

Webinar: Elastostatik

Thema: Mohrscher Spannungskreis

Aufgabe: Mohrscher Spannungskreis

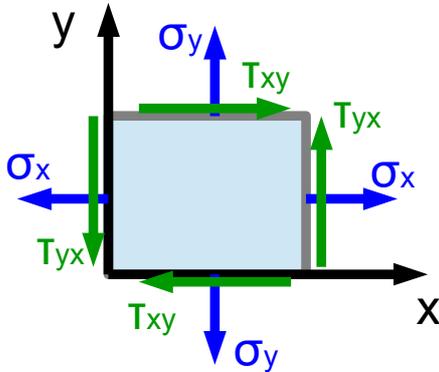
Gegeben sei der folgende ebene Spannungszustand:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 20 & -50 \\ -50 & -70 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Bestimme zeichnerisch/rechnerisch

- (1) die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 ,
- (2) die Hauptrichtungen,
- (3) die Hauptschubspannung und die dazugehörige Hauptrichtung,
- (4) die Spannungen für ein um 35° gedrehtes Koordinatensystem.

Formeln zur Überprüfung:



Ebener Spannungszustand für **positive** Spannungen

Bestimmung der Spannungen bei Drehung des Koordinatensystems um einen Winkel α :

$$\sigma_x^* = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$\sigma_y^* = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{-\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) - \tau_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$\tau_{xy}^* = \tau_{yx}^* = \frac{-\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{xy} \cos(2\alpha)$$

α wird positiv für eine Linksdrehung und negativ für Rechtsdrehung des Ausgangskordinatensystems

Berechnung der Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Bei Auftreten der Hauptnormalspannungen werden die Schubspannungen zu Null.

Berechnung der Hauptrichtungen der Hauptnormalspannungen:

$$\tan(2\alpha^*) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Berechnung der Hauptschubspannung:

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Berechnung der Hauptrichtung der Hauptschubspannung:

$$\alpha^{**} = \alpha^* \pm 45^\circ$$

Berechnung der mittleren Normalspannung:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Die Normalspannungen nehmen beim Auftreten der Hauptschubspannungen ihren mittleren Wert an..

Lösung der Aufgabe

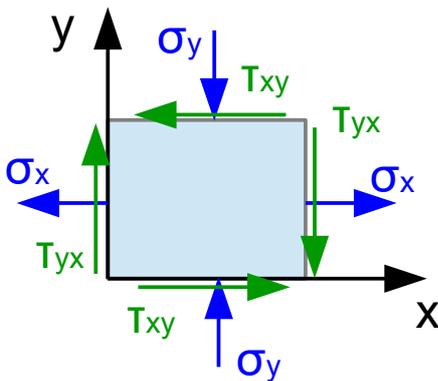
Zeichnung des Mohrschen Spannungskreises

Es werden zunächst die σ - und τ -Achsen gezeichnet. Die σ -Achse ist die Abzisse und die τ -Achse die Ordinate.

Danach werden die Punkte $P_1(\sigma_x|\tau_{xy})$ und $P_2(\sigma_y|-\tau_{xy})$ eingezeichnet. Wir haben hier den folgenden ebenen Spannungszustand gegeben:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -50 \\ -50 & -70 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Unser Ausgangskoordinatensystem mit dem gegebenen Spannungszustand ergibt sich also zu:

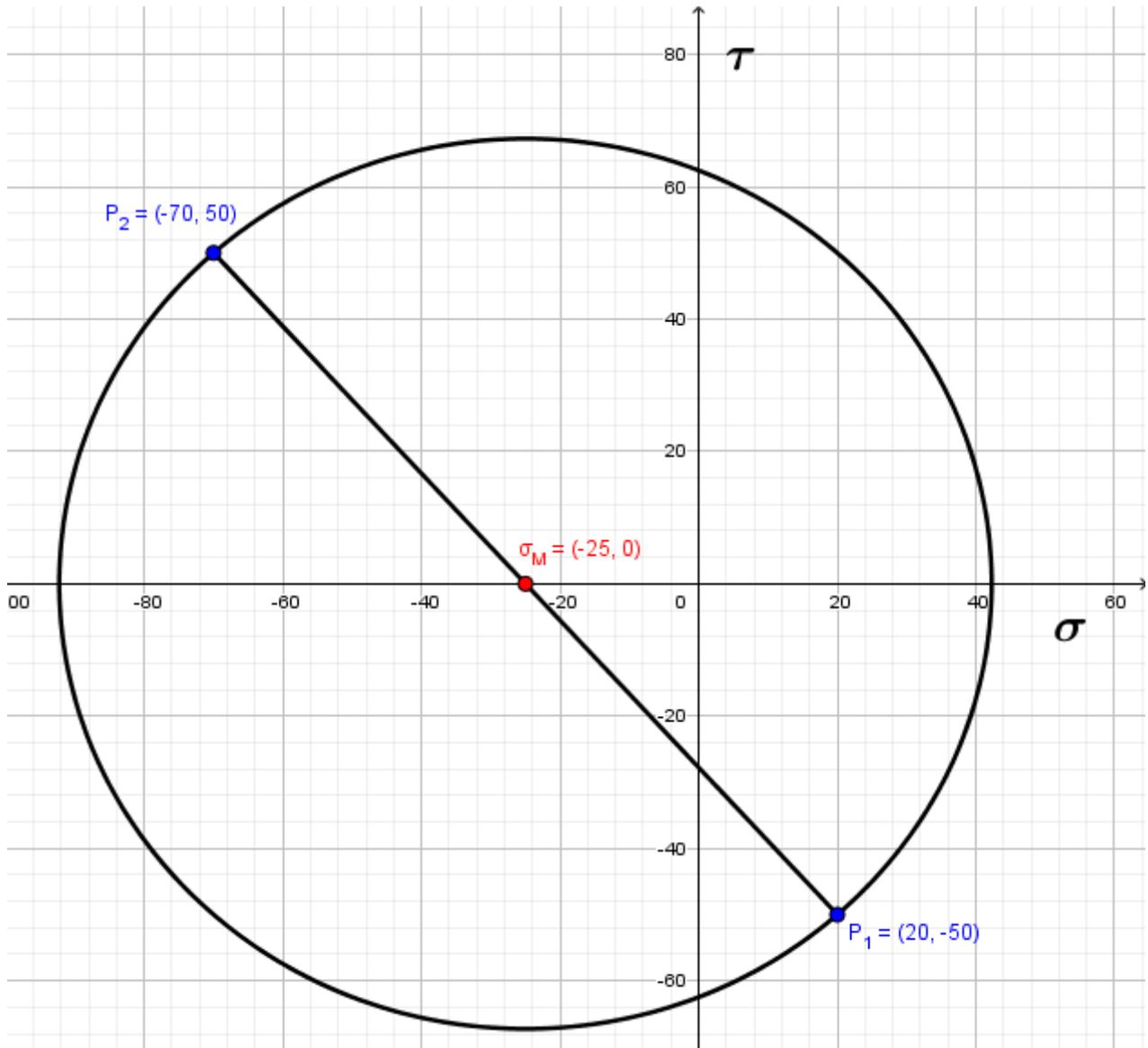


Die negativen Spannungen werden also genau entgegengesetzt eingezeichnet. Demnach handelt es sich bei der Normalspannung in y-Richtung um eine Druckspannung.

2. Wir zeichnen nun die Punkte in das Koordinatensystem ein: $P_1(20|-50)$ und $P_2(-70|50)$

3. Wir verbinden die beiden Punkte miteinander. Dort wo die Verbindungslinie die σ -Achse schneidet, liegt der Kreismittelpunkt. Dieser Kreismittelpunkt entspricht der mittleren Normalspannung:

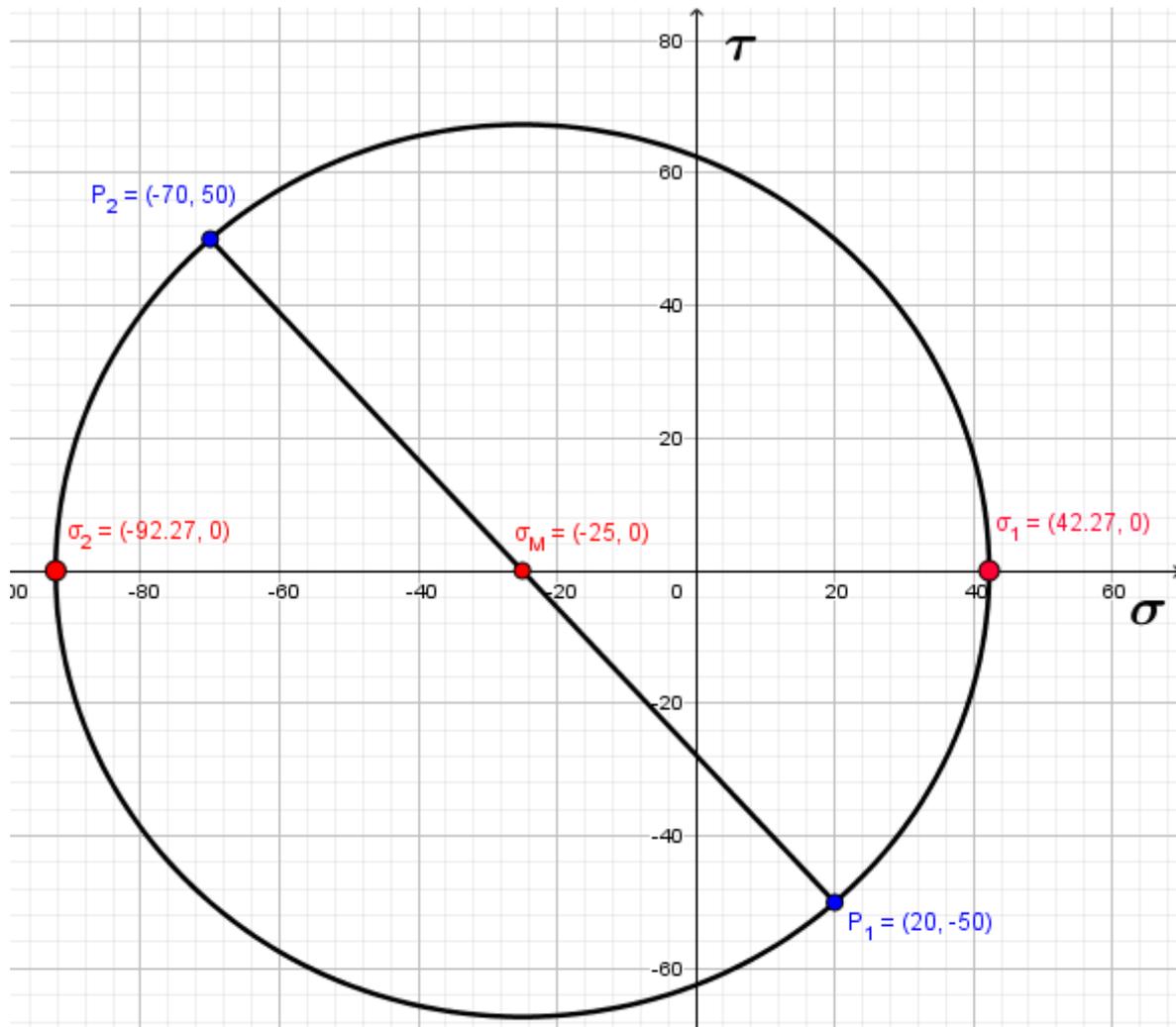
$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{20 - 70}{2} = -25$$



Bestimmung der Hauptnormalspannungen

Die Hauptnormalspannungen σ_1 und σ_2 befinden sich auf dem **äußersten Rand** des Kreises auf der **σ -Achse**. Die Schubspannungen nehmen also den Wert Null an, wenn die Normalspannungen ihre Extremwerte annehmen.

Es gilt immer: $\sigma_1 > \sigma_2$, d.h. dass σ_1 immer rechts von σ_2 liegt.



Ablesen der Werte:

$$\sigma_1 = 42,27 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -92,27 \text{ MPa}$$

Rechnerische Probe:

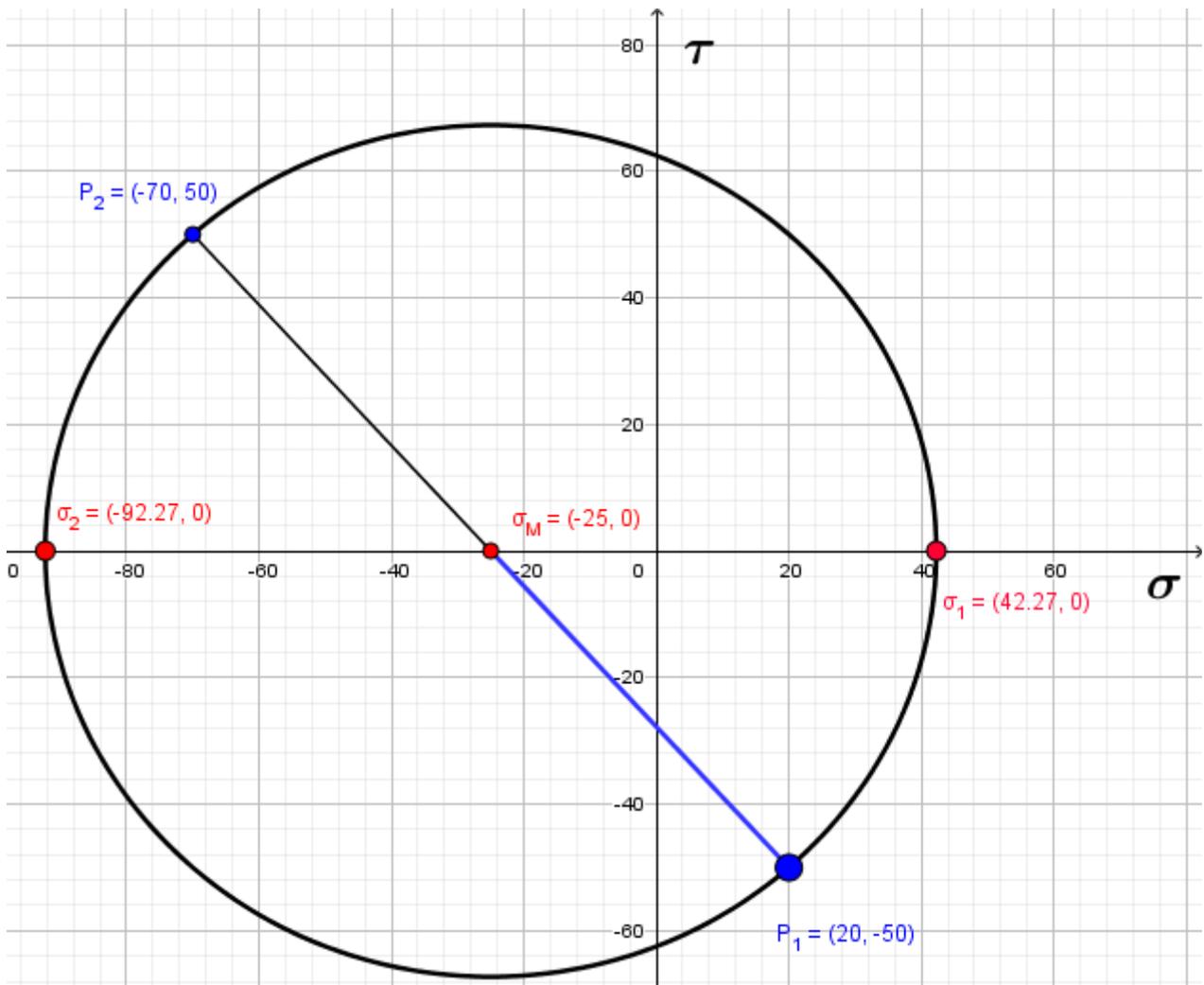
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{20 - 70}{2} + \sqrt{\left(\frac{20 + 70}{2}\right)^2 + (-50)^2} = 42,27 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{20 - 70}{2} - \sqrt{\left(\frac{20 + 70}{2}\right)^2 + (-50)^2} = -92,27 \text{ MPa}$$

Zunächst ist es sinnvoll die Verbindungslinie in zwei Teilverbindungslinie zu „zerlegen“. Dadurch werden die folgenden Berechnungen **übersichtlicher**. Wir wählen die Teilverbindungslinie von P_1 zu σ_M mit **blau**.

Der Punkt P_1 gehört zu dem Schnitt parallel zur y -Achse, in diesem Schnitt wirken die Spannungen σ_x und τ_{xy} . Der Punkt P_2 gehört zu dem Schnitt parallel zur x -Achse, in diesem Schnitt wirken die Spannungen σ_y und τ_{yx} .

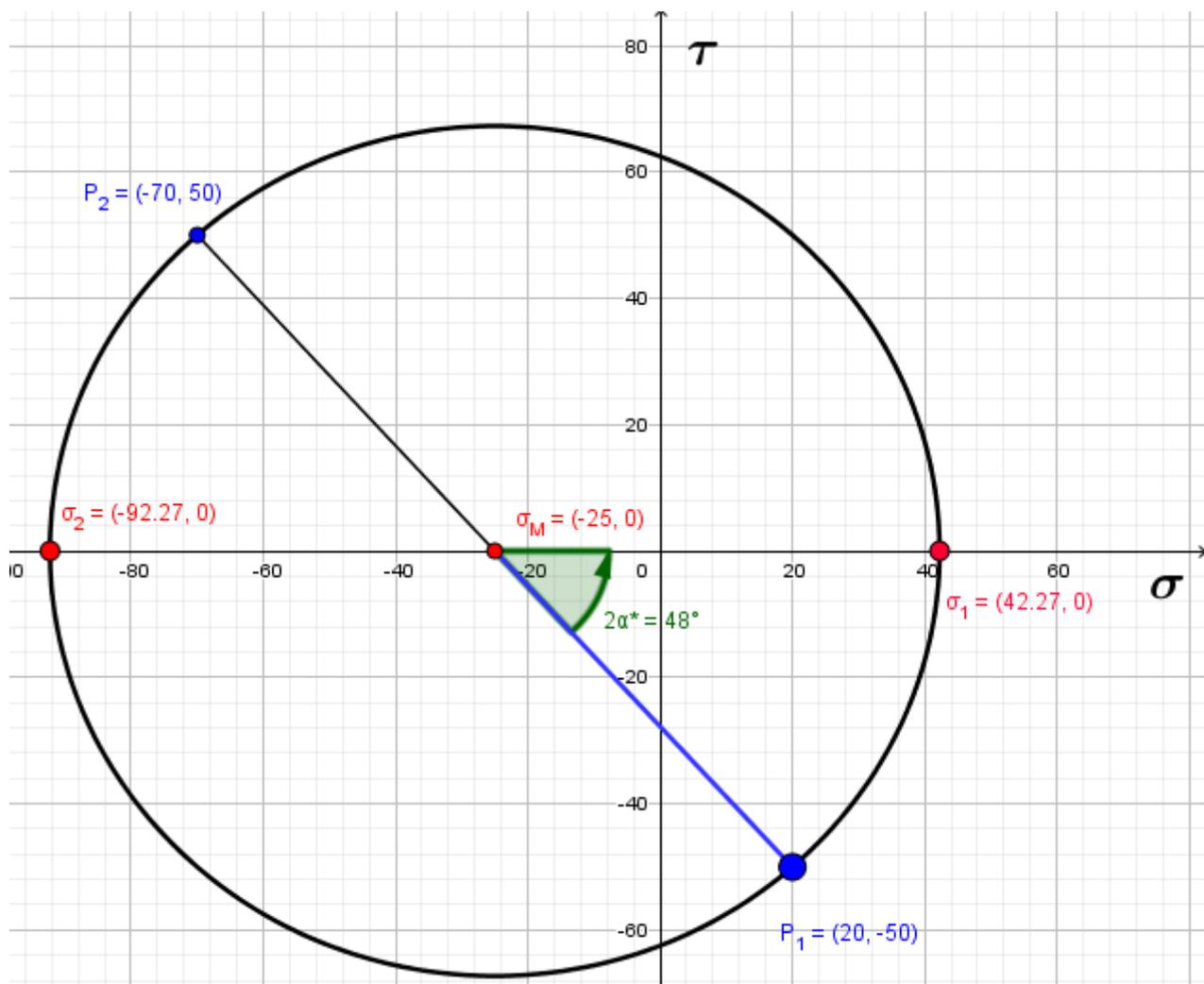


Bestimmung der Hauptrichtungen

Es sollen die Winkel bestimmt werden, für welche die Normalspannungen ihre Extremwerte annehmen (= Hauptrichtungen).

Im Mohrschen Spannungskreis wird immer der **doppelte Winkel** in **entgegengesetzter** Richtung angetragen.

Der erste Winkel wird bestimmt, indem der Winkel ausgehend von der **1. Teilverbindungsline** (blau) zur **positiven σ -Achse** abgetragen wird:



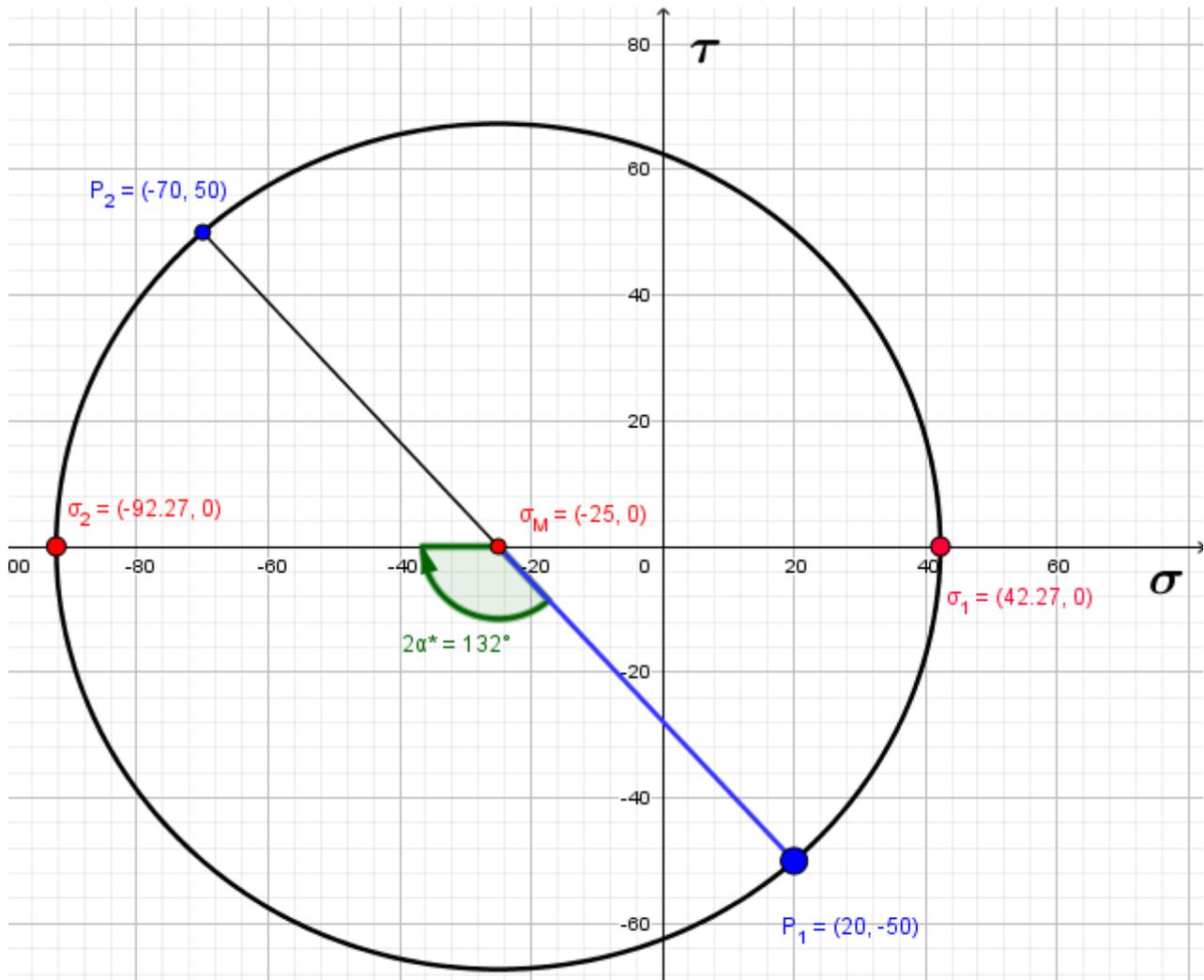
Wir haben in der obigen Grafik ausgehend von der **1. Verbindungsline** (blau) zur **σ -Achse** den Winkel von $2\alpha^* = 48^\circ$ abgelesen. Da im Mohrschen Spannungskreis der doppelte Winkel immer entgegengesetzt zur Drehung des Koordinatensystems abgetragen wird, erfolgt die Drehung des Ausgangskordinatensystems in einer Rechtsdrehung. Der Winkel ist demnach bei Anwendung der Spannungsgleichungen negativ zu berücksichtigen.

Die erste Hauptnormalspannung ergibt sich demnach unter dem Winkel $\alpha^* = -24^\circ$.

Wir haben also bereits einen Winkel gegeben. Drehen wir das Ausgangskoordinatensystem nun also in einer Rechtsdrehung um 24° (im Uhrzeigersinn), so erhalten wir **Eine** der Hauptnormalspannungen.

Welche der beiden Hauptnormalspannungen unter diesem Winkel auftritt werden wir gleich betrachten.

Zunächst berechnen wir den 2. Winkel. Diesmal müssen wir die Abtragung von der 1. **Teilverbindungsline** (blau) zur negativen σ -Achse vornehmen:



Im Mohrschen Spannungskreis erfolgt die Abtragung IM Uhrzeigersinn, d.h. das Ausgangskoordinatensystem wird gegen den Uhrzeigersinn (positive Drehrichtung) um $\alpha^* = +66^\circ$ gedreht. Für die Spannungsgleichungen muss der Winkel positiv eingesetzt werden.

Es wird immer der Winkel bevorzugt, der unter 180° liegt.

Rechnerische Probe:

$$\tan(2\alpha^*) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$2\alpha^* = \tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot (-50)}{20 + 70}\right) = -48^\circ$$

$$\alpha^* = -24^\circ$$

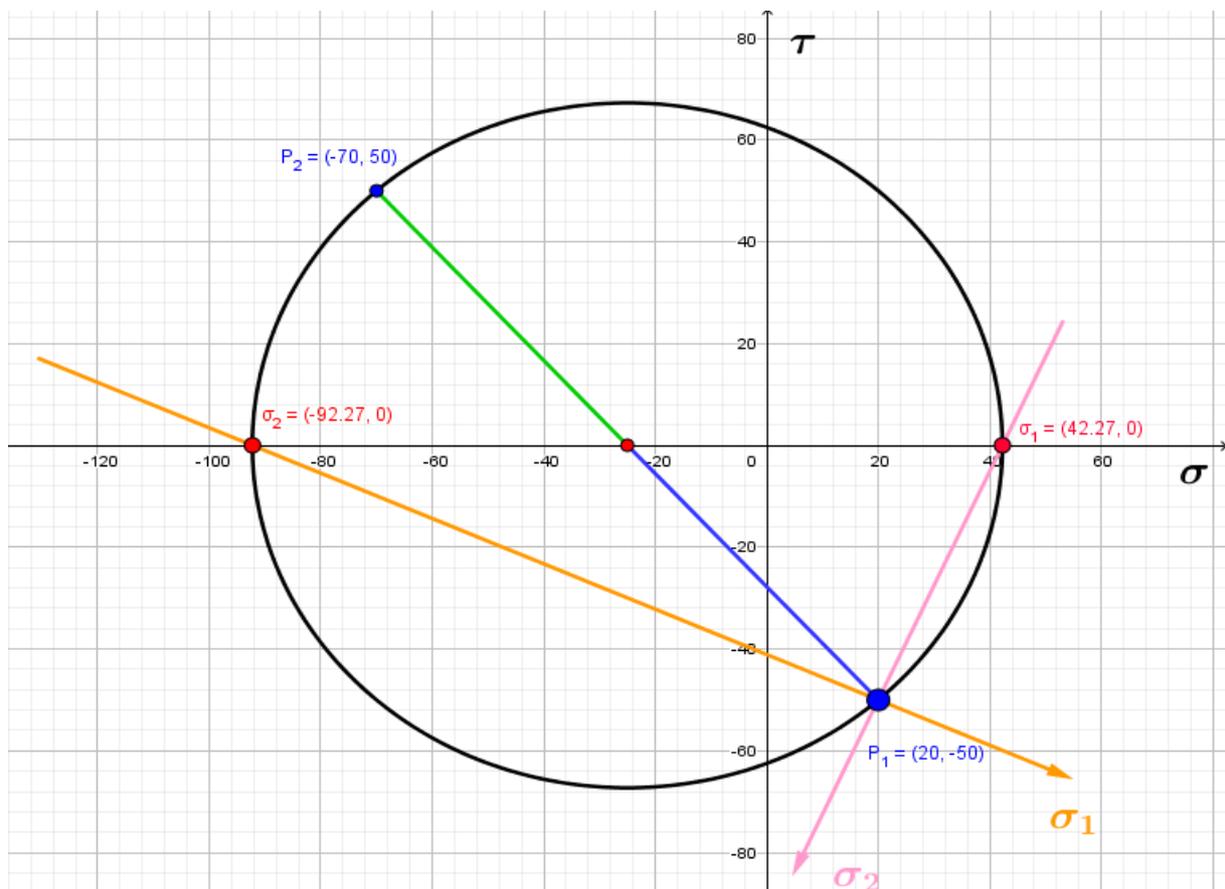
Der zweite Winkel wird rechnerisch bestimmt, indem der erste Winkel mit 90° addiert wird. Grund dafür ist, dass die beiden Hauptnormalspannung **senkrecht** aufeinander stehen:

$$\alpha^* = -24^\circ + 90^\circ = 66^\circ$$

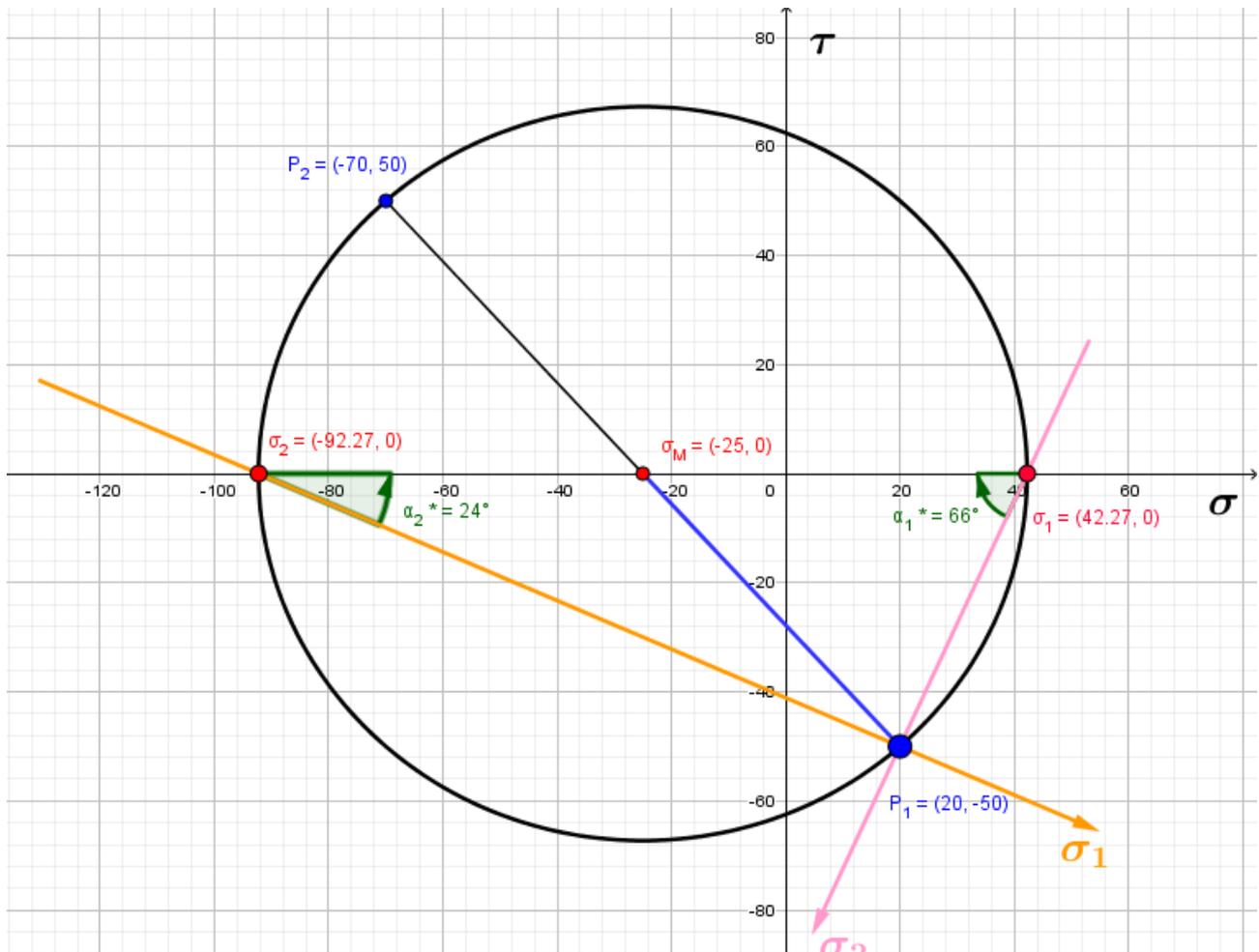
Wir wissen noch nicht unter welchem Winkel welche Hauptnormalspannung auftritt. Mit den Spannungsgleichungen kann das natürlich sofort berechnet werden, es kann aber auch aus dem Mohrschen Spannungskreis abgelesen werden. Wir zeichnen hierzu die Richtungen der Hauptnormalspannungen ein. Wir gehen wie folgt vor:

Von den Hauptnormalspannungen aus ziehen wir jeweils eine Gerade durch den Punkt P.

Wichtig: Die Verbindung zwischen σ_1 und P_1 ergibt die Richtung von σ_2 und umgekehrt.



Wir können nun herausfinden, welcher der oben bestimmten Winkel zu welcher Hauptnormalspannung gehört. Dazu tragen wir die Winkel von den Richtungen zur σ -Achse ab:



Hierbei handelt es sich um die **einfachen** Winkel. Wir sehen also deutlich, dass der Winkel $\alpha_1^* = -24^\circ$ für die Hauptnormalspannung σ_1 gilt und der Winkel $\alpha_2^* = 66^\circ$ für die Hauptnormalspannung σ_2 .

Rechnerische Probe:

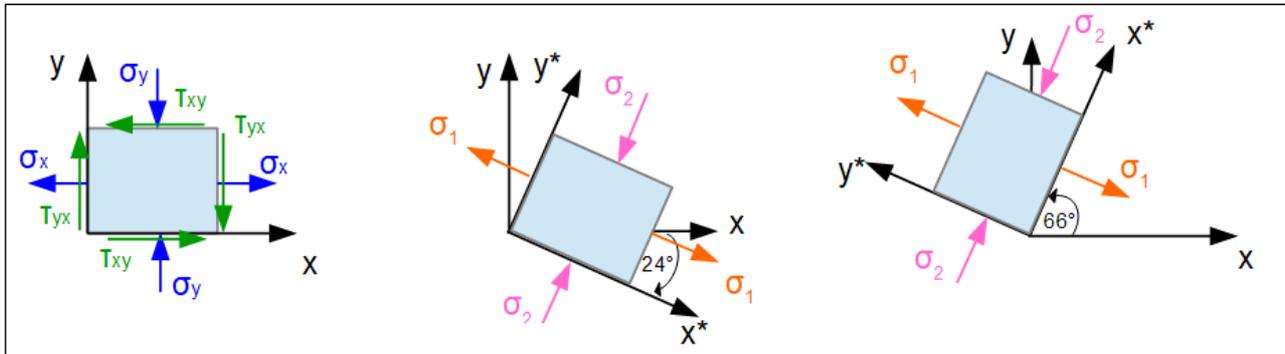
$$\sigma_x^* = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha)$$

Einsetzen von $\alpha_1^* = -24^\circ$:

$$\sigma_x^* = \frac{20 - 70}{2} + \frac{20 + 70}{2} \cos(2 \cdot -(24^\circ)) - 50 \sin(2 \cdot (-24^\circ)) = 42,27 \text{ MPa} = \sigma_1$$

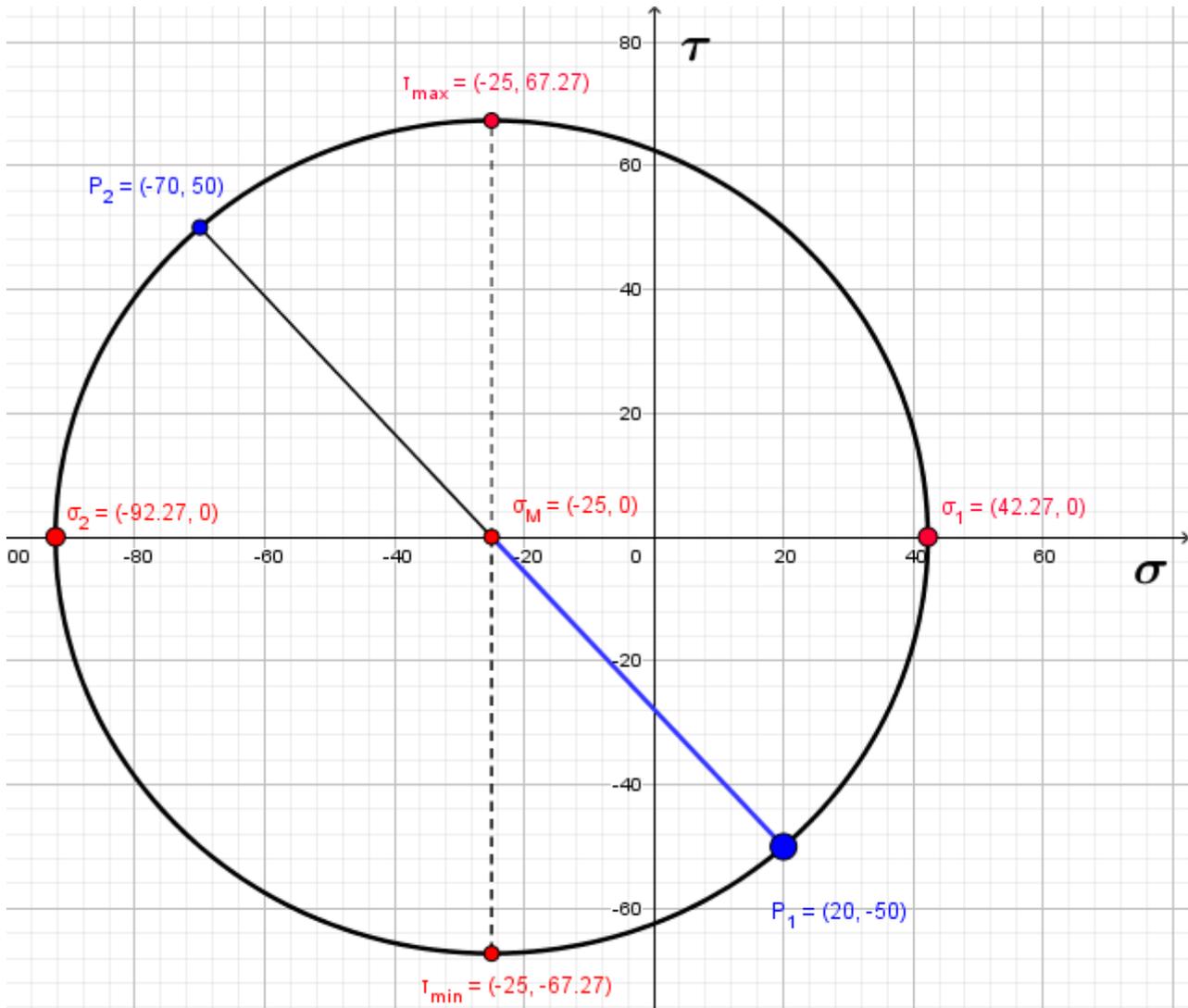
Der Winkel von -24° gehört zur Hauptnormalspannung 1. Demnach gehört der Winkel 66° zur Hauptnormalspannung 2.

Wir wollen uns noch die Drehung des Ausgangskordinatensystems um diesen Winkel ansehen:



Bestimmung der Hauptschubspannungen

Die Hauptschubspannungen nehmen ihre Extremwerte bei der mittleren Normalspannung an:



Es ergeben sich zwei Hauptschubspannungen, das Maximum und das Minimum, die beide vom Betrag her gleich groß sind. Die Normalspannung nimmt beim Auftreten der Hauptschubspannungen ihren mittleren Wert an.

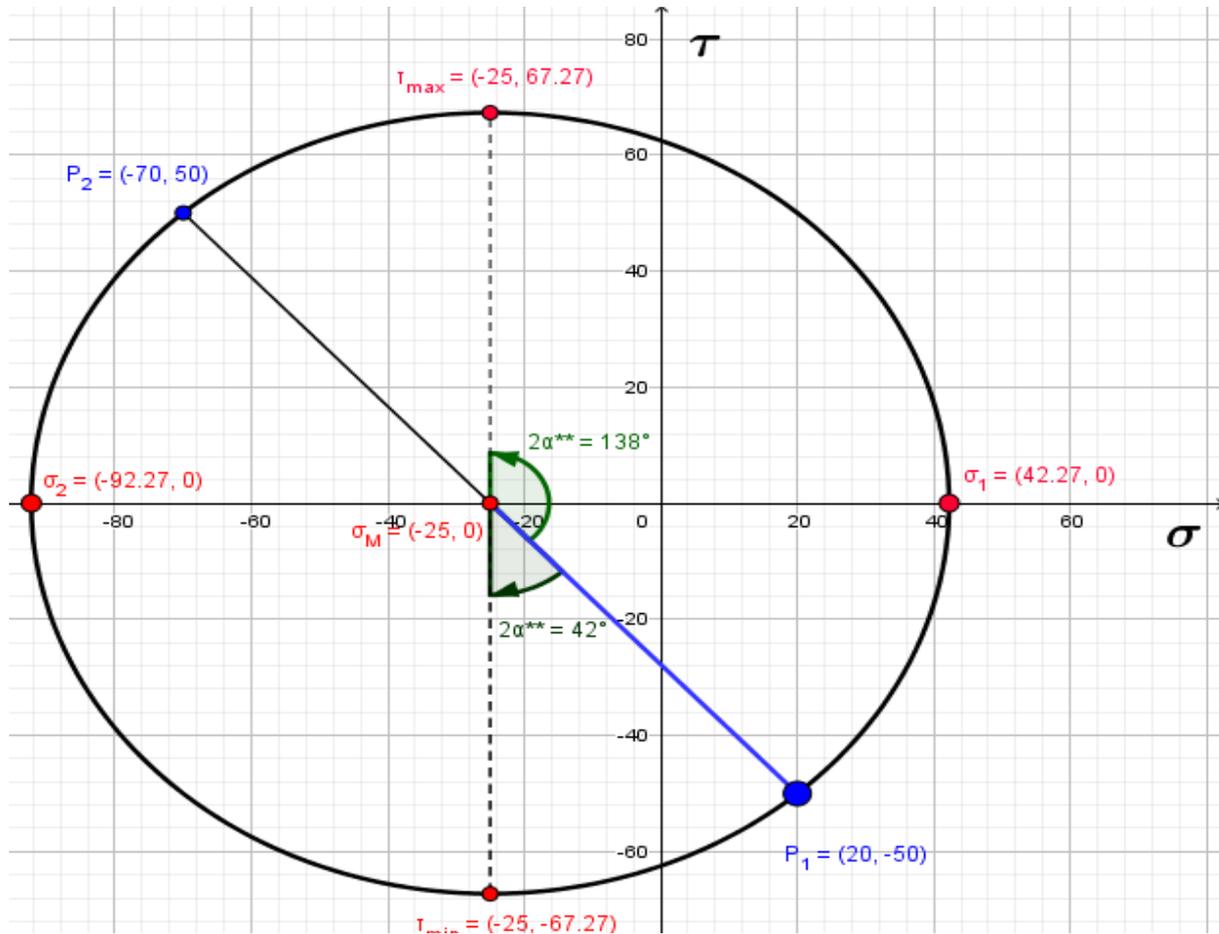
Rechnerische Probe:

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_1 = +\sqrt{\left(\frac{20 + 70}{2}\right)^2 + (-50)^2} = 67,27 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = -\sqrt{\left(\frac{20 + 70}{2}\right)^2 + (-50)^2} = -67,27 \text{ MPa}$$

Als nächstes sollen die Hauptrichtungen bestimmt werden, für welche die beiden Hauptschubspannungen auftreten. Dabei muss wieder berücksichtigt werden, dass hier zweifache Winkel abgetragen werden. Wir gehen wieder von unserer **Teilverbindungsline** (blau) aus. Der Winkel für die positive Schubspannung erhalten wir dann, indem wir zur oberen gestrichelten Linie den Winkel abtragen, den Winkel für die negative Schubspannung ist der Winkel zur unteren gestrichelten Linie:



Unter Berücksichtigung, dass die Abtragung im Mohrschen Spannungskreis genau entgegengesetzt vorgenommen wird, erhalten wir:

$$\alpha^{**} = 42^\circ / 2 = 21^\circ \quad (\text{für die minimale Hauptschubspannung})$$

$$\alpha^{**} = -138^\circ / 2 = -69^\circ \quad (\text{für die maximale Hauptschubspannung})$$

Rechnerische Probe:

$$\alpha^{**} = \alpha^* \pm 45^\circ$$

$$\alpha^{**} = -24^\circ + 45^\circ = 21^\circ$$

$$\tau_{x^*y^*} = \frac{1}{2}(-\sigma_x + \sigma_y) \sin(2\alpha) + \tau_{xy} \cos(2\alpha)$$

Einsetzen von

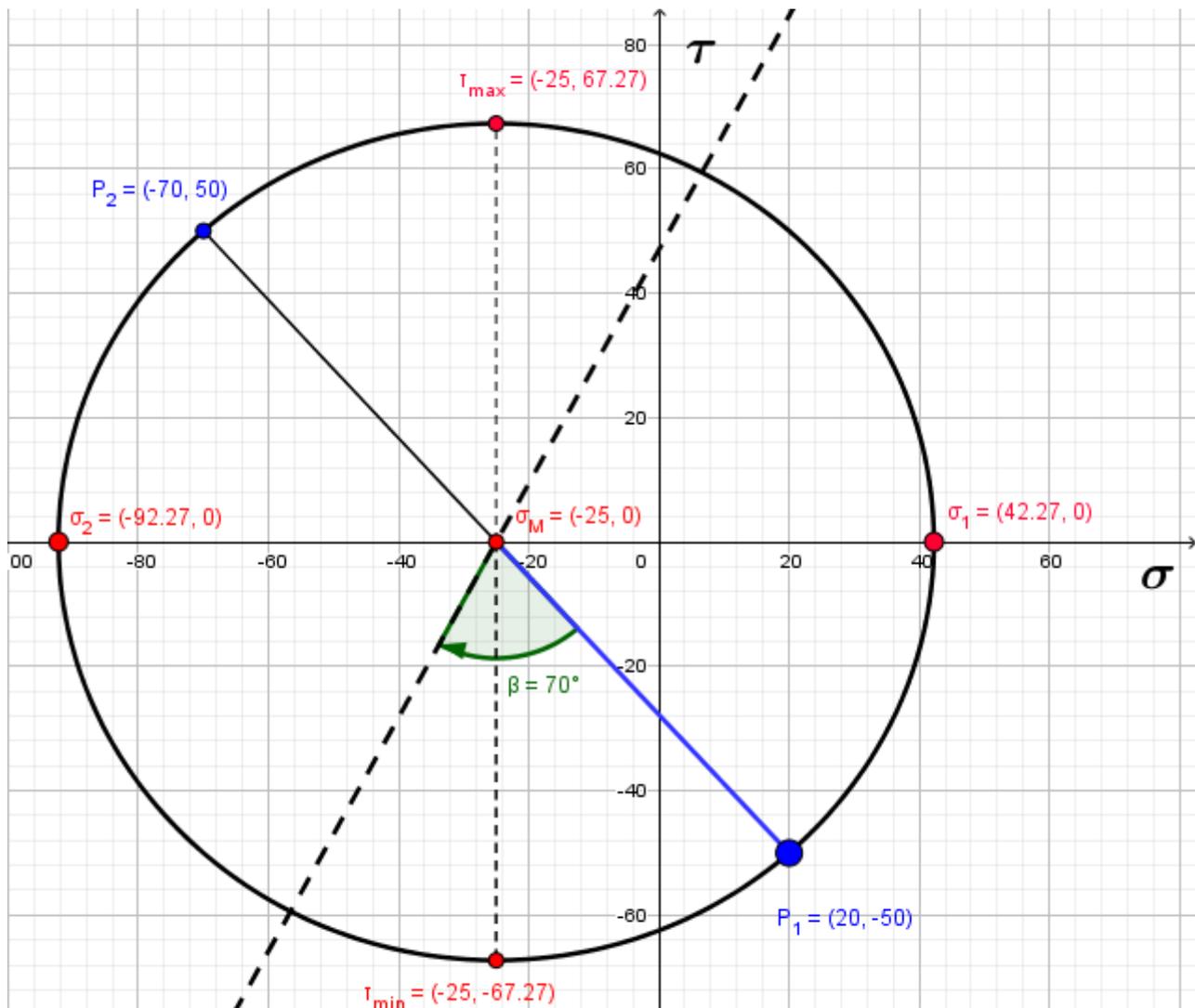
$$\alpha^{**} = 21^\circ$$

$$\tau_{x^*y^*} = \frac{1}{2}(-20 - 70) \sin(2 \cdot 21^\circ) - 50 \cos(2 \cdot 21^\circ) = -67,27 \text{ MPa}$$

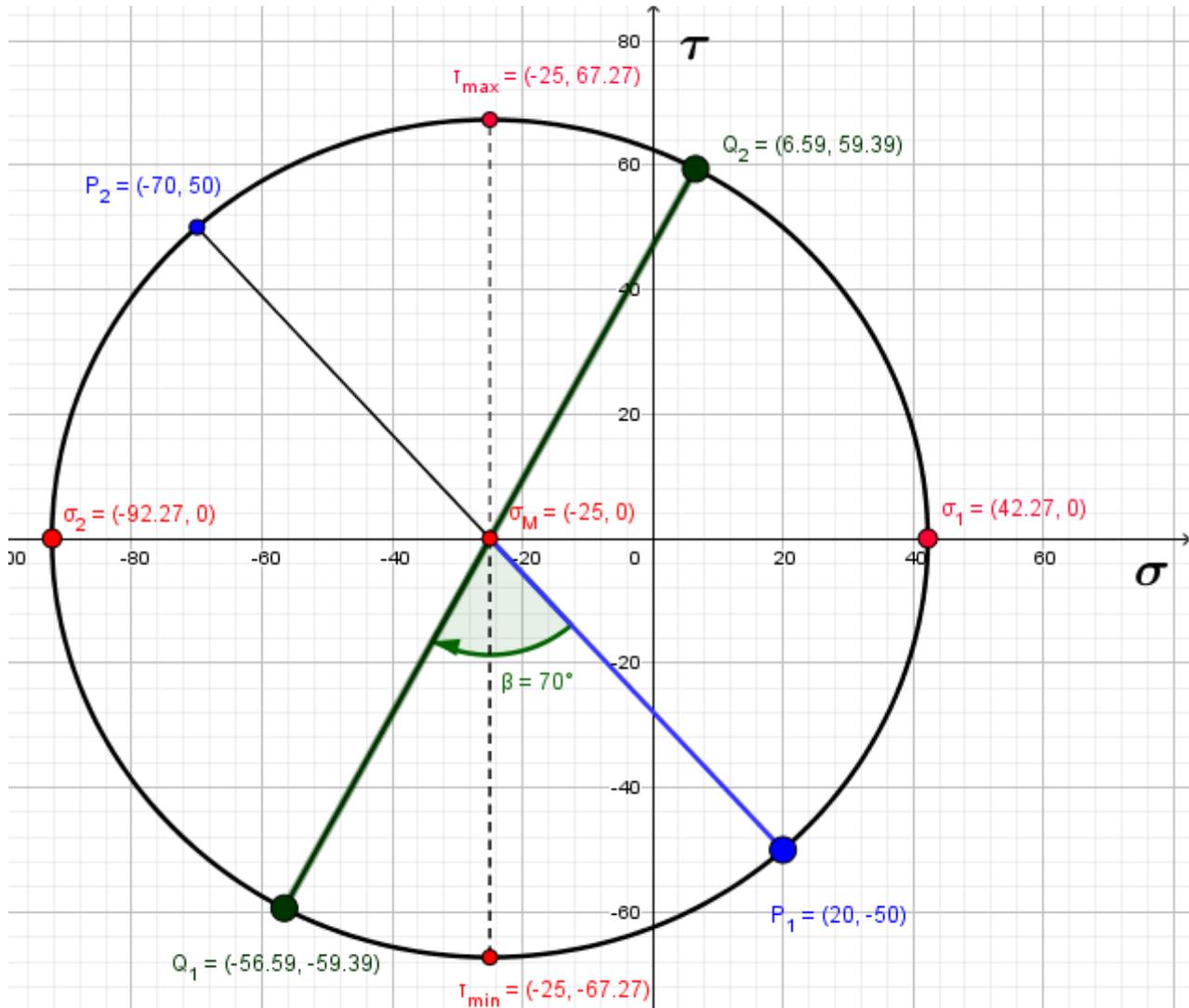
Der Winkel von 21° gehört demnach nur minimalen Schubspannung τ_{\min} .

Bestimmung der Spannungen für Drehung um 35°

Der Winkel ist in der Aufgabenstellung positiv angegeben, demnach handelt es sich um eine positive Drehrichtung (Linksdrehung, gegen den Uhrzeigersinn). Da wir im Mohrschen Spannungskreis die Winkel von der **Teilverbindungsline** (blau) immer entgegengesetzt abtragen, müssen wir die Abtragung also **mit dem Uhrzeigersinn** vornehmen. Es werden immer die doppelten Winkel abgetragen:



Wir tragen den Winkel von $2 \cdot 35 = 70^\circ$ im Uhrzeigersinn ab. Wir ziehen eine gestrichelte Linie durch den Kreismittelpunkt. Dort wo die gestrichelte Linie den Kreis schneidet, befinden sich unsere Spannungen.



Führen wir das um 35° gedrehte η, ξ – Koordinatensystem ein, so erhalten wir:

$$Q_1 = (\sigma_\eta, \tau_{\eta\xi}) = (-56,59 ; -59,39)$$

$$Q_2 = (\sigma_\xi, -\tau_{\eta\xi}) = (6,59 ; 59,39)$$

Demnach ist:

$$\sigma_\eta = -56,59 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\eta\xi} = -59,39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_\xi = 6,59 \text{ MPa}$$

Rechnerische Probe:

$$\sigma_x^* = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$\sigma_\eta^* = \frac{20 - 70}{2} + \frac{20 + 70}{2} \cos(2 \cdot 35^\circ) - 50 \sin(2 \cdot 35^\circ) = -56,59$$

$$\sigma_y^* = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{-\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) - \tau_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$\sigma_\xi^* = \frac{20 - 70}{2} + \frac{-20 - 70}{2} \cos(2 \cdot 35^\circ) + 50 \sin(2 \cdot 35^\circ) = 6,59$$

$$\tau_{xy}^* = \tau_{yx}^* = \frac{-\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{xy} \cos(2\alpha)$$

$$\tau_{\eta\xi}^* = \tau_{\xi\eta}^* = \frac{-20 - 70}{2} \sin(2 \cdot 35^\circ) - 50 \cos(2 \cdot 35^\circ) = -59,39$$

