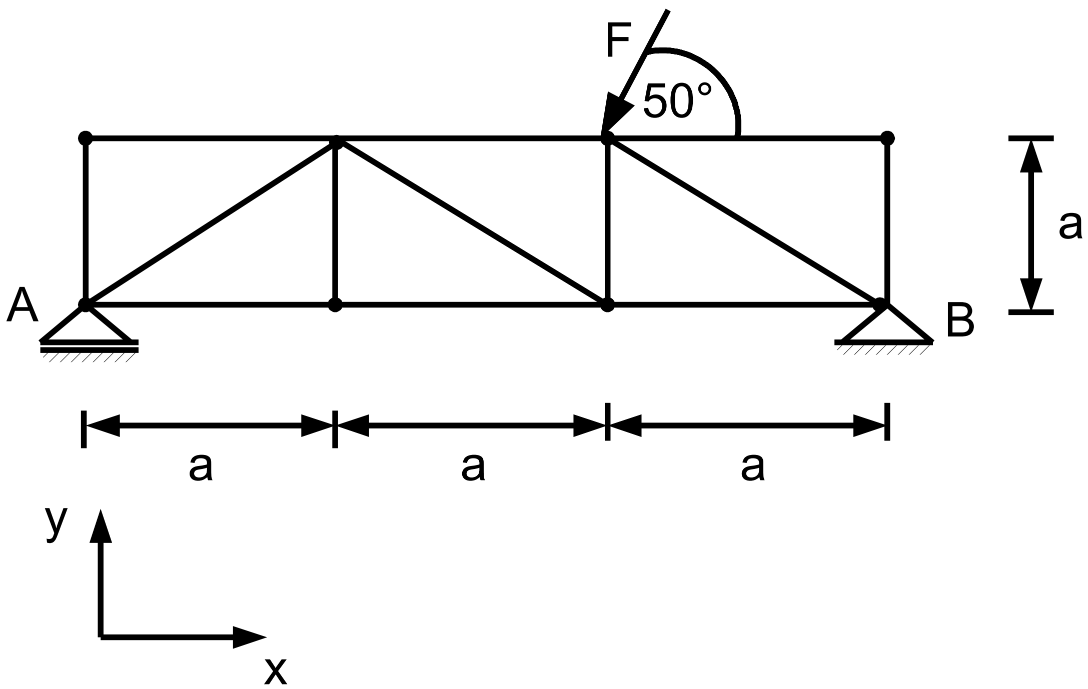
Webinar: Statik
Thema: Knotenpunktverfahren

Aufgabe: Stabkräfte bestimmen



Es gilt a = 2m und F = 20 kN!

a) Prüfe das Fachwerk auf statische Bestimmtheit!

b) Bestimme die Auflagerkräfte!

c) Überprüfe das Fachwerk auf Nullstäbe!

d) Bestimme die Stabkräfte mittels Knotenpunktverfahren!

Lösung:

a) Prüfe das Fachwerk auf statische Bestimmtheit!

Wir prüfen das Fachwerk zunächst auf statische Bestimmtheit. Jeder Knoten befindet sich im Gleichgewicht, d.h. die Summe aller an diesen Knoten angreifenden Stabkräfte ist gleich Null:

$$\sum F_{ix} = R_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = R_y = 0$$

Es stehen pro Knoten 2 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Die vertikale und die horizontale Gleichgewichtsbedingung. Demnach können pro Knoten 2 unbekannte Kräfte (Stabkräfte s und Lagerkräfte r) ermittelt werden.

Die statische Bestimmtheit wird also berechnet durch:

$$2k = r + s$$

Wir haben insgesamt 8 Knoten gegeben. Das Stabwerk besitzt 13 Stäbe (s= 13 Stabkräfte) und 2 Lager mit r = 3 Lagerkräften (Loslager = vertikale Kraft, Festlager = vertikale und horizontale Kraft).

Wir erhalten also:

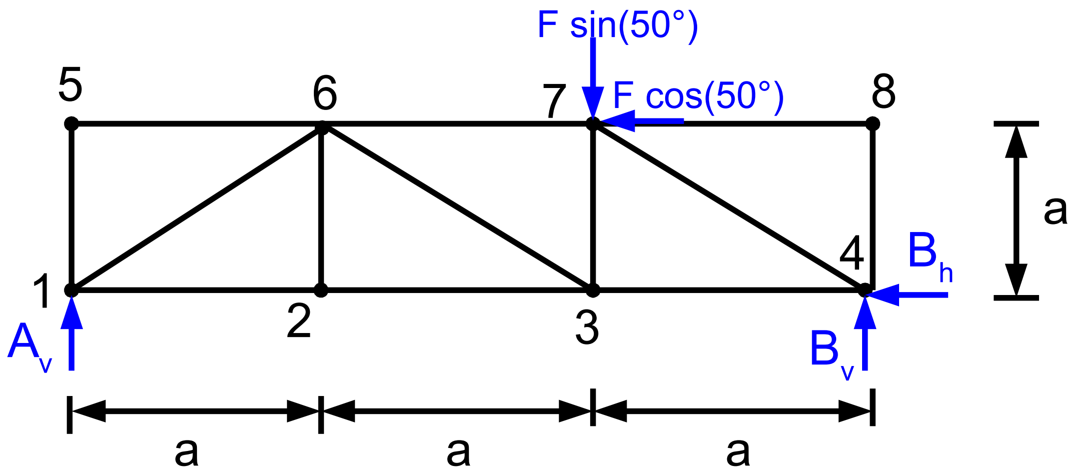
$$2 \cdot 8 = 3 + 13$$

$$16 = 16$$

Das Fachwerk ist statisch bestimmt!

b) Lagerkräfte bestimmen

Zur Bestimmung der Lagerkräfte und auch der Stabkräfte ist es sinnvoll die Kraft F in ihre Komponenten in x- und y-Richtung zu zerlegen:



Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: -B_h - F \cdot \cos(50°) = 0 \qquad B_h = -F \cdot \cos(50°) = -12{,}86\,\mathrm{kN}$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: A_v + B_v - F \cdot \sin(50°) = 0 \qquad A_v + B_v = F \cdot \sin(50°)$$

Momentengleichgewichtsbedingung um das Lager B:

$$B: \; -A_v \cdot 3a + F \cdot \cos(50°) \cdot a + F \cdot \sin(50°) \cdot a = 0$$

$$A_v = \frac{F \cdot \cos(50°) \cdot a + F \cdot \sin(50°) \cdot a}{3a}$$

$$A_v = \frac{20\,\mathrm{kN} \cdot \cos(50°) \cdot 2\mathrm{m} + 20\,\mathrm{kN} \cdot \sin(50°) \cdot 2\mathrm{m}}{6\mathrm{m}} = 9{,}39\,\mathrm{kN}$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung zur Berechnung von B_v:

$$A_v + B_v = F \cdot \sin(50°)$$

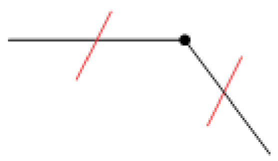
$$B_v = F \cdot \sin(50°) - A_v$$

$$B_v = 20\,\mathrm{kN} \cdot \sin(50°) - 9{,}39\,\mathrm{kN}$$

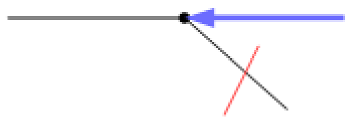
$$B_v = 5{,}93\,\mathrm{kN}$$

c) Überprüfe das Fachwerk auf Nullstäbe!

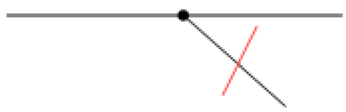
Nachdem die Lagerreaktionen bestimmt worden sind, wird das Fachwerk als nächstes auf Nullstäbe geprüft. Nullstäbe sind Stäbe, die keine Kräfte aufnehmen. Wir können die Nullstäbe für das Knotenpunktverfahren aus dem Fachwerk entfernen oder mit 0 kennzeichnen. Tatsächlich dürfen diese Stäbe nicht aus dem Fachwerk entfernt werden, weil diese zur Stabilität beitragen! Die folgenden drei Regel sind anzuwenden:



Regel 1: An einem unbelasteten Knoten sind nur zwei Stäbe angeschlossen, die nicht in die gleiche Richtung zeigen. -> Beide Stäbe sind Nullstäbe.

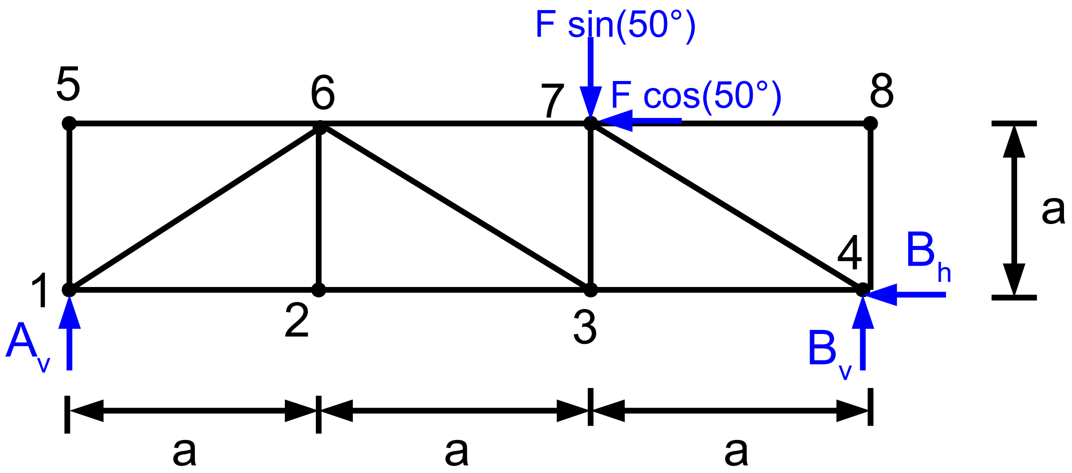


Regel 2: An einem belasteten Knoten sind nur zwei Stäbe angeschlossen und die äußere resultierende Kraft greift in Richtung des einen Stabes an, so ist der andere Stab ein Nullstab.



Regel 3: An einem unbelasteten Knoten sind drei Stäbe angeschlossen, von denen zwei in gleicher Richtung liegen, so ist der dritte Stab ein Nullstab.

Wir betrachten nun das gesamte Fachwerk und wenden die Regeln an:

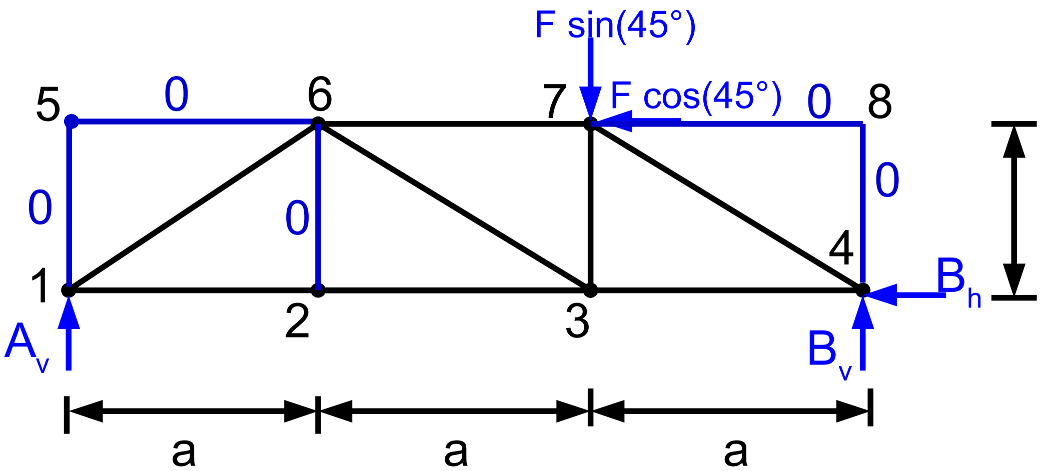


Regel 1: Der Knoten 5 ist unbelastet. Es greifen 2 Kräfte an, die nicht in dieselbe Richtung zeigen -> beide Stäbe am Knoten 5 sind Nullstäbe, also Stab S_{15} und Stab S_{56}. Das selbe gilt für den Knoten 8, also sind die Stäbe S_{48} und S_{78} Nullstäbe!

Regel 2: Regel nicht anwendbar!

Regel 3: Knoten 2 ist unbelastet und besitzt 3 Stäbe. Zwei davon jeweils in gleicher Richtung. Der Stab S_{26} ist ein Nullstab!

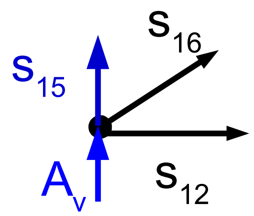
Wir bezeichnen die Nullstäbe mit 0. Danach können die restlichen Stabkräfte mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden.



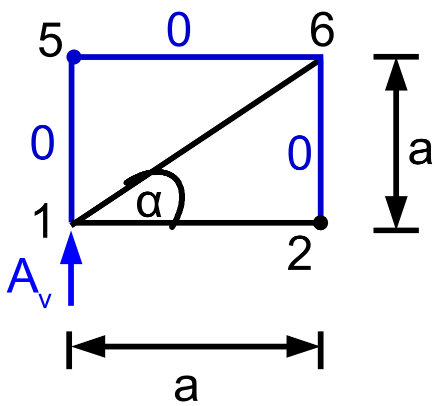
Für das Knotenpunktverfahren wird jeder Knoten freigeschnitten und die beiden Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der unbekannten Stäbe angewandt. Da zwei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen können insgesamt also 2 unbekannte Kräfte berechnet werden. Demnach können nur Knoten freigeschnitten werden die nicht mehr als 2 unbekannte Kräfte aufweisen.

Knoten 1

Begonnen wird mit dem Knoten **1** beim Auflager A. Dieser Knoten besitzt zwei unbekannte Stabkräfte. Wir können diesen Knoten also wählen um aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen die Stabkräfte zu berechnen:



Wir müssen die Stabkraft S_{16} in ihre Komponente in x- und y-Richtung zerlegen. Dazu benötigen wir den Winkel zwischen zwischen S_{16} und S_{12} (oder zwischen S_{15} und S_{16}). Hierzu muss die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck herangezogen werden:



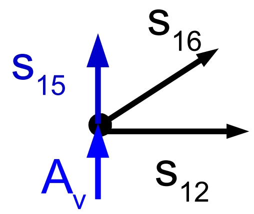
Das Dreieck (1-6-2) ist ein rechtwinkliges Dreieck. Aus den Abmessungen können wir mittels Tangens den Winkel bestimmen.

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2m}{2m}\right) = 45°$$

Es kann als nächstes mit der Berechnung begonnen werden:



Berechnung von S_{16} und S_{12}

Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: S_{16} \cdot \cos(45°) + S_{12} = 0$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

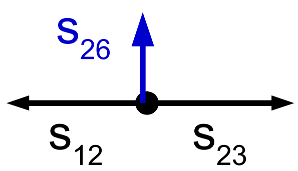
$$\uparrow: S_{16} \cdot \sin(45°) + A_v + S_{15} = 0 \qquad | \text{ mit } S_{15} = 0$$

$$S_{16} = -\frac{A_v}{\sin(45°)} = -\frac{9{,}39\,\text{kN}}{\sin(45°)} = -13{,}28\,\text{kN}$$

Berechnung von S_{12} durch die horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$S_{12} = -S_{16} \cdot \cos(45°) = -(-13{,}28\,\text{kN}) \cdot \cos(45°) = 9{,}39\,\text{kN}$$

Knoten 2



Berechnung von S_{23}

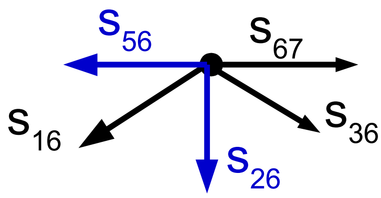
Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: -S_{12} + S_{23} = 0$$

$$S_{23} = S_{12} = 9{,}39\,\text{kN}$$

Knoten 6

Es wird als nächstes der Knoten 6 betrachtet. An diesem sind 5 Stäbe angebracht, zwei davon Nullstäbe und der Stab S_{16} ist bereits bekannt. Am Knoten 6 greifen also zwei unbekannte Stabkräfte an:



Berechnung von S_{36} und S_{67}

Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: S_{67} + S_{36} \cdot \cos(45°) - S_{16} \cdot \cos(45°) = 0$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: -S_{16} \cdot \sin(45°) - S_{36} \cdot \sin(45°) = 0$$

$$S_{36} = \frac{-S_{16} \cdot \sin(45°)}{\sin(45°)} = 0$$

$$S_{36} = \frac{-(-13{,}28\,\text{kN}) \cdot \sin(45°)}{\sin(45°)} = 13{,}28\,\text{kN}$$

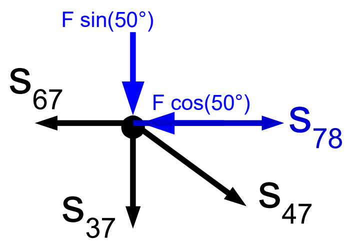
Bestimmung von S_{67} aus der horizontalen Gleichgewichtsbedingung:

$$S_{67} = -S_{36} \cdot \cos(45°) + S_{16} \cdot \cos(45°)$$

$$S_{67} = -13{,}28\,\text{kN} \cdot \cos(45°) - 13{,}28\,\text{kN} \cdot \cos(45°) = -18{,}78\,\text{kN}$$

Knoten 7 (alternativ Knoten 3)

Am Knoten 7 greifen insgesamt 4 Stabkräfte (davon 2 Unbekannte) und die Komponenten der Kraft F an:



Berechnung von S_{47} und S_{37}

Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: -S_{67} + S_{78} + S_{47} \cdot \cos(45°) - F\cos(50°) = 0$$

Einsetzen der bereits bekannten Kräfte:

$$\rightarrow: -(-18{,}78\,\text{kN}) + 0 + S_{47} \cdot \cos(45°) - 20\,\text{kN}\cos(50°) = 0$$

Auflösen nach S_{47}:

$$S_{47} = \frac{-18{,}78\,\text{kN} + 20\,\text{kN}\cos(50°)}{\cos(45°)} = -8{,}38\,\text{kN}$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung:

$$\uparrow: -F\sin(50°) - S_{37} - S_{47}\sin(45°) = 0$$

Alle bekannten Kräfte einsetzen:

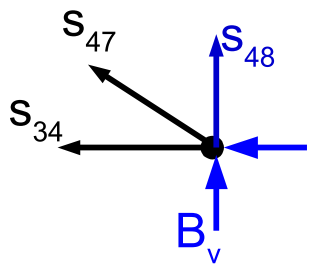
$$\uparrow: -20\,\text{kN}\sin(50°) - S_{37} - (-8{,}38\,\text{kn}\sin(45°)) = 0$$

Auflösen nach S_{37}:

$$S_{37} = -20\,\text{kN}\sin(50°) + 8{,}38\,\text{kn}\sin(45°) = -9{,}40\,\text{kN}$$

Knoten 4

Es ist nur noch eine unbekannte Stabkraft vorhanden. Wir schneiden als letzten Schritt den Knoten 4 frei und berechnen S_{34}.



Berechnung von S_{34}

Horizontale Gleichgewichtsbedingung:

$$\rightarrow: -S_{34} - B_h - S_{47}\cos(45°) = 0$$

Einsetzen aller bekannten Werte:

$$\rightarrow: -S_{34} - (-12{,}86\,\text{kN}) - (-8{,}38\,\text{kN}\cos(45°)) = 0$$

Auflösen nach S_{34}:

$$S_{34} = 12{,}86\,\text{kN} + 8{,}38\,\text{kN}\cos(45°) = 18{,}79\,\text{kN}$$