnung

Formel

Nominelle Lebensdauer:

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P} \right)^p \quad [\text{Millionen Umdrehungen}]$$

Lebensdauer in Stunden:

$$L_{10h} = \frac{L_{10} \cdot 10^6}{60 \cdot n}$$

mit:

- C = dynamische Tragzahl (aus Katalog)
- P = äquivalente dynamische Lagerbelastung
- $p = 3$ für Kugellager, $p = 10/3$ für Rollenlager

6.2.3 Äquivalente Lagerbelastung

Formel

$$P = X \cdot F_r + Y \cdot F_a$$

wobei X und Y aus Lagertabellen entnommen werden.

Für reine Radialbelastung: $P = F_r$

6.2.4 Fest-Los-Lagerung

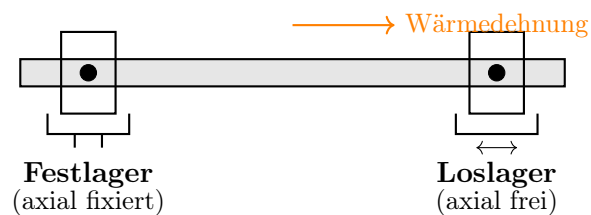


Abbildung 13: Fest-Los-Lagerung: Festlager fixiert axial, Loslager ermöglicht Wärmedehnung

WICHTIG!

- **Festlager:** Nimmt Radial- **und** Axialkräfte auf
- **Loslager:** Nimmt **nur** Radialkräfte auf, ermöglicht Wärmedehnung

6.3 Beispielaufgaben: Wälzlager

Musteraufgabe: Wälzlager-Lebensdauer – Prüfungsklassiker

Ein Rillenkugellager 6308 ($C = 42,3 \text{ kN}$) wird mit einer radialen Kraft $F_r = 8 \text{ kN}$ bei einer Drehzahl $n = 1000 \text{ min}^{-1}$ belastet. Es wirkt keine Axialkraft.

Gegeben:

- Lager: 6308 (Rillenkugellager)
- Dynamische Tragzahl: $C = 42,3 \text{ kN}$
- Radiale Belastung: $F_r = 8 \text{ kN}$
- Drehzahl: $n = 1000 \text{ min}^{-1}$
- Exponent: $p = 3$ (Kugellager)

Gesucht:

- Nominelle Lebensdauer L_{10} in Millionen Umdrehungen
- Lebensdauer L_{10h} in Betriebsstunden
- Ist das Lager für 20 000 h Betrieb geeignet?

Ausführliche Lösung**Schritt 1: Äquivalente Lagerbelastung**

Da nur radiale Belastung und keine Axialkraft wirkt:

$$P = F_r = 8 \text{ kN}$$

Schritt 2: Nominelle Lebensdauer in Mio. Umdrehungen

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^p = \left(\frac{42,3}{8}\right)^3 = (5,29)^3 = 148 \text{ Mio. Umdrehungen}$$

Schritt 3: Lebensdauer in Betriebsstunden

$$L_{10h} = \frac{L_{10} \cdot 10^6}{60 \cdot n} = \frac{148 \cdot 10^6}{60 \cdot 1000} = \frac{148 \cdot 10^6}{60000} = 2467 \text{ h}$$

Schritt 4: Bewertung

$$L_{10h} = 2467 \text{ h} < 20\,000 \text{ h} \quad (\text{gefordert})$$

Das Lager ist für die geforderte Lebensdauer **nicht geeignet!**

Alternative: Erforderliche Tragzahl für 20 000 h

Umgekehrte Berechnung:

$$L_{10} = \frac{L_{10h} \cdot 60 \cdot n}{10^6} = \frac{20000 \cdot 60 \cdot 1000}{10^6} = 1200 \text{ Mio.}$$

$$C_{erf} = P \cdot \sqrt[3]{L_{10}} = 8 \cdot \sqrt[3]{1200} = 8 \cdot 10,63 = 85 \text{ kN}$$

Ergebnis:

- $L_{10} = 148$ Mio. Umdrehungen
- $L_{10h} = 2467$ h
- Für 20 000 h wird ein Lager mit $C \geq 85$ kN benötigt (z.B. 6312 mit $C = 81,9$ kN oder größer)

Übungsaufgabe 6.1 – Zum Selbstrechnen

Ein Zylinderrollenlager NU308 ($C = 88$ kN, $p = 10/3$) wird mit $F_r = 15$ kN bei $n = 500 \text{ min}^{-1}$ belastet. Berechnen Sie L_{10h} .

Lösung: $L_{10h} = 15\,800$ h

Übungsaufgabe 6.2 – Zum Selbstrechnen

Welche maximale Radialkraft F_r darf ein Rillenkugellager 6206 ($C = 19,5$ kN) bei $n = 3000 \text{ min}^{-1}$ aufnehmen, wenn $L_{10h} \geq 10\,000$ h gefordert ist?

Lösung: $F_r \leq 3,6$ kN

6.4 Gleitlager

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Die Schmierzustände im Gleitlager erklären
- Die Stribeck-Kurve interpretieren
- Hydrodynamische Gleitlager berechnen
- Die Sommerfeldzahl anwenden
- Gleitlager gegenüber Wälzlager abgrenzen

6.4.1 Grundlagen und Einsatzgebiete

Gleitlager übertragen Kräfte durch **Gleitreibung** zwischen Welle und Lagerschale. Im Gegensatz zu Wälzlager haben sie keine Wälzkörper.

Eigenschaft	Gleitlager	Wälzlager
Reibungsart	Gleitreibung	Rollreibung
Anlaufreibung	hoch	gering
Reibung im Betrieb	sehr gering (hydrodynamisch)	gering
Geräuschentwicklung	sehr leise	lauter
Lebensdauer	theoretisch unbegrenzt	begrenzt (Ermüdung)
Schmierung	zwingend erforderlich	empfohlen
Bauraum radial	gering	größer
Stoßbelastung	gut	empfindlich
Hohe Drehzahlen	sehr gut geeignet	begrenzt

Tabelle 8: Vergleich Gleit- und Wälzlager

Merke

Typische Einsatzgebiete für Gleitlager:

- Sehr hohe Drehzahlen (Turbomaschinen, Turbinen)
- Sehr große Lasten (Walzwerke, Schiffswellen)
- Geräuscharmer Betrieb erforderlich
- Oszillierende Bewegungen
- Aggressive Umgebung (Wartungsfreiheit mit Sinterlagern)

6.4.2 Schmierzustände und Stribeck-Kurve

Die **Stribeck-Kurve** beschreibt den Zusammenhang zwischen Reibungszahl μ und dem Betriebszustand des Lagers.

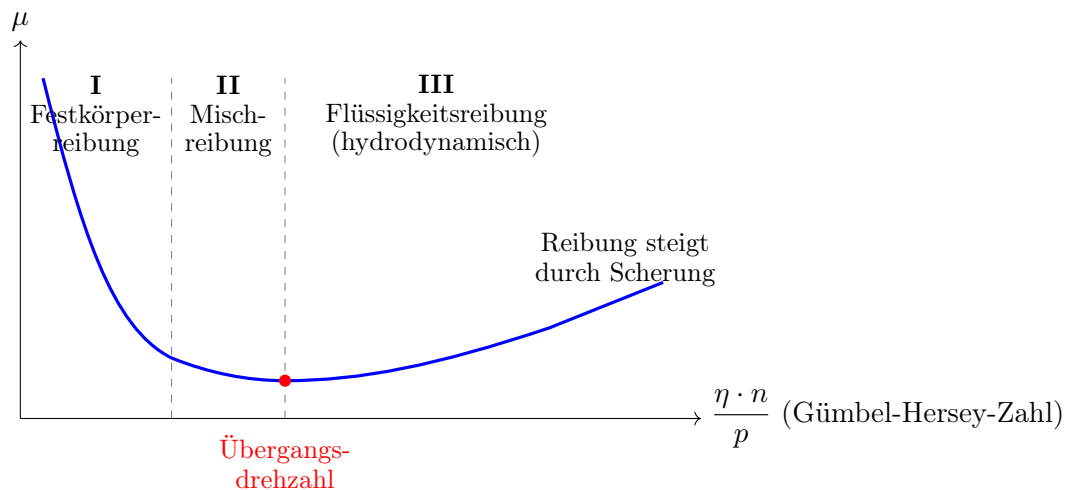


Abbildung 14: Stribeck-Kurve: Reibungszahl in Abhängigkeit vom Betriebszustand

6.4.3 Die drei Schmierzustände

WICHTIG!

I. Festkörperreibung (Grenzreibung):

- Welle und Schale berühren sich direkt
- Hohe Reibung ($\mu \approx 0,1 - 0,3$)
- Hoher Verschleiß
- Tritt auf bei: Stillstand, Anlauf, Auslauf, zu geringer Drehzahl

II. Mischreibung:

- Teilweise Trennung durch Schmierfilm
- Reibung nimmt ab
- Noch Verschleiß möglich

III. Flüssigkeitsreibung (hydrodynamisch):

- Vollständige Trennung durch Schmierfilm
- Sehr geringe Reibung ($\mu \approx 0,001 - 0,01$)
- Theoretisch kein Verschleiß
- **Angestrebter Betriebszustand!**

6.4.4 Hydrodynamische Schmierungstheorie

Im **hydrodynamischen Gleitlager** erzeugt die rotierende Welle durch Schleppwirkung einen tragenden Schmierfilmdruck.

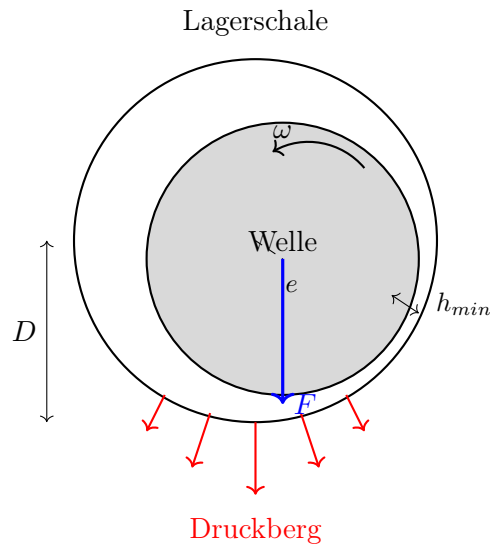


Abbildung 15: Hydrodynamisches Radialgleitlager: Druckaufbau im Schmierpalt

6.4.5 Wichtige Kenngrößen

Formel

Relatives Lagerspiel:

$$\psi = \frac{D - d}{d} = \frac{2s}{d} = \frac{s}{r}$$

Typische Werte: $\psi = 0,5 \dots 3 \cdot 10^{-3}$ (also 0,5‰ ... 3‰)

Relative Exzentrizität:

$$\varepsilon = \frac{e}{s} = \frac{2e}{D - d}$$

mit $0 \leq \varepsilon < 1$ (bei $\varepsilon = 1$: metallische Berührung!)

Formel

Minimale Schmierpalthöhe:

$$h_{min} = s \cdot (1 - \varepsilon) = \frac{D - d}{2} \cdot (1 - \varepsilon)$$

6.4.6 Berechnung mit der Sommerfeldzahl

Die **Sommerfeldzahl** So ist die zentrale dimensionslose Kennzahl für die Gleitlagerberechnung.

Formel**Sommerfeldzahl:**

$$So = \frac{p \cdot \psi^2}{\eta \cdot \omega} = \frac{\tilde{p} \cdot \psi^2}{\eta \cdot \omega}$$

mit:

- $p = \frac{F}{B \cdot d}$ = spezifische Lagerbelastung $\left[\frac{N}{mm^2} \right]$
- ψ = relatives Lagerspiel $[-]$
- η = dynamische Viskosität $[Pa \cdot s]$
- $\omega = 2\pi n$ = Winkelgeschwindigkeit $[rad/s]$

Merke

Die Sommerfeldzahl So ist ein Maß für die **Tragfähigkeit** des Lagers:

- Kleines $So \rightarrow$ dicker Schmierfilm, geringe Belastbarkeit
- Großes $So \rightarrow$ dünner Schmierfilm, hohe Belastung
- Aus Diagrammen: $So \rightarrow \varepsilon \rightarrow h_{min}$

6.4.7 Richtwerte für die spezifische Lagerbelastung

Anwendung	$p_{zul} [N/mm^2]$
Turbinenlager	1 – 2
Elektromotoren	1 – 3
Getriebe, allgemein	3 – 7
Kurbelwellenlager (Pkw)	10 – 20
Kurbelwellenlager (Diesel)	15 – 30

Tabelle 9: Zulässige spezifische Lagerbelastung für verschiedene Anwendungen

6.4.8 Wärmehaushalt und Reibungsverluste**Formel****Reibungsleistung:**

$$P_R = \mu \cdot F \cdot v = \mu \cdot F \cdot \pi \cdot d \cdot n$$

Reibungszahl (nach Petroff, vereinfacht):

$$\mu = \pi \cdot \frac{\eta \cdot \omega}{\psi \cdot p}$$

Die entstehende Wärme muss abgeführt werden durch:

- Wärmeleitung über das Gehäuse
- Konvektion an die Umgebung
- Schmierstoffkühlung (Umlaufschmierung)

6.4.9 Konvektionskühlung und Wärmeabfuhr

Die im Gleitlager entstehende Reibungswärme muss vollständig abgeführt werden, um ein Überhitzen des Schmierstoffs zu verhindern.

Formel

Wärmebilanz im stationären Zustand:

$$\dot{Q}_{zu} = \dot{Q}_{ab}$$

$$P_R = \dot{Q}_{Konv} + \dot{Q}_l$$

Reibungsleistung (zugeführte Wärme):

$$P_R = \mu \cdot F \cdot v = \mu \cdot F \cdot \pi \cdot d \cdot n$$

Formel

Konvektive Wärmeabfuhr über das Gehäuse:

$$\dot{Q}_{Konv} = \alpha \cdot A \cdot (T_L - T_U)$$

mit:

- α = Wärmeübergangskoeffizient [$\frac{W}{m^2 \cdot K}$]
- A = Wärmeabgebende Oberfläche [m^2]
- T_L = Lagertemperatur [K] oder [C]
- T_U = Umgebungstemperatur [K] oder [C]

Richtwerte für α :

- Freie Konvektion (ruhende Luft): $\alpha \approx 10 - 20 \frac{W}{m^2 \cdot K}$
- Erzwungene Konvektion (bewegte Luft): $\alpha \approx 20 - 100 \frac{W}{m^2 \cdot K}$
- Mit Lüfter/Gebläse: $\alpha \approx 50 - 200 \frac{W}{m^2 \cdot K}$

Formel

Wärmeabfuhr durch Umlaufschmierung:

$$\dot{Q}_l = \dot{m} \cdot c_p \cdot \Delta T = \rho \cdot \dot{V} \cdot c_p \cdot (T_{aus} - T_{ein})$$

mit:

- $\dot{V}$ = Volumenstrom des Öls [$\frac{m^3}{s}$]
- c_p = spezifische Wärmekapazität des Öls $\approx 2000 \frac{J}{kg \cdot K}$
- ρ = Dichte des Öls $\approx 900 \frac{kg}{m^3}$
- $\Delta T = T_{aus} - T_{ein}$ = Temperaturerhöhung im Lager

Erforderlicher Ölvolumenstrom:

$$\dot{V} = \frac{P_R}{\rho \cdot c_p \cdot \Delta T_{zul}}$$

Typisch: $\Delta T_{zul} \approx 10 - 20 K$

Merke**Temperaturgrenzwerte:**

- Mineralöle: $T_{max} \approx 70 - 80^\circ\text{C}$ (darüber: schnelle Alterung)
- Syntheseöle: $T_{max} \approx 100 - 120^\circ\text{C}$
- Weißmetall-Lager: $T_{max} \approx 100 - 120^\circ\text{C}$ (Schmelzpunkt!)
- Bronze-Lager: $T_{max} \approx 150^\circ\text{C}$

Beispiel

Ein Gleitlager hat eine Reibungsleistung von $P_R = 500\text{ W}$. Die Gehäuseoberfläche beträgt $A = 0,1\text{ m}^2$, die Umgebungstemperatur $T_U = 25^\circ\text{C}$.

a) **Nur Konvektion** ($\alpha = 20\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$):

$$T_L = T_U + \frac{P_R}{\alpha \cdot A} = 25 + \frac{500}{20 \cdot 0,1} = 25 + 250 = 275^\circ\text{C} \quad \text{Viel zu heiß!}$$

b) **Mit Umlaufschmierung** ($\Delta T = 15\text{ K}$):

$$\dot{V} = \frac{500}{900 \cdot 2000 \cdot 15} = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} = 1,1\text{ l/min}$$

6.4.10 Gleitlagerwerkstoffe

Werkstoff	Eigenschaften	Anwendung
Weißmetall (Sn-/Pb-Basis)	Sehr gute Notlaufeigenschaften Weich, einbettfähig	Großmaschinen Turbinen
Bronzen (CuSn, CuPb)	Hohe Belastbarkeit Gute Wärmeleitfähigkeit	Pumpen, Getriebe Schwere Maschinen
Sinterlager (Fe, Cu-Basis)	Selbstschmierend (Ölgetränkt) Wartungsfrei	Kleinmotoren Haushaltsgeräte
Kunststoffe (PTFE, PA, POM)	Trockenlauf möglich Korrosionsbeständig	Lebensmittelindustrie Chemische Industrie

Tabelle 10: Gleitlagerwerkstoffe und ihre Anwendungen

6.4.11 Gestaltungshinweise

1. **Schmierölaufuhr** im unbelasteten Bereich anordnen (nicht im Druckberg!)
2. **Schmiernuten** nicht durch den tragenden Bereich führen
3. **Breiten-Durchmesser-Verhältnis:** $B/d = 0,5 \dots 1,0$ (Standard: $B/d \approx 0,6$)
4. **Mindestschmierspalthöhe** $h_{min} > 3 \cdot R_z$ (Rauheitsspitzen!)
5. **Öltemperatur** überwachen (max. $70 - 80^\circ\text{C}$)

6.5 Beispielaufgaben: Gleitlager

Musteraufgabe: Gleitlager nachrechnen

Ein hydrodynamisches Radialgleitlager hat folgende Daten:

Gegeben:

- Wellendurchmesser: $d = 80 \text{ mm}$
- Lagerbreite: $B = 60 \text{ mm}$
- Radiales Lagerspiel: $D - d = 0,12 \text{ mm}$
- Radialkraft: $F = 12 \text{ kN}$
- Drehzahl: $n = 1500 \text{ min}^{-1}$
- Dynamische Viskosität: $\eta = 0,04 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Gesucht:

- Relatives Lagerspiel ψ
- Spezifische Lagerbelastung p
- Sommerfeldzahl So

Ausführliche Lösung

Schritt 1: Relatives Lagerspiel

$$\psi = \frac{D - d}{d} = \frac{0,12 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} = 0,0015 = 1,5 \cdot 10^{-3} = 1,5\text{‰}$$

Schritt 2: Spezifische Lagerbelastung

$$p = \frac{F}{B \cdot d} = \frac{12\,000 \text{ N}}{60 \text{ mm} \cdot 80 \text{ mm}} = \frac{12\,000 \text{ N}}{4800 \text{ mm}^2} = 2,5 \text{ N/mm}^2$$

Schritt 3: Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot \frac{1500}{60} = 157,1 \text{ rad/s}$$

Schritt 4: Sommerfeldzahl

Umrechnung: $p = 2,5 \text{ N/mm}^2 = 2,5 \text{ MPa} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

$$So = \frac{p \cdot \psi^2}{\eta \cdot \omega} = \frac{2,5 \cdot 10^6 \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})^2}{0,04 \cdot 157,1}$$

$$So = \frac{2,5 \cdot 10^6 \cdot 2,25 \cdot 10^{-6}}{6,28} = \frac{5,625}{6,28} = 0,90$$

Ergebnis:

- Relatives Lagerspiel: $\psi = 1,5\text{‰}$ – im üblichen Bereich ✓
- Spezifische Belastung: $p = 2,5 \text{ N/mm}^2$ – zulässig für Turbinenlager ✓
- Sommerfeldzahl: $So = 0,90$

Mit $So = 0,90$ kann aus Diagrammen die relative Exzentrizität ε und damit $h_{\min}$ bestimmt werden.

Musteraufgabe: Mindestschmierspalthöhe berechnen

Für das Lager aus der vorherigen Aufgabe wurde aus dem Sommerfeld-Diagramm eine relative Exzentrizität von $\varepsilon = 0,7$ abgelesen.

Gesucht: Minimale Schmierspalthöhe h_{min}

Ausführliche Lösung**Berechnung der minimalen Spalthöhe:**

Das radiale Spiel beträgt:

$$s = \frac{D - d}{2} = \frac{0,12 \text{ mm}}{2} = 0,06 \text{ mm} = 60 \mu\text{m}$$

Die minimale Schmierspalthöhe:

$$h_{min} = s \cdot (1 - \varepsilon) = 60 \mu\text{m} \cdot (1 - 0,7) = 60 \mu\text{m} \cdot 0,3 = 18 \mu\text{m}$$

Bewertung:

Für sichere Flüssigkeitsreibung sollte gelten: $h_{min} > 3 \cdot R_z$

Bei üblicher Oberflächenrauheit $R_z \approx 4 \mu\text{m}$:

$$h_{min} = 18 \mu\text{m} > 3 \cdot 4 \mu\text{m} = 12 \mu\text{m} \quad \checkmark$$

Ergebnis: $h_{min} = 18 \mu\text{m}$ – ausreichend für hydrodynamischen Betrieb.

Übungsaufgabe 6.3 – Zum Selbstrechnen

Ein Gleitlager ($d = 60 \text{ mm}$, $B = 40 \text{ mm}$, $\psi = 1,2\text{‰}$) wird mit $F = 8 \text{ kN}$ bei $n = 2000 \text{ min}^{-1}$ belastet. Die Ölviskosität beträgt $\eta = 0,03 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Berechnen Sie die spezifische Lagerbelastung p und die Sommerfeldzahl So .

Lösungen: $p = 3,33 \text{ N/mm}^2$, $So = 0,76$

Übungsaufgabe 6.4 – Zum Selbstrechnen

Für ein Gleitlager gilt: $d = 100 \text{ mm}$, $D - d = 0,15 \text{ mm}$, $\varepsilon = 0,65$.

Berechnen Sie das relative Lagerspiel ψ und die minimale Schmierspalthöhe h_{min} .

Lösungen: $\psi = 1,5\text{‰}$, $h_{min} = 26,25 \mu\text{m}$

7 Kupplungen und Bremsen (Kap. 4.4)**Lernziele**

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Kupplungen nach ihrer Funktion klassifizieren
- Schaltkupplungen und Bremsen berechnen

Kupplungsart	Eigenschaft
Starre Kupplung	Keine Bewegung, keine Dämpfung
Bewegliche Kupplung	Ausgleich von Wellenversatz
Elastische Kupplung	Ausgleich + Dämpfung
Schaltbare Kupplung	Ein-/Ausschalten der Verbindung

7.1 Kupplungsarten

7.2 Reibungskupplungen

Formel

Übertragbares Drehmoment:

$$T = \mu \cdot F_N \cdot r_m \cdot z$$

mit:

- μ = Reibkoeffizient
- F_N = Anpresskraft
- r_m = mittlerer Reibradius
- z = Anzahl der Reibflächen

Mittlerer Reibradius:

$$r_m = \frac{r_a + r_i}{2}$$

7.3 Bremsen

Formel

Bremsmoment:

$$T_B = \mu \cdot F_N \cdot r$$

Bremszeit:

$$t_B = \frac{J \cdot \omega}{T_B}$$

Bremsarbeit:

$$W_B = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

7.4 Beispielaufgaben: Kupplungen und Bremsen

Musteraufgabe: Lamellenkupplung berechnen

Eine Mehrscheiben-Trockenkupplung mit $z = 6$ Reibflächen soll ein Drehmoment von $T = 250 \text{ Nm}$ übertragen. Die Reibbeläge haben einen Außenradius $r_a = 100 \text{ mm}$ und einen Innenradius $r_i = 60 \text{ mm}$. Der Reibkoeffizient ist $\mu = 0,35$.

Gegeben:

- Drehmoment: $T = 250 \text{ Nm} = 250\,000 \text{ Nmm}$
- Anzahl Reibflächen: $z = 6$
- Außenradius: $r_a = 100 \text{ mm}$
- Innenradius: $r_i = 60 \text{ mm}$
- Reibkoeffizient: $\mu = 0,35$

Gesucht: Erforderliche Anpresskraft F_N

Ausführliche Lösung

Schritt 1: Mittleren Reibradius berechnen

$$r_m = \frac{r_a + r_i}{2} = \frac{100 + 60}{2} = 80 \text{ mm}$$

Schritt 2: Anpresskraft berechnen

Aus $T = \mu \cdot F_N \cdot r_m \cdot z$ nach F_N umstellen:

$$F_N = \frac{T}{\mu \cdot r_m \cdot z} = \frac{250000}{0,35 \cdot 80 \cdot 6} = \frac{250000}{168} = 1488 \text{ N}$$

Ergebnis:

- Mittlerer Reibradius: $r_m = 80 \text{ mm}$
- Erforderliche Anpresskraft: $F_N = 1488 \text{ N} \approx 1,5 \text{ kN}$

Übungsaufgabe 7.1 – Zum Selbstrechnen

Eine Scheibenbremse muss eine rotierende Masse ($J = 2,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$) von $n = 1200 \text{ min}^{-1}$ in $t_B = 3 \text{ s}$ abbremsen. Berechnen Sie das erforderliche Bremsmoment T_B und die Bremsarbeit W_B .

Hinweis: $\omega = 2\pi n/60$

Lösungen: $T_B = 105 \text{ Nm}$, $W_B = 19,7 \text{ kJ}$

8 Stirnradgetriebe (Kap. 6.1)

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Die Verzahnungsgeometrie beschreiben
- Übersetzung, Zähnezahl und Modul berechnen
- Zahnkräfte berechnen

8.1 Grundlagen

Formel

Übersetzung:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{d_2}{d_1}$$

Negatives Vorzeichen bei Außenverzahnung (gegensinnige Drehrichtung)!

8.2 Verzahnungsgeometrie

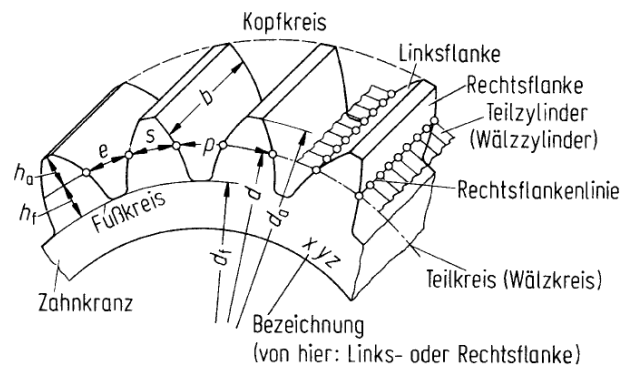
Formel

Modul:

$$m = \frac{d}{z} = \frac{p}{\pi}$$

Zahnabmessungen:

- Teilkreisdurchmesser: $d = m \cdot z$
- Kopfkreisdurchmesser: $d_a = m(z + 2)$
- Fußkreisdurchmesser: $d_f = m(z - 2,5)$
- Achsabstand: $a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}$



8.3 Zahnkräfte

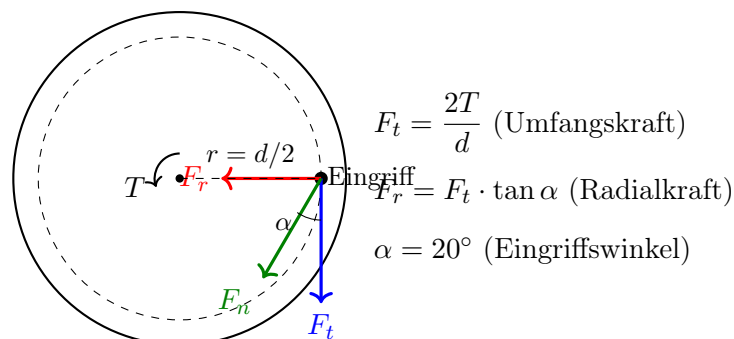


Abbildung 16: Zahnkräfte am Stirnrad: Umfangskraft F_t , Radialkraft F_r , Normalkraft F_n

Formel**Umfangskraft:**

$$F_t = \frac{2T}{d} = \frac{2000 \cdot P[\text{kW}]}{d[\text{mm}] \cdot \omega[1/\text{s}]}$$

Radialkraft:

$$F_r = F_t \cdot \tan \alpha$$

Bei Schrägverzahnung zusätzlich **Axialkraft:**

$$F_a = F_t \cdot \tan \beta$$

8.4 Evolventenverzahnung und Involutfunktion

Die Evolvente ist die Standardflankenform bei Stirnrädern. Sie entsteht durch Abwickeln einer Geraden auf dem Grundkreis.

Formel**Grundkreisdurchmesser:**

$$d_b = d \cdot \cos \alpha = m \cdot z \cdot \cos \alpha$$

mit $\alpha = 20$ (Standard-Eingriffswinkel)**Involutfunktion** (Evolventenfunktion):

$$\text{inv } \alpha = \tan \alpha - \alpha \quad (\alpha \text{ im Bogenmaß!})$$

Für $\alpha = 20$:

$$\text{inv } 20 = \tan 20 - \frac{20 \cdot \pi}{180} = 0,3640 - 0,3491 = 0,0149$$

Merke

Die Involutfunktion wird benötigt für:

- Berechnung der Zahndicke am beliebigen Durchmesser
- Profilverschiebung
- Betriebseingriffswinkel bei V-Null-Verzahnungen

8.5 Profilverschiebung

Bei kleinen Zähnezahlen oder besonderen Anforderungen wird die Verzahnung durch **Profilverschiebung** modifiziert.

Formel**Profilverschiebungsfaktor x :**

$$x = \frac{V}{m}$$

mit V = Profilverschiebung (Werkzeugversatz)**Positive Profilverschiebung ($x > 0$):**

- Werkzeug vom Radmittelpunkt weg verschoben
- Zähne werden dicker am Fuß
- Höhere Tragfähigkeit, weniger Unterschnitt

Negative Profilverschiebung ($x < 0$):

- Werkzeug zum Radmittelpunkt hin verschoben
- Zähne werden dünner
- Gefahr von Unterschnitt!

Formel**Geometrie bei Profilverschiebung:***Kopfkreisdurchmesser:*

$$d_a = d + 2m(1 + x) = m(z + 2 + 2x)$$

Fußkreisdurchmesser:

$$d_f = d - 2m(1,25 - x) = m(z - 2,5 + 2x)$$

Achsabstand bei V-Null-Paarung ($x_1 + x_2 = 0$):

$$a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \quad (\text{unverändert})$$

Achsabstand bei V-Paarung ($x_1 + x_2 \neq 0$):

$$a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$$

mit α_w = Betriebseingriffswinkel**WICHTIG!****Grenzzähnezahl** (Unterschnittgrenze bei $x = 0$):

$$z_{gr} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} = \frac{2}{\sin^2 20} \approx 17$$

Bei $z < 17$ ist Profilverschiebung erforderlich, um Unterschnitt zu vermeiden!**Mindest-Profilverschiebung:**

$$x_{min} = \frac{z_{gr} - z}{z_{gr}} = \frac{17 - z}{17}$$

Zähnezahl z	x_{min}	Empfehlung
17 und größer	0	Keine Verschiebung nötig
14	0,18	$x \approx 0,2$
12	0,29	$x \approx 0,3$
10	0,41	$x \approx 0,5$

Tabelle 11: Mindest-Profilverschiebung zur Unterschnittvermeidung

8.6 Festigkeitsnachweis nach DIN 3990 / ISO 6336

Der Festigkeitsnachweis für Zahnräder umfasst zwei Hauptversagensarten:

WICHTIG!

Versagensarten bei Zahnrädern:

1. **Zahnfußbruch:** Ermüdungsbruch durch Biegewechselspannung am Zahnfuß
2. **Grübchenbildung (Pitting):** Ermüdung der Flankenoberfläche durch Hertz'sche Pressung

8.6.1 Zahnfußtragfähigkeit

Formel

Zahnfußspannung:

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b \cdot m} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\epsilon \cdot Y_\beta \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha}$$

Sicherheit gegen Zahnfußbruch:

$$S_F = \frac{\sigma_{FG}}{\sigma_F} = \frac{\sigma_{Flim} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT} \cdot Y_{\delta relT} \cdot Y_{RelT}}{\sigma_F} \geq S_{F,min}$$

Mindest-Sicherheit: $S_{F,min} = 1,4 \dots 2,0$

Faktor	Bedeutung
Y_F	Formfaktor (Zahnform, abhängig von z und x)
Y_S	Spannungskorrekturfaktor (Kerbwirkung)
Y_ϵ	Überdeckungsfaktor
Y_β	Schrägenfaktor
K_A	Anwendungsfaktor (äußere Stöße)
K_V	Dynamikfaktor (innere Stöße)
$K_{F\beta}$	Breitenlastverteilung (Fuß)
$K_{F\alpha}$	Stirnlastverteilung (Fuß)

Tabelle 12: Faktoren für die Zahnfußberechnung

8.6.2 Flankentragfähigkeit (Pitting-Sicherheit)

Formel

Hertz'sche Pressung an der Zahnflanke:

$$\sigma_H = Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{b \cdot d_1} \cdot \frac{u+1}{u} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}}$$

Sicherheit gegen Grübchenbildung:

$$S_H = \frac{\sigma_{HG}}{\sigma_H} = \frac{\sigma_{Hlim} \cdot Z_{NT} \cdot Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R \cdot Z_W}{\sigma_H} \geq S_{H,min}$$

Mindest-Sicherheit: $S_{H,min} = 1,0 \dots 1,3$

Faktor	Bedeutung
Z_H	Zonenfaktor (Eingriffsverhältnisse)
Z_E	Elastizitätsfaktor (Werkstoffpaarung)
Z_ϵ	Überdeckungsfaktor
Z_β	Schrägenfaktor
Z_{NT}	Lebensdauerfaktor
Z_L, Z_V, Z_R	Schmierfilm-Einflussfaktoren
Z_W	Werkstoffpaarungsfaktor (Einlauf)

Tabelle 13: Faktoren für die Flankenberechnung

Merke

Vereinfachte Übersichtsrechnung (für Vorauslegung):

Zahnfußspannung:

$$\sigma_F \approx \frac{F_t}{b \cdot m} \cdot 2,5 \leq \sigma_{F,zul}$$

Flankenpressung:

$$\sigma_H \approx 0,6 \cdot Z_E \cdot \sqrt{\frac{F_t}{b \cdot d_1} \cdot \frac{u+1}{u}} \leq \sigma_{H,zul}$$

mit $Z_E \approx 190 \sqrt{N/mm^2}$ für Stahl/Stahl

Werkstoff	$\sigma_{F,lim}$ [N/mm ²]	$\sigma_{H,lim}$ [N/mm ²]
Vergütungsstahl (z.B. 42CrMo4)	310-430	1000-1200
Einsatzstahl gehärtet (z.B. 16MnCr5)	430-500	1400-1650
Nitrierstahl (z.B. 31CrMoV9)	360-450	1050-1250
Gusseisen GJS	200-350	500-800

Tabelle 14: Richtwerte für Dauerfestigkeitswerte (Zahnfuß und Flanke)

8.7 Beispielaufgaben: Zahnräder

Musteraufgabe: Stirnradpaar auslegen

Ein Stirnradgetriebe mit Geradverzahnung soll eine Drehzahl von $n_1 = 1500 \text{ min}^{-1}$ auf $n_2 = 500 \text{ min}^{-1}$ untersetzen. Das Antriebsritzel hat $z_1 = 20$ Zähne, der Modul beträgt $m = 3 \text{ mm}$. Das Ritzel überträgt eine Leistung von $P = 10 \text{ kW}$. Der Eingriffswinkel ist $\alpha = 20^\circ$.

Gegeben:

- Antriebsdrehzahl: $n_1 = 1500 \text{ min}^{-1}$
- Abtriebsdrehzahl: $n_2 = 500 \text{ min}^{-1}$
- Zähnezahl Ritzel: $z_1 = 20$
- Modul: $m = 3 \text{ mm}$
- Leistung: $P = 10 \text{ kW}$
- Eingriffswinkel: $\alpha = 20^\circ$

Gesucht:

- a) Übersetzung i
- b) Zähnezahl z_2 des Großrades
- c) Teilkreisdurchmesser d_1 und d_2
- d) Achsabstand a
- e) Umfangskraft F_t und Radialkraft F_r

Ausführliche Lösung**Schritt 1: Übersetzung**

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1500}{500} = 3$$

Schritt 2: Zähnezahl des Großrades

$$|i| = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow z_2 = |i| \cdot z_1 = 3 \cdot 20 = 60$$

Schritt 3: Teilkreisdurchmesser

$$d_1 = m \cdot z_1 = 3 \cdot 20 = 60 \text{ mm}$$

$$d_2 = m \cdot z_2 = 3 \cdot 60 = 180 \text{ mm}$$

Schritt 4: Achsabstand

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{60 + 180}{2} = 120 \text{ mm}$$

Oder direkt:

$$a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} = \frac{3 \cdot (20 + 60)}{2} = 120 \text{ mm}$$

Schritt 5: Drehmoment am Ritzel

$$T_1 = \frac{9550 \cdot P}{n_1} = \frac{9550 \cdot 10}{1500} = 63,7 \text{ Nm}$$

Schritt 6: Umfangskraft

$$F_t = \frac{2 \cdot T_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 63700}{60} = 2123 \text{ N}$$

Schritt 7: Radialkraft

$$F_r = F_t \cdot \tan \alpha = 2123 \cdot \tan 20^\circ = 2123 \cdot 0,364 = 773 \text{ N}$$

Ergebnis:

- Übersetzung: $i = 3$
- Zähnezahl Großrad: $z_2 = 60$
- Teilkreisdurchmesser: $d_1 = 60 \text{ mm}$, $d_2 = 180 \text{ mm}$
- Achsabstand: $a = 120 \text{ mm}$
- Umfangskraft: $F_t = 2123 \text{ N}$
- Radialkraft: $F_r = 773 \text{ N}$

Übungsaufgabe 8.1 – Zum Selbstrechnen

Ein Stirnradpaar hat $z_1 = 25$, $z_2 = 75$ und $m = 4 \text{ mm}$. Berechnen Sie d_1 , d_2 , d_{a1} , d_{a2} und den Achsabstand a .

Lösungen: $d_1 = 100 \text{ mm}$, $d_2 = 300 \text{ mm}$, $d_{a1} = 108 \text{ mm}$, $d_{a2} = 308 \text{ mm}$, $a = 200 \text{ mm}$

9 Riementriebe (Kap. 6.8)

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Die Kräfteverhältnisse im Riementrieb berechnen
- Die Eytelwein-Formel anwenden

9.1 Kräfte im Riementrieb

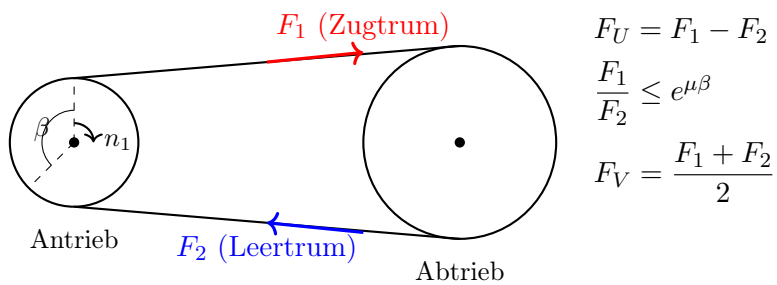


Abbildung 17: Riementrieb mit Trunkkräften F_1 (Zugtrum) und F_2 (Leertrum)

Formel

Trunkkräfte:

- F_1 = Kraft im Zugtrum (Lasttrum)
- F_2 = Kraft im Leertrum

Umfangskraft:

$$F_U = F_1 - F_2 = \frac{2T}{d}$$

9.2 Euler-Eytelwein-Formel

Formel

$$\frac{F_1}{F_2} \leq e^{\mu\beta}$$

mit:

- μ = Reibkoeffizient
- β = Umschlingungswinkel [rad]

Merke

Bei **Keilriemen** wird der Reibkoeffizient verstärkt:

$$\mu' = \frac{\mu}{\sin(\alpha/2)}$$

9.3 Vorspannung

Formel**Vorspannkraft:**

$$F_V = \frac{F_1 + F_2}{2}$$

9.4 Beispielaufgaben: Riementriebe

Musteraufgabe: Flachriementrieb berechnen

Ein Flachriementrieb überträgt eine Umfangskraft von $F_U = 500 \text{ N}$. Der Reibkoeffizient ist $\mu = 0,4$, der Umschlingungswinkel an der kleinen Scheibe $\beta = 150^\circ = 2,618 \text{ rad}$.

Gegeben:

- Umfangskraft: $F_U = 500 \text{ N}$
- Reibkoeffizient: $\mu = 0,4$
- Umschlingungswinkel: $\beta = 150^\circ = 2,618 \text{ rad}$

Gesucht:

- a) Trumkräfte F_1 und F_2
- b) Erforderliche Vorspannkraft F_V

Ausführliche Lösung**Schritt 1: Kraftverhältnis nach Eytelwein**

Im Grenzfall (Schlupfgrenze):

$$\frac{F_1}{F_2} = e^{\mu \cdot \beta} = e^{0,4 \cdot 2,618} = e^{1,047} = 2,85$$

Schritt 2: Gleichungssystem aufstellen

Wir haben zwei Gleichungen:

$$F_1 - F_2 = F_U = 500$$

$$F_1 = 2,85 \cdot F_2$$

Schritt 3: F_2 berechnen

Einsetzen:

$$2,85 \cdot F_2 - F_2 = 500$$

$$1,85 \cdot F_2 = 500$$

$$F_2 = \frac{500}{1,85} = 270 \text{ N}$$

Schritt 4: F_1 berechnen

$$F_1 = F_2 + F_U = 270 + 500 = 770 \text{ N}$$

Kontrolle: $F_1/F_2 = 770/270 = 2,85 \checkmark$

Schritt 5: Vorspannkraft

$$F_V = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{770 + 270}{2} = 520 \text{ N}$$

Ergebnis:

- Zugtrunkraft: $F_1 = 770 \text{ N}$
- Leertrunkraft: $F_2 = 270 \text{ N}$
- Vorspannkraft: $F_V = 520 \text{ N}$

Übungsaufgabe 9.1 – Zum Selbstrechnen

Ein Keilriementrieb ($\mu = 0,3$, Keilwinkel $\alpha = 40^\circ$) hat einen Umschlingungswinkel von $\beta = 160^\circ$. Welche Umfangskraft kann bei $F_V = 400 \text{ N}$ übertragen werden?

Hinweis: Berechne zuerst $\mu' = \mu / \sin(\alpha/2)$, dann $e^{\mu' \cdot \beta}$

Lösung: $F_U = 624 \text{ N}$

10 Kettentriebe (Kap. 6.9)

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Kettenarten unterscheiden und auswählen
- Den Polygoneffekt erklären und dessen Auswirkungen berechnen
- Kettentriebe auslegen und dimensionieren

10.1 Grundlagen und Kettenarten

Kettentriebe übertragen Drehmomente formschlüssig zwischen parallelen Wellen. Im Gegensatz zu Riementrieben ist kein Schlupf möglich.

Kettenart	Eigenschaften	Anwendung
Rollenkette	Hohe Tragfähigkeit, verschleißarm	Antriebstechnik
Hülsenkette	Wie Rollenkette, aber ohne Rollen	Einfache Anwendungen
Zahnkette	Sehr leise, hohe Geschwindigkeit	Steuertriebe (Motoren)
Buchsenkette	Einfach, robust	Fördertechnik

Tabelle 15: Kettenarten und ihre Anwendungen

Formel

Übersetzung:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

Positives Vorzeichen, da gleichsinnige Drehrichtung!

Teilung p : Abstand zwischen zwei Gelenkmitten

10.2 Geometrie des Kettentriebs

Formel

Teilkreisdurchmesser des Kettenrades:

$$d = \frac{p}{\sin\left(\frac{180}{z}\right)}$$

Für große Zähnezahlen ($z > 17$) gilt näherungsweise:

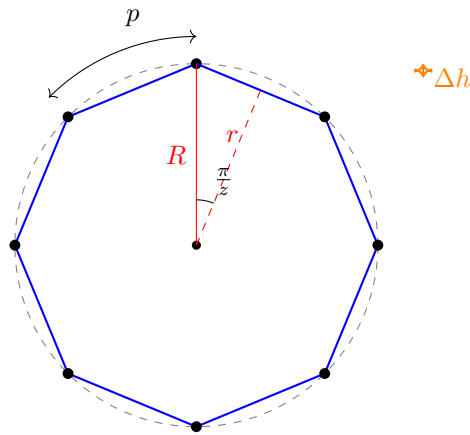
$$d \approx \frac{p \cdot z}{\pi}$$

Kettengeschwindigkeit:

$$v = \frac{p \cdot z \cdot n}{60} \quad (\text{bei } n \text{ in } \text{min}^{-1}, p \text{ in m})$$

10.3 Der Polygoneffekt

Der **Polygoneffekt** ist die wichtigste Besonderheit bei Kettentrieben: Die Kette legt sich nicht als Kreis, sondern als Vieleck (Polygon) um das Kettenrad.



$z = 8$ Zähne

Abbildung 18: Polygoneffekt: Die Kette bildet ein Vieleck statt eines Kreises

Formel

Radiusschwankung durch Polygoneffekt:

Maximaler Radius (Gelenk auf Zahnmitte):

$$R = \frac{p}{2 \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$$

Minimaler Radius (Gelenk zwischen Zähnen):

$$r = R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{z}\right) = \frac{p}{2 \tan\left(\frac{\pi}{z}\right)}$$

Relative Radiusschwankung:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R - r}{R} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{z}\right)$$

Formel

Geschwindigkeitsschwankung:

Da $v = \omega \cdot r$ und der wirksame Radius schwankt:

$$\frac{\Delta v}{v_{\text{mittel}}} \approx 1 - \cos\left(\frac{\pi}{z}\right) \approx \frac{\pi^2}{2z^2} \quad (\text{für große } z)$$

Prozentuale Schwankung:

- $z = 12$: $\approx 3,4\%$
- $z = 17$: $\approx 1,7\%$
- $z = 25$: $\approx 0,8\%$
- $z = 38$: $\approx 0,3\%$

WICHTIG!**Auswirkungen des Polygoneffekts:**

- Periodische Geschwindigkeitsschwankungen → Geräusche, Vibrationen
- Querschwingungen des Leertrums
- Zusätzliche dynamische Kräfte
- Verschleiß an Kettengelenken und Zähnen

Abhilfe:

- Große Zähnezahlen wählen (mindestens $z_1 \geq 17$)
- Ungerade Zähnezahlen vermeiden Resonanzen
- Kettenspanner einsetzen

10.4 Kräfte im Kettentrieb**Formel****Nutzzugkraft (Trumkraft):**

$$F = \frac{2T}{d} = \frac{P}{v}$$

Fliehkraft (bei schnelllaufenden Ketten):

$$F_f = m' \cdot v^2$$

mit m' = Kettenmasse pro Längeneinheit [kg/m]

Stützkraft (durch Durchhang im Leertrum):

$$F_s \approx 10 \cdot m' \cdot a \cdot g \quad (\text{bei horizontaler Anordnung})$$

mit a = Achsabstand

Gesamte Trumkraft:

$$F_{ges} = F + F_f + F_s$$

10.5 Auslegung von Kettentrieben**Formel****Erforderliche Bruchkraft:**

$$F_B \geq S \cdot F_{ges} \cdot K$$

mit:

- S = Sicherheitsfaktor ($S \approx 7 - 10$ bei normalen Bedingungen)
- K = Betriebsfaktor (Stöße, Anlauf etc.)

Kettenauswahl:

Aus Katalog wird Kette gewählt mit $F_{B,Katalog} \geq F_B$

Betriebsbedingungen	Betriebsfaktor K
Gleichmäßiger Lauf, geringe Stöße	1,0
Mäßige Stöße (Werkzeugmaschinen)	1,2-1,4
Starke Stöße (Pressen, Mühlen)	1,5-1,8
Sehr starke Stöße (Brecher)	1,8-2,5

Tabelle 16: Betriebsfaktoren für Kettentriebe

Merke**Konstruktionsrichtlinien:**

1. Mindestzähnezahl kleines Rad: $z_1 \geq 17$ (besser $z_1 \geq 21$)
2. Maximale Zähnezahl großes Rad: $z_2 \leq 120$
3. Maximale Übersetzung: $i \leq 7$ (besser $i \leq 4$)
4. Achsabstand: $a = (30 \dots 50) \cdot p$
5. Kettenspanner im Leertrum vorsehen
6. Antriebsrad möglichst oben anordnen

10.6 Beispielaufgaben: Kettentriebe**Musteraufgabe: Kettentrieb mit Polygoneffekt**

Ein Kettentrieb mit Rollenkette hat folgende Daten:

- Teilung: $p = 12,7 \text{ mm}$ ($1/2 \text{ Zoll}$)
- Zähnezahl Antrieb: $z_1 = 19$
- Zähnezahl Abtrieb: $z_2 = 57$
- Drehzahl Antrieb: $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$
- Zu übertragende Leistung: $P = 5 \text{ kW}$

Gesucht:

- a) Teilkreisdurchmesser d_1
- b) Kettengeschwindigkeit v
- c) Relative Geschwindigkeitsschwankung durch Polygoneffekt
- d) Nutzzugkraft F

Ausführliche Lösung**Schritt 1: Teilkreisdurchmesser**

$$d_1 = \frac{p}{\sin\left(\frac{180}{z_1}\right)} = \frac{12,7}{\sin\left(\frac{180}{19}\right)} = \frac{12,7}{\sin(9,47)} = \frac{12,7}{0,1645} = 77,2 \text{ mm}$$

Schritt 2: Kettengeschwindigkeit

$$v = \pi \cdot d_1 \cdot n_1 = \pi \cdot 0,0772 \cdot \frac{1000}{60} = 4,04 \text{ m/s}$$

Oder direkt:

$$v = \frac{p \cdot z_1 \cdot n_1}{60 \cdot 1000} = \frac{12,7 \cdot 19 \cdot 1000}{60000} = 4,02 \text{ m/s}$$

Schritt 3: Polygoneffekt

$$\frac{\Delta v}{v} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) = 1 - \cos\left(\frac{180}{19}\right) = 1 - \cos(9,47) = 1 - 0,9863 = 0,0137$$

$\Rightarrow$ Geschwindigkeitsschwankung: 1,4 %

Schritt 4: Nutzzugkraft

$$F = \frac{P}{v} = \frac{5000}{4,02} = 1244 \text{ N}$$

Ergebnis:

- $d_1 = 77,2 \text{ mm}$
- $v = 4,0 \text{ m/s}$
- Polygoneffekt: 1,4 % Schwankung – akzeptabel für $z_1 = 19$
- $F = 1244 \text{ N}$

Übungsaufgabe 10.1 – Zum Selbstrechnen

Ein Kettenrad mit $z = 25$ Zähnen und Teilung $p = 15,875 \text{ mm}$ (5/8 Zoll) läuft mit $n = 800 \text{ min}^{-1}$.

Berechnen Sie:

- a) Den Teilkreisdurchmesser d
- b) Die Kettengeschwindigkeit v
- c) Die relative Geschwindigkeitsschwankung durch Polygoneffekt

Lösungen: $d = 126,8 \text{ mm}$, $v = 5,3 \text{ m/s}$, $\frac{\Delta v}{v} = 0,79 \%$

Übungsaufgabe 10.2 – Zum Selbstrechnen

Wie groß muss die Mindestzähnezahl z_1 sein, damit die Geschwindigkeitsschwankung durch den Polygoneffekt unter 1 % bleibt?

Hinweis: $1 - \cos\left(\frac{\pi}{z}\right) < 0,01$ auflösen

Lösung: $z \geq 23$

11 Formelsammlung

11.1 Schweißverbindungen

$$\sigma_{\perp} = \frac{F}{a \cdot l} \leq \sigma_{w,zul} \quad \sigma_v = \sqrt{\sigma_{\perp}^2 + \tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2}$$

11.2 Schraubenverbindungen

$$\Phi = \frac{c_S}{c_S + c_P} \quad F_{SA} = \Phi \cdot F_A \quad F_{KR} = F_V - (1 - \Phi) \cdot F_A$$

11.3 Federn

$$F = c \cdot s \quad c_{parallel} = \sum c_i \quad \frac{1}{c_{Reihe}} = \sum \frac{1}{c_i} \quad c_{Schraubenfeder} = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n}$$

11.4 Achsen und Wellen

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_b}{\pi \cdot \sigma_{b,zul}}} \quad T = \frac{9550 \cdot P[\text{kW}]}{n[\text{min}^{-1}]} \quad M_v = \sqrt{M_b^2 + 0,75 \cdot T^2}$$

11.5 Wälzlager

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^p \quad L_{10h} = \frac{L_{10} \cdot 10^6}{60 \cdot n} \quad P = X \cdot F_r + Y \cdot F_a$$

11.6 Kupplungen und Bremsen

$$T = \mu \cdot F_N \cdot r_m \cdot z \quad t_B = \frac{J \cdot \omega}{T_B} \quad W_B = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

11.7 Zahnräder

$$i = -\frac{z_2}{z_1} \quad m = \frac{d}{z} \quad d_a = m(z + 2) \quad F_t = \frac{2T}{d} \quad F_r = F_t \cdot \tan \alpha$$

11.8 Riementriebe

$$\frac{F_1}{F_2} \leq e^{\mu \cdot \beta} \quad F_U = F_1 - F_2 \quad F_V = \frac{F_1 + F_2}{2}$$

11.9 Kettentriebe

$$d = \frac{p}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)} \quad v = \frac{p \cdot z \cdot n}{60} \quad \frac{\Delta v}{v} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{z}\right)$$

$$F = \frac{P}{v} = \frac{2T}{d} \quad F_f = m' \cdot v^2 \quad F_B \geq S \cdot K \cdot F_{ges}$$

12 Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

1. **Freikörperbild immer zuerst!** – Auch bei Maschinenelementen ist das FKB der Schlüssel.
2. **Einheiten kontrollieren** – Immer SI-Einheiten verwenden!
3. **Formeln verstehen, nicht nur auswendig lernen** – Woher kommt die Formel?
4. **Katalogwerte nutzen** – Viele Größen werden aus Tabellen entnommen.
5. **Konstruktive Aspekte beachten** – Es geht nicht nur ums Rechnen!
6. **Beispielaufgaben durchrechnen** – Übung macht den Meister!

Der goldene Tipp:

„Bei Maschinenelementen geht es nicht nur um das Rechnen, sondern auch um das Verstehen der Zusammenhänge und das konstruktive Denken. Frage dich immer: Warum ist das so? Was passiert, wenn...?“

Typischer Rechengang bei Prüfungsaufgaben:

1. Skizze anfertigen / Freikörperbild
2. Gegebene Größen mit Einheiten notieren
3. Gesuchte Größen identifizieren
4. Passende Formel auswählen
5. Einsetzen und berechnen
6. **Einheitenkontrolle!**
7. Ergebnis auf Plausibilität prüfen
8. Technische Interpretation