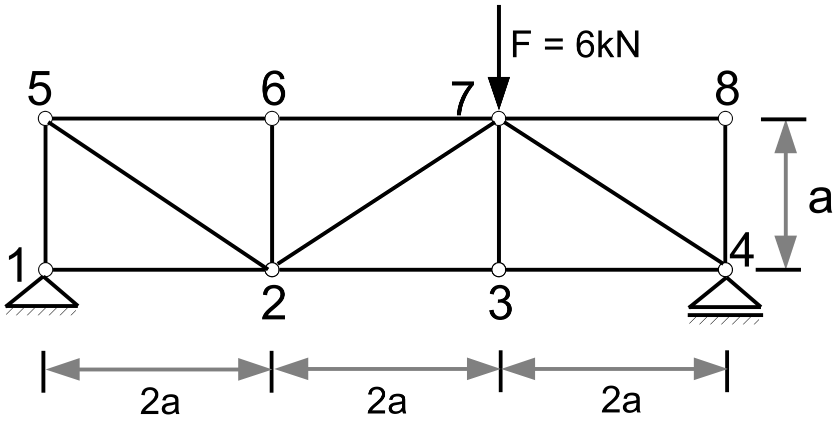
Webinar: Statik
Thema: Ritterschnittverfahren

Aufgabe zum Ritterschnittverfahren



Es gilt a = 2m.

a) Prüfe das Fachwerk auf statische Bestimmtheit!

b) Bestimme die Auflagerkräfte!

c) Überprüfe das Fachwerk auf Nullstäbe!

d) Bestimme die Stabkraft S_{56}, S_{27} und S_{34} mittels Ritterschnittverfahren!

Lösung der Aufgabe:

a) Prüfe das Fachwerk auf statische Bestimmtheit!

Wir prüfen das Fachwerk zunächst auf statische Bestimmtheit. Jeder Knoten befindet sich im Gleichgewicht, d.h. die Summe aller an diesen Knoten angreifenden Stabkräfte ist gleich Null:

$$\sum F_{ix} = R_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = R_y = 0$$

Es stehen pro Knoten 2 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Die vertikale und die horizontale Gleichgewichtsbedingung. Demnach können pro Knoten 2 unbekannte Kräfte (Stabkräfte s und Lagerkräfte r) ermittelt werden.

Die statische Bestimmtheit wird also berechnet durch:

$$2k = r + s$$

Wir haben insgesamt 8 Knoten gegeben. Das Stabwerk besitzt 13 Stäbe (s= 13 Stabkräfte) und 2 Lager mit r = 3 Lagerkräften (Loslager = vertikale Kraft, Festlager = vertikale und horizontale Kraft).

Wir erhalten also:

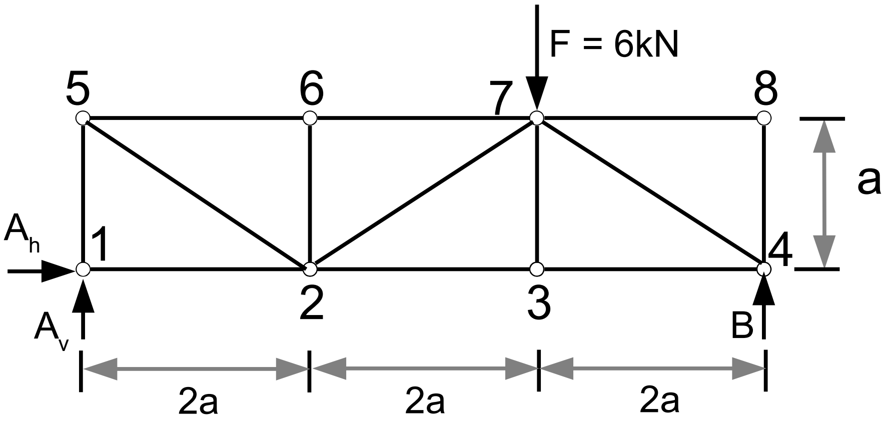
$$2 \cdot 8 = 3 + 13$$

$$16 = 16$$

Das Fachwerk ist statisch bestimmt!

b) Bestimme die Auflagerkräfte!

Im nächsten Schritt wollen wir die Auflagerkräfte bestimmen. Hierzu schneiden wir das Fachwerk von den Lagern frei und bringen stattdessen die Lagerkräfte an:



Das Festlager bennen wir mit A und das Loslager mit B. Mittels horizontalen, vertikalen und Momentengleichgewichtsbedingungen können wir nun die drei Lagerkräfte bestimmen. Es ist sofort deutlich zu erkennen, dass die horizontale Lagerkraft Ah = 0 ist, weil keine horizontalen Kräfte an den Balken angreifen:

$$\rightarrow: A_h = 0$$

Aus der vertikalen Gleichgewichtsbedingung erhalten wir:

$$\uparrow: A_v + B - F = 0$$

Um aus der obigen Gleichung eine Lagerkraft bestimmen zu können, müssen wir zunächst die Momentengleichewichtsbedingung anwenden. Wählen wir als Bezugspunkt Lager A, so können wir aus dieser die Lagerkraft B berechnen und mit der obigen Gleichung anschließend die Lagerkraft A_v.

$$\curvearrowleft A \quad B \cdot 6a - F \cdot 4a = 0$$

Auflösen nach B:

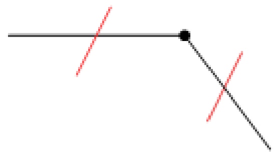
$$B = \frac{F \cdot 4a}{6a} = \frac{6\,kN \cdot 4 \cdot 2m}{6 \cdot 2m} = 4\,kN$$

Wir können als nächstes aus der vertikalen Gleichgewichtsbedingung die Lagerkraft Av bestimmen:

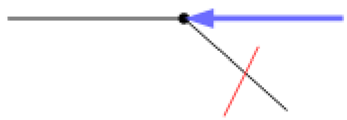
$$A_v = F - B = 6\,kN - 4\,kN = 2\,kN$$

c) Überprüfe das Fachwerk auf Nullstäbe!

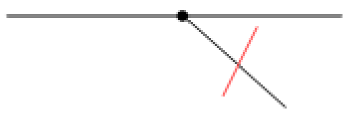
Das Fachwerk soll als nächstes auf Nullstäbe überprüft werden. Nullstäbe sind Stäbe, die weder Zug- noch Druckkräfte enthalten. Wir können die folgenden 3 Regel zur Bestimmung der Nullstäbe anwenden:



Regel 1: An einem unbelasteten Knoten sind nur zwei Stäbe angeschlossen, die nicht in die gleiche Richtung zeigen. -> Beide Stäbe sind Nullstäbe.

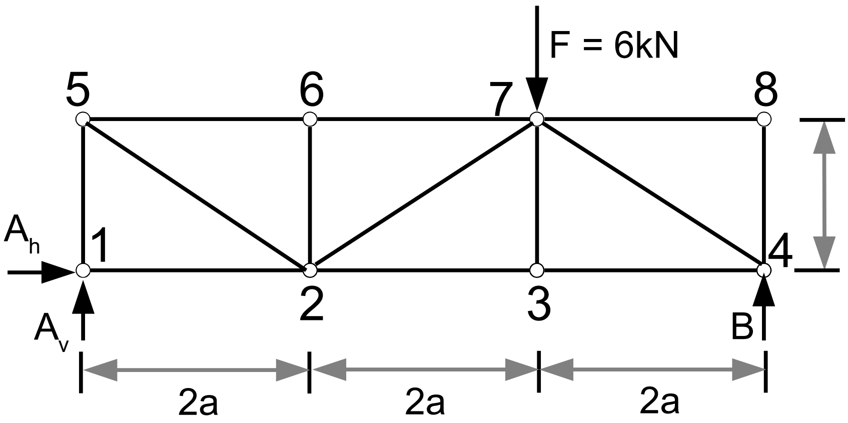


Regel 2: An einem belasteten Knoten sind nur zwei Stäbe angeschlossen und die äußere resultierende Kraft greift in Richtung des einen Stabes an, so ist der andere Stab ein Nullstab.



Regel 3: An einem unbelasteten Knoten sind drei Stäbe angeschlossen, von denen zwei in gleicher Richtung liegen, so ist der dritte Stab ein Nullstab.

Wir betrachten nun das gesamte Fachwerk und wenden die Regeln an:

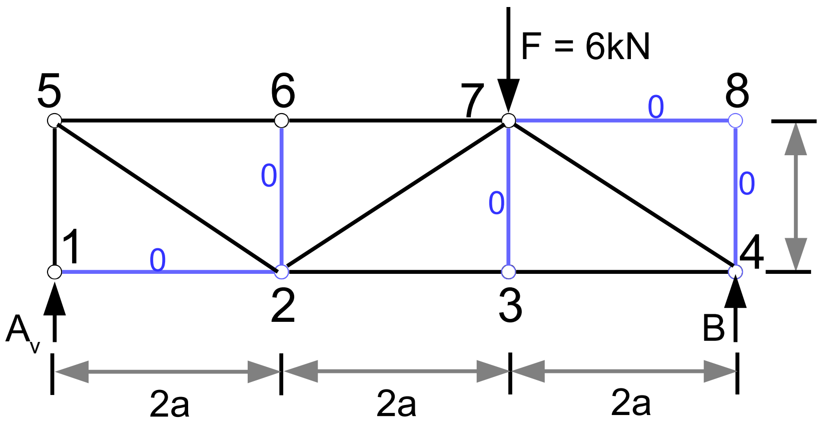


Regel 1: Der Knoten 8 ist unbelastet. Es greifen 2 Kräfte an, die nicht in dieselbe Richtung zeigen -> beide Stäbe am Knoten 8 sind Nullstäbe, also Stab 8-7 und Stab 8-4.

Regel 2: Im ersten Blick kann die Regel hier nicht angewandt werden. Wir wissen aber, dass die Auflagerkraft Ah = 0 ist. Wenn wir diese also aus dem Fachwerk entfernen, so erhalten wir genau die 2. Regel. Damit ist der Stab S 1-2 ein Nullstab.

Regel 3: Knoten 3 und Knoten 6 sind unbelastet und besitzen 3 Stäbe. Zwei davon jeweils in gleicher Richtung. Stab 6-2 und Stab 3-7 sind Nullstäbe.

Die Nullstäbe werden als nächstes mit "0" markiert:



Nachdem Nullstäbe markiert worden sind, kann das Fachwerk erneut auf Nullstäbe untersucht werden (dazu denkt man sich die Nullstäbe weg). Dies geschieht solange, bis keine Nullstäbe mehr gefunden werden.

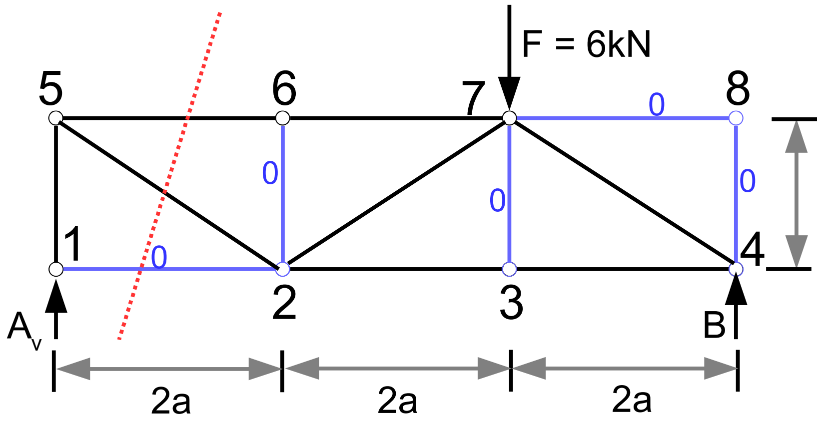
In unserem Beispiel sind nun alle Nullstäbe identifiziert worden!

d) Bestimme die Stabkräfte mittels Ritterschnittverfahren!

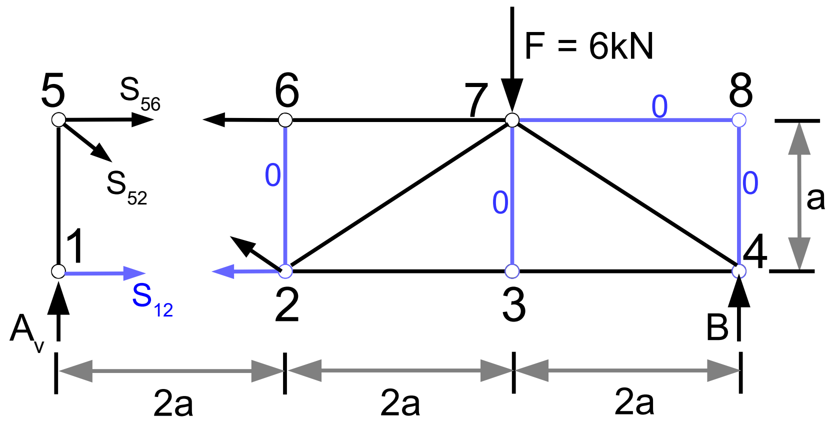
Wir können als nächstes mit dem Ritterschnittverfahren beginnen. Dazu schneiden wir durch 3 Stäbe, wobei nicht alle Stäbe zu einem Knoten gehören dürfen. Dabei kann man beliebig vorgehen. Es sollten die Schnitte so gewählt werden, dass die Berechnungen möglichst gering gehalten werden.

Die Stabkräfte S_{56}, S_{27} und S_{34} werden als nächstes mittels Ritterschnittverfahren bestimmt. Wir beginnen mit der Stabkraft S_{56}. Hierzu muss in jedem Fall ein Schnitt durch diese Stabkraft vorgenommen werden. Wichtig beim Schneiden :

Das Fachwerk muss nach dem Schnitt in zwei Teilen vorliegen und es dürfen nur 3 Stäbe geschnitten werden, die nicht alle in einem Knoten liegen.



Wir tragen nun die Stabkräfte an und zerlegen das Fachwerk in 2 Teile:



Das Ziel des Ritterschnittverfahrens ist es das Fachwerk in 2 Teile zu zerlegen. Wenn also der Schnitt durch drei Stäbe (die nicht alle dem gleichen Knoten angehören dürfen) durchgeführt wird, dann muss nach dem Schnitt das Fachwerk in zwei Teilen vorliegen. Hier können dann – wie bereits aus der Statik bekannt – mittels der drei Gleichgewichtsbedingungen an einem der Teile die unbekannten freigeschnittenen Stabkräfte bestimmt werden.

STABKRAFT S_{56}

Wir benötigen nun also die Stabkraft S_{56}. Wir müssen uns überlegen, wie wir diese berechnen können. Es handelt sich hierbei um eine horizontale Kraft, also probieren wir die horizontale Gleichgewichtsbedingung aus:

$$\rightarrow: S_{56} + S_{12} + S_{52} \cos(26{,}57°) = 0$$

Es ist deutlich zu erkennen, dass hieraus die Stabkraft S_{56} nicht berechnet werden kann, weil insgesamt 2 unbekannte Kräfte gegeben sind (S_{12} ist ein Nullstab). Wir betrachten als nächstes die vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: A_v - S_{52} \sin(26{,}57°) = 0$$

$$S_{52} = \frac{A_v}{\sin(26{,}57°)} = \frac{2\,kN}{\sin(26{,}57°)} = 4{,}47\,kN$$

Wir können nun also S_{52} in die horizontale Gleichgewichtsbedingung einsetzen und erhalten:

$$S_{56} = -S_{12} - S_{52} \cos(26{,}57°)$$

$$S_{56} = -0 - 4{,}47\,kN \cos(26{,}57°) = -4\,kN$$

Alternativ kann mit einer einzigen Gleichgewichtsbedingung die Stabkraft S_{56} sofort berechnen. Hierzu ziehen wir die Mometengleichgewichtsbedingung heran. Hier nehmen wir als Bezugspunkt den Knoten 2, weil dann nur die Stabkraft S_{56} und die Lagerkraft Av berücksichtig werden muss:

$$-A_v \cdot 2a - S_{56} \cdot a = 0$$

$$S_{56} = -\frac{A_v \cdot 2a}{2a} = -\frac{2\,kN \cdot 4m}{2m} = -4\,kN$$

Am rechten Fachwerksteil (Bezugspunkt ist wieder Knoten 2):

$$B \cdot 4a - F \cdot 2a + S_{56} \cdot a = 0$$

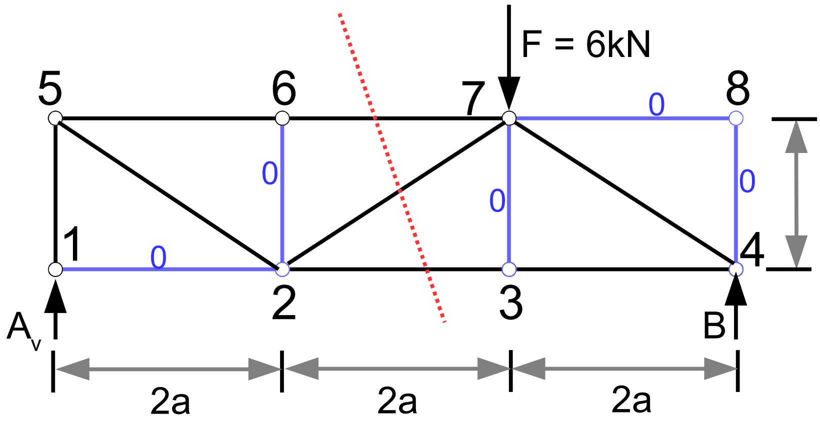
Auflösen nach S_{56}:

$$S_{56} = \frac{-B \cdot 4a + F \cdot 2a}{a} = \frac{-4\,kN \cdot 8m + 6\,kN \cdot 4m}{2m} = -4\,kN$$

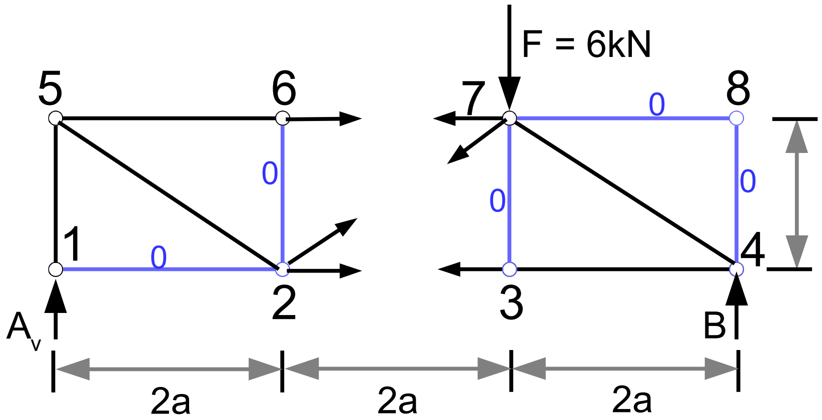
Linksdrehende Momente gehen positiv, rechtsdrehende Momente negativ in die Berechnung ein.

STABKRAFT S_{27}

Um die Stabkraft S_{27} bestimmen zu können, müssen wir als nächstes das Fachwerk wie folgt schneiden:



Wir haben nun die folgenden zwei Teile gegeben:



Wir können wieder den rechten oder linken Fachwerksteil betrachten. Man wählt denjenigen Teil, der einem am schnellsten zum Ergebnis führt. Die Stabkraft S_{27} ist gesucht. Diese Stabkraft weist einen horizontalen und einen vertikalen Anteil auf. Wenn wir den vertikalen Anteil betrachten, dann können wir mittels der vertikalen Gleichgewichtsbedingung am rechten/linken Fachwerk die Stabkraft berechnen, da die anderen vertikalen Kräfte gegeben sind.

Linker Fachwerksteil:

$$\uparrow: A_v + S_{27} \cdot \sin(26{,}57°) = 0$$

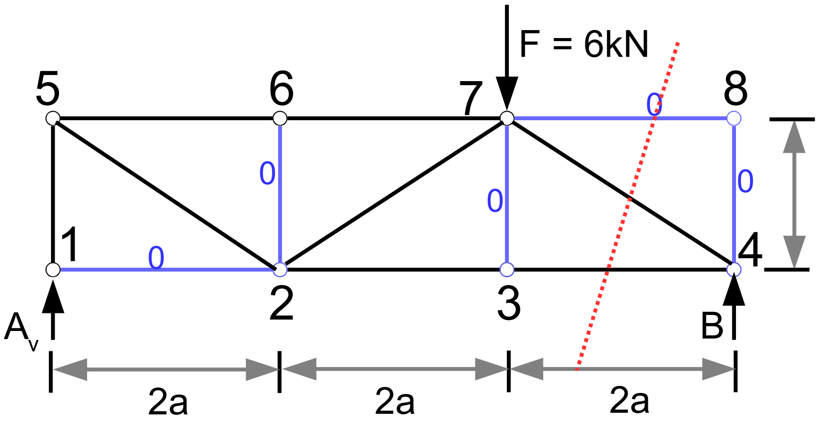
$$S_{27} = \frac{-A_v}{\sin(26{,}57°)} = \frac{-2\,\text{kN}}{\sin(26{,}57°)} = -4{,}47\,\text{kN}$$

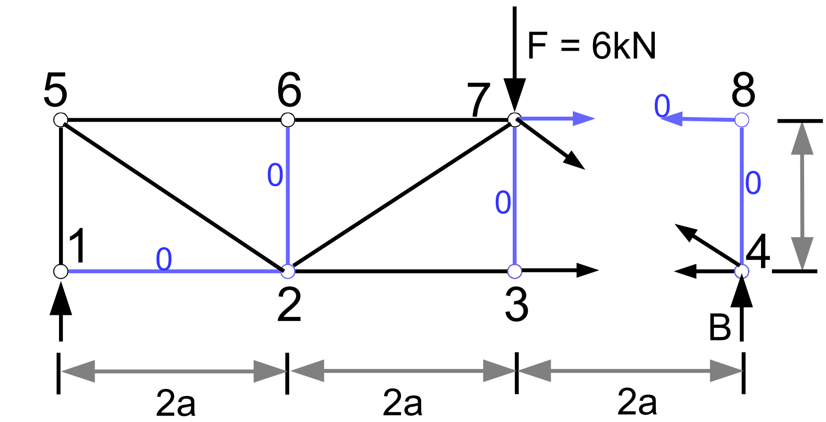
Rechter Fachwerksteil:

$$\uparrow: B - F - S_{27} \cdot \sin(26{,}57°) = 0$$

$$S_{27} = \frac{B - F}{\sin(26{,}57°)} = \frac{4\,\text{kN} - 6\,\text{kN}}{\sin(26{,}57°)} = -4{,}47\,\text{kN}$$

STABKRAFT S_{34}





Wir wählen den linken Fachwerksteil zur Bestimmung von S_{34}. Wir wählen das Momentengleichgewicht im Knoten 7:

$$-A_v \cdot 4a + S_{34} \cdot a = 0$$

$$S_{34} = \frac{A_v \cdot 4a}{a} = \frac{2\,\text{kN} \cdot 8\text{m}}{2\text{m}} = 8\,\text{kN}$$

Rechter Fachwerksteil:

$$B \cdot 2a - S_{34} \cdot a = 0$$

$$S_{34} = \frac{B \cdot 2a}{a} = \frac{4\,kN \cdot 4m}{2m} = 8\,kN$$

Frage eines Nutzers:

Können unbekannte Stabkräfte mit dem Satz des Pythagors berechnet werden, wenn zwei Kräfte gegeben sind?

Der Satz des Pythagoras wird angewandt um aus zwei rechtwinkligen zueinander stehenden Kräften eine Resultierende zu berechnen. In dem Fachwerk spiegeln aber die Stablängen nicht den Betrag der Stabkräfte wider. D.h. wir können zwar aus den Abmessungen von zwei Stäbe die Abmessung des dritten Stabes berechnen bzw. den Winkel zwischen den Stäben, aber eben nicht die Stabkraft selber. Dazu müssten die Abmessungen der Stäbe den Beträgen der Kraft entsprechen. Ein 8 kN belasteter Stab müsste dann z.B. 8m und ein 4kN belasteter Stab 4m lang sein. Genau dann kann die Stabkraft des dritten Stabes berechnet werden.