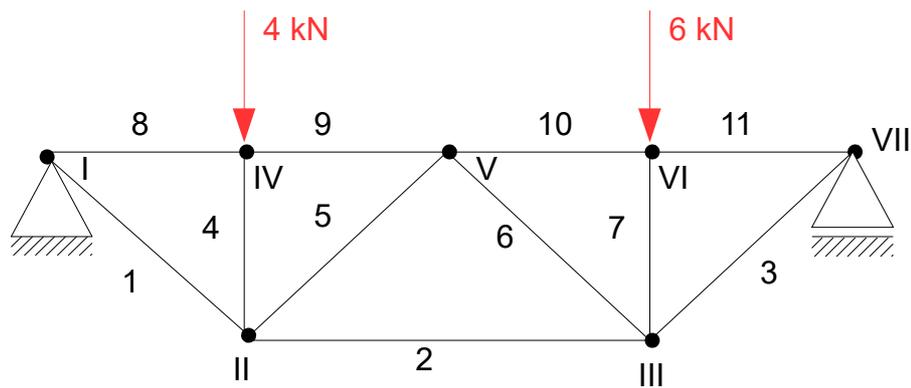


Webinar: Statik

Thema: Cremonaplan – Zeichnerische Ermittlung der Stabkräfte eines Fachwerks

Aufgabe: Cremonaplan



Gegeben sei das obige Fachwerk welches durch die beiden äußeren Kräfte belastet wird. Es sollen alle unbekanntes Stabkräfte zeichnerisch mittels **Cremonaplan** bestimmt werden.

Cremonaplan

Jeder Knoten eines Fachwerks befindet sich im Gleichgewicht, d.h. die Summe aller an dem Knoten wirkenden Kräfte ist gleich Null. Für jeden Knoten lässt sich ein geschlossenes Krafteck zeichnen. Werden die einzelnen Kraftecke zusammengefügt, entsteht der Cremonaplan.

Da jede Stabkraft an zwei Knoten angreift und demnach in zwei Kraftecken vorkommt, ergibt der Cremonaplan ein geschlossenes maßstabgerechtes Krafteck, in welchem jede Stabkraft nur einmal vorkommt.

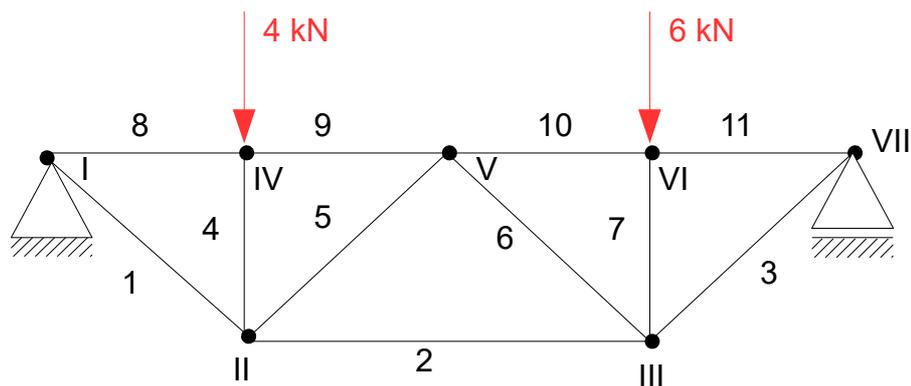
VORGEHENSWEISE:

Bei Aufstellung des Cremonaplanes müssen alle Kräfte in einem vorher festgelegten Umlaufsinn abgetragen werden (rechts- oder linksherum). Dieser Umlaufsinn muss die gesamte Untersuchung über beibehalten werden.

Zunächst werden die äußeren Kräfte diesem Umlaufsinn entsprechend aufgezeichnet. Danach folgt die Betrachtung der Knoten und der daran angreifenden Kräfte. Auch hier muss dieser festgelegten Umlaufsinn beibehalten werden.

Lösung der Aufgabe:

Wir beginnen zunächst mit der Bestimmung der Lagerkräfte. Dies kann nun entweder so geschehen, dass alle äußeren Kräfte zu einer Resultierenden zusammengefasst werden (Seileckverfahren) und dann mittels Culmann-Verfahren die Lagerkräfte berechnet werden oder aber man geht wie folgt vor:



Die Stäbe 8,9,10,11 weisen alle dieselbe Länge auf. Wir können mit diesem Wissen den Stäben die Länge "1" (oder beliebiges) zuweisen und berechnen die Lagerkräfte mittels Momentengleichgewichtsbedingung. Zunächst um A:

$$M_A: B \cdot 4 - 4 \text{ kN} \cdot 1 - 6 \text{ kN} \cdot 3 = 0$$

$$B = \frac{4 \text{ kN} \cdot 1 + 6 \text{ kN} \cdot 3}{4}$$

$$B = \frac{4 \text{ kN} \cdot 1}{4} + \frac{6 \text{ kN} \cdot 3}{4} = 1 \text{ kN} + 4,5 \text{ kN} = 5,5 \text{ kN}$$

Danach bestimmen wir das Momentengleichgewicht um B:

$$M_B: -A_v \cdot 4 + 4 \text{ kN} \cdot 3 + 6 \text{ kN} \cdot 1 = 0$$

$$A_v = \frac{4 \text{ kN} \cdot 3 + 6 \text{ kN} \cdot 1}{4}$$

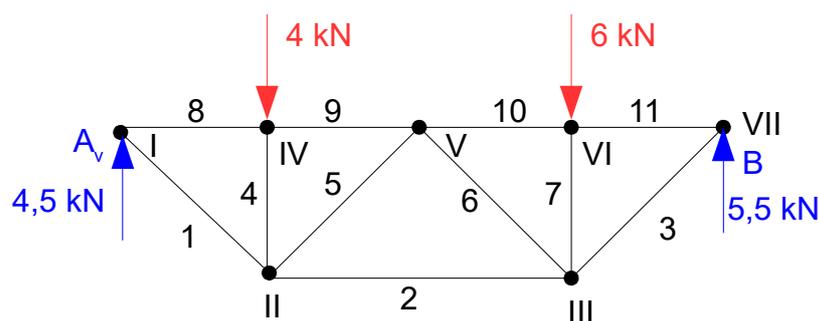
$$A_v = 1 \text{ kN} \cdot 3 + 1,5 \text{ kN} \cdot 1 = 4,5 \text{ kN}$$

Zur Überprüfung vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: A_v + B - 4 \text{ kN} - 6 \text{ kN} = 0$$

$$\uparrow: 4,5 \text{ kN} + 5,5 \text{ kN} - 4 \text{ kN} - 6 \text{ kN} = 0$$

Gleichgewichtsbedingung erfüllt. Horizontale Gleichgewichtsbedingung ist ebenfalls erfüllt, da keine äußeren Kräfte in horizontaler Richtung wirken.



Wir beginnen nun damit den **Cremonaplan** zu zeichnen.

1. Umlaufsinn festlegen: **Rechtsdrehung**
2. Knoten wählen: Darf max. 2 unbekannte Stabkräfte und mind. 1 bekannte Kraft aufweisen.

Knoten I

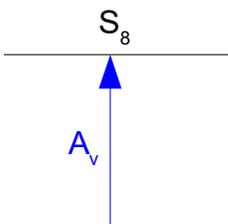
Wir beginnen hier mit dem Knoten I (1 bekannte Kraft A_v und 2 unbekannte Stabkräfte).

Wir müssen im nachfolgenden alle uns bekannten Kräfte einem Maßstab entsprechend aufzeichnen um später die Länge (=Betrag) der Stabkräfte messen zu können. Wir wählen hier den Maßstab (1 kN = 0,5cm).

Wir beginnen immer mit einer bekannten Kraft. Wir zeichnen die Auflagerkraft A_v mit der Länge **2,25 cm** ein:

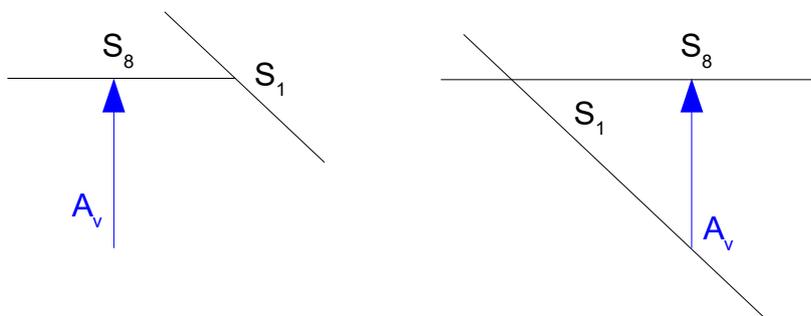


Wir haben als Umlaufsinn die **Rechtsdrehung** gewählt. Demnach gehen wir nun mit dem Uhrzeigersinn von der Kraft A_v ausgehend zur nächsten Kraft an diesem Knoten. Das ist die **Stabkraft 8**. Wir kennen die Wirkungslinie der Stabkraft, aber nicht die Richtung. Demnach müssen wir nun an die Spitze der Kraft A_v (grafische Vektoraddition) die Stabkraft 8 mit ihrer Wirkungslinie legen. Da wir auch die Länge nicht kennen, zeichnen wir nun die Wirkungslinie beliebig lang ein:



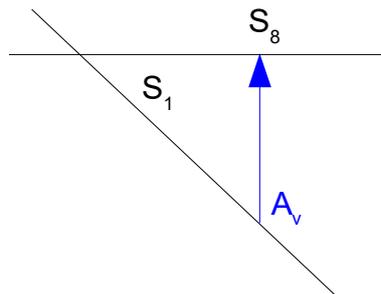
Danach gehen wir wieder mit dem Uhrzeigersinn zur nächsten Kraft an diesem Knoten und treffen auf die Stabkraft 1. Auch hier ist uns nur die Wirkungslinie bekannt (Richtung und Länge sind unbekannt). Wir müssen (nach der grafischen Vektoraddition) die Stabkraft 1 an die zuletzt verwendete Kraft legen, also an die Stabkraft 8.

Es gibt nun 2 Möglichkeiten. Entweder die Stabkraft wird links oder rechts von der Stabkraft 8 angelegt (wir kennen die Richtung von S_8 noch nicht):

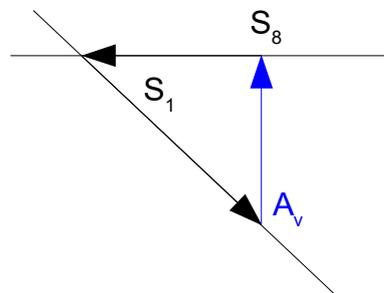


Gegebenfalls müssen bei der obigen Konstruktion die Wirkungslinien der Stabkräfte verlängert werden (Auflagerkraft A_v darf nicht verlängert werden, da diese bereits in ihrer Länge gegeben ist). Es muss ein geschlossenes Krafteck resultieren, wobei die Stabkraft S_1 den Anfangspunkt der Kraft A_v berühren muss (Vektoraddition).

Es ist deutlich zu erkennen, dass nur die 1. Lösung (rechte Grafik) richtig sein kann, da sich ein geschlossenes Krafteck ergeben muss. Demnach ist die rechte Grafik zu übernehmen:



Gemäß der Vektoraddition (Anfangspunkt einer Kraft an die Spitze der Vorherigen) werden nun die entsprechenden Richtungen der Stabkräfte eingezeichnet:



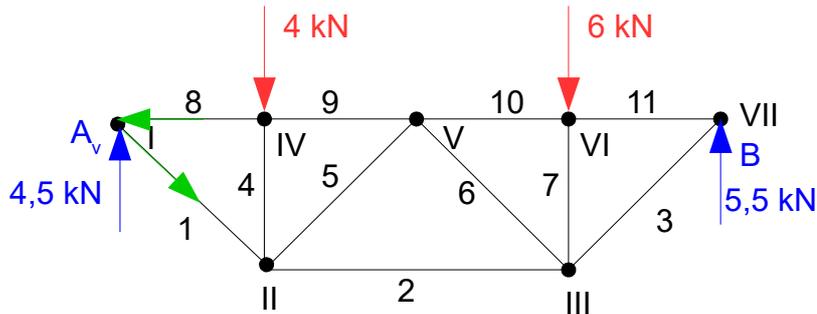
Wir haben ein geschlossenes Krafteck gegeben. Dieses Krafteck sagt aus, dass die Summe aller Kräfte gleich Null ist. Aus diesem Krafteck können wir nun Folgendes ablesen:

-> Richtung der Stabkräfte (Zug- oder Druckstab)

-> Länge und damit Betrag der Stabkräfte

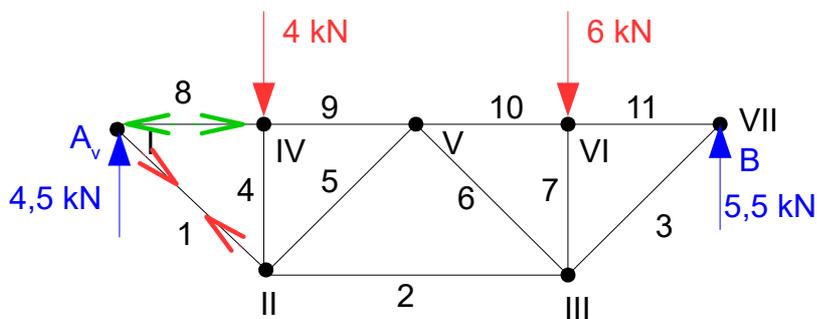
Zug- oder Druckstab

Die oben angegebene Richtung der Stabkräfte zeigt uns an, ob es sich hierbei um einen Zug- oder Druckstab handelt. Hierfür benötigen wir den Knoten I und legen die Kräfte gemäß Fachwerk an den Knoten I:



Zur Visualisierung sind die Stabkräfte S_8 und S_1 am Knoten I in das Fachwerk eingezeichnet worden. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Stab S_8 ein Druckstab ist und der Stab S_1 ein Zugstab.

Tatsächlich wird im Cremonaplan mit Pfeilen gearbeitet um Druck- und Zugstäbe zu kennzeichnen:



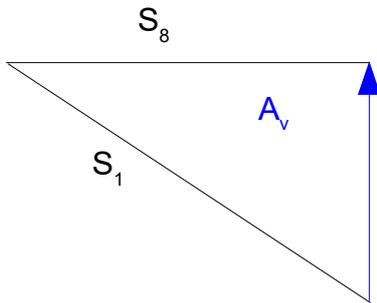
Betrag der Stabkräfte

Die Beträge der Stabkräfte ermitteln wir, indem wir die Länge der Stäbe messen und entsprechend dem festgelegten Maßstab umrechnen (hier: $1 \text{ kN} = 0,5 \text{ cm}$).

Der Stab S_8 weist eine Länge von $3,37 \text{ cm}$ und damit einen Betrag von $6,74 \text{ kN}$.

Der Stab S_1 eine Länge von $3,26 \text{ cm}$ und damit einen Betrag von $6,52 \text{ kN}$.

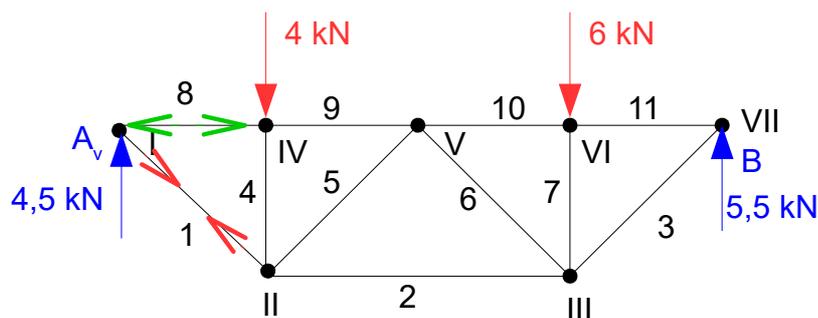
Der Teil-Cremonaplan für die drei Kräfte sieht wie folgt aus:



Die Stabkräfte werden ohne Richtung eingezeichnet, die Längen der Stabkräfte hingegen werden dem gewählten Maßstab entsprechend in den Cremonaplan eingezeichnet. Es ist auch möglich für den Cremonaplan einen separaten Maßstab zu wählen (bitte Angeben!), damit dieser übersichtlicher wird und alle Stabkräfte gut zu erkennen sind. In dem obigen Beispiel ist der Cremonaplan nicht maßstabgetreu aufgestellt (zur besseren Übersicht).

Diese Vorgehensweise wird für alle Knoten durchgeführt. Nachdem die Längen (Beträge) und Richtungen bekannt sind werden die Stäbe (ohne Richtung aber mit der gegebenen Länge) in den Cremonaplan eingezeichnet. Die Kennzeichnung Druck- oder Zugstab wird im Fachwerk selber visualisiert.

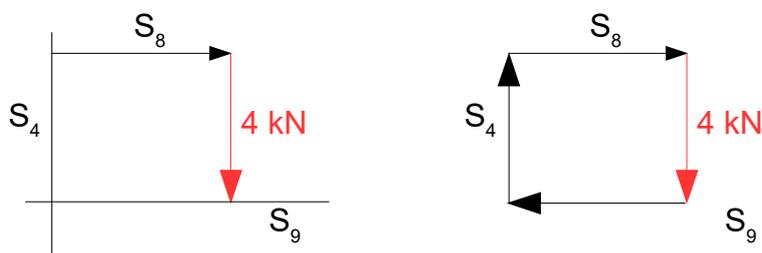
Wir starten mit dem nächsten Knoten, welcher höchstens 2 unbekannte Kräfte aufweisen darf und mindestens eine bekannte Kraft. Dabei sollte die bekannte Kraft eine der bereits im 1. Schritt verwendeten Kräfte darstellen.



Der **Knoten II** kann nicht herangezogen werden, weil hier 3 unbekannte Stabkräfte gegeben sind. Demnach verbleibt der Knoten IV mit 2 unbekanntem Stabkräfte (S_9 und S_4) sowie der bereits bekannten Stabkraft S_8 und der äußeren Kraft 4kN. Wir beginnen mit der bereits im Cremonaplan vorhandenen Stabkraft S_8 .

Knoten IV

Wir wissen, dass S_8 ein Druckstab ist, demnach zeigt dieser auf den Knoten IV mit der Länge 3,37 cm. Gemäß dem Umlaufsinn treffen wir als nächstes auf die bekannte äußere Kraft mit der Länge 2 cm. Der Anfangspunkt der äußeren Kraft wird an die Spitze der Stabkraft S_8 gelegt. Danach erreichen wir die unbekannte Stabkraft S_9 . Hier wird die Wirkungslinie dieser an die Spitze der äußeren Kraft gelegt und danach die Wirkungslinie der Stabkraft S_4 an die Wirkungslinie von S_9 :



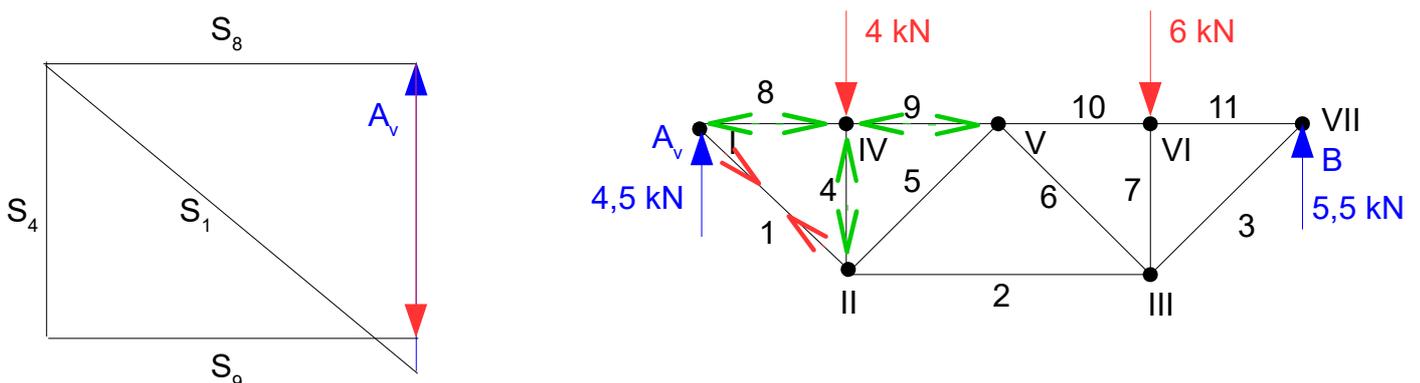
Wichtig: Beim geschlossenen Krafteck ist Startkraft und Endkraft identisch. Das Ziel ist es also die Kräfte im gewählten Umlaufsinn so aneinander zu reihen, dass die Startkraft den Endpunkt bildet.

Es ergibt sich wieder ein geschlossenes Krafteck, d.h. alle Kräfte befinden sich an diesem Knoten im Gleichgewicht.

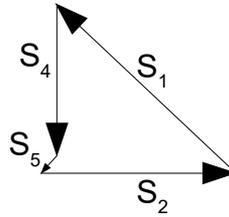
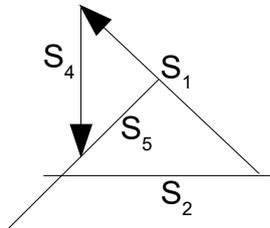
Die Stabkraft S_9 ist ein Druckstab mit der Länge 2,35 cm und dem Betrag 4,7 kN.

Die Stabkraft S_4 ist ein Druckstab mit der Länge 2 cm und dem Betrag von 4 kN.

Anfügen an den Cremonaplan (nicht maßstabgetreu):



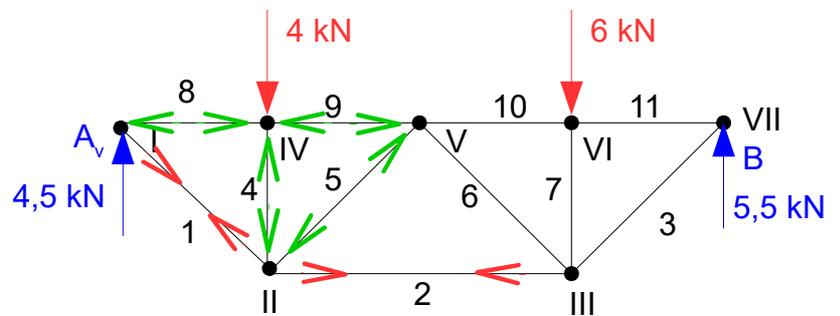
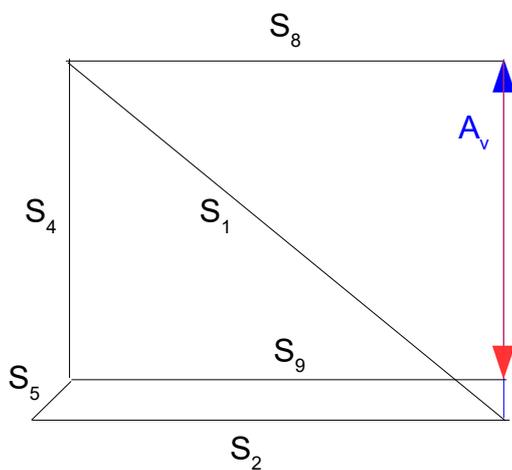
Knoten II



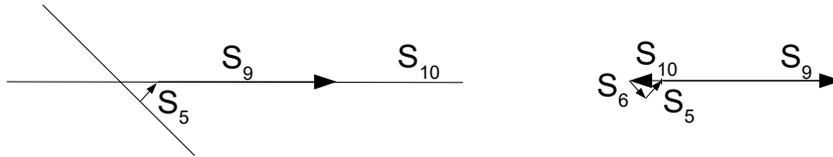
Die Stabkraft S_5 ist ein Druckstab mit der Länge 0,32 cm und dem Betrag von 0,64 kN.

Die Stabkraft S_2 ist ein Zugstab mit der Länge 2,58 cm und dem Betrag von 5,16 kN.

Anfügen im Cremonaplan (nicht maßstabgetreu):



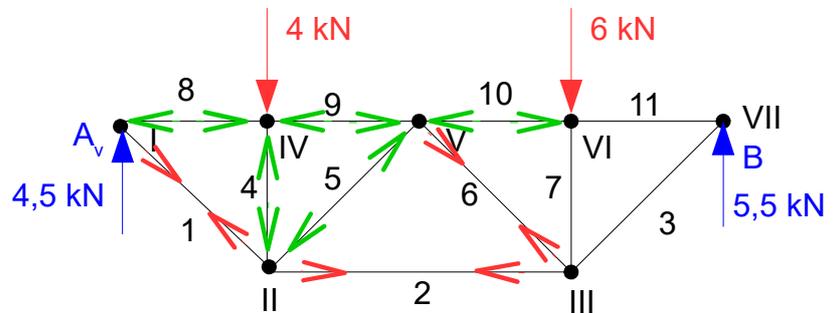
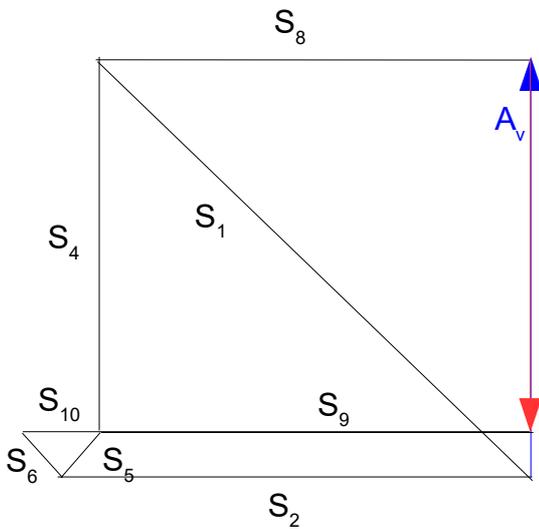
Knoten V



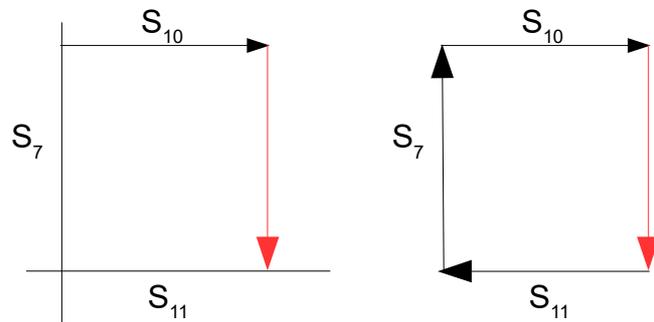
Die Stabkraft S_{10} ist ein Druckstab mit der Länge 2,76 cm und dem Betrag von 5,52 kN.

Die Stabkraft S_6 ist ein Zugstab mit der Länge 0,32 cm und dem Betrag von 0,64 kN.

Anfügen im Cremonaplan (nicht maßstabgetreu):



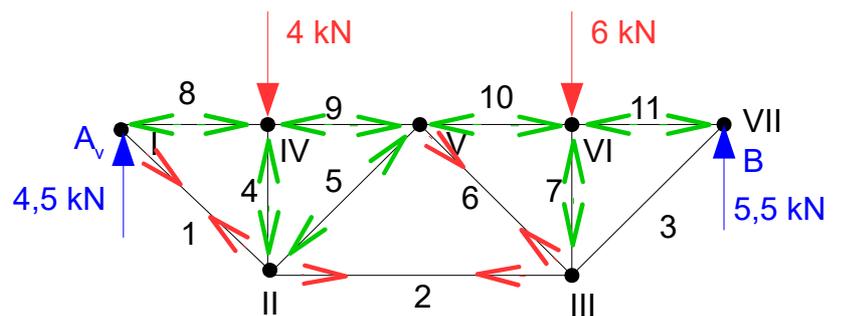
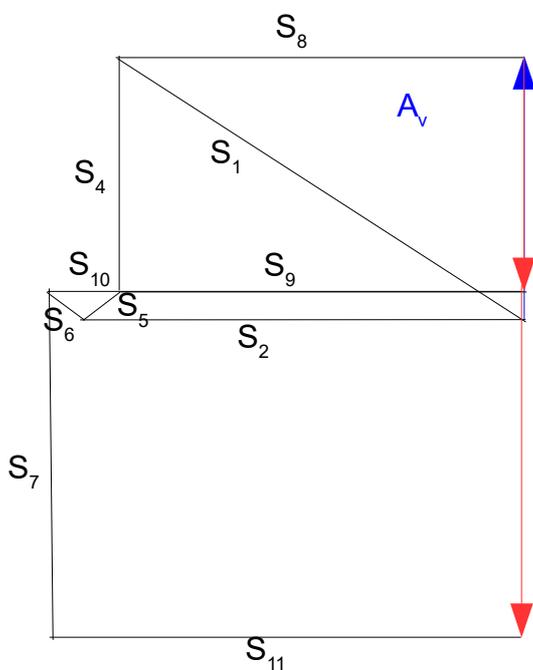
Knoten VI



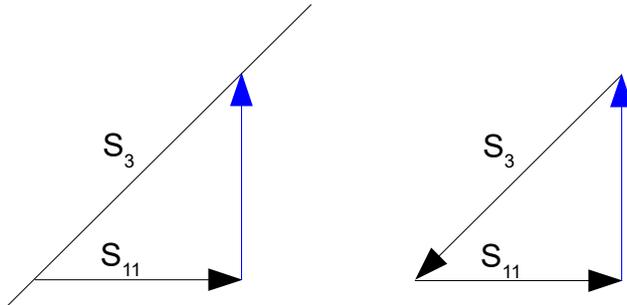
Die Stabkraft S_{11} ist ein Druckstab mit der Länge 2,73 cm und dem Betrag von 5,46 kN.

Die Stabkraft S_7 ist ein Druckstab mit der Länge 3 cm und dem Betrag von 6 kN.

Anfügen im Cremonaplan (nicht maßstabgetreu):



Knoten VII



Die Stabkraft S_3 ist ein Zugstab mit der Länge 3,85 cm und dem Betrag von 7,7 kN.

Anfügen im Cremonaplan (nicht maßstabgetreu):

