Intensivkurs Statik – Teil 1

<u>Themen:</u>

Auflagekräfte und Zwischenreaktionen berechnen

Kräftezerlegung

Gleichgewichtsbedingungen

Statische Bestimmtheit

Notwendige Bedingungen: Abzählkriterium

Hinreichende Bedingung: Determinantenkriterium

Streckenlasten (rechteckig, dreieckig, parabelförmig)

Schnittgrößen

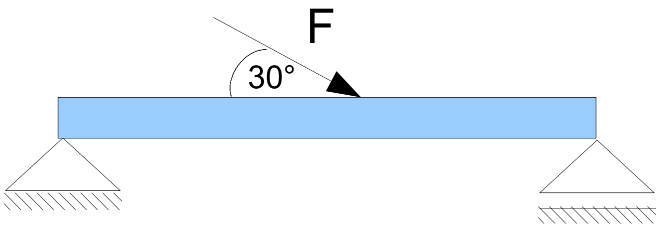
Einführung

Berücksichtigung von Integrationskonstanten

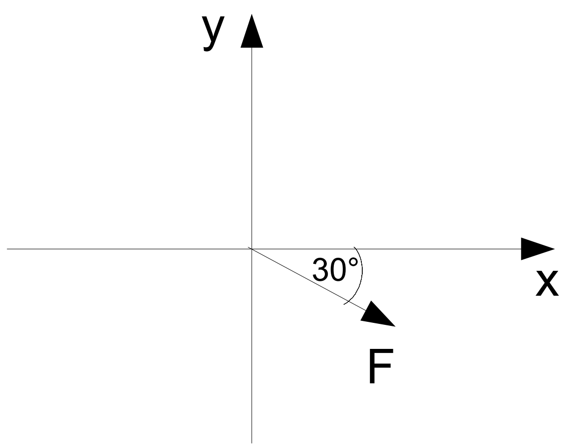
Berechnung von Auflagerkräften und Zwischenreaktionen

<u>Kräftezerlegung:</u> Zerlegung einer Kraft in ihre Komponenten.

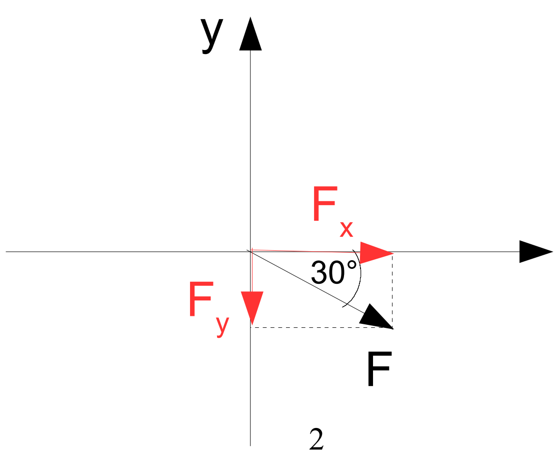
Gegeben sei ein Balken auf welchen eine Kraft F mit dem Winkel von 25° zur Horizontalen wirkt.



Wir legen die Kraft mit ihrem Anfangspunkt in den Koordinatenursprung:

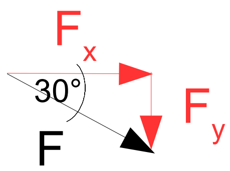


Die Kraft F weist einen Anteil in x- und einen Anteil in y-Richtung auf. Wir zerlegen die Kraft in ihre x- und y- Komponente. Zunächst grafisch:



Grundlage für die Berechnung der Kraftkomponenten F_x und F_y ist hier die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck.

Die Kraft F ist hierbei die Resultierende. Führen wir also die grafische Vektoraddition durch, so erhalten wir:



Mittels Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck können wir nun die Kraftkomponenten bestimmen. Die Resultierende F ist die Hypotenuse und ist bekannt. Der Winkel zwischen F und F_x ist bekannt. Demnach ist F_x die Ankathete und F_y die Gegenkathete.

Es gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Gesucht sind Gegenkathete und Ankathete:

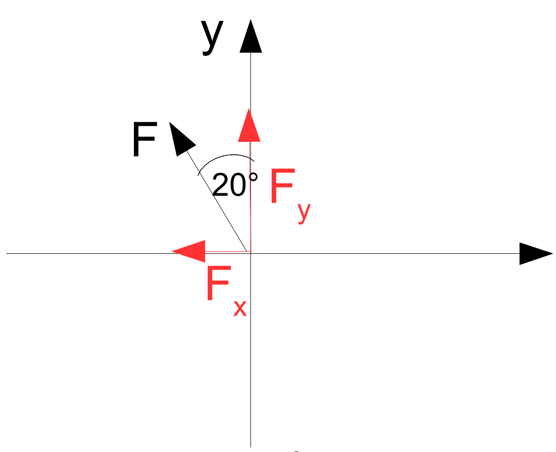
$$\text{Gegenkathete} = \text{Hypotenuse} \cdot \sin(\alpha) \qquad \text{Ankathete} = \text{Hypotenuse} \cdot \cos(\alpha)$$

Für unseren Fall:

$$F_y = F \cdot \sin(30°) \qquad F_x = F \cdot \cos(30°)$$

Tipp: Anstatt jedes Mal die Vektoraddition durchzuführen kann man sich auch einfach merken, dass der Kosinus immer dann angewandt wird, wenn der Winkel zwischen der Kraft und der Kraftkomponenten gegeben ist. Im obigen Beispiel ist der Winkel zwischen der Kraft F und der Kraftkomponente F_x (bzw. der x-Achse) gegeben. F_x ist demnach die Ankathete und wird mittels Kosinus berechnet.

Beispiel:



$$F_y = F \cdot \cos(20°)$$

$$F_x = F \cdot \sin(20°)$$

<u>Gleichgewichtsbedingungen:</u> Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung von unbekannten Kräften.

Ein ebener Körper befindet sich im Gleichgewicht (= in Ruhe), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$\sum F_i = 0$ Die Summe aller auf den Körper wirkenden Kräfte ist gleich Null

$\sum M_i = 0$ Die Summe aller Momente in Bezug auf einen beliebigen Punkt ist gleich Null

Man kann diese Bedingungen auf kartesische Koordinaten beziehen. Man erhält **drei** Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene:

$\sum F_{ix} = 0$ Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung

$\sum F_{iy} = 0$ Gleichgewichtsbedingung in y-Richtung

$\sum M_{iz} = 0$ Momentengleichgewichtsbedingung

Man erhält **sechs** Gleichgewichtsbedingungen im Raum:

$\sum F_{ix} = 0$ Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung

$\sum F_{iy} = 0$ Gleichgewichtsbedingung in y-Richtung

$\sum F_{iz} = 0$ Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung

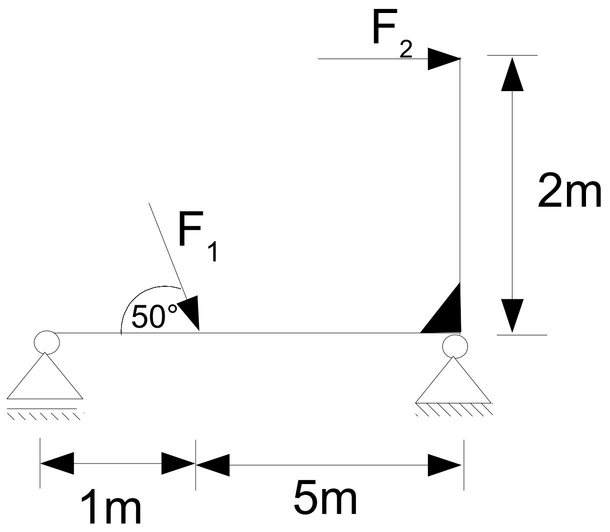
$\sum M_{ix} = 0$ Momentengleichgewichtsbedingung um die x-Achse

$\sum M_{iy} = 0$ Momentengleichgewichtsbedingung um die y-Achse

$\sum M_{iz} = 0$ Momentengleichgewichtsbedingung um die z-Achse

Mittels der Gleichgewichtsbedingungen können unbekannte Kräfte berechnet werden.

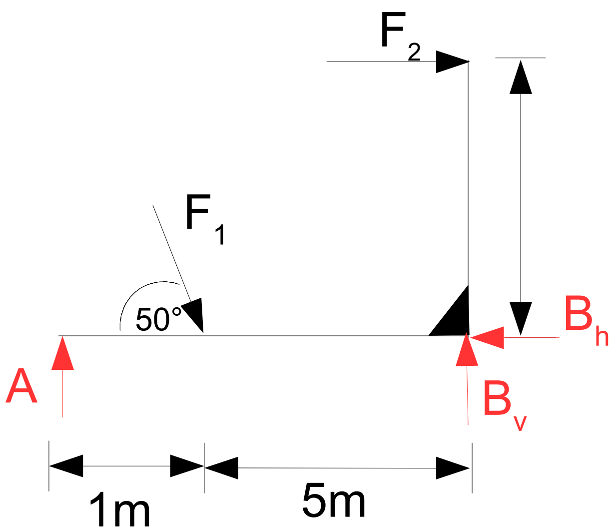
Beispiel:
Bestimme die Lagerkräfte des abgebildeten Systems.



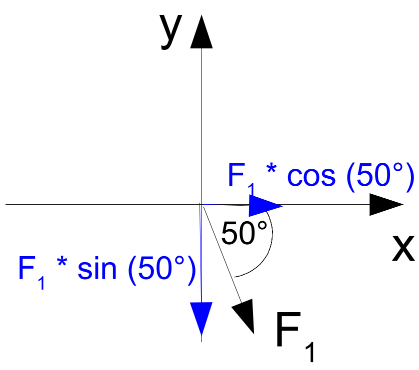
Gegeben:

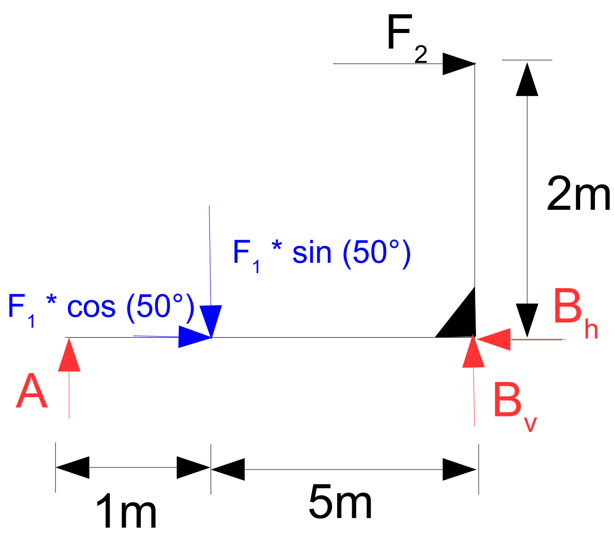
$F_1 = 10$ kN
$F_2 = 5$ kN

1. Freischnitt



2. Kräftezerlegung





3. Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

Wir stellen als nächstes die Gleichgewichtsbedingungen auf, um die Lagerkräfte zu bestimmen.

Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung:

$$\rightarrow: F_1 \cos(50°) + F_2 - B_h = 0$$

$$B_h = F_1 \cos(50°) + F_2$$

$$B_h = 10\,\text{kN} \cos(50°) + 5\,\text{kN} = 11{,}43\,\text{kN}$$

Gleichgewichtsbedingung in y-Richtung:

$$\uparrow: A + B_v - F_1 \sin(50°) = 0$$

Momentengleichgewichtsbedingung:

Der Bezugspunkt wird so gewählt, dass möglichst viele unbekannte Kräfte wegfallen. In diesem Fall wird der Bezugspunkt in das Lager B gelegt. Es müssen nun alle Momente in Bezug auf das Lager B berücksichtigt werden. Linksdrehende Momente werden positiv, rechtsdrehende Momente negativ berücksichtigt:

$$\text{Moment um B}: -A \cdot 6m + F_1 \sin(50°) \cdot 5m - F_2 \cdot 2m = 0$$

$$A = \frac{F_1 \sin(50°) \cdot 5m - F_2 \cdot 2m}{6m}$$

$$A = \frac{10\,kN \sin(50°) \cdot 5m - 5\,kN \cdot 2m}{6m} = 4{,}72\,kN$$

Aus der vertikalen Gleichgewichtsbedingung kann als nächstes die Lagerkraft B_v berechnet werden (alternativ kann auch die Momentengleichgewichtsbedingung um A herangezogen werden):

$$\uparrow: A + B_v - F_1 \sin(50°) = 0$$

$$B_v = -A + F_1 \sin(50°)$$

$$B_v = -4{,}72\,kN + 10\,kN \sin(50°) = 2{,}94\,kN$$

Statische Bestimmtheit: Notwendige Bedingung

Überprüfung des Systems auf statische Bestimmtheit mittels Abzählformel.

Ein System ist statisch bestimmt, wenn die Lager- und Zwischenreaktionen allein aus den zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen (2D = 3, 3D = 6) berechnet werden können. Die notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit ergibt sich mittels der Abzählformel:

$$f = a + z - 3n$$

mit

a Summe aller möglichen Auflagerreaktionen
z Anzahl an Zwischenreaktionen (z.B. Gelenkkräfte)
n Anzahl der Teilsysteme

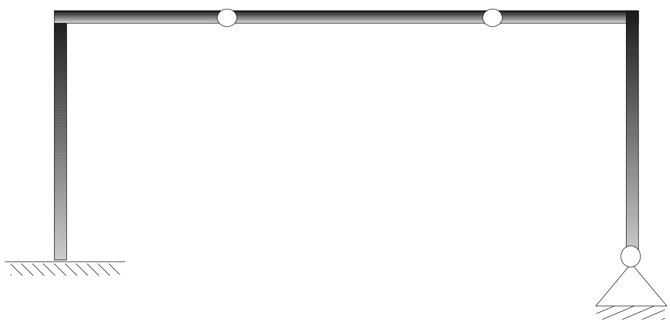
Greifen m Teilsysteme an einem (Momenten-) Gelenk an, so treten für jedes Teilsystem zwei zusätzliche Zwischenreaktionen auf und es gilt: $z = 2(m-1)$

Für $f = 0$ ist das System statisch bestimmt. Es können alle vorhandenen Auflagerreaktionen und Zwischenreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden.

Für $f > 0$ ist das System statisch unterbestimmt (auch: kinematisch). Das System ist also beweglich. Es stehen mehr Gleichgewichtsbedingungen als Auflager- und Gelenkreaktionen zur Verfügung.

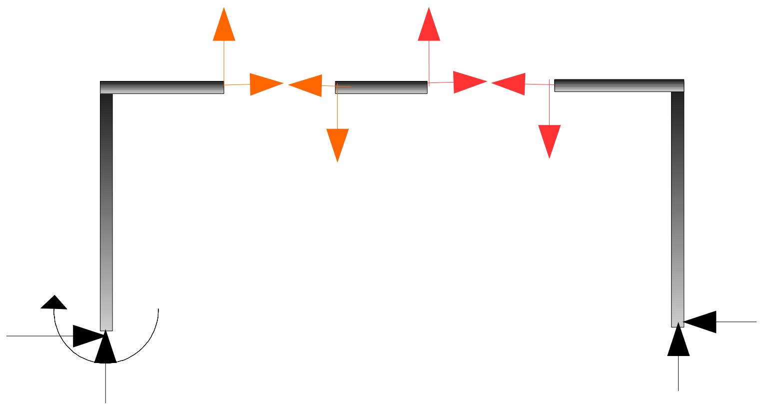
Für $f < 0$ ist das System statisch überbestimmt (auch: unbestimmt). Es sind mehr Auflager- und Gelenkreaktionen gegeben als Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen.

Beispiel:



Wir wollen das obige System auf statische Bestimmtheit überprüfen.

Hierfür schneiden wir das System von den Lagern frei und trennen es gedanklich an den Gelenken:



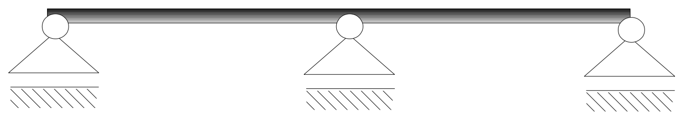
Wir wenden die Abzählformel an und erhalten:

$$f = a + z - 3n$$

$$f = 5 + 4 - 3 \cdot 3 = 0$$

Das System - bestehend aus 3 Teilsystemen – ist statisch bestimmt.

Beispiel:



Wir wenden die Abzählformel an und erhalten:

$$f = 3 + 0 - 3 \cdot 1 = 0$$

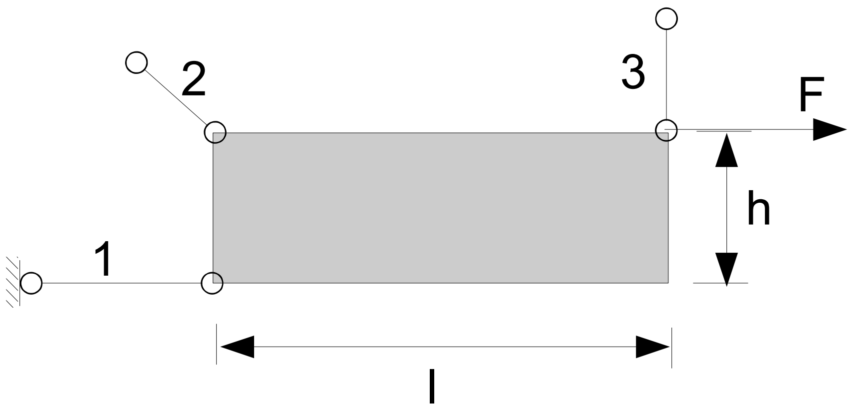
Nach der notwendigen Bedingung ist das obige System statisch bestimmt. Tatsächlich ist dieses aber horizontal verschieblich und damit statisch unterbestimmt bzw. kinematisch. Grund dafür ist, dass alle drei Lagerkräfte parallel zueinander liegen und demnach nicht aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können.

Statische Bestimmtheit: Hinreichende Bedingung

Wir haben oben gesehen, dass die statische Bestimmtheit nur gegeben ist, wenn die Lager- und Gelenkkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können. Das Abzählkriterium zeigt lediglich auf, dass die Gleichgewichtsbedingungen und Lager- und Zwischenreaktionen übereinstimmen. Es zeigt nicht auf, ob die Lager- und Zwischenreaktionen auch aus diesen berechnet werden können. Dazu kann man das Determinatenkriterium heranziehen. Das Gleichungssystem (Gleichgewichtsbedingungen) werden in eine Matrix **A** eingetragen. Ist die Determinante dieser Matrix ungleich Null, so ist eine eindeutige Lösung gegeben und das System statisch bestimmt.

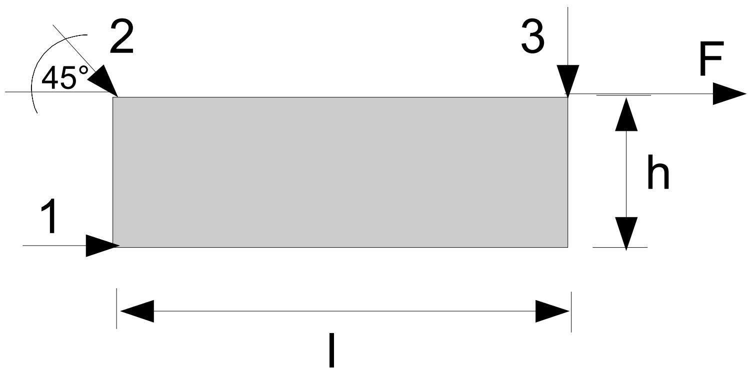
$$\det A \neq 0$$

Beispiel:



Hinweis: Pendelstäbe sind an beiden Enden mit Momentengelenken verbunden (2 und 3). Pendelstützen sind Pendelstäbe die das System mit Auflagern verbinden (1). In beiden Fällen werden nur Kräfte entlang der Stabachse übertragen.

Freischnitt :



Wir stellen die Gleichgewichtsbedingungen auf:

$$\rightarrow: S_1 + S_2 \cdot \cos(45°) + F = 0$$

$$\uparrow: -S_2 \sin(45°) - S_3 = 0$$

$$\text{Moment um 3}: \quad S_1 \cdot h - S_3 \cdot b = 0$$

Als nächstes werden die obigen Gleichungen so umgestellt, dass die äußeren Lasten (hier: F) auf die rechte Seite gebracht werden.

$$S_1 + S_2 \cdot \cos(45°) = -F$$

$$-S_2 \sin(45°) - S_3 = 0$$

$$S_1 \cdot h - S_3 \cdot b = 0$$

Danach können wir die Matrix A bilden. Hierbei müssen wir die Koeffizienten in die Matrix A schreiben, die unbekannten Kräfte werden in den Vektor L eingetragen (Lösungsvektor) und die äußeren Lasten in den Lastvektor F. In den Vektor L werden die unbekannten Kräfte positiv eingetragen, die Koeffizienten erhalten demnach die Vorzeichen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos(45°) & 0 \\ 0 & -\sin(45°) & -1 \\ h & 0 & -b \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Matrix A weist drei Spalten auf, weil drei unbekannte Kräfte gegeben sind. Die Matrix A weist drei Zeilen auf, weil drei Gleichgewichtsbedingungen gegeben sind.

Das Gleichungssystem in Matrixform sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(45°) & 0 \\ 0 & -\sin(45°) & -1 \\ h & 0 & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. und 2 Zeile wird unter die letzte Zeile geschrieben:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(45°) & 0 \\ 0 & -\sin(45°) & -1 \\ h & 0 & -b \\ 1 & \cos(45°) & 0 \\ 0 & -\sin(45°) & -1 \end{bmatrix}$$

Wir bilden die Diagonalen:

$$\det A = 1 \cdot [-\sin(45°)] \cdot [-b] + 0 \cdot 0 \cdot 0 + h \cdot \cos(45°) \cdot [-1] \\ -0 \cdot \cos(45°) \cdot [-b] - 1 \cdot 0 \cdot [-1] - h \cdot [-\sin(45°)] \cdot 0$$

$$\det A = 1 \cdot [-\sin(45°)] \cdot [-b] + h \cdot \cos(45°) \cdot [-1]$$

$$\det A = b \cdot \sin(45°) - h \cdot \cos(45°)$$

$$\text{Mit } \sin(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\det A = \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{h}{\sqrt{2}}$$

Die Determinante kann berechnet werden, ist also ungleich Null für $h \neq b$. Das System ist statisch bestimmt. Für $h = b$ hingegen ist das System nicht statisch bestimmt.

Streckenlast: Bildung der Resultierenden der Streckenlast sowie Festlegung des Angriffspunkts der Resultierenden.

Die Streckenlast wird bei Berechnung der Lagerkräfte bzw. Zwischenreaktionen berücksichtigt, indem die Resultierende der Streckenlast gebildet wird.

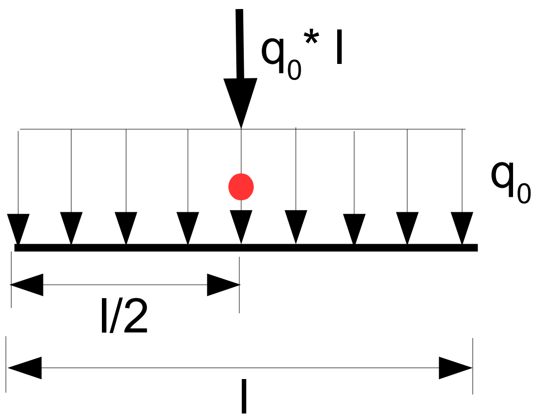
- Die Resultierende ist der Flächeninhalt der Streckenlast.
- Der Angriffspunkt der Resultierenden der Streckenlast liegt im Schwerpunkt der Fläche.

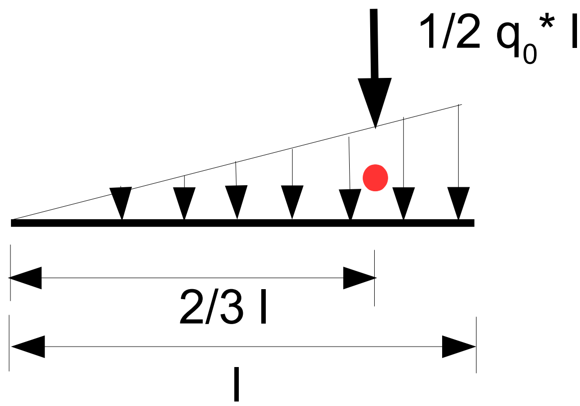
Flächeninhalt bzw. **Resultierende** der Streckenlast:

$$F_q = \int q(x)\,dx$$

Angriffspunkt der Resultierenden der Streckenlast:

$$x_S = \frac{\int x \cdot q(x)\,dx}{\int q(x)\,dx}$$





Für die rechteckige Streckenlast können wir entweder sofort den Flächeninhalt der rechteckigen Last berechnen

$$F_q = q_0 \cdot l$$

oder mittels Integration ermitteln. Hierbei ist $q(x) = q_0$, weil es sich hier um eine konstante Streckenlast handelt. Einsetzen in die obige Gleichung:

$$F_q = \int q(x)\, dx$$

$$F_q = \int_0^l q_0\, dx$$ Integriert wird über die Länge, über welche die Streckenlast wirkt. Der Beginn der Streckenlast ist x = 0, das Ende bei x = l.

$$F_q = \int_0^l q_0\, dx = q_0 \cdot l$$

Es resultiert dasselbe Ergebnis. Der Flächeninhalt entspricht der Resultierenden der Streckenlast.

Der Angriffspunkt der Resultierenden liegt im Schwerpunkt der Fläche. Bei einem Rechteck liegt der Schwerpunkt in der Mitte. In unserem Fall bei l/2. Oder mittels Integration:

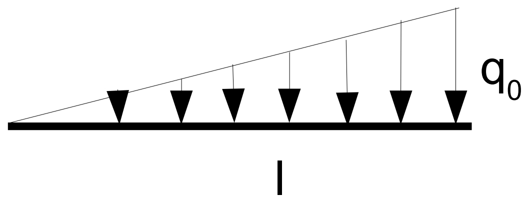
$$x_S = \frac{\int x \cdot q(x)\, dx}{\int q(x)\, dx}$$

$$x_S = \frac{\int_0^l x \cdot q_0\, dx}{\int_0^l q_0\, dx}$$ Integriert wird über die Länge, über welche die Streckenlast wirkt. Der Beginn der Streckenlast ist x = 0, das Ende bei x = l

$$x_S = \frac{\frac{1}{2} l^2 \cdot q_0}{l \cdot q_0} = \frac{1}{2} l$$

Bei einer rechteckigen Streckenlast kann man die Resultierende (=Flächeninhalt) und den Angriffspunkt auch ohne Integration ermitteln.

Für die dreieckige Streckenlast kann auch ohne Integration die Resultierende und der Angriffspunkt berechnet werden:



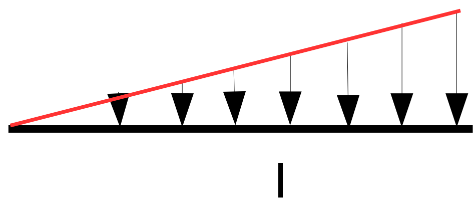
Die Resultierende (=Flächeninhalt) ist:

$$F_q = \frac{q_0 \cdot l}{2}$$

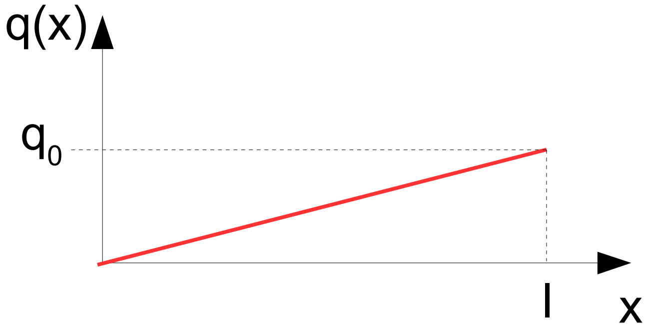
Der Kraftangriffspunkt liegt bei 2/3 der Länge:

$$x_S = \frac{2}{3} l$$

Bei Berechnung der Lagerkräfte reicht es aus, den Flächeninhalt und den Kraftangriffspunkt zu bestimmen. Für die Berechnung der Schnittgrößen ist es sinnvoll die Integration durchzuführen (folgt später). Dafür muss man aber q(x) kennen:



q(x) ist die rot gekennzeichnete Funktion:



Mittels der Geradengleichung (lineare Funktion) kann q(x) bestimmt werden:

$$y = mx + b$$

hier:

$$q(x) = mx + b$$

b ist der Beginn der Funktion auf der q(x) -Achse:

$$b = 0$$

m ist die Steigung der Funktion:

$$m = \frac{q_0}{l}$$

l Schritte nach rechts und q_0 Schritte nach oben. Schritte in x-Richtung stehen unter dem Bruchstrich.

Einsetzen in die Gleichung:

$$q(x) = \frac{q_0}{l} x$$

Aus dieser Funktion kann nun auch die Resultierende und der Angriffspunkt mittels Integration ermittelt werden:

$$F_q = \int_0^l \frac{q_0}{l} x \, dx$$

$$F_q = \frac{q_0}{l} \int_0^l x \, dx$$ Konstanten Faktor vor das Integral ziehen

$$F_q = \frac{q_0}{l} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^l$$

$$F_q = \frac{q_0}{l} \frac{1}{2} l^2$$

$$F_q = \frac{q_0}{2} l$$ Resultierende (Flächeninhalt) der dreieckigen Streckenlast

Auch der Kraftangriffspunkt kann mittels Integration bestimmt werden:

$$x_S = \frac{\int_0^l x \cdot \frac{q_0}{l} x \; dx}{\int_0^l \frac{q_0}{l} x \; dx} \rightarrow x_S = \frac{\int_0^l \frac{q_0}{l} x^2 \; dx}{\int_0^l \frac{q_0}{l} x \; dx} \rightarrow x_S = \frac{\left[\frac{q_0}{l}\frac{1}{3}x^3\right]_0^l}{\left[\frac{q_0}{l}\frac{1}{2}x^2\right]_0^l}$$

$$x_S = \frac{\frac{q_0}{l}\frac{1}{3}l^3}{\frac{q_0}{l}\frac{1}{2}l^2} \rightarrow x_S = \frac{\frac{q_0}{3}l^2}{\frac{q_0}{2}l} \rightarrow x_S = \frac{2}{3}l$$

Das Ergebnis ist natürlich dasselbe wie oben ohne Integration. Für die Berechnung der Auflagerkräfte ist es ausreichend die Resultierende und den Angriffspunkt bei einer dreieckigen Streckenlast ohne Integration zu bestimmen. Somit muss auch nicht extra q(x) berechnet werden. Für die Berechnung der Schnittgrößen hingegen ist die Bestimmung von q(x) notwendig.

Bei einer *parabelförmigen* Streckenlast (quadratische Funktion) kann auch die Nullstellenform herangezogen werden, um den Flächeninhalt der Streckenlast zu bestimmen.

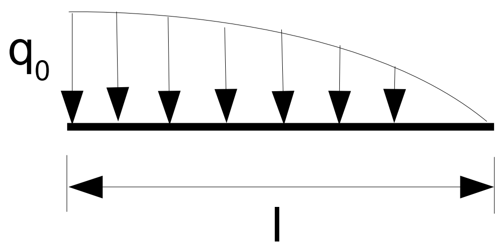
Nullstellenform:

$$y(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

mit

x_1 1. Nullstelle
x_2 2. Nullstelle
a Streckfaktor

Beispiel:



Gegeben sei die obige parabelförmige Streckenlast, welche ihr Maximum q_0 bei $x = 0$ aufweist. Bestimme die Resultierende der Streckenlast sowie ihren Angriffspunkt.

1. Betrachtung der Nullstelle: Die parabelförmige Streckenlast hat ihre Nullstelle bei $\mathbf{x_1 = l}$.
2. Betrachtung des Scheitels: Das Maximum ist q_0 bei $x = 0$. Der Scheitel ist also gegeben bei $\mathbf{S(0|q_0)}$. Der Scheitel einer Parabel liegt *in der Mitte der beiden Nullstellen*. Die andere Nullstelle liegt demnach bei $\mathbf{x_2 = -l}$.

Einsetzen in die Nullstellenform:

$$q(x)=a(x-l)(x+l)$$

Der Scheitelpunkt wird in die Nullstellenform eingesetzt:

$$q_0=a(0-l)(0+l)$$

$$q_0=a(-l)(l)$$

$$q_0=-a\,l^2$$

Nach **a** auflösen:

$a = -\frac{q_0}{l^2}$ **a** ist negativ und demnach ist die Parabel nach unten geöffnet, wie auch in der Abbildung gegeben.

Einsetzen von **a** in die Nullstellenform:

$$q(x) = -\frac{q_0}{l^2}(x-l)(x+l)$$

Auflösen der Klammern (3. Binomische Formel):

$$(x-l)(x+l) = x^2 - l^2$$

$$q(x) = -\frac{q_0}{l^2}(x^2 - l^2)$$

$$q(x) = -\frac{q_0}{l^2}x^2 + q_0$$

$$\boxed{q(x) = q(x) = q_0[1 - (\frac{x^2}{l^2})]}$$ Funktionsgleichung

Die **Resultierende der Streckenlast F_q** ist die Fläche unterhalb der Funktion und wird durch das bestimmte Integral von 0 bis l berechnet:

$$F_q = \int_0^l q(x)\,dx$$

$$F_q = \int_0^l q(x)\,dx = \int_0^l q_0[1 - \frac{x^2}{l^2}]\,dx$$

$$F_q = q_0 \int_0^l [1 - \frac{x^2}{l^2}]\,dx$$

$$F_q = q_0[x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^2}]_0^l$$

$$\boxed{F_q = q_0[l - \frac{1}{3}\frac{l^3}{l^2}] = q_0 l - \frac{1}{3}q_0 l = \frac{2}{3}q_0 l}$$

Als nächstes müssen wir herausfinden, wo die Resultierende der Streckenlast an den Balken angreift (= Kraftangriffspunkt). Die Resultierende einer Streckenlast greift immer im Schwerpunkt der Fläche an. Die Gleichung dafür lautet:

$$x_S = \frac{\int x \cdot q(x)\, dx}{\int q(x)\, dx}$$

Einsetzen von q(x):

$$x_S = \frac{\int x \cdot q_0 [1 - (\frac{x^2}{l^2})]\, dx}{\int q_0 [1 - (\frac{x^2}{l^2})]\, dx} \quad \text{Klammer auflösen}$$

$$x_S = \frac{\int_0^l [q_0 \cdot x - \frac{q_0}{l^2} x^3]\, dx}{\int_0^l [q_0 - \frac{q_0}{l^2} x^2]\, dx}$$

Integration Nenner:

Da der Nenner die Fläche darstellt ist diese identisch mit der Resultierenden F_q:

$$\frac{2}{3} q_0 l$$

Integration Zähler:

$$\int_0^l [q_0 \cdot x - \frac{q_0}{l^2} x^3]\, dx$$

$$[q_0 \frac{\cdot 1}{2} x^2 - \frac{q_0}{l^2} \frac{1}{4} x^4]_0^l$$

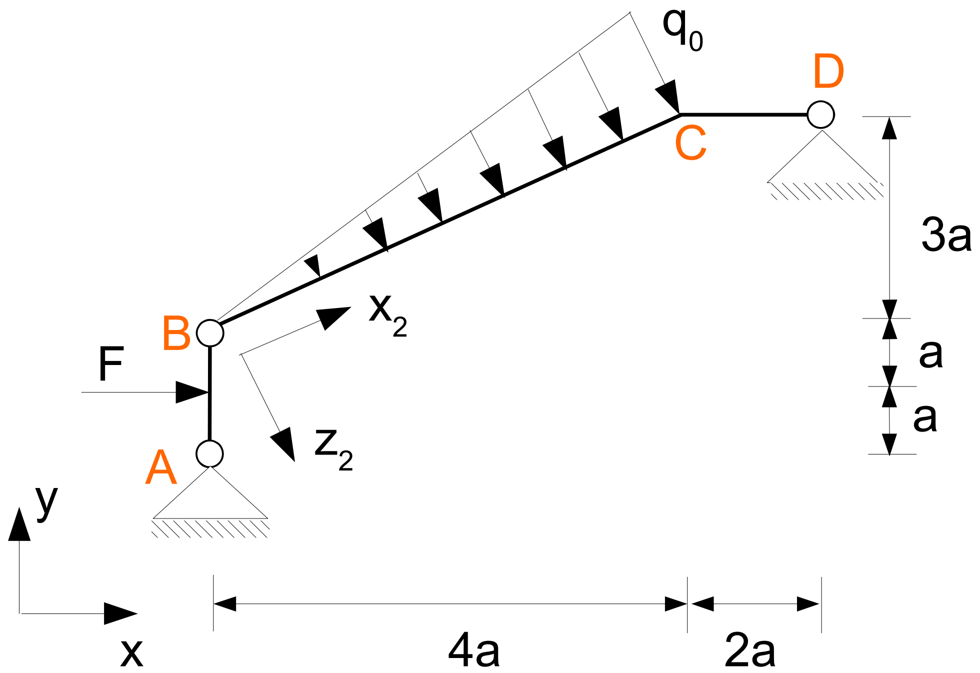
$$q_0 \frac{\cdot 1}{2} l^2 - \frac{q_0}{l^2} \frac{1}{4} l^4 = q_0 \frac{l^2}{2} - q_0 \frac{l^2}{4} = q_0 \frac{l^2}{4}$$

Einsetzen in die Formel:

$$x_S = \frac{\frac{1}{4} q_0 l^2}{\frac{2}{3} q_0 l} = \frac{3}{8} q_0 l$$

Kraftangriffspunkt der Resultierenden der Streckenlast

Aufgabe: Berechnung der Lager- und Gelenkkräfte



a) Zeichne die Freikörperbilder der Teilsysteme.

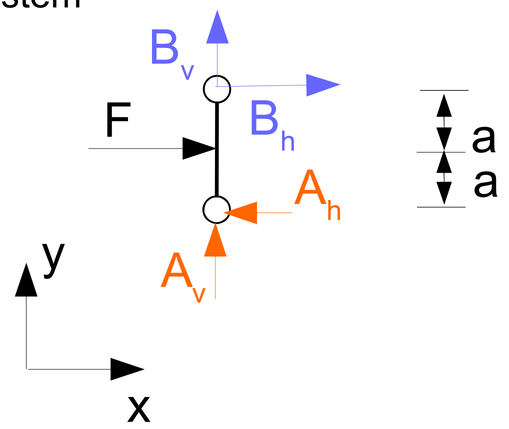
b) Prüfe auf statische Bestimmtheit!

c) Bestimme sämtliche Auflagerreaktionen und Gelenkkräfte in dem angegebenen globalen *x-y*-Koordinatensystem.

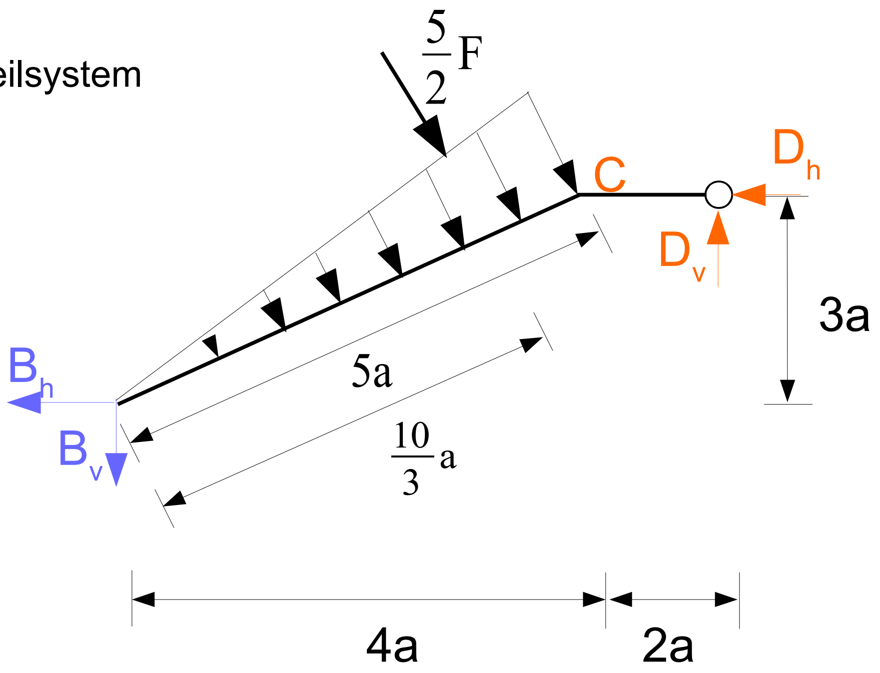
Lösung der Aufgabe

a) Freikörperbild

1. Teilsystem



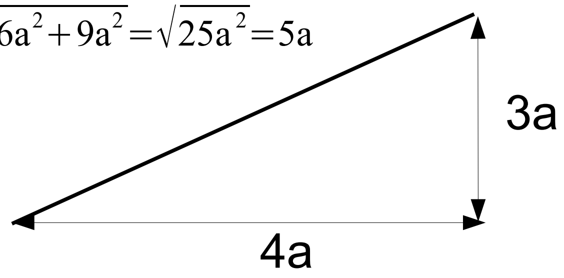
2. Teilsystem



Berechnung der Länge des schrägen Balkens:

Gesucht wird die Hypotenuse, welche mittels Satz des Pythagoras berechnet werden kann:

$$\sqrt{(4a)^2+(3a)^2}=\sqrt{16a^2+9a^2}=\sqrt{25a^2}=5a$$



Berechnung der Resultierenden der Streckenlast und den Kraftangriffspunkt:

Die **Resultierende der Streckenlast** wird berechnet indem der Flächeninhalt der gegeben **dreieckigen** Streckenlast berechnet wird. Mit $\mathbf{q_0 = F/a}$ (Aufgabenstellung) ergibt sich dann:

$$F_q=\frac{1}{2}q_0\cdot 5a=\frac{1}{2}\frac{F}{a}\cdot 5a=\frac{5}{2}F$$ **Resultierende der Streckenlast (Fläche Dreieck)**

Der **Angriffspunkt** liegt im Schwerpunkt der dreieckigen Last. In diesem Fall bei 2/3 der Länge:

$$\frac{2}{3}\cdot 5a=\frac{10}{3}a$$ **Angriffspunkt der Streckenlast**

b) Statische Bestimmtheit

Die statische Bestimmtheit soll hier mittels Abzählkriterium geprüft werden. Das Abzählkriterium ist gegeben zu:

$$f=a+z-3n$$

Gegeben sind:

a = 4 Auflagerkräfte
z = 2 Gelenkkräfte
n = 2 Teilsysteme

Es ergibt sich demnach:

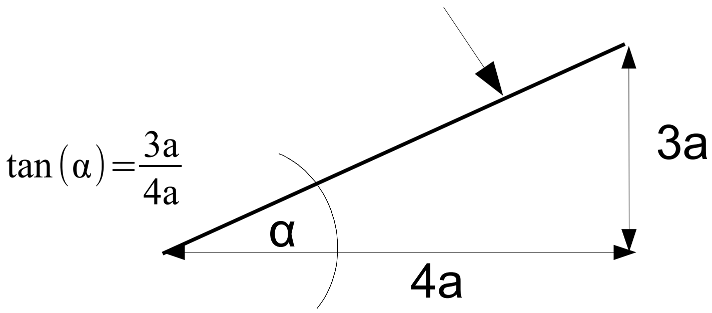
$$f=6-3\cdot 2=0$$

Das System ist nach der notwendigen Bedingung statisch bestimmt!

c) Auflager- und Gelenkkräfte berechnen

1. Kräftezerlegung für alle Kräfte die nicht in x- oder y- Richtung zeigen.

Wir führen die Kräftezerlegung für die **Resultierende der Streckenlast** durch.



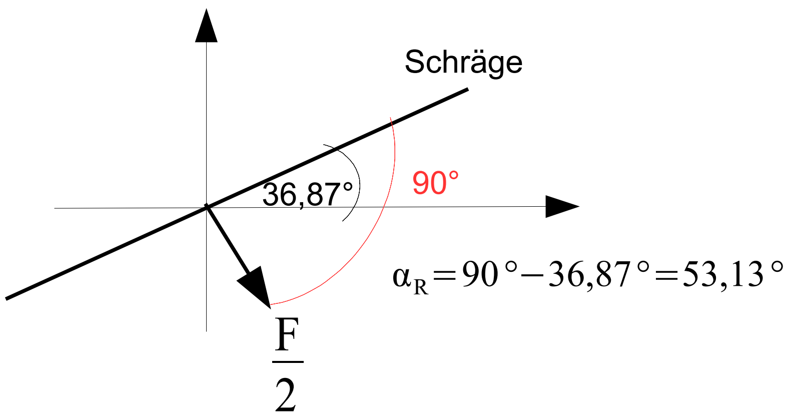
Für die Kräftezerlegung benötigen wir den Winkel von der Resultierenden zur Horizontalen. Wir können zunächst mittels Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck den Winkel zwischen der Schrägen (auf welche die Resultierende wirkt) und der Horizontalen bestimmen (siege obige Grafik).

Mittels Tangens erhalten wir dann den Winkel zu:

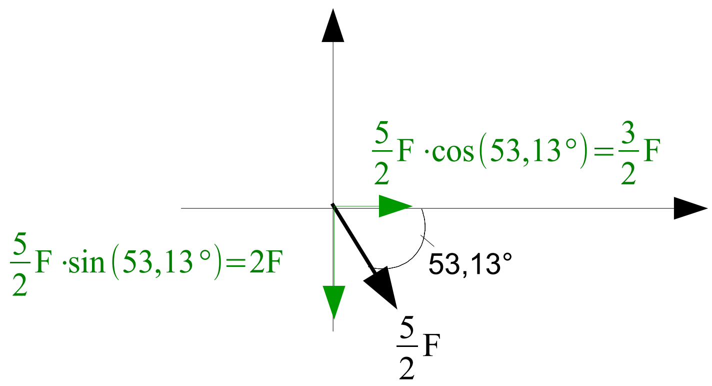
$$\tan(\alpha)=\frac{3a}{4a}$$

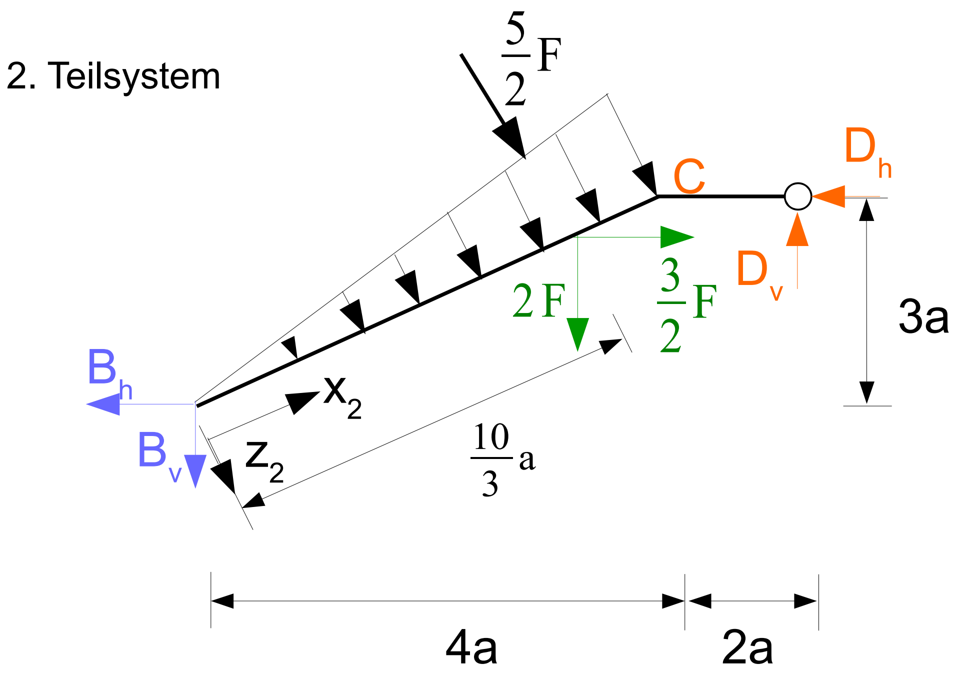
$$\alpha=\arctan\left(\frac{3}{4}\right)=36{,}87°$$

Die Resultierende steht im 90° Winkel auf der schrägen Fläche, demnach ergibt sich der Winkel von der Schrägen zur Horizontalen zu:



Wir führen die **Kräftezerlegung** durch:





c) Bestimmung der Auflager- und Gelenkkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen.

1. Teilsystem:

Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: -A_h + B_h + F = 0$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: A_v + B_v = 0$$

Momentengleichgewichtsbedingung:

$$\text{Moment um A}: \; -F \cdot a - B_h \cdot 2a = 0$$

$$\boxed{B_h = \frac{-F \cdot a}{2a} = -\frac{F}{2}}$$

Einsetzen in die horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\boxed{A_h = B_h + F = -\frac{F}{2} + F = \frac{F}{2}}$$

2. Teilsystem:

Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: -B_h - D_h + \frac{5}{2} F \cdot \cos(53{,}13°) = 0$$

Zusammenfassen:

$$\frac{5}{2} F \cdot \cos(53{,}13°) = \frac{3}{2} F$$

$$-B_h - D_h + \frac{3}{2} F = 0$$

Einsetzen von B_h :

$$\frac{F}{2} - D_h + \frac{3}{2} F = 0$$

$$\boxed{D_h = \frac{F}{2} + \frac{3}{2} F = 2F}$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow : -B_v + D_v - \frac{5}{2} F \cdot \sin(53{,}13°) = 0$$

$$\frac{5}{2} F \cdot \sin(53{,}13°) = 2F \quad \text{Zusammenfassen}$$

$$-B_v + D_v - 2F = 0$$

Momentengleichgewichtsbedingung:

$$\text{Moment um B:} \; D_v \cdot 6a + D_h \cdot 3a - \frac{5}{2} F \frac{\cdot 10}{3} a = 0$$

Einsetzen von D_h = 2F:

$$D_v \cdot 6a + 2F \cdot 3a - \frac{5}{2} F \frac{\cdot 10}{3} a = 0$$

$$D_v \cdot 6a + 6F \cdot a - \frac{25}{3} F \cdot a = 0$$

$$D_v \cdot 6a - \frac{7}{3} F \cdot a = 0$$

Auflösen nach D_v:

$$D_v = \frac{\frac{7}{3} Fa}{6a}$$

$$\boxed{D_v = \frac{7}{18} F}$$

Einsetzen in die vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$-B_v + \frac{7}{18}F - 2F = 0$$

Auflösen nach B_v:

$$\boxed{B_v = -\frac{29}{18}F}$$

Einsetzen in die vertikale Gleichgewichtsbedingung des 1. Teilsystems:

$$A_v - \frac{29}{18}F = 0$$

Auflösen nach A_v:

$$\boxed{A_v = \frac{29}{18}F}$$

Zusammenfassung der Lager- und Gelenkkräfte:

Lagerkräfte	
A_h	F/2
A_v	29/18 F
D_h	2F
D_v	7/18 F
Gelenkkräfte	
B_h	-F/2
B_v	-29/18 F

Schnittgrößen: Bestimmung von Normalkraft, Querkraft und Biegemoment

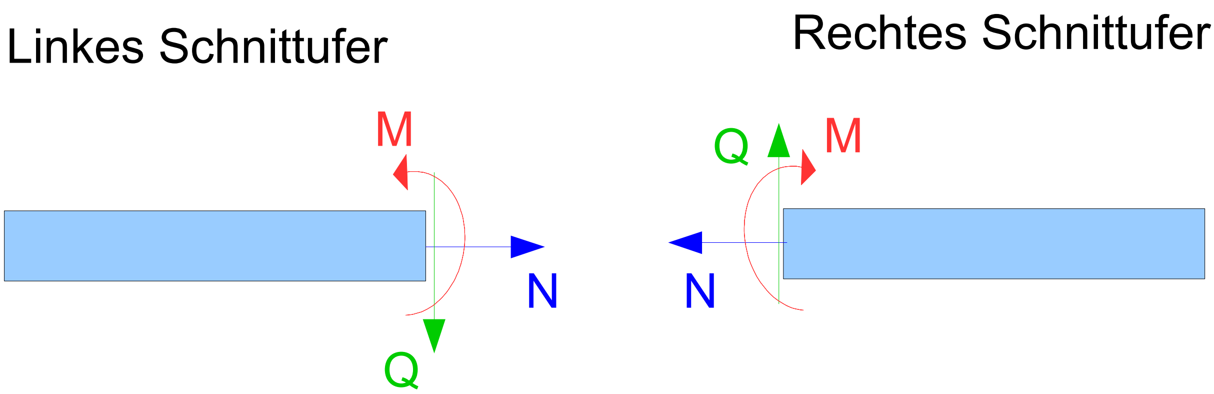
Einführung

Die äußeren Lasten führen zu inneren Spannungen im Bauteil. Die Spannungsresultierenden sind die sogenannten Schnittgrößen. Je nach Art der Belastung können drei Schnittgrößen auftreten:

- Normalkraft **N:** Infolge von Kräften parallel zur Balkenachsen.
- Querkraft **Q**: Infolge von Kräften senkrecht zur Balkenachse.
- Biegemoment **M**: Infolge von äußeren Momenten oder Kräften die Momente erzeugen.

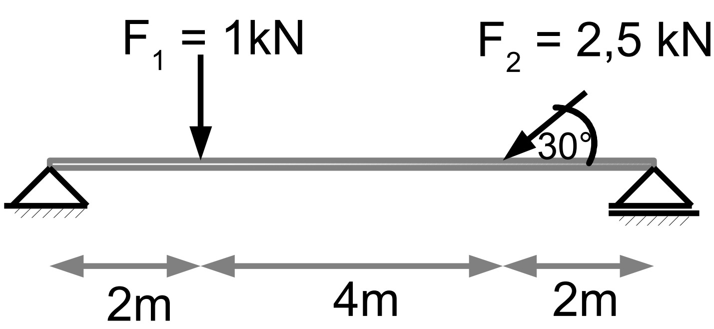
Die Schnittgrößen und die äußeren Lasten müssen sich im Gleichgewicht befinden. Die inneren Schnittgrößen wirken den äußeren Kräften also entgegen, damit das Bauteil nicht versagt.

Schnittgrößen werden durch einen gedanklichen **Schnitt** durch den Balken sichtbar:



Mittels der Gleichgewichtsbedingungen können die Schnittgrößen berechnet werden.

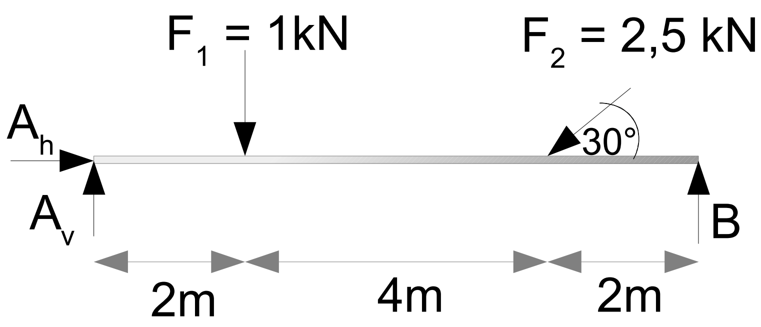
Aufgabe



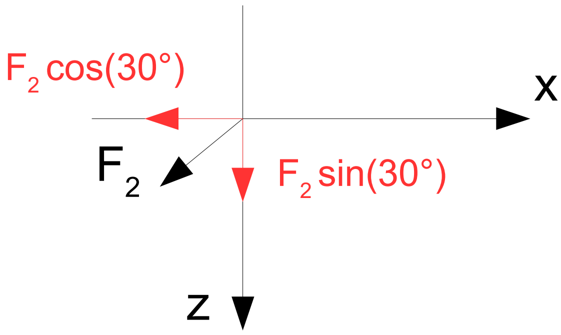
Bestimme die Schnittgrößen!

Lösung der Aufgabe:

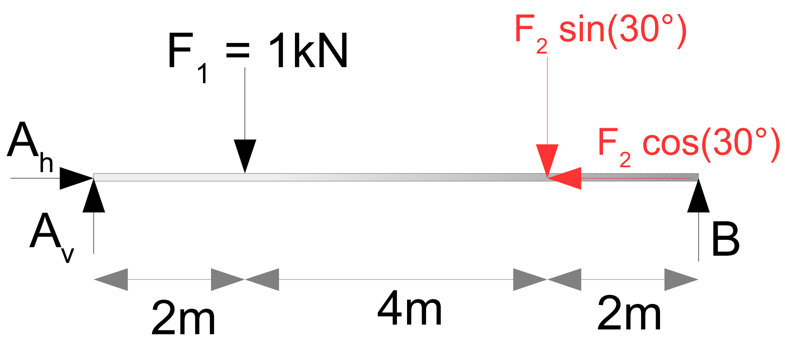
1. Freischnitt:



2. Kräftezerlegung:



3. Freischnitt unter Berücksichtigung der Kräftezerlegung



4. <u>Bestimmung der Lagerkräfte:</u>

(1) Gleichgewichtsbedingung in positive x-Richtung:

$$\rightarrow: A_h - F_2 \cos(30°) = 0 \qquad A_h = F_2 \cos(30°) = 2{,}5\,\text{kN} \cos(30°) = 2{,}17\,\text{kN}$$

(2) Gleichgewichtsbedingung in positive z-Richtung:

$$\downarrow: -A_v - B + F_1 + F_2 \sin(30°) = 0$$

(3) Momentengleichgewichtsbedingung um A:

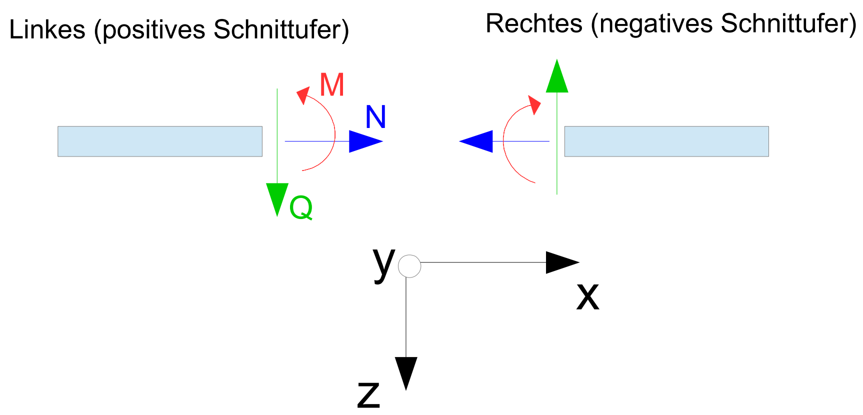
$$B \cdot 8\text{m} - f_1 \cdot 2\text{m} - F_2 \sin(30°) \cdot 6\text{m} = 0$$

$$B = \frac{F_1 \cdot 2\text{m} + F_2 \sin(30°) \cdot 6\text{m}}{8\text{m}} = 1{,}19\,\text{kN}$$

Berechnung von A_v aus (2):

$$A_v = -B + F_1 + F_2 \sin(30°) = 1{,}06\,\text{kN}$$

Danach können die Schnittkräfte berechnet werden. Hierzu betrachten wir zunächst das linke und rechte Schnittufer:



Am linken (positiven) Schnittufer zeigen die Schnittgrößen in positive Achsenrichtung in Bezug auf das obige x,y,z-Koordinatensystem. Das Moment ist am linken Schnittufer ein linksdrehendes Moment, welches in der Physik als positives Moment definiert ist. Am rechten (negativen) Schnittufer zeigen die Schnittgrößen in negative Achsenrichtung. Das Moment ist hierbei ein rechtsdrehendes Moment.

Es werden Schnitte durchgeführt bei:

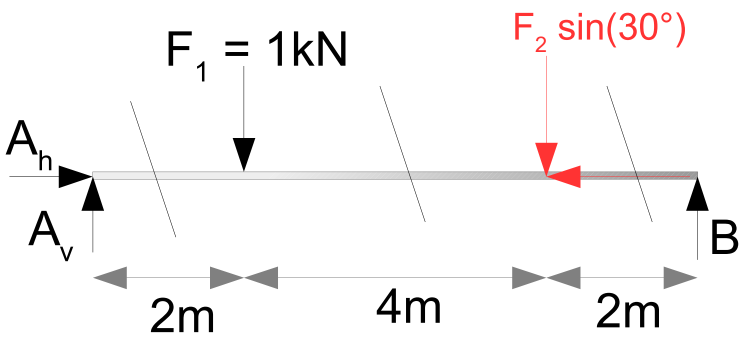
<u>Statische Unstetigkeiten</u>

- Einzellasten,
- Knicke in Streckenlasten.

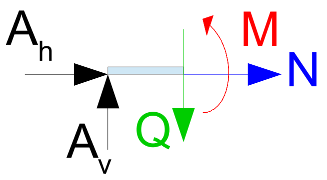
<u>Geometrische Unstetigkeiten</u>

- Knicke der Balkenachse,
- Verbindungselemente [wie beispielsweise Gelenke].

Für die Aufgabe a) müssen drei Schnitte am Balken durchgeführt werden:



Schnitt 1: $0 \leq x \leq 2m$



Wir beginnen damit die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, um die Schnittgrößen bestimmen zu können. Die Normalkraft kann aus der Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung berechnet werden. Die Querkraft aus der Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung und das Biegemomente aus der Momentengleichgewichtsbedingung.

Bestimmung der Normalkraft N_1:

$$\rightarrow: A_h + N_1 = 0 \quad N_1 = -A_h = -2{,}17\,kN$$

Bestimmung der Querkraft Q_1:

$$\downarrow: -A_v + Q_1 = 0 \quad Q_1 = A_v = 1{,}06\,kN$$

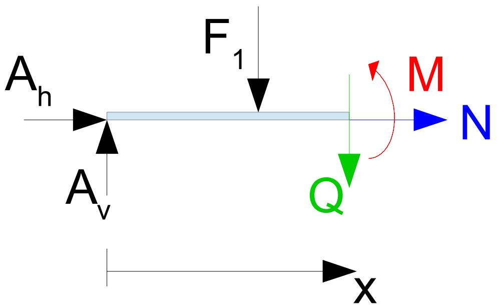
Bestimmung des Moments M_1:

Bei der Bestimmung des Moments wird der Bezugspunkt immer in den Schnitt gelegt, also zwischen 0m und 2m. Die x-Achse wird an den Beginn des Balkens gelegt, beginnt also im Lager A:

$$S: \quad -A_v \cdot x + M_1 = 0 \quad M_1 = A_v \cdot x = 1{,}06\,kN \cdot x$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

Schnitt 2: $2\text{m} \leq x \leq 6\text{m}$



Bestimmung der Normalkraft N_2:

$$\rightarrow: A_h + N_2 = 0 \quad N_2 = -A_h = -2{,}17\,\text{kN}$$

Bestimmung der Querkraft Q_2:

$$\downarrow: -A_v + F_1 + Q_2 = 0 \qquad Q_2 = A_v - F_1 = 1{,}06\,\text{kN} - 1\,\text{kN} = 0{,}06\,\text{kN}$$

Bestimmung des Moments M_2:

Bei der Bestimmung des Moments wird der Bezugspunkt immer in den Schnitt gelegt, also zwischen 2m und 6m. Die x-Achse wird an den Beginn des Balkens gelegt, beginnt also im Lager A:

$$\circlearrowleft S: \quad -A_v \cdot x + F_1 \cdot (x - 2\text{m}) + M_2 = 0$$

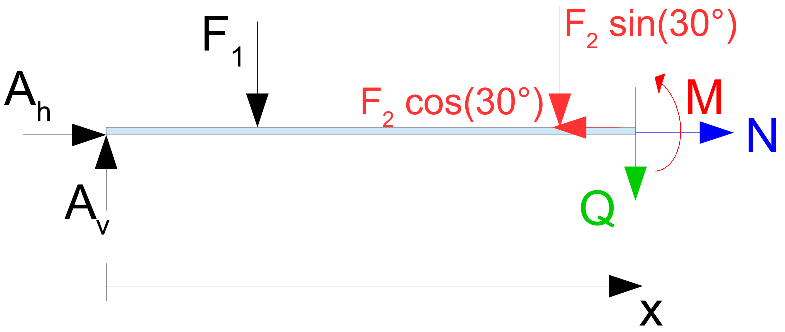
$$M_2 = 1{,}06\,\text{kN} \cdot x - 1\,\text{kN}(x - 2\text{m}) \qquad |\text{Klammer auflösen}$$

$$M_2 = 1{,}06\,\text{kN} \cdot x - 1\,\text{kN}\,x + 1\,\text{kN} \cdot 2\text{m} \qquad |\text{ zusammenfassen}$$

$$M_2 = 0{,}06\,\text{kN} \cdot x + 2\,\text{kNm}$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

Schnitt 3: $6m \leq x \leq 8m$



Bestimmung der Normalkraft N_3:

$$\rightarrow: A_h - F_2 \cos(30°) + N_3 = 0 \qquad N_3 = -A_h + F_2 \cos(30°) = -2{,}17\,kN + 2{,}17\,kN = 0$$

Bestimmung der Querkraft Q_3:

$$\downarrow: -A_v + F_1 + F_2 \sin(30°) + Q_3 = 0$$

$$Q_3 = A_v - F_1 - F_2 \sin(30°)$$

$$Q_3 = 1{,}06\,kN - 1\,kN - 2{,}5\,kN \sin(30°)$$

$$Q_3 = -1{,}19\,kN$$

Bestimmung des Moments M_3:

Bei der Bestimmung des Moments wird der Bezugspunkt immer in den Schnitt gelegt, also zwischen 6m und 8m. Die x-Achse wird an den Beginn des Balkens gelegt, beginnt also im Lager A:

$$\circlearrowleft S: \quad -A_v \cdot x + F_1 \cdot (x - 2m) + F_2 \sin(30°) \cdot (x - 6m) + M_3 = 0$$

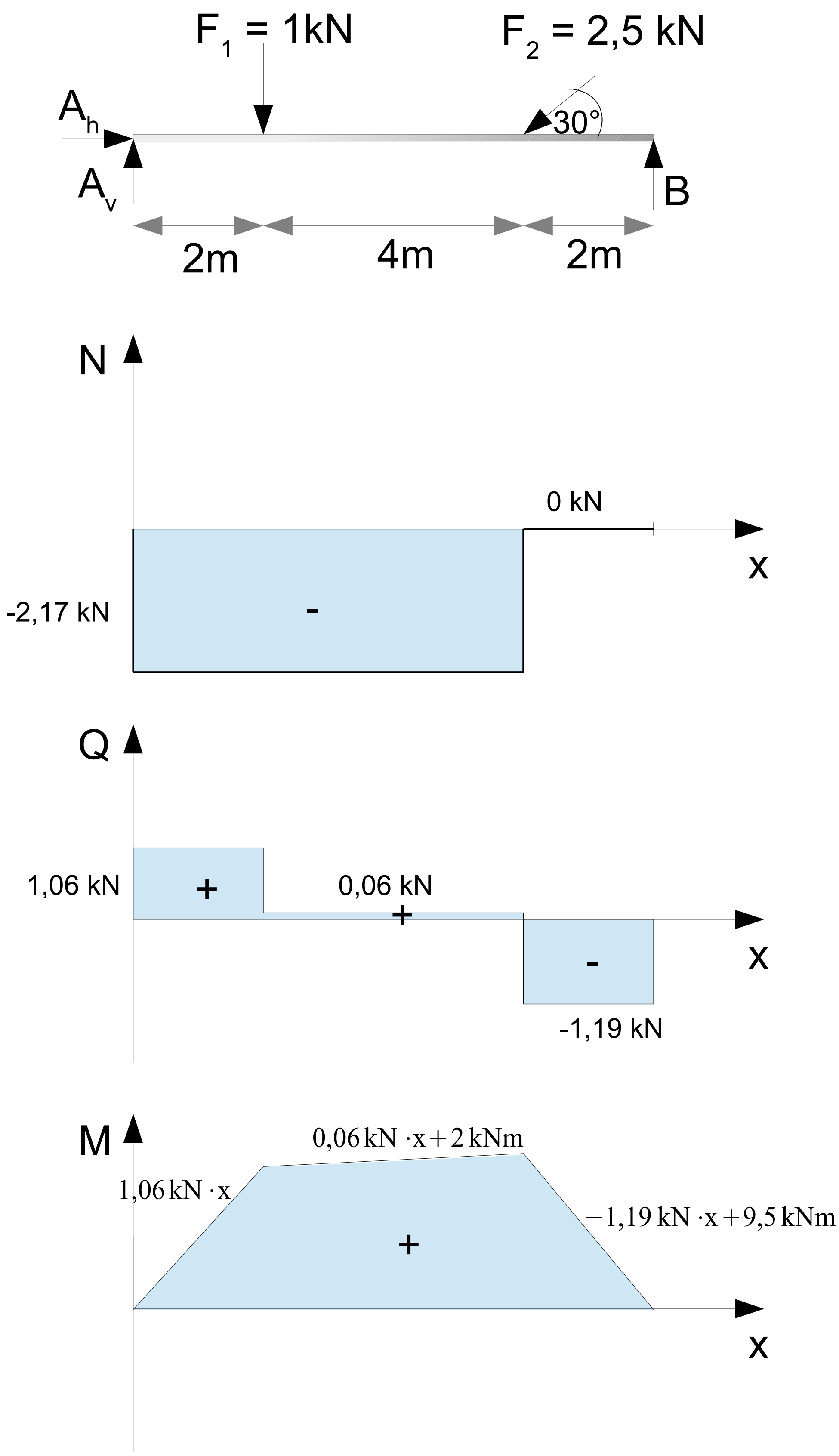
$$M_3 = A_v \cdot x - F_1 \cdot (x - 2m) - F_2 \sin(30°) \cdot (x - 6m) \quad |\text{Klammer auflösen}$$

$$M_3 = 1{,}06\,kN \cdot x - 1\,kN\,x + 1\,kN \cdot 2m - F_2 \sin(30°) \cdot x + F_2 \sin(30°) \cdot 6m$$

$$M_3 = -1{,}19\,kN \cdot x + 9{,}5\,kNm$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

Die Schnittgrößenverläufen sehen wie folgt aus:



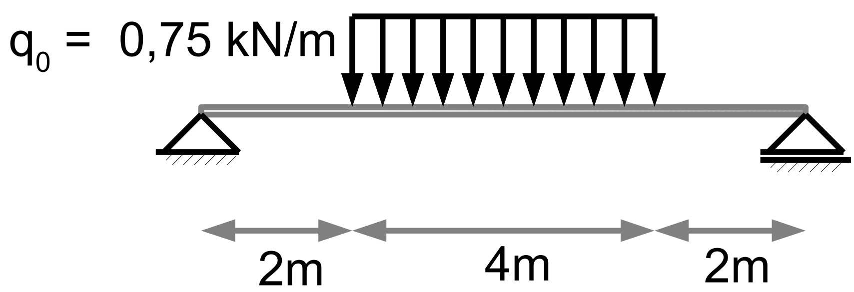
Zusammenhang zwischen Streckenlasten und Schnittgrößen

$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x)$	Ableitung der Normalkraft ergibt die negative horizontale Streckenlast.
$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)$	Ableitung der Querkraft ergibt die negative vertikale Streckenlast.
$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$	Ableitung des Biegemoments ergibt die Querkraft.
$\frac{dM^2(x)}{dx^2} = -q(x)$	Zweimaliges Ableiten des Biegemoments ergibt die negative vertikale Streckenlast.

Mittels Integration lassen sich die Schnittgrößenverläufe für die gegeben Streckenlasten bestimmen.

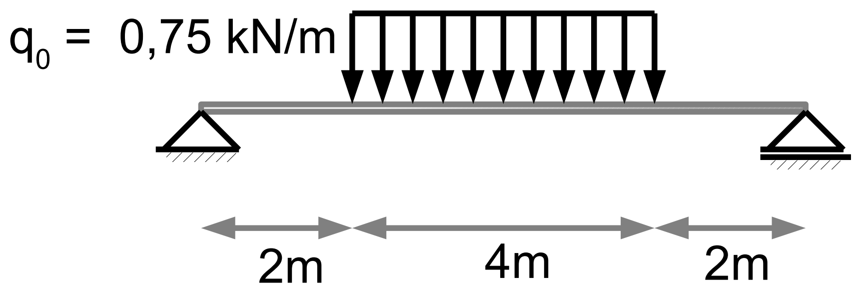
Streckenlast q(x)	**Querkraftverlauf Q(x)**	**Momentenverlauf M(x)**
0	konstant	linear
konstant	linear	quadratische Parabel
linear	quadratische Parabel	Kubische Parabel

Aufgabe



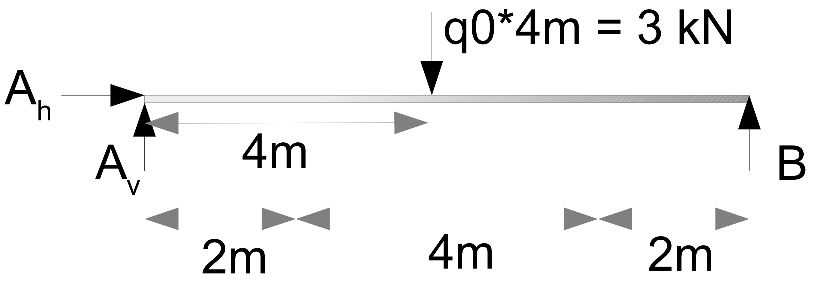
Bestimme die Schnittgrößen!

Lösung der Aufgabe:



Zunächst wird der Balken von den Lagern gelöst und die Streckenlast zu einer einzigen Kraft zusammengefasst. Dazu muss der Flächeninhalt der Fläche berechnet werden. Hierbei handelt es sich um eine rechteckige Fläche, demnach : q_0 * 4m

Die Einzelkraft greift im Schwerpunkt der Streckenlast an. Bei rechteckigen Fläche ist das die Mitte:



Bei einer Dreieckslast z.B. müsste der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet werden. Die resultierende Einzelkraft greift dann im Schwerpunkt der dreieckigen Fläche an (nicht die Mitte).

Zunächst werden die Lagerkräfte bestimmt:

Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung:

$$\rightarrow: A_h = 0$$

Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung:

$$\downarrow: -A_v + q_0 \cdot 4m - B = 0$$

Momentengleichgewichtsbedingung um A:

$$\curvearrowleft A \quad B \cdot 8m - (q_0 \cdot 4m) \cdot 4m = 0$$

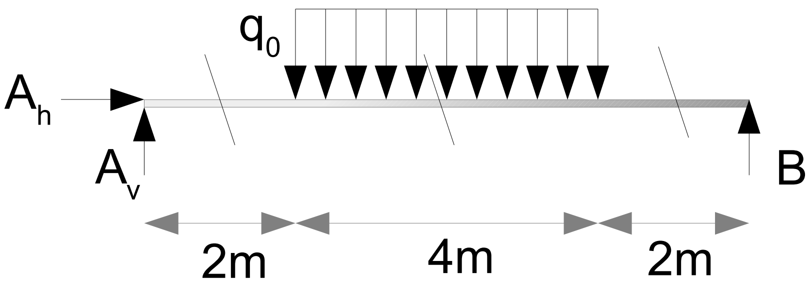
$$B = \frac{(q_0 \cdot 4m) \cdot 4m}{8m} = \frac{(0{,}75\,kN/m \cdot 4m) \cdot 4m}{8m} = 1{,}5\,kN$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung:

$$A_v = q_0 \cdot 4m - B = 0{,}75\,kN/m \cdot 4m - 1{,}5\,kN = 1{,}5\,kN$$

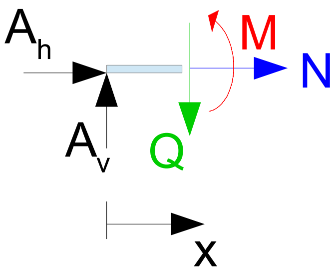
Die Einzellast, welche im Schwerpunkt der Streckenlast liegt (mittig) greift auch genau in der Mitte des Balkens an. Das bedeutet, dass sich diese auf beide Lager gleichmäßig verteilt. Die horizontale Lagerkraft fällt weg, weil keine horizontalen Kräfte an den Balken angreifen.

Nachdem die Auflagerkräfte bestimmt sind, können als nächstes die Schnittgrößen berechnet werden:



Liegt eine Streckenlast q(x) vor so muss zusätzlich ein Schnitt zwischen dieser Last durchgeführt werden. Insgesamt werden also drei Schnitte betrachtet:

Schnitt 1: $0 \le x \le 2\text{m}$



Wir beginnen damit die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, um die Schnittgrößen bestimmen zu können. Die Normalkraft kann aus der Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung berechnet werden. Die Querkraft aus der Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung und das Biegemomente aus der Momentengleichgewichtsbedingung.

Bestimmung der Normalkraft N_1:

$$\rightarrow: A_h + N_1 = 0 \quad N_1 = -A_h = 0$$

Bestimmung der Querkraft Q_1:

$$\downarrow: -A_v + Q_1 = 0 \quad Q_1 = A_v = 1{,}5\,\text{kN}$$

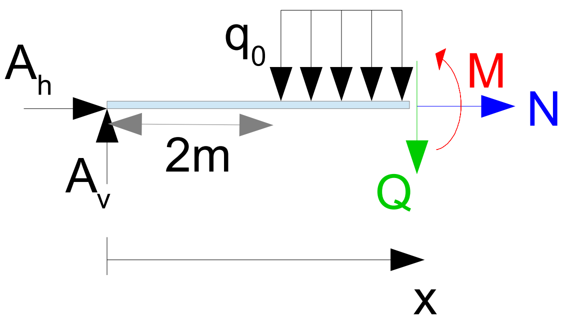
Bestimmung des Moments M_1:

Bei der Bestimmung des Moments wird der Bezugspunkt immer in den Schnitt gelegt, also zwischen 0m und 2m. Die x-Achse wird an den Beginn des Balkens gelegt, beginnt also im Lager A:

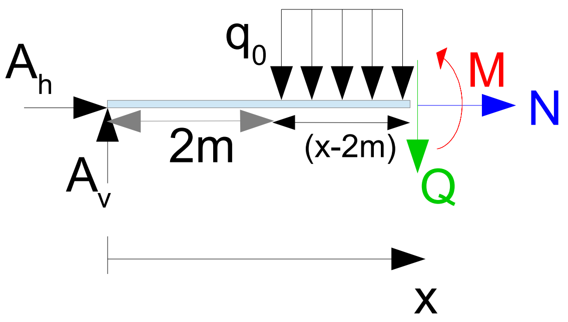
$$\circlearrowleft S: \quad -A_v \cdot x + M_1 = 0 \qquad M_1 = A_v \cdot x = 1{,}5\,\text{kN} \cdot x$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

Schnitt 2: $2m \leq x \leq 6m$



Es wird der Schnitt durch die Streckenlast durchgeführt. Es ist nun sinnvoll die Streckenlast mit dem Integral zu berücksichtigen. Dazu benötigen wir q(x). Bei einer rechteckigen Streckenlast ist $q(x) = q_0$.



Bestimmung der Normalkraft N_2:

$$\rightarrow: A_h + N_2 = 0 \quad N_2 = -A_h = 0\,kN$$

Bestimmung der Querkraft Q_2:

$$\downarrow: -A_v + \int q(x)\,dx + Q_2 = 0$$

Die Streckenlast wirkt nach unten in positive Richtung, wird also positiv berücksichtigt.

Einsetzen von $q(x) = q_0$:

$$\downarrow: -A_v + \int_{2m}^{x} q_0\,dx + Q_2 = 0$$

Die Integration findet von 2m bis x statt.

$$Q_2 = A_v - \int_{2m}^{x} q_0\,dx$$

$$Q_2 = A_v - q_0 \cdot (x - 2m) = 1{,}5\,kN - 0{,}75\,kN/m\,(x - 2m)$$

$$Q_2 = -0{,}75\,kN/m \cdot x + 3\,kN$$

Bestimmung des Moments M_2:

Streckenlast un Schnittmoment weisen den folgenden Zusammenhang auf:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

Daraus folgt:

$$M(x) = -\int\int q(x)\,dx\,dx$$

In Form für die Gleichgewichtsbedingung:

$$M(x) + \int\int q(x)\,dx\,dx = 0$$

$$\circlearrowleft S: \quad -A_v \cdot x + \int_{2m}^{x}\int_{2m}^{x} q(x)\,dx\,dx + M_2 = 0$$

$$M_2 = A_v \cdot x - \int_{2m}^{x}\int_{2m}^{x} q(x)\,dx\,dx$$

$$M_2 = A_v \cdot x - \int_{2m}^{x}\int_{2m}^{x} q_0\,dx\,dx$$

$$M_2 = A_v \cdot x - \int_{2m}^{x} q_0 \cdot (x-2m)\,dx$$ 1. Integration (Inneres Integral)

$$M_2 = A_v \cdot x - \left[\frac{q_0}{2 \cdot 1} \cdot (x-2m)^2\right]_{2m}^{x}$$

$$M_2 = A_v \cdot x - \left[\frac{q_0}{2} \cdot (x-2m)^2 - \frac{q_0}{2} \cdot (2m-2m)^2\right]$$

$$M_2 = A_v \cdot x - \frac{q_0}{2} \cdot (x-2m)^2$$ Klammer auflösen

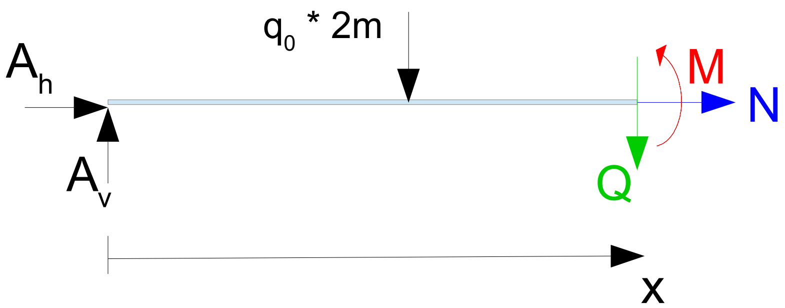
$$M_2 = A_v \cdot x - \frac{1}{2} q_0 x^2 + 2m \cdot q_0 \cdot x - 2m^2 q_0$$

$$M_2 = 1{,}5\,kN \cdot x - \frac{1}{2} 0{,}75\,kN/m \cdot x^2 + 2m \cdot 0{,}75\,kN/m \cdot x - 2m^2 \cdot 0{,}75\,kN/m$$

$$M_2 = -0{,}375\,kN/m \cdot x^2 + 3\,kN \cdot x - 1{,}5\,kNm$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

Schnitt 3: $6\text{m} \le x \le 8\text{m}$



Bestimmung der Normalkraft N_3:

$$\rightarrow: A_h + N_3 = 0 \quad N_3 = -A_h = 0\,\text{kN}$$

Bestimmung der Querkraft Q_3:

$$\downarrow: -A_v + q_0 \cdot 4\text{m} + Q_3 = 0$$

$$Q_3 = A_v - q_0 \cdot 4\text{m} = 1{,}5\,\text{kN} - 0{,}75\,\text{kN/m}\; 4\text{m} = -1{,}5\,\text{kN}$$

Bestimmung des Moments M_3:

$$\circlearrowleft S: \quad -A_v \cdot x + q_0 \cdot 4\text{m} \cdot (x - 4\text{m}) + M_3 = 0$$

$$M_3 = A_v \cdot x - q_0 \cdot 4\text{m} \cdot (x - 4\text{m})$$

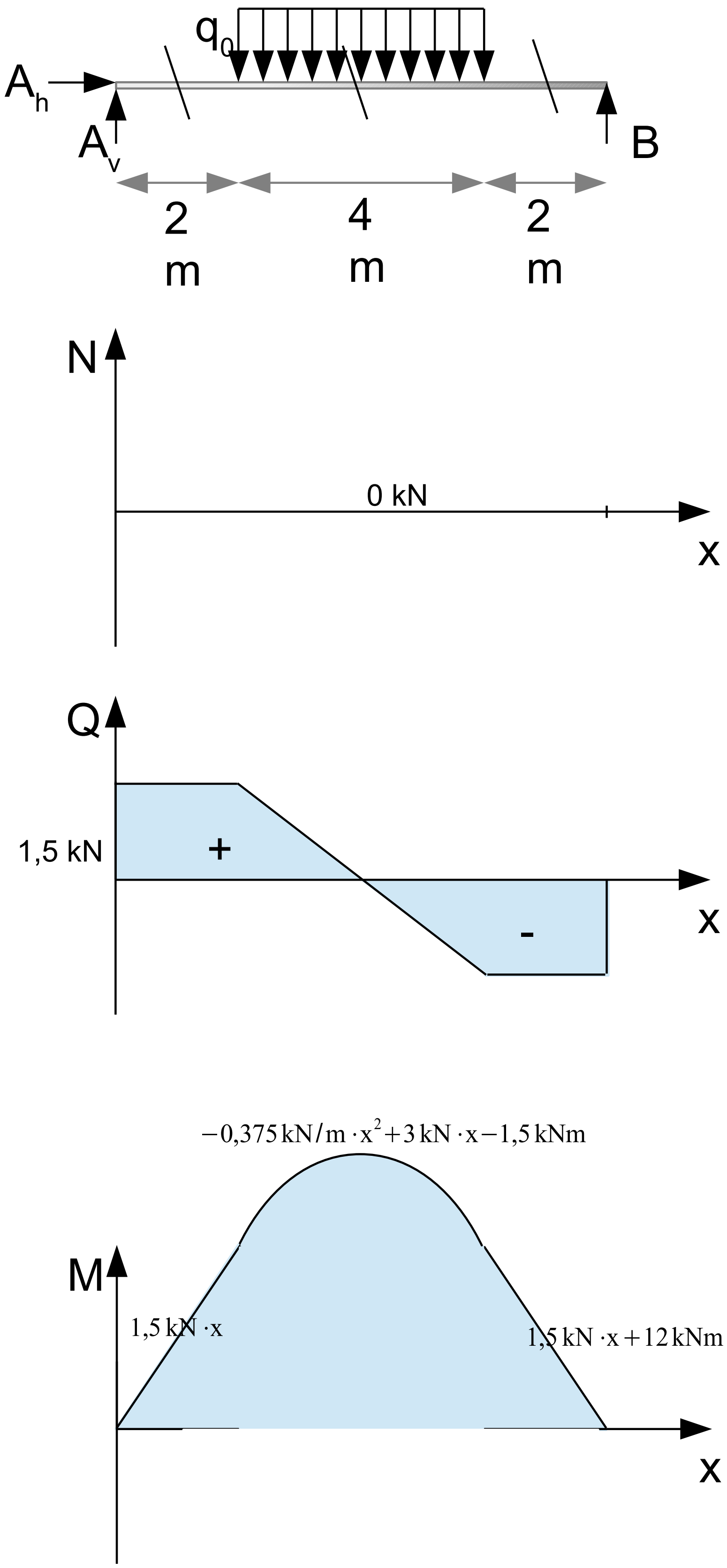
$$M_3 = 1{,}5\,\text{kN} \cdot x - 0{,}75\,\text{kN/m} \cdot 4\text{m} \cdot (x - 4\text{m})$$

$$M_3 = 1{,}5\,\text{kN} \cdot x - 3\,\text{kN} \cdot x + 3\,\text{kN} \cdot 4\text{m}$$

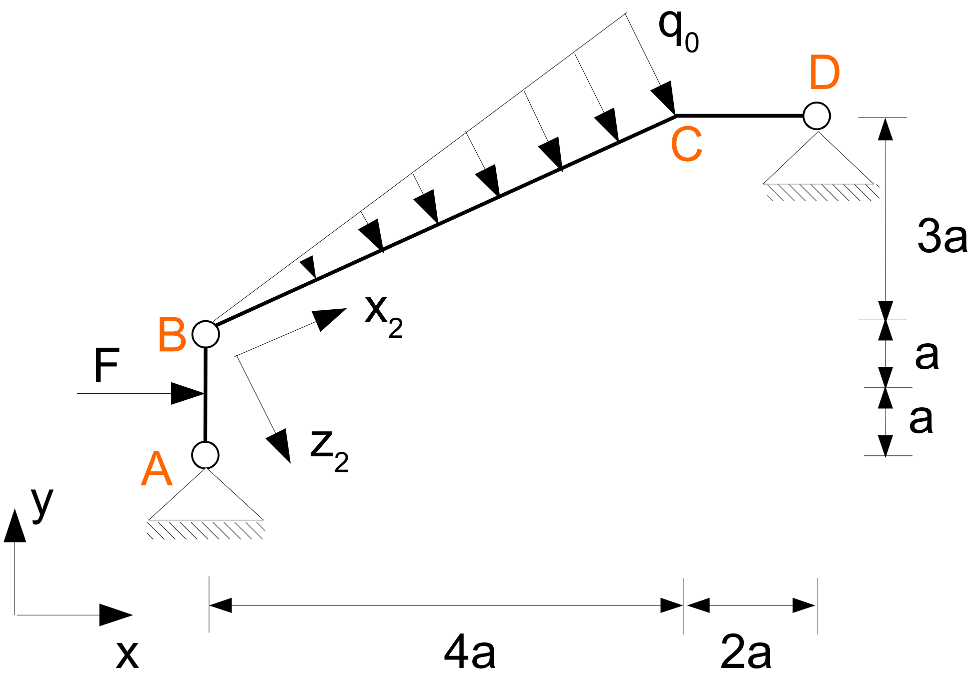
$$M_3 = 1{,}5\,\text{kN} \cdot x + 12\,\text{kNm}$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

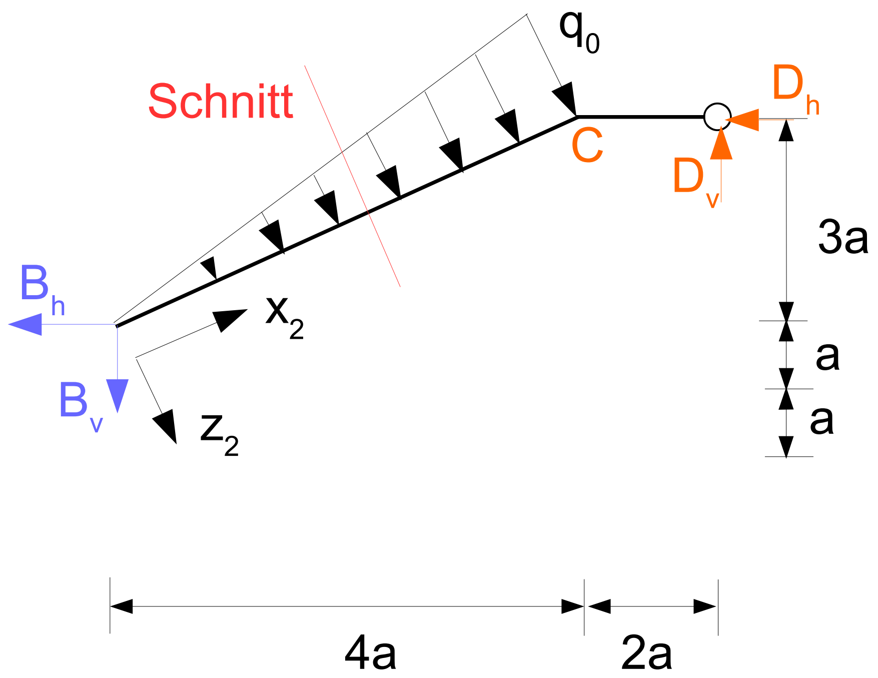
Die Schnittgrößenverläufe ergeben sich wie folgt:



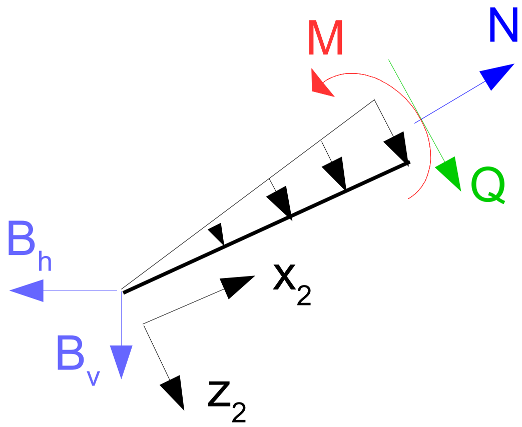
Aufgabe:



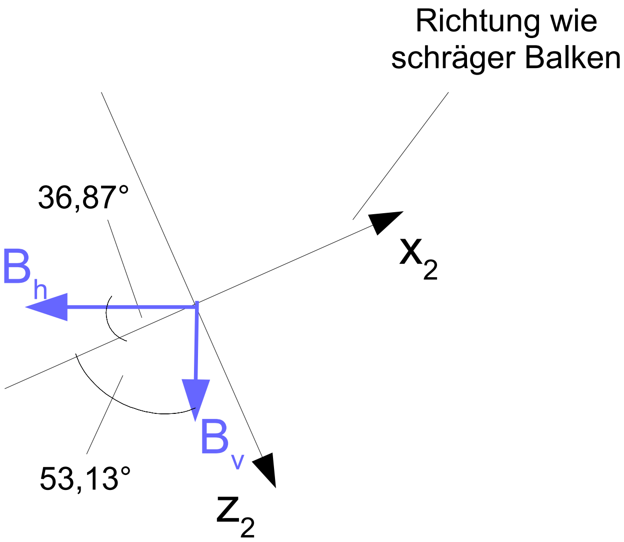
Berechne die Schnittgrößen für den Bereich BC in dem angegebenen lokalen Koordinatensystem und gebe die Randwerte bei B und C an.



Linkes Schnittufer:



Kräfterzerlegung:



$B_h \cdot \cos(36{,}87°) = B_h \cdot \frac{4}{5}$ Kraftkomponente in negative x_2-Richtung

$B_h \cdot \sin(36{,}87°) = B_h \cdot \frac{3}{5}$ Kraftkomponente in negative z_2-Richtung

$B_v \cdot \cos(53{,}13°) = B_v \cdot \frac{3}{5}$ Kraftkomponente in negative x_2-Richtung

$B_v \cdot \sin(53{,}13°) = B_v \cdot \frac{4}{5}$ Kraftkomponente in positive z_2-Richtung

Normalkraftverlauf im Abschnitt BC

: $$-B_h \cdot \frac{4}{5} - B_v \cdot \frac{3}{5} + N = 0$$

$$N = -\frac{F}{2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{29}{9} F \cdot \frac{3}{5}$$

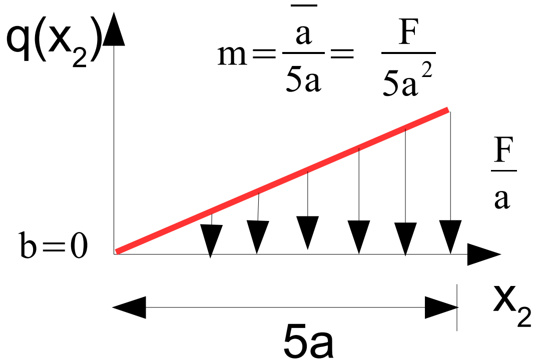
$$\boxed{N = -\frac{7}{3} F}$$

Normalkraftverlauf BC

Querkraftverlauf im Abschnitt BC

Zunächst bestimmen wir die Geradengleichung:

$$m = \frac{\frac{F}{a}}{5a} = \frac{F}{5a^2}$$



$$q(x_2) = m\,x_2 + b$$

m Steigung der roten Geraden
b Beginn der Funktion auf der q(x) - Achse

Es ergibt sich die Geradengleichung zu:

$$q(x_2) = \frac{F}{5a^2} x_2$$

Dann stellen wir die Gleichgewichtsbedingung in z_2-Richtung auf um Q zu bestimmen. Es gilt:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)$$

$$Q(x) = -\int q(x)\,dx$$

Die Streckenlast wird demnach integriert.

$\searrow$:

$$-B_h \cdot \frac{3}{5} + B_v \cdot \frac{4}{5} + \int_0^{x_2} q(x_2)\,dx_2 + Q = 0$$

$$q(x_2) = \frac{F}{5a^2} x_2$$ Geradengleichung (lineare Funktion der Ausgangslast).

$$-B_h \cdot \frac{3}{5} + B_v \cdot \frac{4}{5} + \int_0^{x_2} \frac{F}{5a^2} x_2\,dx_2 + Q = 0$$

$$Q = B_h \cdot \frac{3}{5} - B_v \cdot \frac{4}{5} - \int_0^{x_2} \frac{F}{5a^2} x_2\,dx_2$$

$$Q = B_h \cdot \frac{3}{5} - B_v \cdot \frac{4}{5} - \left[\frac{F}{5a^2} \cdot \frac{1}{2} x_2^2\right]_0^{x_2}$$

$$Q = B_h \cdot \frac{3}{5} - B_v \cdot \frac{4}{5} - \frac{F}{10a^2} x_2^2$$

Einsetzen von B_v = -29/18 F und B_h = -F/2:

$$Q = -\frac{F}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{29}{18} F \cdot \frac{4}{5} - \frac{F}{10a^2} x_2^2$$

$$\boxed{Q = \frac{89}{90} F - \frac{F}{10a^2} x_2^2}$$ **Querkraftverlauf BC**

Momentenverlauf im Abschnitt BC

Es gilt:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

$$M(x) = -\int\int q(x)\,dx\,dx$$

$$\circlearrowleft: \quad B_v \cdot \frac{4}{5} \cdot x_2 - B_h \cdot \frac{3}{5} \cdot x_2 + \int_0^{x_2}\int_0^{x_2} q(x_2)\,dx_2\,dx_2 + M = 0$$

$$B_v \cdot \frac{4}{5} \cdot x_2 - B_h \cdot \frac{3}{5} \cdot x_2 + \int_0^{x_2}\int_0^{x_2} \frac{F}{5a^2} x_2\,dx_2\,dx_2 + M = 0$$

$$B_v \cdot \frac{4}{5} \cdot x_2 - B_h \cdot \frac{3}{5} \cdot x_2 + \int_0^{x_2} \frac{F}{10a^2} x_2^2\,dx_2 + M = 0$$

$$B_v \cdot \frac{4}{5} \cdot x_2 - B_h \cdot \frac{3}{5} \cdot x_2 + \frac{F}{10a^2}\frac{1}{3} x_2^3 + M = 0$$

$$B_v \cdot \frac{4}{5} \cdot x_2 - B_h \cdot \frac{3}{5} \cdot x_2 + \frac{F}{30a^2} x_2^3 + M = 0$$

$$M = -B_v \cdot \frac{4}{5} \cdot x_2 + B_h \cdot \frac{3}{5} \cdot x_2 - \frac{F}{30a^2} x_2^3$$

Einsetzen von B_v = -29/18 F und B_h = -F/2:

$$M = \frac{29}{18} \cdot \frac{4}{5} \cdot x_2 - \frac{F}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot x_2 - \frac{F}{30a^2} x_2^3$$

$$\boxed{M = \frac{89}{90} F \cdot x_2 - \frac{F}{30a^2} x_2^3}$$ **Momentenverlauf BC**

Berücksichtigung von Integrationskonstanten

Es ist ebenfalls möglich die Schnittgrößen über die Streckenlasten zu bestimmen ohne die Auflager- und Gelenkkräfte zu bestimmen. Dabei handelt es sich um eine unbestimmte Integration. Hierbei fallen Integrationskonstanten an:

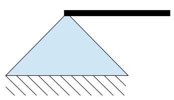
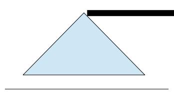
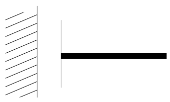
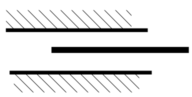
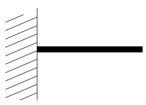
$$N(x) = -\int n(x)\,dx + C_1$$

$$Q(x) = -\int q(x)\,dx + C_2$$

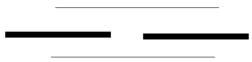
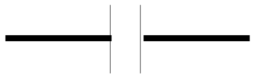
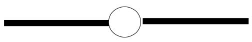
$$M(x) = -\int\int q(x)\,dx\,dx + C_2 \cdot x + C_3$$

Die unbekannten Integrationskonstanten können aus den Randbedingungen bzw. Übergangsbedingungen bestimmt werden:

Randbedingungen

Lager	N(x)	Q(x)	M(x)
	$\neq 0$	$\neq 0$	0
	0	$\neq 0$	0
	$\neq 0$	0	$\neq 0$
	0	$\neq 0$	$\neq 0$
	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
	0	0	0

Zur Bestimmung der Randbedingungen können nur die Schnittgrößen mit dem Wert **gleich Null** herangezogen werden.

Gelenk	N(x)	Q(x)	M(x)
	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$
	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$

Ist die Streckenverlauf so gegeben, dass an den Enden die Querkraft den Wert Null annimmt (siehe obige Tabelle), so kann der gesamte Querkraftverlauf mittels der Gleichung:

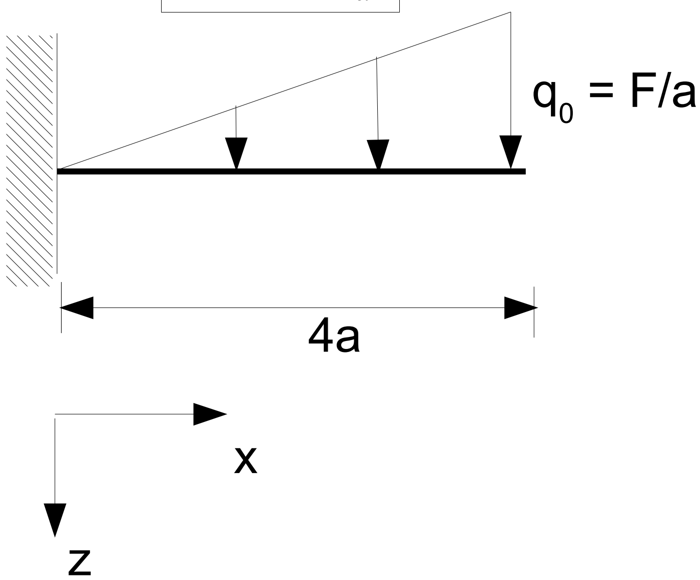
$$\boxed{Q(x) = -\int q(x)\,dx + C_2}$$

bestimmt werden. Dabei müssen die Auflagerkräfte bzw. Gelenkkräfte nicht zusätzlich berücksichtigt werden. Dieser Anteil folgt aus der Integrationskonstante C_2. In unserem obigen Beispiel nimmt die Querkraft an beiden Enden nicht den Wert Null an, weshalb hier -am linken Schnittufer – die Gelenkkräfte B_h und B_v mit berücksichtigt werden müssen.

Beispiel:

$$\boxed{m = \frac{\frac{F}{a}}{4a} = \frac{F}{4a^2}}$$

$$\boxed{b = 0}$$



$$\boxed{q(x) = \frac{F}{4a^2}\,x}$$

Wir können die obigen Formel anwenden ohne die Lagerkräfte zusätzlich zu berücksichtigen, weil die Querkraft am freien Ende (rechts) den Wert Null annimmt:

Einsetzen in den Querkraftverlauf

$$Q(x) = -\int \frac{F}{4a^2}\,x\,dx + C_2$$

Integration:

$$Q(x) = -\frac{F}{8a^2}\,x^2 + C_2$$

Am freien Ende nimmt die Querkraft den Wert Null an. Das freie Ende ist gegeben bei x = 4a:

$$Q(4a) = -\frac{F}{8a^2}\,(4a)^2 + C_2 = 0$$

$$C_2 = \frac{F}{8a^2}\,(4a)^2$$

$$C_2 = 2F$$

Einsetzen in den Querkraftverlauf:

$$\boxed{Q(x) = -\frac{F}{8a^2}\,x^2 + 2F}$$

Alternativ die Auflagerkräfte berechnen ($A_v = 2F$) und dann aus den Gleichgewichtsbedingungen den Querkraftverlauf bestimmen (ohne Integrationskonstante):

$$\downarrow: -A_v + \int q(x)\,dx + Q = 0$$

$$Q = A_v - \int q(x)\,dx$$

$$Q = A_v - \int q(x)\,dx$$

$$Q = 2F - \int \frac{F}{4a^2}\,x\,dx$$

$$\boxed{Q = 2F - \frac{F}{8a^2}x^2}$$

Es folgt derselbe Querkraftverlauf. Wirkt also nur die Streckenlast und ist an mindestens einen der Enden die Querkraft Null (Tabelle), so kann man mittels der Integration die Querkraft auch ohne Auflager- bzw. Gelenkkräfte berechnen.

Auch der **Momentenverlauf** kann über die unbestimmte Integration mittels Integrationskonstanten bestimmt werden, weil für das freie Ende M = 0 gilt:

$$M(x) = -\int\int q(x)\,dx\,dx + C_2 \cdot x + C_3$$

$$M(x) = -\int\int \frac{F}{4a^2}\,x\;dx\,dx + C_2 \cdot x + C_3$$

$$M(x) = -\int \frac{F}{8a^2}\,x^2\,dx + C_2 \cdot x + C_3$$

$$M(x) = -\frac{F}{24a^2}\,x^3 + C_2 \cdot x + C_3$$

$$C_2 = 2F$$

$$M(x) = -\frac{F}{24a^2}\,x^3 + 2F \cdot x + C_3$$

Am freien Ende x = 4a nimmt der Momentenverlauf den Wert Null an M(4a) = 0:

$$M(4a) = -\frac{F}{24a^2}\,(4a)^3 + 2F \cdot 4a + C_3 = 0$$

$$C_3 = -\frac{8}{3}\,F \cdot a + 8F \cdot a$$

$$C_3 = \frac{16}{3}\,F \cdot a$$

Einsetzen in den Momentenverlauf:

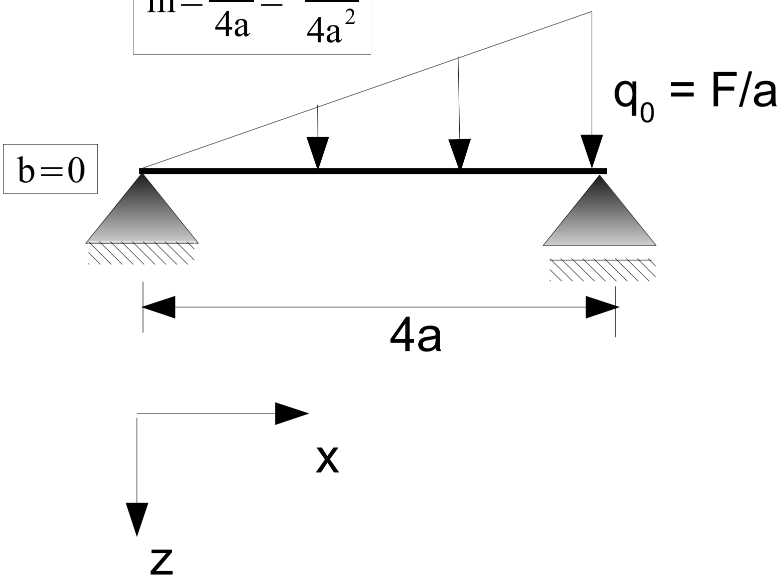
$$\boxed{M(x) = -\frac{F}{24a^2}\,x^3 + 2F \cdot x + \frac{16}{3}F \cdot a}$$ Momentenverlauf

PROBE:

$$Q(x) = M'(x) = -\frac{F}{8a^2}\,x^2 + 2F$$

Beispiel:

$$\boxed{m = \frac{\frac{F}{a}}{4a} = \frac{F}{4a^2}}$$



$$\boxed{q(x) = \frac{F}{4a^2}\, x}$$

In diesem Beispiel ist es ebenfalls möglich den Querkraftverlauf und den Momentenverlauf zu bestimmen ohne die Lagerkräfte zu berücksichtigen, weil für Los- und Festlager das Moment zu Null wird.

$$Q(x) = -\int \frac{F}{4a^2}\, x\, dx + C_2$$

$$\boxed{Q(x) = -\frac{F}{8a^2}\, x^2 + C_2}$$

C_2 kann noch nicht berechnet werden. Wir betrachten als nächsten den Momentenverlauf:

$$M(x) = -\int\int \frac{F}{4a^2}\, x \; dx\, dx + C_2 \cdot x + C_3$$

$$M(x) = -\int \frac{F}{8a^2}\, x^2\, dx + C_2 \cdot x + C_3$$

$$\boxed{M(x) = -\frac{F}{24a^2}\, x^3 + C_2 \cdot x + C_3}$$

An Loslager bei x = 4a und am Festlager bei x = 0 nimmt der Momentenverlauf den Wert Null an:

$$M(x=0) = -\frac{F}{24a^2}\,0^3 + C_2 \cdot 0 + C_3 = 0 \quad (1)$$

$$M(x=4a) = -\frac{F}{24a^2}\,(4a)^3 + C_2 \cdot 4a + C_3 = 0 \quad (2)$$

Aus (1) ergibt sich:

$$C_3 = 0$$

Aus (2) ergibt sich (nach Einsetzen von $C_3 = 0$):

$$C_2 = \frac{\frac{F}{24a^2}(4a)^3}{4a}$$

$$C_2 = \frac{8}{12}F$$

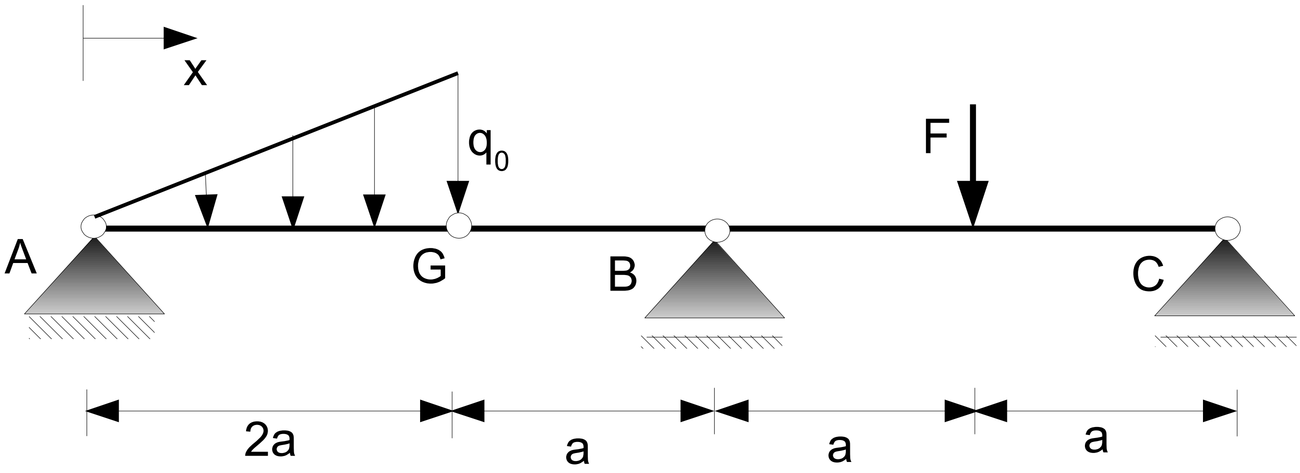
Es ergeben sich damit Querkraft- und Momentenverlauf zu:

$$\boxed{Q(x) = -\frac{F}{8a^2}x^2 + \frac{8}{12}F}$$

$$\boxed{M(x) = -\frac{F}{24a^2}x^3 + \frac{8}{12}F \cdot x}$$

Wichtig ist immer, dass mittels der Randbedingungen die beiden Integrationskonstante C_1 und C_2 berechnet werden können, um Querkraft- und Momentenverlauf mittels der unbestimmten Integration zu berechnen.

Aufgabe



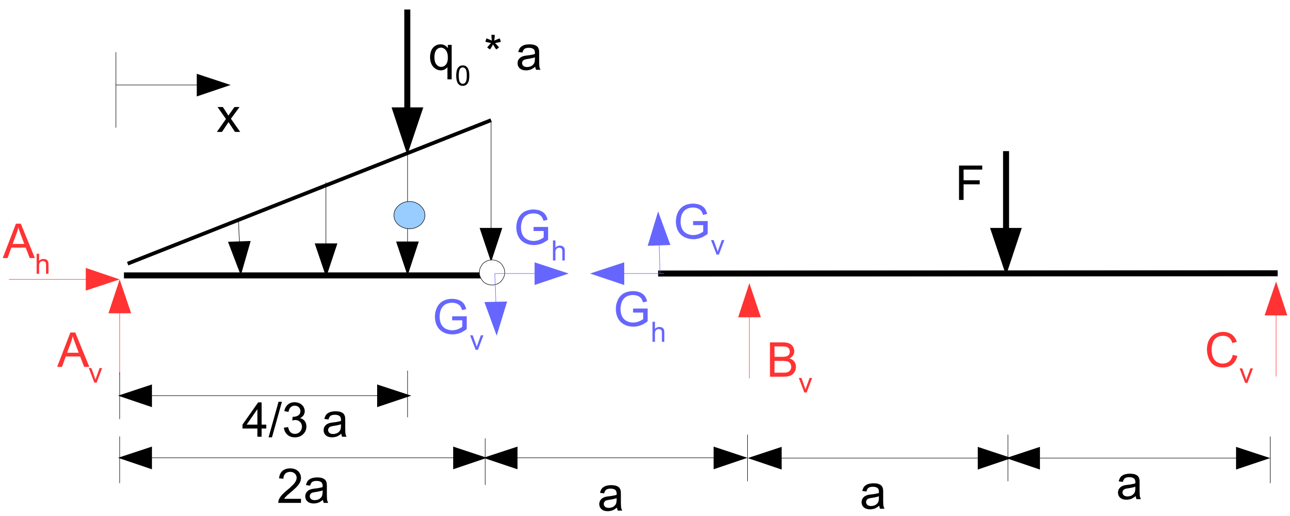
a) Berechne alle Auflager- und Gelenkkräfte!

b) Skizziere die Schnittgrößenverläufe in Abhängigkeit von der Koordinate x und gebe die Eckwerte an!

Gegeben: a, q_0, $F = q_0\, a$

Lösung der Aufgabe

Freischnitt:



Bestimmung der Auflagerreaktionen

1. Teilsystem

$$\rightarrow: A_h + G_h = 0$$

$$\uparrow: A_v - G_v - q_0 \cdot a = 0$$

$$\text{Moment um A}: \; -G_v \cdot 2a - (q_0 \cdot a) \cdot \frac{4}{3} a = 0$$

$$G_v = \frac{-\frac{4}{3} q_0 a^2}{2a} = -\frac{4}{6} q_0 a$$

Mit q_0 = F/a:

$$\boxed{G_v = -\frac{4}{6} F}$$

Einsetzen in die vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$A_v + \frac{4}{6} q_0 a - q_0 \cdot a = 0$$

$$A_v = -\frac{4}{6} q_0 a + q_0 \cdot a = \frac{1}{3} q_0 a$$

Mit q_0 = F/a:

$$\boxed{A_v = \frac{1}{3} F}$$

2. Teilsystem:

$$\boxed{\rightarrow: -G_h = 0}$$

Daraus folgt

$\boxed{A_h = 0}$ horizontale Gleichgewichtsbedingung des 1. Teilsystems

$$\uparrow: G_v + B_v + C_v - F = 0$$

Einsetzen von $G_v = -4/6\ F$

$$-\frac{4}{6}F + B_v + C_v - F = 0$$

$$\text{Moment um } C: -G_v \cdot 3a - B_v \cdot 2a + F \cdot a = 0$$

Einsetzen von $G_v = -4/6\ F$:

$$\frac{4}{6}F \cdot 3a - B_v \cdot 2a + F \cdot a = 0$$

Auflösen nach B_v:

$$\boxed{B_v = \frac{2F + F}{2} = \frac{3}{2}F}$$

Einsetzen in die vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$-\frac{4}{6}F + \frac{3}{2}F + C_v - F = 0$$

Auflösen nach C_v:

$$C_v = \frac{4}{6}F - \frac{3}{2}F + F$$

$$\boxed{C_v = \frac{1}{6}F}$$

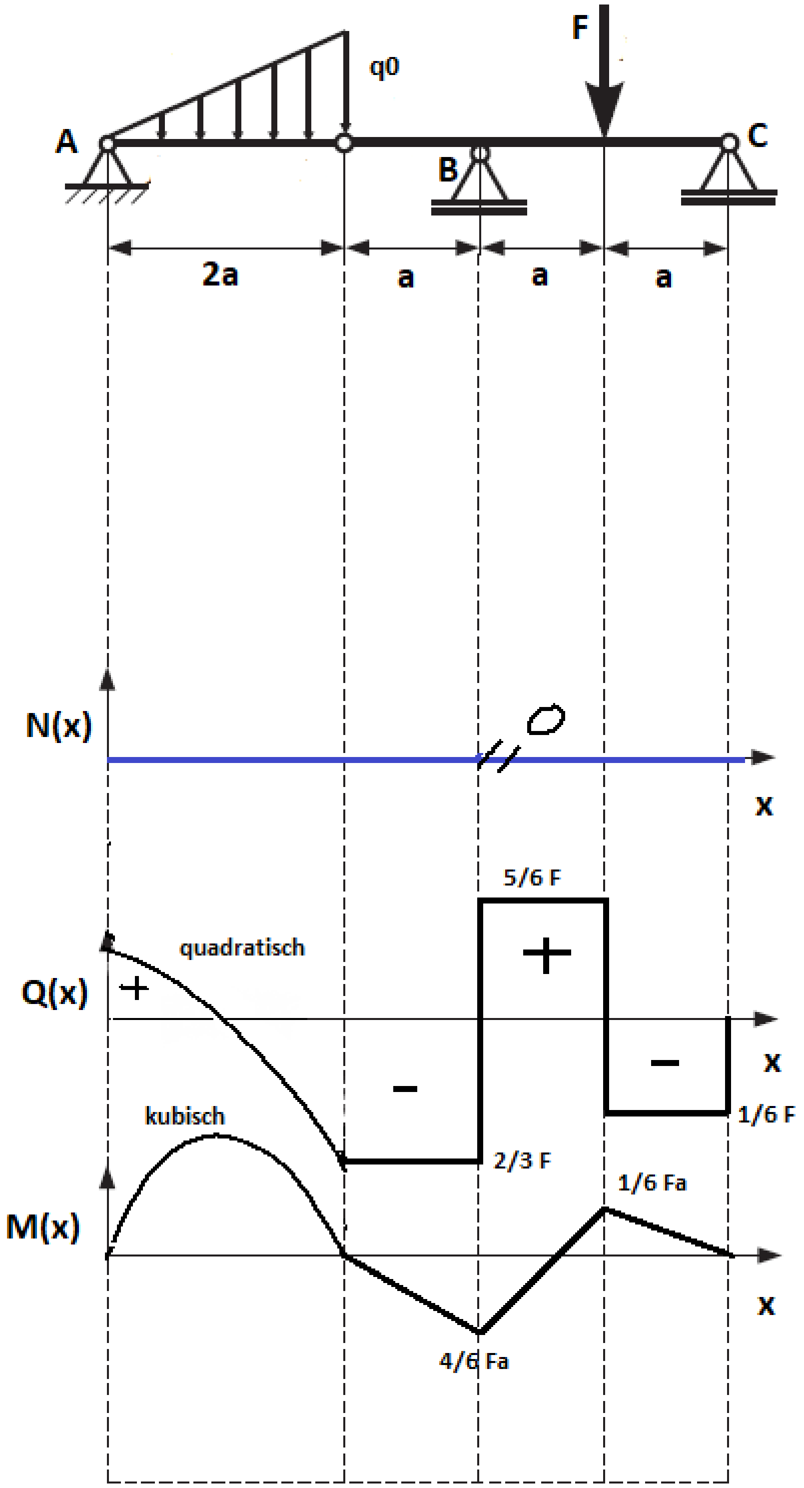
Lösung b):

dreieckige Streckenlast = lineare Funktion q(x) = quadratischer Querkraftverlauf = kubischer Momentenverlauf

Nulldurchgang (Schnitt mit x-Achse) des Querkraftverlaufes bei maximalem Momentenverlauf.

keine Streckenlast = konstanter Querkraftverlauf = linearer Momentenverlauf

Wir erhalten also:


F
q0
A
B
C
2a
a
a
a
N(x)
x
5/6 F
quadratisch
Q(x)
+
-
+
-
x
1/6 F
kubisch
2/3 F
1/6 Fa
M(x)
x
4/6 Fa