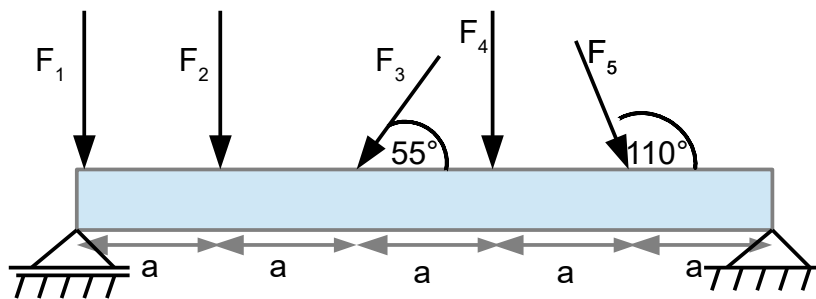


Kurs: Statik

Thema: Allgemeine Kräftegruppe – Bestimmung der Resultierenden

Aufgabe: Belasteter Balken



Gegeben:

$$F_1 = 20 \text{ N}$$

$$F_2 = 15 \text{ N}$$

$$F_3 = 30 \text{ N}$$

$$F_4 = 10 \text{ N}$$

$$F_5 = 45 \text{ N}$$

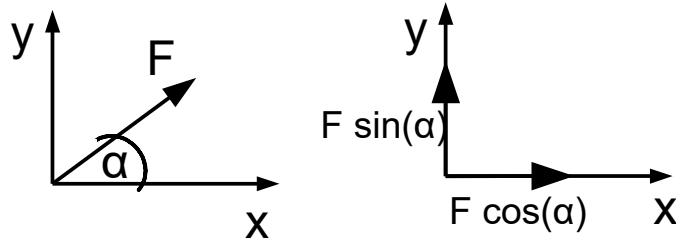
$$a = 4 \text{ m}$$

Gegeben sei der obige Balken, welcher von oben durch die fünf Kräfte belastet wird.

Bestimme den Betrag, die Richtung und die Lage der resultierenden Kraft für die Kräfte F_1 bis F_5 .

Verwendete Formeln:

Kräftezerlegung:



Bestimmung der Resultierenden (allgemeine Kräftegruppe):

Teilresultierende in x-Richtung: $R_x = \sum F_{ix}$

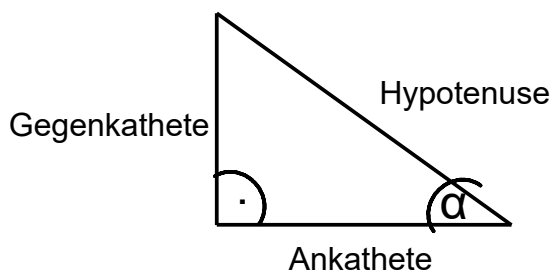
Teilresultierende in y-Richtung: $R_y = \sum F_{iy}$

Betrag der Resultierenden: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

Richtung der Resultierenden: $\tan(\alpha) = \frac{R_y}{R_x}$ Winkel zwischen R und R_x

Hebelarm der Resultierenden: $h = \frac{\sum M^x}{R}$ senkrechter Abstand vom gewählten Bezugspunkt X

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck:



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

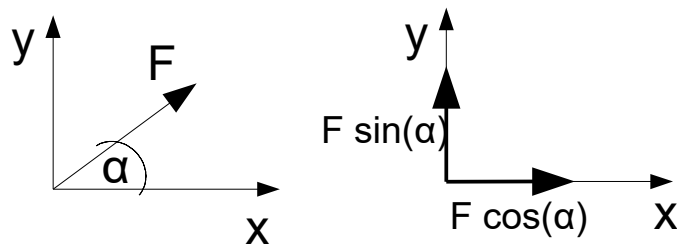
Lösung: Resultierende bestimmen

Das Vorgehen ist wie folgt:

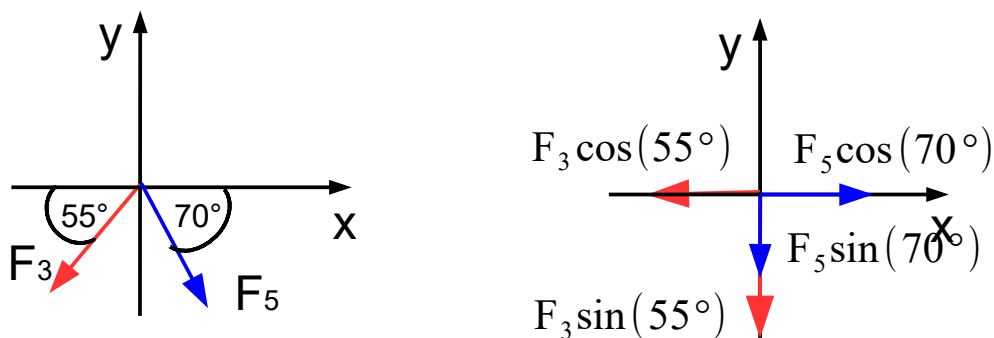
- Zunächst müssen alle nicht vertikal und horizontal gerichteten Kräfte in ihre Horizontal- und Vertikalkomponenten zerlegt werden (Kräftezerlegung).
- Dann werden die Teilresultierenden R_x und R_y bestimmt.
- Danach erfolgt die Berechnung der Resultierenden R und der Richtung der Resultierenden.
- Zusätzlich muss noch die Lage der Resultierenden bestimmt werden.

Bei einer allgemeinen Kräftegruppe schneiden sich die Kräfte nicht alle in einem einzigen Punkt. Bei einer zentralen Kräftegruppe schneiden sich die Kräfte alle in einem Punkt. Das Vorgehen ist für beide identisch bis zur Bestimmung der Resultierenden und ihrer Richtung. Bei der zentralen Kräftegruppen liegt die Resultierende dann im gemeinsamen Angriffspunkt, bei der allgemeinen Kräftegruppe muss die Lage der Resultierenden über das resultierende Moment berechnet werden (wie bei dieser Aufgabe).

1. Kräftezerlegung



F_3 und F_5 müssen in ihre Horizontal- und Vertikalkomponente zerlegt werden!



2. Bestimmung der Teilresultierenden

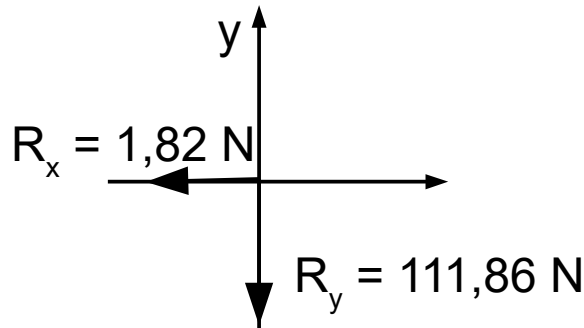
$$\rightarrow R_x = -F_3 \cos(55^\circ) + F_5 \cos(70^\circ)$$

$$\rightarrow R_x = -30 \text{ N} \cos(55^\circ) + 45 \text{ N} \cos(70^\circ) = -1,82 \text{ N}$$

$$\uparrow R_y = -F_1 - F_2 - F_3 \sin(55^\circ) - F_4 - F_5 \sin(70^\circ)$$

$$\uparrow R_y = -20 \text{ N} - 15 \text{ N} - 30 \text{ N} \sin(55^\circ) - 10 \text{ N} - 45 \text{ N} \sin(70^\circ) = -111,86 \text{ N}$$

Negatives Vorzeichen bedeutet, dass die Teilresultierenden in entgegengesetzte Richtung als angenommen zeigen. Für die Teilresultierende R_x haben wir alle Kräfte in positive x-Richtung als positiv angenommen und alle Kräfte in negative x-Richtung mit einem Minuszeichen versehen. Da die Teilresultierende R_x nun negativ resultiert zeigt diese in negative x-Richtung. Analoges Vorgehen für die Teilresultierende R_y . Zeichnen wir die Teilresultierenden nun mit ihre tatsächlichen Richtung ein, so werden die Beträge an die Pfeile geschrieben:



3. Bestimmung der Resultierenden (Betrag)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

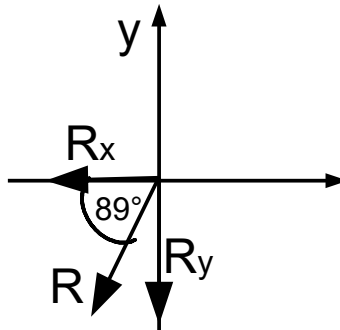
$$R = \sqrt{(-1,82 \text{ N})^2 + (-111,86 \text{ N})^2} = 111,87 \text{ N}$$

4. Bestimmung der Richtung der Resultierenden

$$\tan(\alpha) = \frac{R_y}{R_x} \quad \text{Winkel zwischen } R_x \text{ und } R$$

$$\tan(\alpha) = \frac{111,86 \text{ N}}{1,82 \text{ N}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{111,86 \text{ N}}{1,82 \text{ N}}\right) = 89,07^\circ$$



Da die Teilresultierende R_x in negative Achsenrichtung zeigt, ist der Winkel von $89,07^\circ$ zur negativen x-Achse gegeben.

5. Bestimmung der Lage der Resultierenden

Resultierendes Moment: $M_R = h \cdot R$

Auflösen nach h: $h = \frac{M_R}{R}$

Um h (Hebelarm) bestimmen zu können, muss das resultierende Moment berechnet werden. Der Bezugspunkt für den das resultierende Moment bestimmt werden soll ist frei wählbar. In diesem Fall wird der Bezugspunkt bei F_1 gesetzt:

$$M_R = -F_2 \cdot a - F_3 \sin(55^\circ) \cdot 2a - F_4 \cdot 3a - F_5 \sin(70^\circ) \cdot 4a$$

$$M_R = -15 \text{ N} \cdot 4\text{m} - 30 \text{ N} \sin(55^\circ) \cdot 8\text{m} - 10 \text{ N} \cdot 12\text{m} - 45 \text{ N} \sin(70^\circ) \cdot 16\text{m}$$

$$M_R = -1053,18 \text{ Nm}$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass die Resultierende den Balken um den festgelegten Bezugspunkt (bei F_1) in einer Rechtsdrehung dreht (mit dem Uhrzeigersinn).

$$h = \frac{1053,18 \text{ Nm}}{111,87 \text{ N}} = 9,41 \text{ m}$$

Da der Balken in einer Rechtsdrehung um den Bezugspunkt gedreht wird, kann die Resultierende nur rechts vom Balken liegen. Es muss also der senkrechte Abstand von dem gewählten Bezugspunkt mit $h = 9,41 \text{ m}$ abgemessen werden. Die Resultierende wird zunächst in den Bezugspunkt mit einem Winkel von 89° zur Horizontalen gelegt. Danach wird von der Resultierenden aus ein Winkel von 90° abgetragen (rote Linie). Als nächstes werden die $9,41 \text{ m}$ Abstand von diesem Bezugspunkt eingezeichnet. Die Resultierende kann dann auf ihrer **Wirkungslinie** so verschoben werden, dass sie oben am Balken angreift.

