Lernbuch: Statik

Technische Mechanik I

Vortragsskript für Webinar und Prüfungsvorbereitung

Dr.-Ing. Kevin Suta

Version 2026

Basierend auf:
Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross et al.
„Technische Mechanik Band 1: Statik"
Springer Verlag, 9. Auflage 2006
https://doi.org/10.1007/3-540-34092-0

WICHTIG!

Dieses Skript dient als Lernhilfe und fasst die wesentlichen Inhalte der Statik zusammen. Es ersetzt nicht das eigenständige Durcharbeiten von Aufgaben und Lehrbüchern. Für ein tiefes Verständnis ist das aktive Mitrechnen unerlässlich!

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung 4
1.1 Was ist Statik? 4

2 Grundbegriffe 4
2.1 Die Kraft 4
2.1.1 Was ist eine Kraft? 4
2.1.2 Eigenschaften einer Kraft 4
2.1.3 Einheit der Kraft 5
2.1.4 Darstellung in Koordinaten 5
2.2 Der starre Körper 6
2.3 Einteilung der Kräfte 6
2.3.1 Nach der räumlichen Verteilung 7
2.3.2 Nach der Ursache 7
2.4 Das Schnittprinzip 7
2.5 Das Freikörperbild (FKB) 7
2.6 Das Wechselwirkungsgesetz 8
2.7 Dimensionen und Einheiten 9
2.8 Zusammenfassung Kapitel 1-2 10

3 Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt 11
3.1 Einführung 11
3.2 Zusammensetzung von Kräften 11
3.2.1 Das Parallelogramm der Kräfte 11
3.2.2 Betrag der Resultierenden 11
3.3 Analytische Methode: Komponentenzerlegung 11
3.4 Gleichgewicht bei zentralen Kräftegruppen 12

4 Allgemeine Kraftsysteme und Gleichgewicht 13
4.1 Das Moment einer Kraft 13
4.1.1 Motivation: Die Drehwirkung 13

4.1.2 Definition des Moments . . . 13
4.1.3 Alternative Berechnung des Moments . . . 14
4.2 Das Kräftepaar . . . 14
4.3 Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene . . . 15
4.3.1 Alternative Formulierungen . . . 15
4.4 Die Resultierende allgemeiner Kraftsysteme . . . 16
4.5 Gleichgewicht im Raum . . . 16
4.6 Zusammenfassung Kapitel 4 . . . 16

5 Schwerpunkt **17**
5.1 Definition und Bedeutung . . . 17
5.2 Schwerpunkt von Körpern und Flächen . . . 17
5.2.1 Allgemeine Formel . . . 17
5.3 Schwerpunkte einfacher Flächen . . . 18
5.4 Zusammengesetzte Flächen . . . 18
5.5 Methode der negativen Flächen . . . 19
5.6 Linienschwerpunkt . . . 19
5.7 Zusammenfassung Kapitel 5 . . . 20

6 Lagerreaktionen **21**
6.1 Lagerarten und ihre Wertigkeiten . . . 21
6.2 Übersicht der Lagertypen (2D) . . . 21
6.3 Statische Bestimmtheit . . . 21
6.4 Berechnung der Lagerreaktionen . . . 22
6.5 Mehrteilige Systeme . . . 23
6.6 Zusammenfassung Kapitel 6 . . . 23

7 Fachwerke **24**
7.1 Definition und Idealisierung . . . 24
7.2 Statische Bestimmtheit von Fachwerken . . . 24
7.3 Nullstäbe erkennen . . . 25
7.4 Knotenpunktverfahren . . . 25
7.5 Rittersches Schnittverfahren . . . 27
7.6 Zusammenfassung Kapitel 7 . . . 27

8 Schnittgrößen bei Balken **28**
8.1 Definition der Schnittgrößen . . . 28
8.2 Positives und negatives Schnittufer . . . 28
8.2.1 Vorzeichenkonvention am positiven Schnittufer . . . 28
8.2.2 Vorzeichenkonvention am negativen Schnittufer . . . 29
8.2.3 Das freigeschnittene Balkenelement . . . 29
8.3 Beziehungen zwischen Belastung und Schnittgrößen . . . 29
8.4 Schnittgrößen aus typischen Belastungen . . . 30
8.5 Berechnung der Schnittgrößen . . . 30
8.6 Schnittgrößendiagramme . . . 31
8.7 Beispiel: Einfeldträger mit konstanter Streckenlast . . . 31
8.8 Beispiel: Kragarm mit Streckenlast . . . 32
8.9 Beispiel: Einfeldträger mit Dreieckslast . . . 33
8.10 Beispiel: Gelenkbalken (Mehrteilsystem) . . . 33
8.10.1 Schritt 1: Freischneiden der Teilsysteme . . . 34
8.10.2 Schritt 2: Berechnung der Reaktionen an Teil 2 . . . 34
8.10.3 Schritt 3: Berechnung der Reaktionen an Teil 1 . . . 35
8.10.4 Schritt 4: Schnittgrößen in Teil 1 (Bereich $0 \leq x \leq a$) . . . 35
8.10.5 Schritt 5: Schnittgrößen in Teil 2 (Bereich $a \leq x \leq a + b$) . . . 35

8.10.6 Schritt 6: Schnittgrößendiagramme 36
8.10.7 Zusammenfassung der Ergebnisse 36
8.11 Übersicht: Typische Schnittgrößenverläufe 37
8.12 Zusammenfassung Kapitel 8 38

9 Haftung und Reibung **39**
9.1 Grundlagen 39
9.2 Das Coulombsche Reibungsgesetz 39
9.3 Der Reibungswinkel 40
9.4 Systematik bei Reibungsproblemen 40
9.5 Seilreibung (Euler-Eytelwein) 41
9.6 Zusammenfassung Kapitel 9 42

10 Formelsammlung **43**
10.1 Grundlagen 43
10.2 Kräfte zusammensetzen 43
10.3 Moment 43
10.4 Gleichgewichtsbedingungen 43
10.5 Schwerpunkt 43
10.6 Lager (ebene Systeme) 44
10.7 Fachwerke 44
10.8 Schnittgrößen 44
10.9 Reibung 44

11 Hinweise zur Prüfungsvorbereitung **45**

1 Einführung

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Erklären, was Statik ist und warum sie wichtig ist
- Den Begriff der Kraft verstehen und anwenden
- Das Schnittprinzip und das Freikörperbild erstellen
- Zwischen verschiedenen Kraftarten unterscheiden

1.1 Was ist Statik?

Die **Statik** ist die Lehre vom **Gleichgewicht** von Kräften an ruhenden Körpern. Sie ist der erste und grundlegende Teil der Technischen Mechanik.

Warum ist Statik wichtig?

Stell dir vor, du baust eine Brücke. Diese Brücke muss verschiedene Lasten tragen können: ihr eigenes Gewicht, Autos, LKWs, Menschen, Wind und sogar Schnee. Wenn die Brücke nicht im Gleichgewicht ist – wenn die Kräfte nicht ausgeglichen sind – dann bewegt sie sich. Und eine Brücke, die sich bewegt... das wollen wir definitiv nicht!

Alltagsbeispiele für Statik

- **Gebäude:** Müssen ihr Eigengewicht und alle Nutzlasten sicher in den Boden abtragen
- **Regale:** Müssen Bücher tragen, ohne durchzubiegen oder umzukippen
- **Kräne:** Müssen schwere Lasten heben, ohne umzufallen
- **Fahrradständer:** Müssen das Fahrrad im Gleichgewicht halten

Grundprinzip der Statik

Ein Körper befindet sich im **Gleichgewicht**, wenn die Summe aller auf ihn wirkenden Kräfte und Momente null ist. Dann bewegt er sich nicht und dreht sich nicht.

2 Grundbegriffe

2.1 Die Kraft

2.1.1 Was ist eine Kraft?

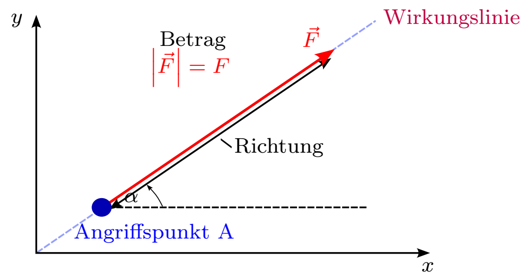
Den Begriff der Kraft kennen wir aus dem Alltag: Wir *spüren* eine Kraft, wenn wir etwas heben, schieben oder ziehen. Physikalisch definieren wir:

Eine **Kraft** ist eine Einwirkung, die einen Körper **verformen** oder seinen **Bewegungszustand ändern** kann.

2.1.2 Eigenschaften einer Kraft

Eine Kraft ist vollständig bestimmt durch **drei Eigenschaften**:

1. **Betrag** F oder $|\vec{F}|$: Wie „starkïst die Kraft? (Einheit: Newton [N])



2. **Richtung**: In welche Richtung wirkt die Kraft? (Wirkungslinie + Richtungssinn)
3. **Angriffspunkt**: Wo greift die Kraft am Körper an?

> **WICHTIG!**
>
> Die Kraft ist ein **Vektor**! Das bedeutet, sie hat nicht nur einen Betrag (wie eine Temperatur), sondern auch eine Richtung. In Zeichnungen stellen wir Kräfte als Pfeile dar.

2.1.3 Einheit der Kraft

Die SI-Einheit der Kraft ist das **Newton** [N]:

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Anschaulich: 1 Newton ist ungefähr die Gewichtskraft, die auf eine Tafel Schokolade (ca. 100 g) wirkt.

Objekt	**Ungefähre Gewichtskraft**
Tafel Schokolade (100 g)	1 N
Wasserflasche (1 L)	10 N
Mensch (75 kg)	750 N
PKW (1500 kg)	15 kN

2.1.4 Darstellung in Koordinaten

In einem kartesischen Koordinatensystem können wir eine Kraft $\vec{F}$ durch ihre Komponenten darstellen:

In der Ebene (2D):

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

Im Raum (3D):

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y + F_z \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Der **Betrag** ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras:

$$|\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{(2D)} \qquad |\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad \text{(3D)}$$

Die **Richtung** lässt sich über Winkel beschreiben:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

Mini-Aufgabe

Eine Kraft hat die Komponenten $F_x = 30\,\mathrm{N}$ und $F_y = 40\,\mathrm{N}$.
a) Berechne den Betrag der Kraft.
b) Unter welchem Winkel zur x-Achse wirkt die Kraft?

Lösung

a) Betrag:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50\,\mathrm{N}$$

b) Winkel:

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}13$$

Merkhilfe: Das ist ein 3-4-5-Dreieck!

2.2 Der starre Körper

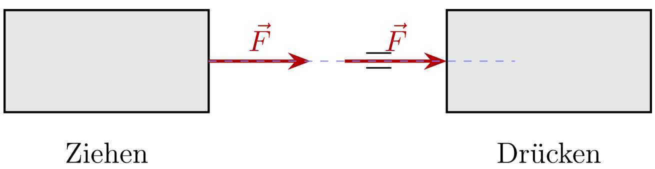
In der Statik arbeiten wir meist mit dem Modell des **starren Körpers**:

Ein **starrer Körper** ist ein idealisierter Körper, der sich unter Krafteinwirkung **nicht verformt**. Die Abstände zwischen allen Punkten des Körpers bleiben konstant.

Warum diese Idealisierung?
Natürlich verformt sich jeder reale Körper unter Last – ein Stahlträger biegt sich durch, ein Gummiband dehnt sich. Aber oft sind diese Verformungen so klein, dass wir sie für die Berechnung der Kräfte vernachlässigen können.

Verschiebungssatz für starre Körper

Bei einem starren Körper kann eine Kraft **entlang ihrer Wirkungslinie** beliebig verschoben werden, ohne dass sich die Wirkung auf den Körper ändert.



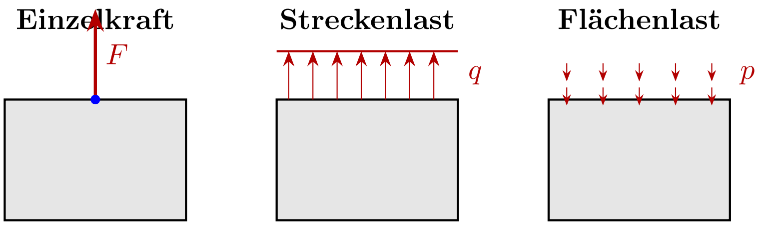
Achtung!

Der Verschiebungssatz gilt **nur für starre Körper** und **nur entlang der Wirkungslinie**! Eine Parallelverschiebung einer Kraft verändert ihre Wirkung (es entsteht ein Drehmoment).

2.3 Einteilung der Kräfte

Kräfte können nach verschiedenen Kriterien eingeteilt werden:

2.3.1 Nach der räumlichen Verteilung



- **Einzelkraft** (konzentrierte Kraft): Wirkt in einem Punkt, Einheit [N]
- **Streckenlast** (Linienkraft): Verteilt entlang einer Linie, Einheit [N/m]
- **Flächenlast** (Druck): Verteilt über eine Fläche, Einheit [N/m^2] = [Pa]
- **Volumenkraft**: Verteilt im Volumen, Einheit [N/m^3]

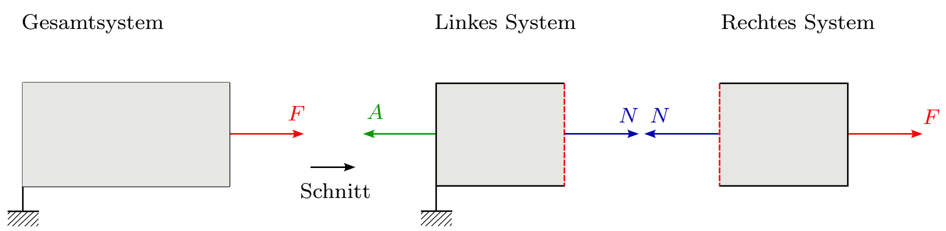
2.3.2 Nach der Ursache

Kraftart	Beschreibung
Eingeprägte Kräfte	Von außen vorgegebene Kräfte (z.B. Gewicht, Wind, aufgebrachte Last)
Reaktionskräfte	Entstehen durch Einschränkung der Bewegungsfreiheit (z.B. Lagerkräfte)
Äußere Kräfte	Wirken von außen auf das betrachtete System
Innere Kräfte	Wirken zwischen Teilen des Systems (z.B. Schnittkräfte)

2.4 Das Schnittprinzip

Das **Schnittprinzip** ist eines der wichtigsten Werkzeuge der Statik. Es ermöglicht uns, innere Kräfte sichtbar zu machen.

Schnittprinzip: Führt man durch einen Körper einen gedachten Schnitt, so müssen die an der Schnittfläche freigelegten inneren Kräfte (Schnittkräfte) das abgetrennte Teilsystem im Gleichgewicht halten.



WICHTIG!

Die Schnittkräfte an beiden Schnittufern sind **gleich groß** und **entgegengesetzt gerichtet** (Wechselwirkungsgesetz: actio = reactio).

2.5 Das Freikörperbild (FKB)

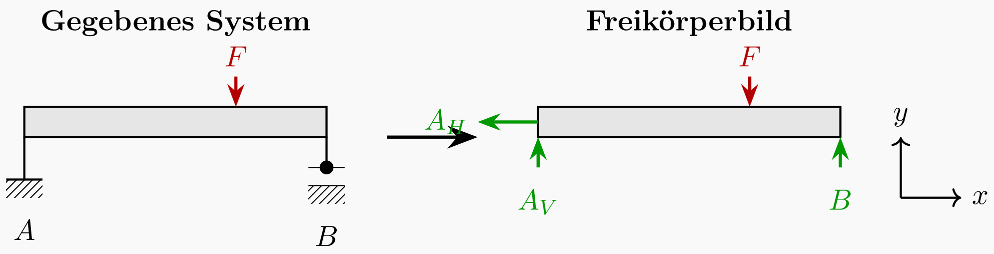
Das **Freikörperbild** (FKB) ist die wichtigste Zeichnung in der Statik!

Freikörperbild: Darstellung eines freigeschnittenen Körpers mit **allen** auf ihn wirkenden äußeren Kräften (eingeprägte Kräfte und Reaktionskräfte).

Schritte zum Erstellen eines Freikörperbildes:

1. **Körper isolieren:** Den zu untersuchenden Körper gedanklich aus seiner Umgebung „herausschneiden"
2. **Lagerungen durch Kräfte ersetzen:** Alle Lager und Verbindungen entfernen und durch entsprechende Reaktionskräfte ersetzen
3. **Alle Kräfte eintragen:** Sowohl eingeprägte Kräfte (Lasten, Gewicht) als auch Reaktionskräfte (Lagerkräfte)
4. **Koordinatensystem festlegen:** Positiv-Richtungen definieren

Freikörperbild eines Balkens



Achtung!

Häufige Fehler beim Freikörperbild:

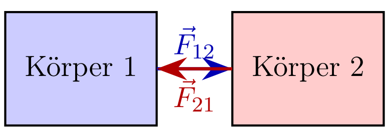
- Kräfte vergessen (besonders Eigengewicht!)
- Falsche Richtungen bei Lagerkräften
- Momente vergessen (bei Einspannungen)
- Körper nicht vollständig freigeschnitten

2.6 Das Wechselwirkungsgesetz

Das **Wechselwirkungsgesetz** (3. Newtonsches Axiom) ist fundamental für die Mechanik:

Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio):
Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 eine Kraft $\vec{F}_{12}$ aus, so übt Körper 2 auf Körper 1 eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft $\vec{F}_{21}$ aus:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



WICHTIG!

actio und reactio greifen immer an verschiedenen Körpern an! Sie heben sich daher **nicht** gegenseitig auf.

Mini-Aufgabe

Ein Buch mit der Masse $m = 1\,\text{kg}$ liegt auf einem Tisch.
a) Welche Kräfte wirken auf das Buch?
b) Welche Kraft übt das Buch auf den Tisch aus?
c) Bilden die Gewichtskraft des Buches und die Auflagekraft vom Tisch ein actio-reactio-Paar?

Lösung

a) Auf das Buch wirken:

- Gewichtskraft $G = m \cdot g = 1 \cdot 10 = 10\,\text{N}$ (nach unten, von der Erde)
- Auflagekraft $N = 10\,\text{N}$ (nach oben, vom Tisch)

b) Das Buch drückt mit $F = 10\,\text{N}$ auf den Tisch (nach unten).
c) **Nein!** Die Gewichtskraft und die Auflagekraft greifen beide am Buch an – sie sind daher kein actio-reactio-Paar!
Das actio-reactio-Paar zur Auflagekraft ist: Tisch drückt auf Buch (nach oben) $\leftrightarrow$ Buch drückt auf Tisch (nach unten).
Das actio-reactio-Paar zur Gewichtskraft ist: Erde zieht Buch an $\leftrightarrow$ Buch zieht Erde an.

2.7 Dimensionen und Einheiten

In der Mechanik verwenden wir das **Internationale Einheitensystem (SI)**:

Größe	**Formelzeichen**	**Dimension**	**SI-Einheit**
Länge	l, s, x	[L]	Meter (m)
Masse	m	[M]	Kilogramm (kg)
Zeit	t	[T]	Sekunde (s)
Kraft	F	[M L T^{-2}]	Newton (N = kg·m/s²)
Moment	M	[M L² T^{-2}]	Newtonmeter (Nm)
Druck/Spannung	p, σ	[M L^{-1} T^{-2}]	Pascal (Pa = N/m²)

Wichtige Vorsätze:

Vorsatz	**Symbol**	**Faktor**
Kilo	k	10^3
Mega	M	10^6
Giga	G	10^9
Milli	m	10^{-3}
Mikro	μ	10^{-6}

Einheitenkontrolle

Bei jeder Rechnung solltest du prüfen, ob die Einheiten stimmen! Jeder Term einer Gleichung muss dieselbe Einheit haben.

2.8 Zusammenfassung Kapitel 1-2

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Statik** = Lehre vom Gleichgewicht von Kräften an ruhenden Körpern
- **Kraft** = Vektor mit Betrag, Richtung und Angriffspunkt; Einheit: Newton [N]
- **Starrer Körper** = Idealisierung: keine Verformung unter Last
- **Verschiebungssatz**: Kraft kann entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden
- **Schnittprinzip**: Innere Kräfte werden durch Schnitte sichtbar gemacht
- **Freikörperbild**: Freigeschnittener Körper mit allen Kräften
- **actio = reactio**: Zu jeder Kraft gehört eine gleich große Gegenkraft

3 Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Kräfte grafisch und rechnerisch zusammensetzen
- Die Resultierende einer zentralen Kräftegruppe bestimmen
- Kräfte in Komponenten zerlegen
- Gleichgewichtsbedingungen für zentrale Kräftegruppen aufstellen

3.1 Einführung

Wenn mehrere Kräfte an einem Punkt angreifen oder ihre Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden, spricht man von einer **zentralen Kräftegruppe**.

3.2 Zusammensetzung von Kräften

3.2.1 Das Parallelogramm der Kräfte

$$\boxed{\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2}$$

Die Resultierende ist die **Diagonale** des Kräfteparallelogramms.

3.2.2 Betrag der Resultierenden

Für zwei Kräfte F_1 und F_2 mit eingeschlossenem Winkel α:

$$\boxed{R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}}$$

Wichtige Sonderfälle:

- $\alpha = 0$ (gleichgerichtet): $R = F_1 + F_2$
- $\alpha = 90$ (senkrecht): $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$
- $\alpha = 180$ (entgegengesetzt): $R = |F_1 - F_2|$

3.3 Analytische Methode: Komponentenzerlegung

Schritt 1: Jede Kraft in Komponenten zerlegen:

$$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i, \quad F_{iy} = F_i \sin\alpha_i$$

Schritt 2: Komponenten der Resultierenden:

$$R_x = \sum F_{ix}, \quad R_y = \sum F_{iy}$$

Schritt 3: Betrag und Richtung:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \tan\alpha_R = \frac{R_y}{R_x}$$

Mini-Aufgabe

Zwei Kräfte $F_1 = 5\,\mathrm{kN}$ und $F_2 = 8\,\mathrm{kN}$ schließen einen Winkel von 60 ein. Bestimme den Betrag der Resultierenden.

Lösung

$$R = \sqrt{5^2 + 8^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60} = \sqrt{25 + 64 + 40} = \sqrt{129} \approx 11{,}36\,\mathrm{kN}$$

3.4 Gleichgewicht bei zentralen Kräftegruppen

Gleichgewichtsbedingung:

$$\boxed{\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}}$$

In Komponenten:

$$\boxed{\sum F_{ix} = 0 \quad \text{und} \quad \sum F_{iy} = 0}$$

Anzahl der Gleichungen

In der **Ebene**: 2 Gleichungen → max. 2 Unbekannte
Im **Raum**: 3 Gleichungen → max. 3 Unbekannte

Mini-Aufgabe

Ein Gewicht $G = 1000\,\mathrm{N}$ hängt an zwei Seilen. Seil 1 ist unter 30 zur Horizontalen, Seil 2 unter 60. Berechne die Seilkräfte.

Lösung

x-Richtung: $-S_1 \cos 30 + S_2 \cos 60 = 0 \Rightarrow S_2 = 1{,}732 \cdot S_1$
y-Richtung: $S_1 \sin 30 + S_2 \sin 60 = G$
$\Rightarrow S_1 = 500\,\mathrm{N}$, $S_2 = 866\,\mathrm{N}$

Zusammenfassung

- **Zentrale Kräftegruppe**: Alle Wirkungslinien schneiden sich in einem Punkt
- **Resultierende**: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$
- **Gleichgewicht**: Geschlossenes Krafteck

4 Allgemeine Kraftsysteme und Gleichgewicht

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Das Moment einer Kraft berechnen
- Die Gleichgewichtsbedingungen für allgemeine ebene Kraftsysteme aufstellen
- Die Resultierende eines allgemeinen Kraftsystems bestimmen
- Räumliche Kraftsysteme analysieren

4.1 Das Moment einer Kraft

4.1.1 Motivation: Die Drehwirkung

Wenn eine Kraft nicht durch einen Bezugspunkt geht, erzeugt sie eine **Drehwirkung** um diesen Punkt. Diese Drehwirkung nennen wir **Moment**.

Alltagsbeispiel

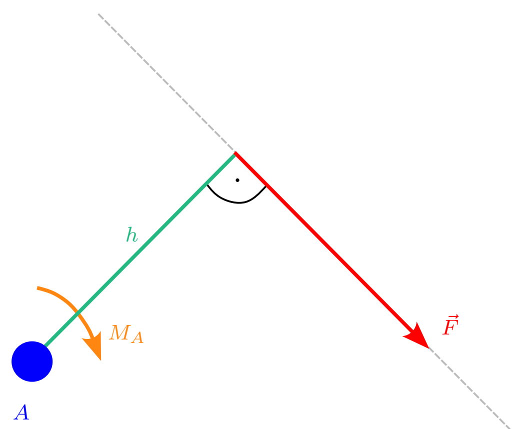
Beim Öffnen einer Tür: Je weiter außen du drückst (großer Hebelarm), desto leichter öffnet sich die Tür. Das Moment ist größer!

4.1.2 Definition des Moments

Moment einer Kraft bezüglich Punkt A:

$$\boxed{M_A = F \cdot h}$$

- M_A = Moment bezüglich Punkt A [Nm]
- F = Betrag der Kraft [N]
- h = senkrechter Abstand der Wirkungslinie von A (Hebelarm) [m]



WICHTIG!

Vorzeichenkonvention:

- Drehung **gegen den Uhrzeigersinn**: positiv $(+)$
- Drehung **im Uhrzeigersinn**: negativ $(-)$

Diese Konvention muss konsequent eingehalten werden!

4.1.3 Alternative Berechnung des Moments

Wenn der Hebelarm nicht direkt ablesbar ist, kann das Moment über die **Komponenten** berechnet werden:

Moment über Komponenten (2D):

$$\boxed{M_A = F_x \cdot r_y - F_y \cdot r_x}$$

wobei (r_x, r_y) der Ortsvektor vom Bezugspunkt A zum Kraftangriffspunkt ist.

Mini-Aufgabe

Eine Kraft $\vec{F} = (30, 40)\,\text{N}$ greift im Punkt $P = (2, 3)\,\text{m}$ an. Berechne das Moment bezüglich des Ursprungs.

Lösung

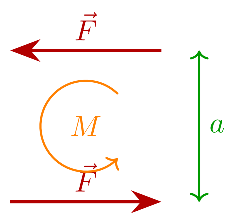
$$M_O = F_x \cdot r_y - F_y \cdot r_x = 30 \cdot 3 - 40 \cdot 2 = 90 - 80 = 10\,\text{Nm}$$

Das Moment ist positiv, also dreht die Kraft gegen den Uhrzeigersinn.

4.2 Das Kräftepaar

Ein **Kräftepaar** besteht aus zwei gleich großen, entgegengesetzt gerichteten, parallelen Kräften mit Abstand a.
Moment des Kräftepaares:

$$\boxed{M = F \cdot a}$$



Eigenschaften des Kräftepaares

- Die Resultierende ist null $(\vec{R} = \vec{0})$
- Das Moment ist **unabhängig vom Bezugspunkt**!
- Ein Kräftepaar erzeugt reine Drehwirkung

4.3 Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene

Für ein **allgemeines ebenes Kraftsystem** (Kräfte nicht alle durch einen Punkt) gelten:

Drei Gleichgewichtsbedingungen (2D):

$$\boxed{\sum F_x = 0}$$

$$\boxed{\sum F_y = 0}$$

$$\boxed{\sum M_A = 0}$$

(A = beliebig gewählter Bezugspunkt)

WICHTIG!

Mit **3 Gleichungen** können maximal **3 Unbekannte** bestimmt werden!
Dies ist wichtig für die Frage der **statischen Bestimmtheit**.

4.3.1 Alternative Formulierungen

Die Gleichgewichtsbedingungen können auch anders formuliert werden:

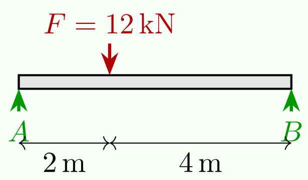
1. **1 Kraft- + 2 Momentengleichungen:** $\sum F_x = 0$, $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$ (A und B nicht auf einer Senkrechten zur x-Achse)
2. **3 Momentengleichungen:** $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$, $\sum M_C = 0$ (A, B, C nicht auf einer Geraden)

Mini-Aufgabe

Ein Balken der Länge $L = 6\,\mathrm{m}$ liegt auf zwei Stützen bei $x = 0$ und $x = 6\,\mathrm{m}$. Eine Last $F = 12\,\mathrm{kN}$ greift bei $x = 2\,\mathrm{m}$ an.
Bestimme die Auflagerkräfte A und B.

Lösung

Freikörperbild:



Gleichgewichtsbedingungen:
$\sum F_y = 0$: $A + B - F = 0 \quad \Rightarrow \quad A + B = 12\,\mathrm{kN}$
$\sum M_A = 0$: $-F \cdot 2 + B \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{12 \cdot 2}{6} = 4\,\mathrm{kN}$
$\Rightarrow A = 12 - 4 = 8\,\mathrm{kN}$
Kontrolle mit $\sum M_B = 0$:

$$A \cdot 6 - F \cdot 4 = 8 \cdot 6 - 12 \cdot 4 = 48 - 48 = 0 \quad \checkmark$$

4.4 Die Resultierende allgemeiner Kraftsysteme

Resultierende eines allgemeinen ebenen Kraftsystems:
Die Resultierende $\vec{R}$ hat:

- Betrag und Richtung: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$
- Wirkungslinie: bestimmt durch $M_A = R \cdot d$, wobei d der Abstand der Wirkungslinie von A ist

Achtung!

Wenn $\vec{R} = \vec{0}$ aber $\sum M \neq 0$, dann ist die Resultierende ein **Kräftepaar** (reines Moment)!

4.5 Gleichgewicht im Raum

Im dreidimensionalen Raum gibt es **6 Gleichgewichtsbedingungen**:

Sechs Gleichgewichtsbedingungen (3D):

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

Anzahl der Unbekannten

Im Raum können mit 6 Gleichungen maximal **6 Unbekannte** bestimmt werden.

4.6 Zusammenfassung Kapitel 4

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Moment**: $M = F \cdot h$ (Kraft mal Hebelarm)
- **Vorzeichenkonvention**: Gegen Uhrzeigersinn = positiv
- **Kräftepaar**: Zwei parallele, entgegengesetzte Kräfte, $M = F \cdot a$
- **Gleichgewicht (2D)**: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$
- **Gleichgewicht (3D)**: 3 Kraft- + 3 Momentengleichungen
- **Strategie**: Momentenbezugspunkt geschickt wählen, um Gleichungen zu entkoppeln!

5 Schwerpunkt

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Den Schwerpunkt einfacher Körper berechnen
- Flächenschwerpunkte zusammengesetzter Flächen bestimmen
- Die Methode der negativen Flächen anwenden
- Tabellenwerte für Standardformen nutzen

5.1 Definition und Bedeutung

Der **Schwerpunkt** (Massenmittelpunkt) ist der Punkt, in dem man sich die gesamte Masse eines Körpers konzentriert denken kann, ohne dass sich die Wirkung der Schwerkraft ändert.

Warum ist der Schwerpunkt wichtig?

- **Tragwerke**: Die Gewichtskraft greift im Schwerpunkt an
- **Stabilität**: Kippsicherheit hängt von Schwerpunktlage ab
- **Streckenlast**: Resultierende greift im Schwerpunkt der Lastfläche an

5.2 Schwerpunkt von Körpern und Flächen

5.2.1 Allgemeine Formel

Schwerpunktkoordinaten:

$$\boxed{x_S = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{m_{ges}}}$$

$$\boxed{y_S = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{m_{ges}}}$$

Für **homogene flächige Körper** (konstante Dicke und Dichte) kann statt der Masse die Fläche verwendet werden:

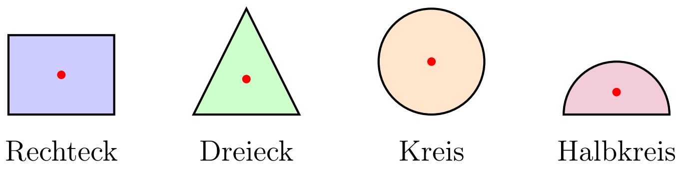
Flächenschwerpunkt:

$$\boxed{x_S = \frac{\sum A_i \cdot x_{Si}}{\sum A_i}}$$

$$\boxed{y_S = \frac{\sum A_i \cdot y_{Si}}{\sum A_i}}$$

5.3 Schwerpunkte einfacher Flächen

Form	Fläche	Schwerpunkt
Rechteck $b \times h$	$A = b \cdot h$	$x_S = \frac{b}{2}$, $y_S = \frac{h}{2}$
Dreieck (Basis b, Höhe h)	$A = \frac{1}{2} b \cdot h$	$x_S = \frac{b}{3}$, $y_S = \frac{h}{3}$
Kreis (Radius r)	$A = \pi r^2$	Mittelpunkt
Halbkreis (Radius r)	$A = \frac{\pi r^2}{2}$	$y_S = \frac{4r}{3\pi} \approx 0{,}424r$
Trapez (Parallelen a, b)	$A = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$	$y_S = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$



Dreieck-Schwerpunkt

Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt im Schnittpunkt der **Seitenhalbierenden** – das ist bei $\frac{1}{3}$ der Höhe von der Basis aus gemessen.

5.4 Zusammengesetzte Flächen

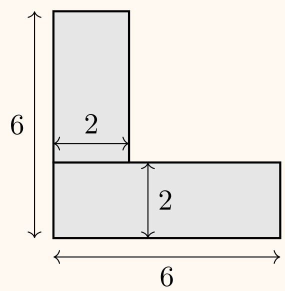
Komplexe Flächen werden in **einfache Teilflächen** zerlegt:

Vorgehensweise:

1. Fläche in einfache Teilflächen zerlegen
2. Koordinatensystem festlegen
3. Fläche A_i und Schwerpunkt (x_{Si}, y_{Si}) jeder Teilfläche bestimmen
4. Gesamtschwerpunkt berechnen

Mini-Aufgabe

Bestimme den Schwerpunkt der L-förmigen Fläche:



Lösung

Zerlegung in zwei Rechtecke:

Teilfläche	A_i [m²]	x_{Si} [m]	y_{Si} [m]
Rechteck 1 (unten)	$6 \times 2 = 12$	3	1
Rechteck 2 (links oben)	$2 \times 4 = 8$	1	4
Summe	20	–	–

Berechnung:

$$x_S = \frac{A_1 \cdot x_{S1} + A_2 \cdot x_{S2}}{A_1 + A_2} = \frac{12 \cdot 3 + 8 \cdot 1}{20} = \frac{36 + 8}{20} = \frac{44}{20} = 2{,}2\,\text{m}$$

$$y_S = \frac{A_1 \cdot y_{S1} + A_2 \cdot y_{S2}}{A_1 + A_2} = \frac{12 \cdot 1 + 8 \cdot 4}{20} = \frac{12 + 32}{20} = \frac{44}{20} = 2{,}2\,\text{m}$$

5.5 Methode der negativen Flächen

Bei Flächen mit **Ausschnitten** (Löchern) verwendet man negative Flächen:

Negative Flächen:

$$x_S = \frac{A_{voll} \cdot x_{S,voll} - A_{Loch} \cdot x_{S,Loch}}{A_{voll} - A_{Loch}}$$

Mini-Aufgabe

Ein Quadrat mit Seitenlänge $a = 4\,\text{m}$ hat ein kreisförmiges Loch mit Radius $r = 1\,\text{m}$ in der Mitte. Wo liegt der Schwerpunkt?

Lösung

Da das Loch **zentrisch** liegt, bleibt der Schwerpunkt im **Mittelpunkt** des Quadrats:

$$x_S = y_S = 2\,\text{m}$$

(Symmetrie! Der Schwerpunkt liegt auf jeder Symmetrieachse.)

Symmetrie nutzen

Der Schwerpunkt liegt immer auf einer **Symmetrieachse**! Bei zwei Symmetrieachsen ist der Schwerpunkt deren Schnittpunkt.

5.6 Linienschwerpunkt

Für **linienförmige Strukturen** (Drähte, Stäbe) gilt:

$$x_S = \frac{\sum L_i \cdot x_{Si}}{\sum L_i}$$

5.7 Zusammenfassung Kapitel 5

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Schwerpunkt** = Angriffspunkt der Gewichtskraft
- **Formel**: $x_S = \frac{\sum A_i \cdot x_{Si}}{\sum A_i}$
- **Zerlegung**: Komplexe Flächen in einfache Teile zerlegen
- **Negative Flächen**: Für Ausschnitte
- **Symmetrie**: Schwerpunkt liegt auf Symmetrieachsen
- **Dreieck**: Schwerpunkt bei $\frac{1}{3}$ der Höhe

6 Lagerreaktionen

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

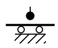
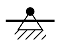
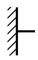
- Die verschiedenen Lagertypen erkennen und ihre Wertigkeiten bestimmen
- Die statische Bestimmtheit prüfen
- Lagerreaktionen berechnen
- Mehrteilige Systeme analysieren

6.1 Lagerarten und ihre Wertigkeiten

Lager schränken die Bewegungsfreiheit eines Körpers ein und erzeugen dabei **Reaktionskräfte** (und ggf. Reaktionsmomente).

Wertigkeit eines Lagers = Anzahl der verhinderten Bewegungsfreiheitsgrade = Anzahl der Reaktionskomponenten

6.2 Übersicht der Lagertypen (2D)

Lagertyp	**Symbol**	**Wertigkeit**	**Reaktionen**
Loslager (Rollenlager)		1	1 Kraft $\perp$ Auflagefläche
Festlager (Gelenklager)		2	2 Kraftkomponenten (F_H, F_V)
Einspannung		3	2 Kräfte + 1 Moment
Pendelstütze		1	1 Kraft in Stabrichtung
Gelenk (Zwischenlager)		–	Verbindet Körper (innere Bindung)

WICHTIG!

Merkregel:

- Loslager: Kann sich in **einer** Richtung bewegen → 1 Reaktion
- Festlager: Kann sich **nicht verschieben**, aber drehen → 2 Reaktionen
- Einspannung: Kann sich **weder verschieben noch drehen** → 3 Reaktionen

6.3 Statische Bestimmtheit

Abzählkriterium für ebene Tragwerke:

$$\boxed{r = n}$$

- r = Anzahl der Lagerreaktionen (Summe der Wertigkeiten)

- n = Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen (bei einem Körper: $n = 3$)

Bedingung	Bedeutung
$r < n$	**Unterbestimmt** (beweglich, instabil)
$r = n$	**Statisch bestimmt** (stabil, alle Reaktionen berechenbar)
$r > n$	**Statisch unbestimmt** (mehr Unbekannte als Gleichungen)

Achtung!

Das Abzählkriterium ist **notwendig**, aber **nicht hinreichend**! Ein System kann trotz $r = n$ instabil sein, wenn die Lager **ungünstig angeordnet** sind.

Ungünstige Lageranordnung

Drei Loslager, deren Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden, sind instabil – obwohl $r = 3 = n$!

6.4 Berechnung der Lagerreaktionen

Systematische Vorgehensweise:

1. **Freikörperbild** zeichnen (alle Kräfte eintragen!)
2. **Statische Bestimmtheit** prüfen
3. **Gleichgewichtsbedingungen** aufstellen
4. **Gleichungssystem** lösen
5. **Ergebnis kontrollieren** (z.B. mit zusätzlicher Momentengleichung)

Tipps zur Berechnung

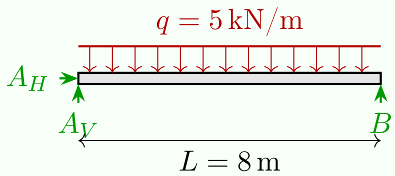
- **Momentenbezugspunkt** geschickt wählen (durch unbekannte Kraft → diese fällt weg)
- **Koordinatenachsen** an Lagerrichtungen anpassen
- Bei **schrägen Lagern**: Kraft in Komponenten zerlegen

Mini-Aufgabe

Ein Balken (Länge $L = 8\,\mathrm{m}$) mit Festlager bei A und Loslager bei B ist mit einer gleichmäßig verteilten Last $q = 5\,\mathrm{kN/m}$ belastet.
Bestimme alle Lagerreaktionen.

Lösung

Schritt 1: Freikörperbild



Schritt 2: Statische Bestimmtheit
$r = 2 + 1 = 3$ (Festlager + Loslager)
$n = 3$ (ebenes System)
$\Rightarrow$ statisch bestimmt ✓
Schritt 3: Resultierende der Streckenlast
$F_q = q \cdot L = 5 \cdot 8 = 40\,\mathrm{kN}$ (greift in der Mitte an, bei $x = 4\,\mathrm{m}$)
Schritt 4: Gleichgewichtsbedingungen
$\sum F_x = 0$: $A_H = 0$
$\sum M_A = 0$: $-F_q \cdot 4 + B \cdot 8 = 0 \Rightarrow B = \frac{40 \cdot 4}{8} = 20\,\mathrm{kN}$
$\sum F_y = 0$: $A_V + B - F_q = 0 \Rightarrow A_V = 40 - 20 = 20\,\mathrm{kN}$
Ergebnis: $A_H = 0$, $A_V = 20\,\mathrm{kN}$, $B = 20\,\mathrm{kN}$
(Wegen Symmetrie: $A_V = B$ – logisch!)

6.5 Mehrteilige Systeme

Bei Systemen aus mehreren Körpern (verbunden durch Gelenke) erhöht sich die Anzahl der Gleichungen:

Mehrteilige Systeme:

$$n = 3 \cdot k + v$$

- k = Anzahl der Körper
- v = Anzahl der Verbindungsgleichungen (Gelenke: je 2)

Dreigelenkbogen

Ein Dreigelenkbogen besteht aus 2 Körpern mit einem Zwischengelenk:

- Körper: $k = 2$
- Gelenk liefert: 2 zusätzliche Gleichungen (Kräftegleichgewicht im Gelenk)
- Gleichungen: $n = 3 \cdot 2 = 6$
- Typische Lagerung: 2 Festlager $\to r = 4$, plus Gelenk $\to$ 6 Unbekannte

6.6 Zusammenfassung Kapitel 6

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Loslager**: 1 Reaktion (senkrecht zur Auflagefläche)
- **Festlager**: 2 Reaktionen (horizontal + vertikal)
- **Einspannung**: 3 Reaktionen (2 Kräfte + 1 Moment)
- **Statisch bestimmt**: $r = n$ (und sinnvolle Anordnung)
- **Strategie**: FKB $\to$ Bestimmtheit $\to$ Gleichungen $\to$ Lösen $\to$ Kontrolle

7 Fachwerke

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Fachwerke auf statische Bestimmtheit prüfen
- Stabkräfte mit dem Knotenpunktverfahren berechnen
- Das Rittersche Schnittverfahren anwenden
- Nullstäbe erkennen

7.1 Definition und Idealisierung

Ein **Fachwerk** ist eine Tragstruktur, die nur aus geraden Stäben besteht, die in reibungsfreien Gelenken (Knoten) verbunden sind. Lasten greifen nur in den Knoten an.

Idealisierungen:

- Stäbe sind **gewichtslos**
- Knoten sind **reibungsfreie Gelenke**
- Lasten greifen nur in **Knoten** an
- Stäbe können nur **Zug oder Druck** übertragen (keine Biegung!)

WICHTIG!

Vorzeichen der Stabkräfte:

- **Positiv**: Zugstab (wird gezogen, Kraft zeigt vom Knoten weg)
- **Negativ**: Druckstab (wird gedrückt, Kraft zeigt zum Knoten hin)

7.2 Statische Bestimmtheit von Fachwerken

Abzählkriterium für ebene Fachwerke:

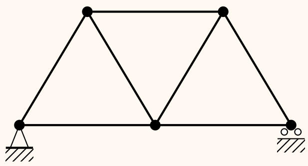
$$\boxed{s + r = 2k}$$

- s = Anzahl der Stäbe
- r = Anzahl der Lagerreaktionen
- k = Anzahl der Knoten

Bedingung	Bedeutung
$s + r < 2k$	Unterbestimmt (kinematisch, beweglich)
$s + r = 2k$	Statisch bestimmt
$s + r > 2k$	Statisch unbestimmt

Mini-Aufgabe

Prüfe das folgende Fachwerk auf statische Bestimmtheit:



Lösung

Zählen:

- Knoten: $k = 5$
- Stäbe: $s = 7$
- Lagerreaktionen: $r = 2 + 1 = 3$ (Festlager + Loslager)

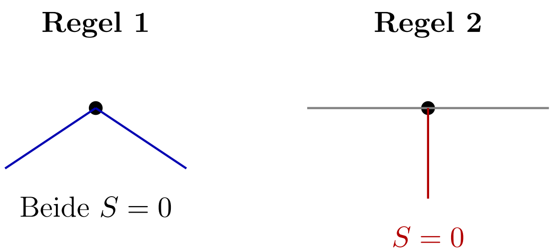
Prüfung:

$$s + r = 7 + 3 = 10 = 2 \cdot 5 = 2k \quad \checkmark$$

Das Fachwerk ist **statisch bestimmt**.

7.3 Nullstäbe erkennen

Nullstäbe (Stäbe mit $S = 0$) können oft durch Inspektion erkannt werden:
Regel 1: An einem **unbelasteten Knoten mit nur 2 Stäben**, die **nicht auf einer Linie** liegen, sind beide Stäbe Nullstäbe.
Regel 2: An einem **unbelasteten Knoten mit 3 Stäben**, von denen **zwei auf einer Linie** liegen, ist der dritte Stab ein Nullstab.



7.4 Knotenpunktverfahren

Knotenpunktverfahren:
An jedem Knoten wird das Kräftegleichgewicht aufgestellt:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

Pro Knoten: 2 Gleichungen → max. 2 Unbekannte pro Knoten

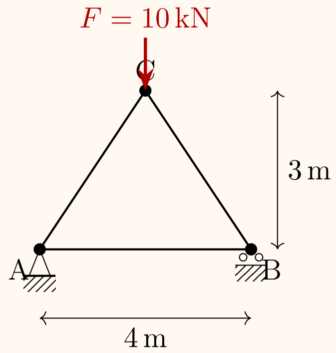
Vorgehensweise:

1. **Lagerreaktionen** berechnen
2. Mit einem Knoten beginnen, an dem **max. 2 Stäbe** unbekannt sind

3. Stabkräfte als **Zugkräfte** (vom Knoten weg) ansetzen
4. Gleichgewicht aufstellen und lösen
5. Zum nächsten Knoten übergehen

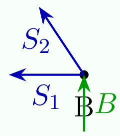
Mini-Aufgabe

Berechne die Stabkräfte des folgenden Fachwerks:



Lösung

1. Lagerreaktionen:
$\sum M_A = 0$: $-F \cdot 2 + B \cdot 4 = 0 \Rightarrow B = 5\,\text{kN}$
$\sum F_y = 0$: $A_V + B - F = 0 \Rightarrow A_V = 5\,\text{kN}$
$\sum F_x = 0$: $A_H = 0$
2. Geometrie:
Stablänge AC = BC = $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}\,\text{m}$
Winkel $\alpha = \arctan(3/2) \approx 56{,}3$
3. Knoten B: (nur 2 unbekannte Stäbe)



$\sum F_y = 0$: $B + S_2 \sin\alpha = 0$

$$5 + S_2 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{5\sqrt{13}}{3} \approx -6{,}01\,\text{kN}$$

$\sum F_x = 0$: $-S_1 - S_2 \cos\alpha = 0$

$$S_1 = -S_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = 6{,}01 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 3{,}33\,\text{kN}$$

4. Knoten A: (zur Kontrolle und für S_3)
$\sum F_y = 0$: $A_V + S_3 \sin\alpha = 0 \Rightarrow S_3 = -6{,}01\,\text{kN}$
Ergebnis:

- $S_1 = 3{,}33\,\text{kN}$ (Zug)
- $S_2 = S_3 = -6{,}01\,\text{kN}$ (Druck)

7.5 Rittersches Schnittverfahren

Rittersches Schnittverfahren:
Das Fachwerk wird durch einen Schnitt geteilt, der **maximal 3 Stäbe** durchtrennt. Am freigeschnittenen Teil werden die 3 Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt.

Wann Ritter anwenden?

Das Rittersche Schnittverfahren ist ideal, wenn nur **einzelne Stabkräfte** benötigt werden, ohne alle anderen berechnen zu müssen.

Tipps:

- **Momentenbezugspunkt** im Schnittpunkt der anderen zwei Stäbe wählen
- So erhält man eine Gleichung mit **nur einer Unbekannten**!

7.6 Zusammenfassung Kapitel 7

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Fachwerk**: Stäbe + Gelenke, nur Zug/Druck
- **Bestimmtheit**: $s + r = 2k$
- **Nullstäbe**: Durch Inspektion erkennbar
- **Knotenpunktverfahren**: 2 Gleichungen pro Knoten
- **Ritter-Schnitt**: Max. 3 Stäbe schneiden, ideal für Einzelkräfte
- **Vorzeichen**: $+$ = Zug, $-$ = Druck

8 Schnittgrößen bei Balken

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Die drei Schnittgrößen (N, Q, M) definieren und berechnen
- Schnittgrößenverläufe zeichnen
- Die Beziehung zwischen Belastung und Schnittgrößen anwenden

8.1 Definition der Schnittgrößen

Die drei Schnittgrößen:

- **Normalkraft** N: Kraft in Stabrichtung [kN]
- **Querkraft** Q: Kraft senkrecht zur Stabachse [kN]
- **Biegemoment** M: Moment um die Querachse [kNm]

WICHTIG!

Vorzeichenkonvention (positives Schnittufer):

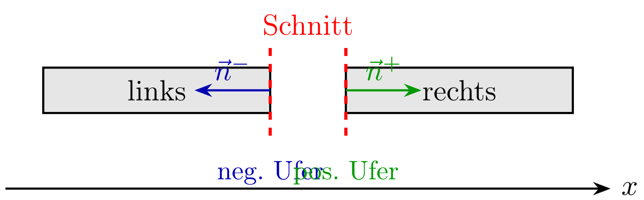
- $N > 0$: Zug (Kraft zeigt nach außen)
- $Q > 0$: Dreht Balkenelement im Uhrzeigersinn
- $M > 0$: Zugspannungen an der Unterseite (Durchbiegung nach unten)

8.2 Positives und negatives Schnittufer

Wenn wir einen Balken an einer Stelle x durchschneiden, entstehen **zwei Schnittflächen** – das linke und das rechte Schnittufer. Die Definition der Vorzeichen hängt davon ab, welches Ufer wir betrachten.

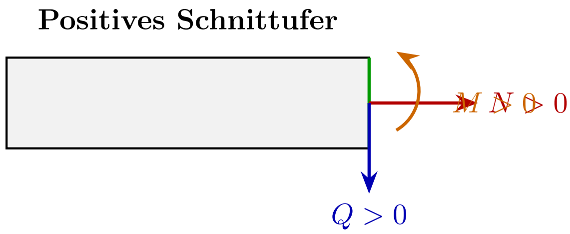
Definition der Schnittufer:

- **Positives Schnittufer:** Die **äußere Normale** zeigt in **positive x-Richtung** (rechtes Schnittufer bei horizontalem Balken)
- **Negatives Schnittufer:** Die **äußere Normale** zeigt in **negative x-Richtung** (linkes Schnittufer)



8.2.1 Vorzeichenkonvention am positiven Schnittufer

Am **positiven Schnittufer** (rechte Schnittfläche) gelten folgende Vorzeichen:



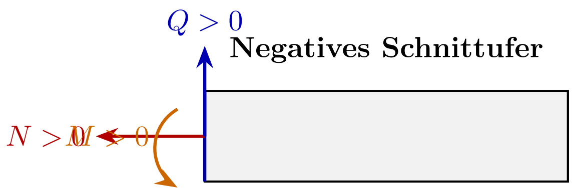
WICHTIG!

Merkregel für positive Schnittgrößen am positiven Schnittufer:

- $N > 0$: Zeigt in Richtung der positiven Normalen (= Zug)
- $Q > 0$: Zeigt nach **unten** (in negative y-Richtung)
- $M > 0$: Dreht **gegen den Uhrzeigersinn**

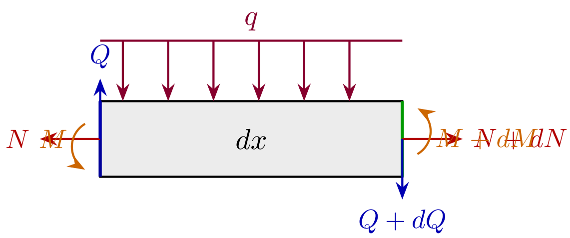
8.2.2 Vorzeichenkonvention am negativen Schnittufer

Am **negativen Schnittufer** (linke Schnittfläche) sind die Richtungen **entgegengesetzt**:



8.2.3 Das freigeschnittene Balkenelement

Schneidet man ein infinitesimales Balkenelement der Länge dx frei, sieht man beide Schnittufer gleichzeitig:



Gleichgewicht am Balkenelement

Das Gleichgewicht am infinitesimalen Element liefert die **differentiellen Beziehungen**:

$$\frac{dN}{dx} = 0 \quad \text{(ohne Längslast)}, \qquad \frac{dQ}{dx} = -q, \qquad \frac{dM}{dx} = Q$$

8.3 Beziehungen zwischen Belastung und Schnittgrößen

Differentielle Beziehungen:

$$\boxed{\frac{dQ}{dx} = -q(x)}$$

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = Q(x)}$$

Interpretation

- Die **Ableitung der Querkraft** ist die negative Streckenlast
- Die **Ableitung des Moments** ist die Querkraft
- Wo $Q = 0$ hat M ein **Extremum**!

8.4 Schnittgrößen aus typischen Belastungen

Belastung	**Q-Verlauf**	**M-Verlauf**
Keine Last ($q = 0$)	konstant	linear
Konstante Streckenlast ($q = const$)	linear	quadratisch (Parabel)
Einzelkraft F	Sprung um F	Knick
Einzelmoment M_0	kein Sprung	Sprung um M_0

8.5 Berechnung der Schnittgrößen

Vorgehensweise:

1. **Lagerreaktionen** berechnen
2. Balken in **Bereiche** einteilen (zwischen Lastangriffspunkten)
3. An Stelle x **schneiden** und Teilsystem betrachten
4. **Gleichgewicht** aufstellen: $\sum F = 0$, $\sum M = 0$
5. Schnittgrößen als **Funktion von** x ausdrücken

Mini-Aufgabe

Bestimme die Schnittgrößenverläufe für einen Einfeldträger der Länge L mit Einzellast F in der Mitte.

Lösung

1. Lagerreaktionen: (aus Symmetrie)

$$A = B = \frac{F}{2}$$

2. Bereich 1: $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$
Schnitt bei x, linkes Teilsystem:

$$Q(x) = A = \frac{F}{2} = const.$$

$$M(x) = A \cdot x = \frac{F}{2} \cdot x \quad \text{(linear steigend)}$$

3. Bereich 2: $\frac{L}{2} \leq x \leq L$

$$Q(x) = A - F = \frac{F}{2} - F = -\frac{F}{2} = const.$$

$$M(x) = A \cdot x - F \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{F}{2}(L - x) \quad \text{(linear fallend)}$$

4. Maximales Moment:

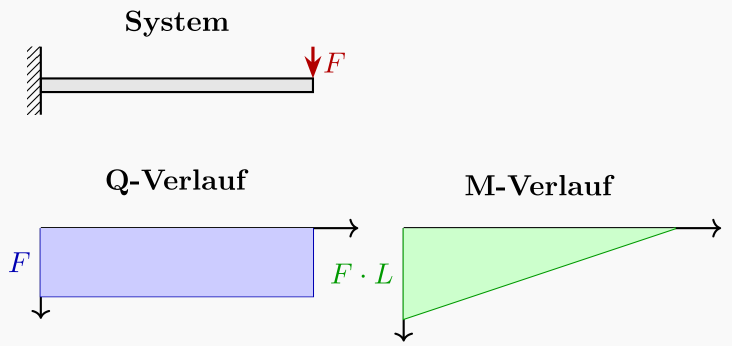
$$M_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{F \cdot L}{4}$$

8.6 Schnittgrößendiagramme

Zeichenregeln

- N: Zug nach außen abtragen
- Q: Positiv nach oben (oder nach Konvention)
- M: An der **Zugseite** abtragen (oft „Zug unten"→ nach unten zeichnen)

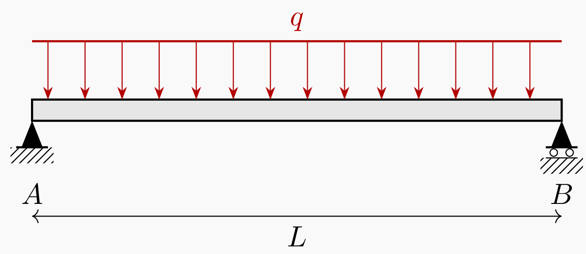
Kragarm mit Einzellast



8.7 Beispiel: Einfeldträger mit konstanter Streckenlast

Einfeldträger mit Streckenlast q

Ein Balken der Länge L ist beidseitig gelenkig gelagert und wird durch eine konstante Streckenlast q belastet.



1. Lagerreaktionen (aus Symmetrie):

$$A = B = \frac{q \cdot L}{2}$$

2. Schnittgrößen (Schnitt bei $0 \leq x \leq L$, linkes Teilsystem):
Querkraft:

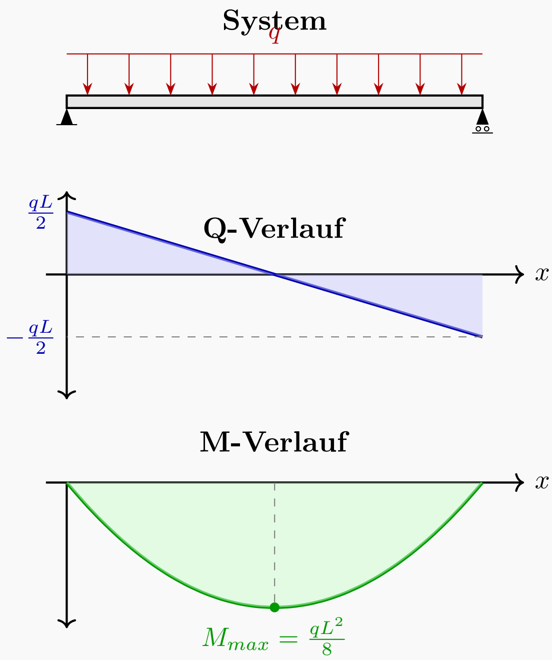
$$Q(x) = A - q \cdot x = \frac{qL}{2} - qx = q\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

Biegemoment:

$$M(x) = A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2}\left(Lx - x^2\right)$$

3. Charakteristische Werte:

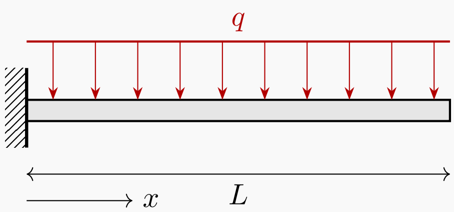
- $Q(0) = \frac{qL}{2}, \quad Q(L) = -\frac{qL}{2}, \quad Q\left(\frac{L}{2}\right) = 0$
- $M(0) = 0, \quad M(L) = 0, \quad M_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^2}{8}$



8.8 Beispiel: Kragarm mit Streckenlast

Kragarm mit konstanter Streckenlast

Ein eingespannter Kragarm der Länge L trägt eine konstante Streckenlast q.



Schnitt bei x (vom freien Ende aus gemessen, rechtes Teilsystem):
Querkraft:

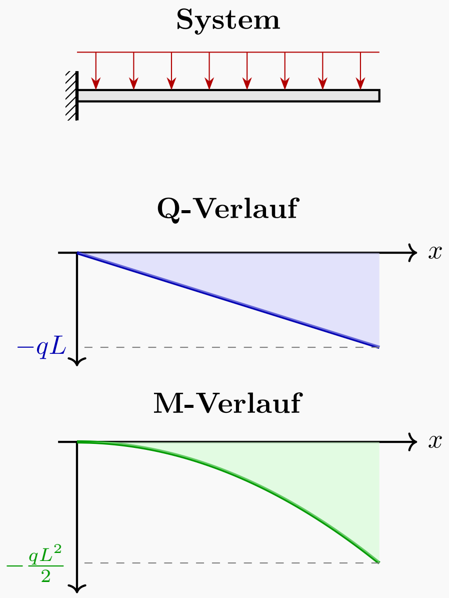
$$Q(x) = -q \cdot x$$

Biegemoment:

$$M(x) = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}$$

Einspannreaktionen (bei $x = L$):

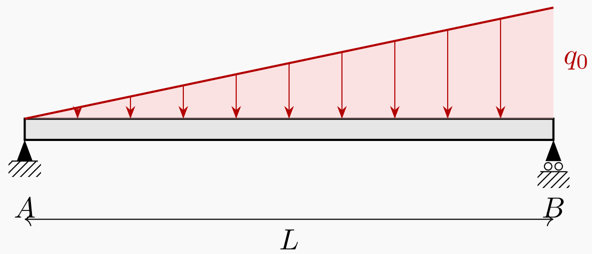
$$Q(L) = -qL, \qquad M(L) = -\frac{qL^2}{2}$$



8.9 Beispiel: Einfeldträger mit Dreieckslast

Einfeldträger mit linear ansteigender Streckenlast

Ein Balken der Länge L wird durch eine von 0 bis q_0 linear ansteigende Streckenlast belastet.



Streckenlast: $q(x) = q_0 \cdot \frac{x}{L}$
Resultierende der Last: $F = \frac{1}{2} q_0 \cdot L \quad$ (greift bei $\frac{2L}{3}$ an)
Lagerreaktionen:

$$A = \frac{q_0 L}{6}, \qquad B = \frac{q_0 L}{3}$$

Schnittgrößen:

$$Q(x) = \frac{q_0 L}{6} - \frac{q_0 x^2}{2L} \quad \text{(quadratisch)}$$

$$M(x) = \frac{q_0 L}{6} \cdot x - \frac{q_0 x^3}{6L} \quad \text{(kubisch)}$$

Maximum des Moments: bei $Q = 0$:

$$x_{max} = \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577L, \qquad M_{max} = \frac{q_0 L^2}{9\sqrt{3}} \approx 0{,}064 \cdot q_0 L^2$$

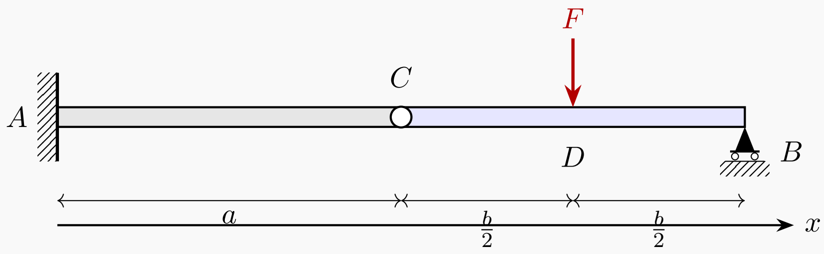
8.10 Beispiel: Gelenkbalken (Mehrteilsystem)

Bei Mehrteilsystemen – also Systemen mit Zwischengelenken – müssen wir die einzelnen Teilsysteme getrennt betrachten. Dabei wird die Wahl des Schnittufers besonders wichtig!

Gelenkbalken mit Einzellast

Ein Gelenkbalken besteht aus zwei Teilen, die durch ein Gelenk bei C verbunden sind. Teil 1 (AC) ist bei A eingespannt, Teil 2 (CB) liegt bei B auf einem Loslager.

Gesamtsystem



Gegeben: $a = 4\,\text{m}$, $b = 4\,\text{m}$, $F = 20\,\text{kN}$
Gesucht: Schnittgrößenverläufe $Q(x)$ und $M(x)$

8.10.1 Schritt 1: Freischneiden der Teilsysteme

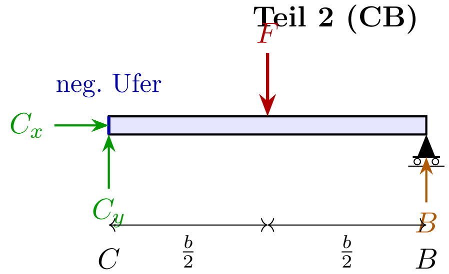
Das Gelenk bei C überträgt **keine Momente**, aber **Kräfte**. Wir schneiden das System am Gelenk und erhalten zwei Teilsysteme.

WICHTIG!

Am Gelenk gilt:

- Gelenkkräfte C_x und C_y wirken auf beide Teile (actio = reactio!)
- Das Moment ist null: $M_C = 0$ (Gelenk kann kein Moment übertragen)

Teil 2 (CB)



8.10.2 Schritt 2: Berechnung der Reaktionen an Teil 2

Wir beginnen mit Teil 2, da hier nur zwei Unbekannte auftreten (C_y und B).

Gleichgewicht an Teil 2 (CB):

$\sum M_C = 0$: $\quad F \cdot \frac{b}{2} - B \cdot b = 0$

$$B = \frac{F}{2} = \frac{20}{2} = 10\,\text{kN}$$

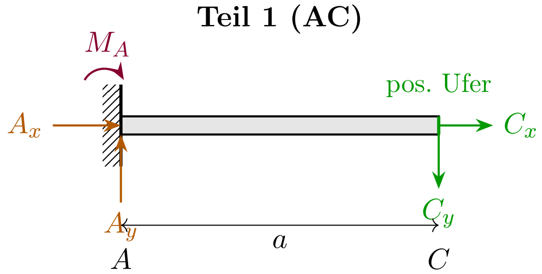
$\sum F_y = 0$: $\quad C_y - F + B = 0$

$$C_y = F - B = 20 - 10 = 10\,\text{kN}$$

$\sum F_x = 0$: $\quad C_x = 0$

8.10.3 Schritt 3: Berechnung der Reaktionen an Teil 1

Teil 1 (AC)



Achtung!

Beachte die Schnittufer!

- An Teil 2 ist das Gelenk das **negative (linke) Schnittufer** → C_y zeigt nach oben
- An Teil 1 ist das Gelenk das **positive (rechte) Schnittufer** → C_y zeigt nach unten

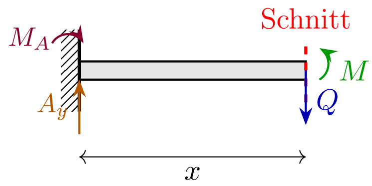
Die Gelenkkräfte sind **entgegengesetzt gleich** (actio = reactio)!

Gleichgewicht an Teil 1 (AC):
$\sum F_x = 0$: $\quad A_x + C_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$
$\sum F_y = 0$: $\quad A_y - C_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = C_y = 10\,\text{kN}$
$\sum M_A = 0$: $\quad M_A - C_y \cdot a = 0$

$$M_A = C_y \cdot a = 10 \cdot 4 = 40\,\text{kNm}$$

8.10.4 Schritt 4: Schnittgrößen in Teil 1 (Bereich $0 \leq x \leq a$)

Wir schneiden bei x und betrachten das **linke Teilsystem** (negatives Schnittufer am Schnitt):



Gleichgewicht am linken Teilsystem:
$\sum F_y = 0$: $\quad A_y - Q = 0$

$$\boxed{Q_1(x) = A_y = 10\,\text{kN} = \text{const.}}$$

$\sum M_{\text{Schnitt}} = 0$: $\quad M_A + A_y \cdot x - M = 0$

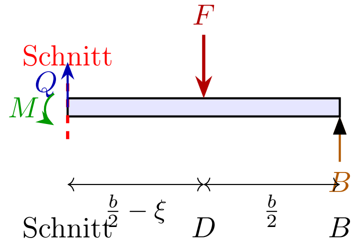
$$\boxed{M_1(x) = M_A + A_y \cdot x = 40 + 10x \quad [\text{kNm}]}$$

Kontrolle:

- Bei $x = 0$: $M_1(0) = 40\,\text{kNm}$ (Einspannmoment)
- Bei $x = a = 4\,\text{m}$: $M_1(4) = 40 + 40 = 80\,\text{kNm}$

8.10.5 Schritt 5: Schnittgrößen in Teil 2 (Bereich $a \leq x \leq a + b$)

Wir führen eine lokale Koordinate $\xi = x - a$ ein (beginnt bei C).
Bereich 2a: $0 \leq \xi \leq \frac{b}{2}$ (zwischen C und D)
Wir schneiden und betrachten das **rechte Teilsystem** (positives Schnittufer am Schnitt):



$\sum F_y = 0$ (rechtes Teilsystem): $\quad Q - F + B = 0$

$$\boxed{Q_{2a}(\xi) = F - B = 20 - 10 = 10\,\text{kN} = \text{const.}}$$

$\sum M_{\text{Schnitt}} = 0$: $\quad -M - F \cdot \left(\frac{b}{2} - \xi\right) + B \cdot (b - \xi) = 0$

$$M_{2a}(\xi) = -F \cdot \frac{b}{2} + F \cdot \xi + B \cdot b - B \cdot \xi = -20 \cdot 2 + 20\xi + 10 \cdot 4 - 10\xi$$

$$\boxed{M_{2a}(\xi) = 10\xi \quad [\text{kNm}]}$$

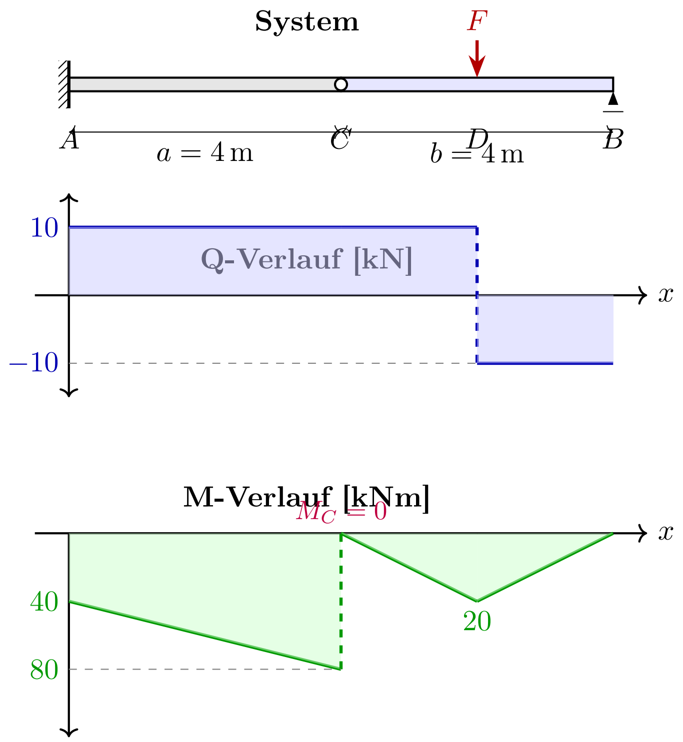
Bereich 2b: $\frac{b}{2} \leq \xi \leq b$ (zwischen D und B)
$\sum F_y = 0$: $\quad Q + B = 0$

$$\boxed{Q_{2b}(\xi) = -B = -10\,\text{kN} = \text{const.}}$$

$\sum M_{\text{Schnitt}} = 0$: $\quad -M + B \cdot (b - \xi) = 0$

$$\boxed{M_{2b}(\xi) = B \cdot (b - \xi) = 10 \cdot (4 - \xi) \quad [\text{kNm}]}$$

8.10.6 Schritt 6: Schnittgrößendiagramme



8.10.7 Zusammenfassung der Ergebnisse

Bereich	x	$Q(x)$	$M(x)$	**Verlauf**
Teil 1 (AC)	$0 \leq x \leq 4$	$+10\,\text{kN}$	$40 + 10x$	Q const., M linear
Teil 2a (CD)	$4 \leq x \leq 6$	$+10\,\text{kN}$	$10(x - 4)$	Q const., M linear
Teil 2b (DB)	$6 \leq x \leq 8$	$-10\,\text{kN}$	$10(8 - x)$	Q const., M linear

Wichtige Erkenntnisse bei Gelenkbalken

- Am **Gelenk** ist das Moment **immer null**: $M_C = 0$
- Der Momentenverlauf hat am Gelenk einen **Knick** (springt auf null)
- Die **Querkraft ist am Gelenk stetig** (kein Sprung, da keine Einzelkraft am Gelenk)
- Bei der Berechnung: Immer auf das **Schnittufer** achten!
- **Positives Ufer**: Q positiv nach unten, M positiv gegen Uhrzeigersinn
- **Negatives Ufer**: Q positiv nach oben, M positiv im Uhrzeigersinn

Übungsaufgabe

Berechne die Schnittgrößen für den gleichen Gelenkbalken, wenn zusätzlich eine konstante Streckenlast $q = 5\,\mathrm{kN/m}$ auf Teil 1 (AC) wirkt.
Tipp: Beginne wieder mit Teil 2, um C_y und B zu bestimmen. Dann Teil 1 mit der zusätzlichen Streckenlast.

8.11 Übersicht: Typische Schnittgrößenverläufe

Belastung	$q(x)$	$Q(x)$	$M(x)$
Keine Last	0	konstant	linear
Konstante Streckenlast	konstant	linear	Parabel (quadr.)
Lineare Streckenlast	linear	Parabel (quadr.)	kubisch
Einzelkraft	–	Sprung	Knick
Einzelmoment	–	stetig	Sprung

Merkregel: Integration

Von der Belastung zur Schnittgröße wird **integriert**:

$$q \xrightarrow{\int} Q \xrightarrow{\int} M$$

Der Grad des Polynoms erhöht sich jeweils um 1!

Achtung!

Häufige Fehler bei Schnittgrößen:

- Falsches Vorzeichen der Streckenlast (Richtung beachten!)
- Sprünge/Knicke an falscher Stelle eingezeichnet
- Vergessen, dass M an den Lagern eines Einfeldträgers **null** ist
- Verwechslung von positivem und negativem Schnittufer

8.12 Zusammenfassung Kapitel 8

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Drei Schnittgrößen**: N (Normal), Q (Quer), M (Moment)
- **Differentielle Beziehung**: $\frac{dQ}{dx} = -q$, $\frac{dM}{dx} = Q$
- **Extremum von M**: Wo $Q = 0$ ist!
- **Sprünge**: Einzelkraft $\rightarrow$ Sprung in Q, Knick in M
- **Zeichnung**: M an der Zugseite abtragen

9 Haftung und Reibung

Lernziele

Nach diesem Kapitel kannst du:

- Zwischen Haftung und Gleitreibung unterscheiden
- Das Coulombsche Reibungsgesetz anwenden
- Probleme mit Reibung systematisch lösen
- Seilreibung berechnen

9.1 Grundlagen

Bei Kontakt zwischen zwei Körpern treten neben der Normalkraft auch **Tangentialkräfte** auf, die einer Relativbewegung entgegenwirken.

Zwei Zustände:

- **Haftung**: Körper ruhen relativ zueinander
- **Gleiten**: Körper bewegen sich relativ zueinander

9.2 Das Coulombsche Reibungsgesetz

Haftung (Körper in Ruhe):

$$\boxed{|H| \leq \mu_0 \cdot N}$$

Die Haftungskraft H kann jeden Wert bis zur Haftgrenze annehmen.
Gleiten (Körper in Bewegung):

$$\boxed{R = \mu \cdot N}$$

Die Reibungskraft R hat einen festen Wert und wirkt der Bewegung entgegen.

WICHTIG!

- μ_0 = Haftungskoeffizient (Haftreibungszahl)
- μ = Gleitreibungskoeffizient (Gleitreibungszahl)
- Es gilt immer: $\mu_0 > \mu$
- N = Normalkraft (senkrecht zur Kontaktfläche)

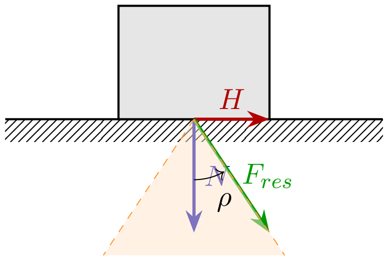
Materialpaarung	μ_0 (Haftung)	μ (Gleiten)
Stahl auf Stahl (trocken)	0,15 – 0,5	0,1 – 0,4
Stahl auf Stahl (geschmiert)	0,1 – 0,15	0,05 – 0,1
Gummi auf Beton (trocken)	0,8 – 1,0	0,6 – 0,8
Holz auf Holz	0,4 – 0,6	0,2 – 0,4

9.3 Der Reibungswinkel

Reibungswinkel:

$$\boxed{\tan \rho_0 = \mu_0}$$

Der Reibungswinkel ρ_0 ist der maximale Winkel, unter dem die resultierende Kontaktkraft von der Normalen abweichen kann, ohne dass Gleiten einsetzt.



Reibungskegel

Solange die resultierende Kontaktkraft **innerhalb des Reibungskegels** liegt (Winkel $\leq \rho_0$), haftet der Körper.

9.4 Systematik bei Reibungsproblemen

Vorgehensweise:

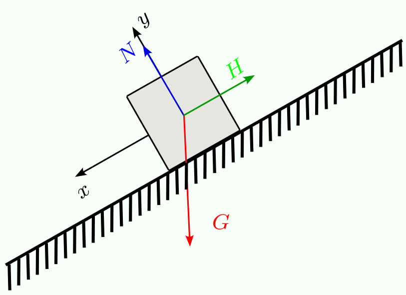
1. **Freikörperbild** mit N und H (Haftungskraft) zeichnen
2. **Gleichgewichtsbedingungen** aufstellen
3. **Haftbedingung prüfen**: $|H| \leq \mu_0 \cdot N$?
4. Falls $|H| > \mu_0 \cdot N$: Körper gleitet, setze $R = \mu \cdot N$

Mini-Aufgabe

Ein Klotz (Masse $m = 10\,\text{kg}$) liegt auf einer schiefen Ebene mit Neigung $\alpha = 30$. Der Haftungskoeffizient ist $\mu_0 = 0{,}5$.
Liegt der Klotz in Ruhe oder rutscht er?

Lösung

Freikörperbild:



Gleichgewicht:
x-Richtung (hangabwärts): $G \sin\alpha - H = 0$

$$H = mg \sin 30 = 10 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 50\,\mathrm{N}$$

y-Richtung (senkrecht): $N - G\cos\alpha = 0$

$$N = mg \cos 30 = 10 \cdot 10 \cdot 0{,}866 = 86{,}6\,\mathrm{N}$$

Haftbedingung:

$$H_{max} = \mu_0 \cdot N = 0{,}5 \cdot 86{,}6 = 43{,}3\,\mathrm{N}$$

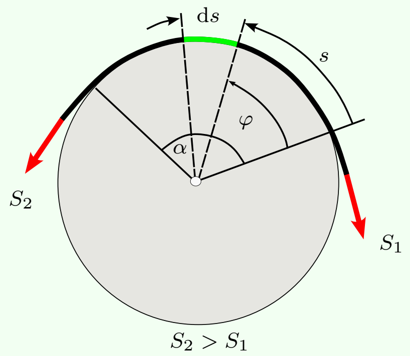
Da $H = 50\,\mathrm{N} > H_{max} = 43{,}3\,\mathrm{N}$: **Der Klotz rutscht!**

9.5 Seilreibung (Euler-Eytelwein)

Euler-Eytelwein-Formel:

$$\boxed{\frac{S_2}{S_1} \leq e^{\mu_0 \cdot \alpha}}$$

- S_2 = größere Seilkraft (Lastseite)
- S_1 = kleinere Seilkraft (Kraftseite)
- α = Umschlingungswinkel **im Bogenmaß**!
- $e \approx 2{,}718$ (Eulersche Zahl)



Poller

Ein Seil ist 2-mal um einen Poller gewickelt ($\alpha = 4\pi$). Mit $\mu_0 = 0{,}3$ kann eine Last von:

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{0{,}3 \cdot 4\pi} = e^{3{,}77} \approx 43{,}4$$

Mit nur $S_1 = 100\,\mathrm{N}$ Handkraft kann also eine Last von $S_2 \approx 4340\,\mathrm{N}$ gehalten werden!

9.6 Zusammenfassung Kapitel 9

Das Wichtigste auf einen Blick

- **Haftung**: $|H| \leq \mu_0 \cdot N$ (Ungleichung!)
- **Gleiten**: $R = \mu \cdot N$ (Gleichung!)
- $\mu_0 > \mu$ (Haft- größer als Gleitreibung)
- **Reibungswinkel**: $\tan \rho_0 = \mu_0$
- **Seilreibung**: $S_2/S_1 \leq e^{\mu_0 \alpha}$

10 Formelsammlung

10.1 Grundlagen

Kraft als Vektor:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}, \quad |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Einheiten:

Kraft	F	Newton [N] = kg·m/s²
Moment	M	Newtonmeter [Nm]
Streckenlast	q	[N/m]

10.2 Kräfte zusammensetzen

Resultierende:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i, \quad R_x = \sum F_{ix}, \quad R_y = \sum F_{iy}$$

Zwei Kräfte mit Winkel α:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

10.3 Moment

Definition:

$$M = F \cdot h \quad \text{(Kraft mal Hebelarm)}$$

Über Komponenten:

$$M_A = F_x \cdot r_y - F_y \cdot r_x$$

Kräftepaar:

$$M = F \cdot a \quad \text{(unabhängig vom Bezugspunkt)}$$

10.4 Gleichgewichtsbedingungen

Ebene (2D):

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_A = 0$$

Raum (3D):

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

10.5 Schwerpunkt

Flächenschwerpunkt:

$$x_S = \frac{\sum A_i \cdot x_{Si}}{\sum A_i}, \quad y_S = \frac{\sum A_i \cdot y_{Si}}{\sum A_i}$$

Wichtige Formen:

Rechteck	$A = b \cdot h$	$x_S = b/2$, $y_S = h/2$
Dreieck	$A = \frac{1}{2}bh$	$y_S = h/3$ (von Basis)
Kreis	$A = \pi r^2$	Mittelpunkt
Halbkreis	$A = \frac{\pi r^2}{2}$	$y_S = \frac{4r}{3\pi}$

10.6 Lager (ebene Systeme)

Lagertyp	**Wertigkeit**	**Reaktionen**
Loslager	1	$F_\perp$
Festlager	2	F_H, F_V
Einspannung	3	F_H, F_V, M

Statische Bestimmtheit: $r = n$ (Reaktionen = Gleichungen)

10.7 Fachwerke

Abzählkriterium:

$$s + r = 2k$$

(s = Stäbe, r = Lagerreaktionen, k = Knoten)
Knotenpunktverfahren: Pro Knoten 2 Gleichungen
Vorzeichen: $+$ = Zug, $-$ = Druck

10.8 Schnittgrößen

Differentielle Beziehungen:

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = Q$$

Extremum von M: Wo $Q = 0$

10.9 Reibung

Haftung:

$$|H| \leq \mu_0 \cdot N$$

Gleiten:

$$R = \mu \cdot N$$

Reibungswinkel:

$$\tan \rho_0 = \mu_0$$

Seilreibung (Euler-Eytelwein):

$$\frac{S_2}{S_1} \leq e^{\mu_0 \cdot \alpha}$$

11 Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

1. **Freikörperbild immer zuerst!** – Das FKB ist der Schlüssel zu jeder Aufgabe.
2. **Statische Bestimmtheit prüfen** – Vor dem Rechnen: Ist das System überhaupt lösbar?
3. **Einheiten kontrollieren** – Immer SI-Einheiten verwenden.
4. **Vorzeichen konsistent halten** – Eine Konvention wählen und durchhalten.
5. **Kontrolle durch zusätzliche Gleichung** – Nutze eine überzählige Bedingung zur Probe.
6. **Symmetrie ausnutzen** – Spart oft die Hälfte der Rechnung!
7. **Momentenbezugspunkt geschickt wählen** – Durch unbekannte Kräfte legen.

Der goldene Tipp

Die meisten Fehler passieren nicht beim Rechnen, sondern beim **Aufstellen der Gleichungen**. Nimm dir Zeit für ein sauberes Freikörperbild!

„In der Statik geht es nicht um das Auswendiglernen von Formeln, sondern um das systematische Anwenden der Gleichgewichtsbedingungen."