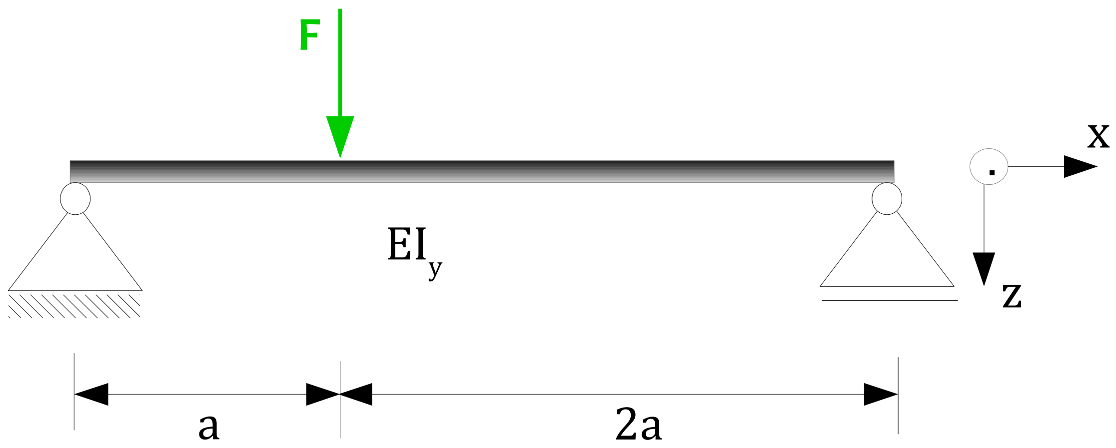
Webinar: Elastostatik
Thema: Einachsige Biegung

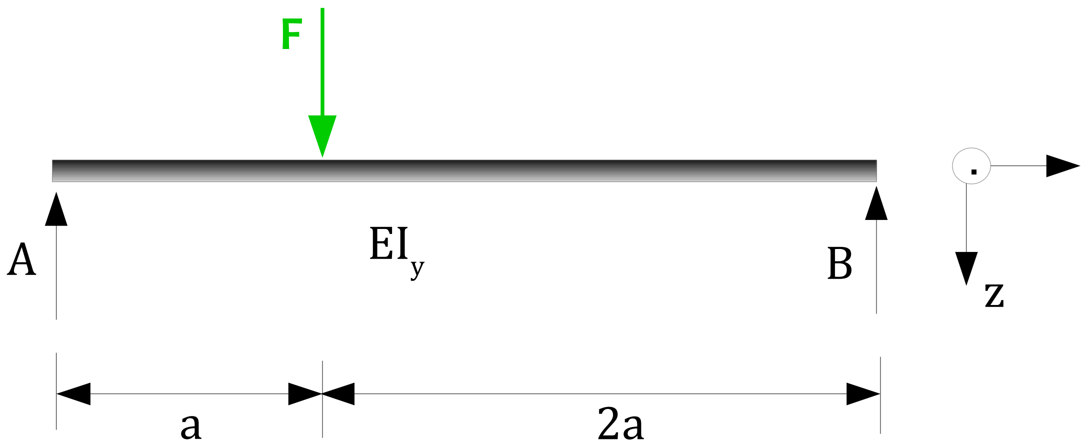


Gegeben: Kraft F, Abmessung a, Biegesteifigkeit EI_y

Bestimme die Biegelinie w(x) und die Durchbiegung w(a) am Kraftangriffspunkt.

Lösung der Aufgabe:

1) Auflagerkräfte berechnen



Das Festlager A überträgt grundsätzlich zwei Lagerreaktionen. Da keine Kräfte in x-Richtung an den Balken angreifen, wird die Lagerkraft in x-Richtung zu Null.

Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen:

Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung:

$$A + B - F = 0$$

Momentengleichgewichtsbedingung um A:

$$-F \cdot a + B \cdot 3a = 0$$

$$\boxed{B = \frac{F \cdot a}{3a} = \frac{1}{3} F}$$

Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung:

$$A + \frac{1}{3} F - F = 0$$

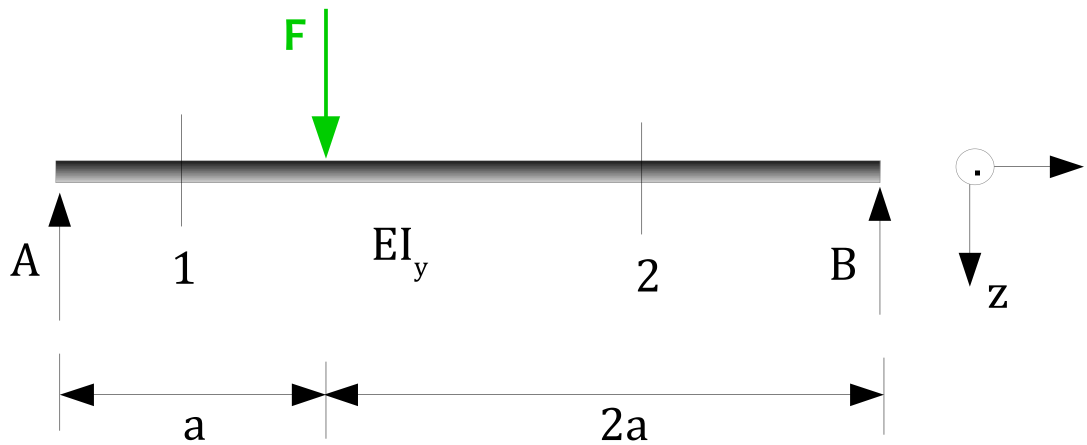
$$\boxed{A = \frac{2}{3} F}$$

Zur Berechnung der Biegelinie kann die folgende Formel herangezogen werden:

$$EI_y\, w'' = -M_y$$

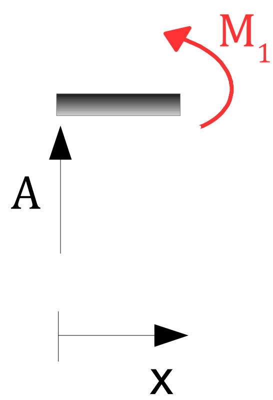
Es wird also der Momentenverlauf benötigt, um die Biegelinie w bestimmen zu können.

2) Bestimmung des Momentenverlaufs



Es müssen zwei Schnitte durchgeführt werden.

1. **Schnitt: 0 ≤ x ≤ a**

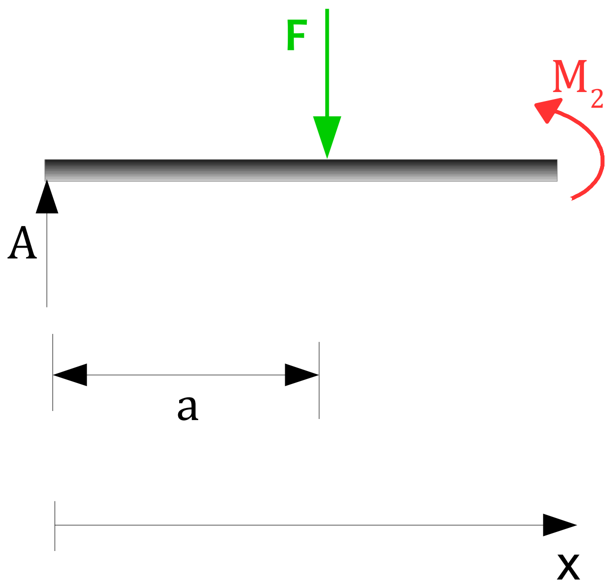


Momentengleichgewichtsbedingung:

$$-A \cdot x + M_1 = 0$$

$$\boxed{M_1 = A \cdot x = \frac{2}{3} F \cdot x}$$

2. **Schnitt: a ≤ x ≤ 3a**



Momentengleichgewichtsbedingung:

$$-A\cdot x+F\cdot(x-a)+M_2=0$$

$$M_2=A\cdot x-F\cdot(x-a)$$

$$M_2=\frac{2}{3}F\cdot x-F\cdot(x-a)=\frac{2}{3}F\cdot x-F\cdot x+F\cdot a$$

$$\boxed{M_2=F\cdot a-\frac{1}{3}F\cdot x}$$

3) Differentialgleichung der Biegelinie

Die Biegelinie wird als nächstes für beide Bereiche separat berechnet.

Biegelinie für Bereich $0 \leq x \leq a$

$$EI_y w_1'' = -M_y$$

$$EI_y w_1'' = -\frac{2}{3} F \cdot x$$

Um die Biegelinie zu bestimmen muss die obige Gleichung 2 mal integriert werden:

$$EI_y w_1' = \int -\frac{2}{3} F \cdot x \, dx = -\frac{2}{3} F \frac{\cdot 1}{2} x^2 + C_1 = -\frac{1}{3} F \cdot x^2 + C_1$$

$$EI_y w_1 = \int [-\frac{1}{3} F \cdot x^2 + C_1] dx = -\frac{1}{3} F \frac{\cdot 1}{3} x^3 + C_1 \cdot x + C_2 = -\frac{1}{9} F \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

Es ergibt sich demnach:

$$\boxed{EI_y w_1' = \frac{-1}{3} F \cdot x^2 + C_1} \quad \textbf{(1)}$$

$$\boxed{EI_y w_1 = -\frac{1}{9} F \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2} \quad \textbf{(2)}$$

Biegelinie für Bereich $a \leq x \leq 3a$

$$EI_y w_2'' = -M_y$$

$$EI_y w_2'' = -F \cdot a + \frac{1}{3} F \cdot x$$

Um die Biegelinie zu bestimmen muss die obige Gleichung 2 mal integriert werden:

$$EI_y w_2' = \int [-F \cdot a + \frac{1}{3} F \cdot x] dx = -F \cdot a \cdot x + \frac{1}{3} F \frac{\cdot 1}{2} x^2 + C_3 = -F \cdot a \cdot x + \frac{1}{6} F \cdot x^2 + C_3$$

$$EI_y w_2 = \int [-F \cdot a \cdot x + \frac{1}{6} F \cdot x^2 + C_3] dx = -\frac{1}{2} F a x^2 + \frac{1}{18} F x^3 + C_3 x + C_4$$

Es ergibt sich demnach:

$$\boxed{EI_y w_2' = -F \cdot a \cdot x + \frac{1}{6} F \cdot x^2 + C_3} \quad \textbf{(3)}$$

$$\boxed{EI_y w_2 = -\frac{1}{2} F a x^2 + \frac{1}{18} F x^3 + C_3 x + C_4} \quad \textbf{(4)}$$

4) Randbedingungen

Danach werden die Randbedingungen herangezogen, um die Integrationskonstanten zu bestimmen. Wir haben bei x = 0 ein Festlager gegeben, für dieses gilt: w = 0

Für x = 3a haben wir ein Loslager gegeben, für dieses gilt: w = 0

Einsetzen x = 0 und damit $w_1 = 0$:

$$EI_y w_1 = -\frac{1}{9} F \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2 \quad \textbf{Gleichung (2)}$$

$$0 = -\frac{1}{9} F \cdot 0^3 + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

x = 0 fällt in den Bereich **0 ≤ x ≤ a,** weshalb hier die Biegelinie w_1 für diesen Bereich gewählt wird.

Einsetzen von $x = 3a$ und $w_2 = 0$

$$EI_y w = -\frac{1}{2}Fax^2 + \frac{1}{18}Fx^3 + C_3 x + C_4$$ **Gleichung (4)**

$$0 = -\frac{1}{2}Fa \cdot (3a)^2 + \frac{1}{18}F \cdot (3a)^3 + C_3 \cdot 3a + C_4$$

$$0 = -\frac{1}{2}Fa \cdot 9a^2 + \frac{1}{18}F \cdot 27a^3 + C_3 \cdot 3a + C_4$$

$$0 = -\frac{9}{2}Fa^3 + \frac{27}{18} \cdot Fa^3 + C_3 \cdot 3a + C_4$$

$$0 = \left(-\frac{9}{2} + \frac{27}{18}\right)Fa^3 + C_3 \cdot 3a + C_4$$

$$C_4 = -\left(-\frac{9}{2} + \frac{27}{18}\right)Fa^3 - C_3 \cdot 3a$$

$$\boxed{C_4 = 3Fa^3 - C_3 \cdot 3a} \quad \text{I}$$

$x = 0$ fällt in den Bereich **$a \leq x \leq 3a$,** weshalb hier die Biegelinie w_2 für diesen Bereich gewählt wird.

5) Übergangsbedingungen

Am Übergang von Bereich 1 zu Bereich 2 ($x = a$) muss gelten:

Die Durchbiegung muss an der Schnittstelle der beiden Bereiche identisch sein:

$$w_1(x=a) = w_2(x=a)$$

Die Tangentensteigung muss an der Schnittstelle identisch sein (d.h. die Biegelinie weist keinen Knick auf):

$$w_1'(x=a) = w_2'(x=a)$$

Tangentensteigung

$$w_1'(x=a)=w_2'(x=a)$$

$$\frac{-1}{3}F\cdot a^2+C_1=-F\cdot a\cdot a+\frac{1}{6}F\cdot a^2+C_3$$ **Gleichsetzen von Geichung (1) und (3) für x = a**

$$C_1=\frac{1}{3}F\cdot a^2-F\cdot a^2+\frac{1}{6}F\cdot a^2+C_3$$

$$\boxed{C_1=-\frac{1}{2}F\cdot a^2+C_3}\quad \mathbf{II}$$

Durchbiegung

$$w_1(x=a)=w_2(x=a)$$

$$-\frac{1}{9}F\cdot a^3+C_1\cdot a+C_2=-\frac{1}{2}F\,a\,a^2+\frac{1}{18}F\,a^3+C_3a+C_4$$ **Gleichsetzen von Geichung (2) und (4) für x = a**

$$-\frac{1}{9}F\cdot a^3+C_1\cdot a+C_2=-\frac{1}{2}F\,a^3+\frac{1}{18}F\,a^3+C_3a+C_4$$

Einsetzen von I und II sowie C_2 = 0:

$$-\frac{1}{9}F\cdot a^3+\left(-\frac{1}{2}F\cdot a^2+C_3\right)\cdot a=-\frac{1}{2}F\,a^3+\frac{1}{18}F\,a^3+C_3a+\left(3F\,a^3-C_3\cdot 3a\right)$$

$$-\frac{1}{9}F\cdot a^3-\frac{1}{2}F\cdot a^3+C_3\cdot a=-\frac{1}{2}F\,a^3+\frac{1}{18}F\,a^3+C_3a+3F\,a^3-C_3\cdot 3a$$ **|-C_3* a**

$$-\frac{1}{9}F\cdot a^3-\frac{1}{2}F\cdot a^3=-\frac{1}{2}F\,a^3+\frac{1}{18}F\,a^3+C_3a+3F\,a^3-C_3\cdot 3a-C_3\cdot a$$

$$-\frac{1}{9}F\cdot a^3-\frac{1}{2}F\cdot a^3+\frac{1}{2}F\,a^3-\frac{1}{18}F\,a^3-3F\,a^3=C_3a-C_3\cdot 3a-C_3\cdot a$$

$$\frac{-19}{6}F\cdot a^3=-C_3\cdot 3a$$

$$\boxed{C_3=\frac{19}{18}F\cdot a^2}$$

C_3 einsetzen in I und II:

$$C_4 = 3\,F\,a^3 - \frac{19}{18} F \cdot a^2 \cdot 3a \quad \mathrm{I}$$

$$C_4 = 3\,F\,a^3 - \frac{19}{6} F \cdot a^3$$

$$\boxed{C_4 = -\frac{1}{6} F \cdot a^3}$$

$$C_1 = -\frac{1}{2} F \cdot a^2 + \frac{19}{18} F \cdot a^2 \quad \mathrm{II}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{5}{9} F \cdot a^2}$$

Nachdem alle Randbedingungen bestimmt wurden, kann als nächstes die Biegelinie für beide Bereiche bestimmt werden.

6) Biegelinie

$0 \leq x \leq a$:

$$EI_y\, w_1 = -\frac{1}{9} F \cdot x^3 + \frac{5}{9} F \cdot a^2 \cdot x$$

$$w_1(x) = -\frac{1}{9EI_y} F \cdot x^3 + \frac{5}{9EI_y} F \cdot a^2 \cdot x$$

$$\boxed{w_1(x) = \frac{F}{9EI_y} \cdot [\,5 \cdot a^2 \cdot x - x^3]}$$

$a \leq x \leq 3a$:

$$EI_y\, w_2 = -\frac{1}{2} F\,a\,x^2 + \frac{1}{18} F\,x^3 + \frac{19}{18} F \cdot a^2 x - \frac{1}{6} F \cdot a^3$$

$$\boxed{w_2(x) = \frac{F}{18EI_y} [\,-9\,a\,x^2 + x^3 + 19 \cdot a^2 x - 3 \cdot a^3]}$$

7) Durchbiegung am Kraftangriffspunkt

Hierzu können beide Gleichungen herangezogen werden und mit x = a die Durchbiegung am Kraftangriffspunkt bestimmt werden:

$$\boxed{w_1(x=a)=\frac{F}{9EI_y}\cdot[\,5\cdot a^2\cdot a-a^3\,]=\frac{4Fa^3}{9EI_y}}$$

$$\boxed{w_2(x=a)=\frac{F}{18EI_y}[\,-9a\,a^2+a^3+19\cdot a^2 a-3\cdot a^3\,]=\frac{8Fa^3}{18EI_y}=\frac{4Fa^3}{9EI_y}}$$