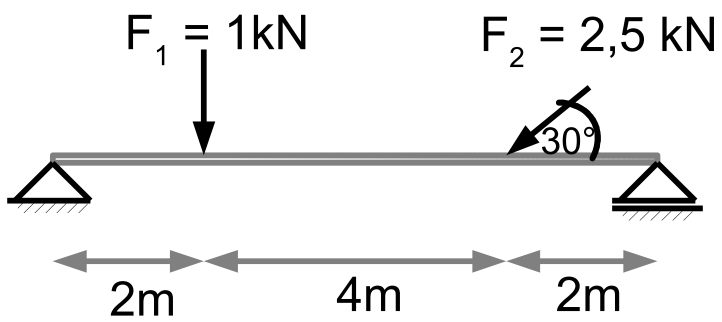
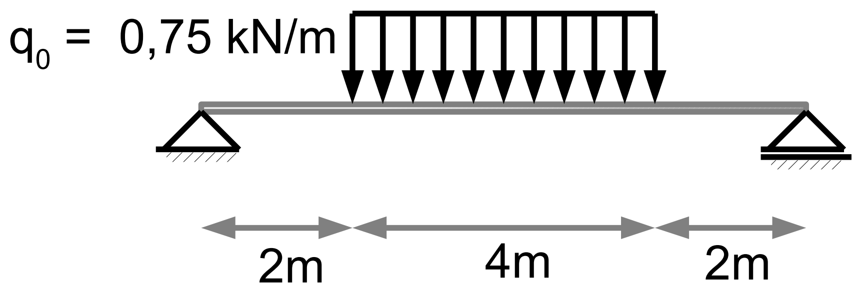
Webinar: Statik
Thema: Schnittgrößen

Bestimme für die nachfolgenden beiden Aufgaben die Schnittgrößen und Schnittgrößenverläufe!

a)

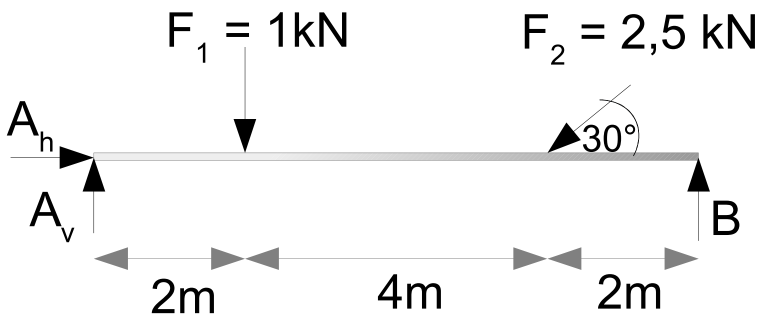


b)

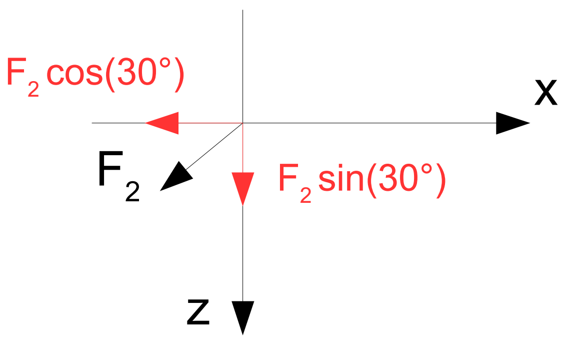


Lösung Teil a)

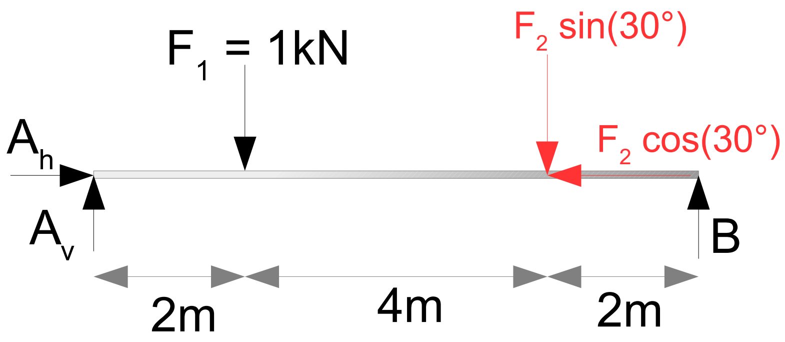
Wir beginnen damit den Balken von den Lagern zu lösen und die Lagerkräfe abzutragen:



Bevor wir mit der Berechnung der Schnittgrößen beginnen, wird zunächst die Kraft F_2 in ihre Komponenten zerlegt:



Die Kraft F_2 wird durch ihre Komponenten ersetzt:



Die Lagerkräfte müssen bestimmt werden:

(1) Gleichgewichtsbedingung in positive x-Richtung:

$$\rightarrow: A_h - F_2 \cos(30°) = 0 \qquad A_h = F_2 \cos(30°) = 2{,}5\,\mathrm{kN}\cos(30°) = 2{,}17\,\mathrm{kN}$$

(2) Gleichgewichtsbedingung in positive z-Richtung:

$$\downarrow: -A_v - B + F_1 + F_2 \sin(30°) = 0$$

(3) Momentengleichgewichtsbedingung um A:

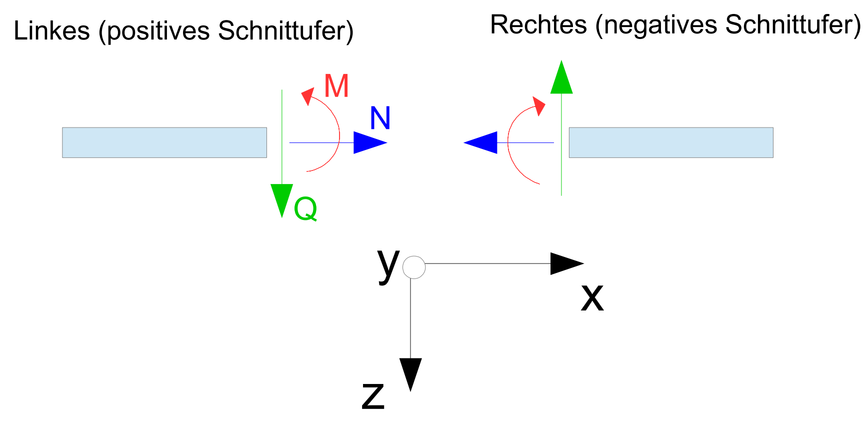
$$B \cdot 8\mathrm{m} - f_1 \cdot 2\mathrm{m} - F_2 \sin(30°) \cdot 6\mathrm{m} = 0$$

$$B = \frac{F_1 \cdot 2\mathrm{m} + F_2 \sin(30°) \cdot 6\mathrm{m}}{8\mathrm{m}} = 1{,}19\,\mathrm{kN}$$

Berechnung von A_v aus (2):

$$A_v = -B + F_1 + F_2 \sin(30°) = 1{,}06\,\mathrm{kN}$$

Danach können die Schnittkräfte berechnet werden. Hierzu betrachten wir zunächst das linke und rechte Schnittufer:



Am linken (positiven) Schnittufer zeigen die Schnittgrößen in positive Achsenrichtung in Bezug auf das obige x,y,z-Koordinatensystem. Das Moment ist am linken Schnittufer ein linksdrehendes Moment, welches in der Physik als positives Moment definiert ist. Am rechten (negativen) Schnittufer zeigen die Schnittgrößen in negative Achsenrichtung. Das Moment ist hierbei ein rechtsdrehendes Moment.

Es werden Schnitte durchgeführt bei:

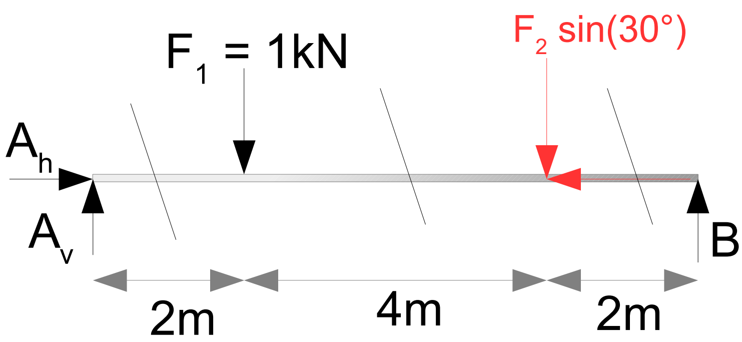
<u>Statische Unstetigkeiten</u>

- Einzellasten,
- Knicke in Streckenlasten.

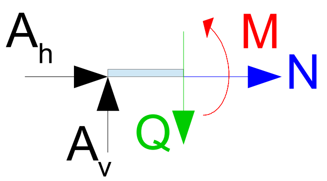
<u>Geometrische Unstetigkeiten</u>

- Knicke der Balkenachse,
- Verbindungselemente [wie beispielsweise Gelenke].

Für die Aufgabe a) müssen drei Schnitte am Balken durchgeführt werden:



Schnitt 1: $0 \leq x \leq 2m$



Wir beginnen damit die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, um die Schnittgrößen bestimmen zu können. Die Normalkraft kann aus der Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung berechnet werden. Die Querkraft aus der Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung und das Biegemomente aus der Momentengleichgewichtsbedingung.

Bestimmung der Normalkraft N_1:

$$\rightarrow: A_h + N_1 = 0 \quad N_1 = -A_h = -2{,}17\,kN$$

Bestimmung der Querkraft Q_1:

$$\downarrow: -A_v + Q_1 = 0 \quad Q_1 = A_v = 1{,}06\,kN$$

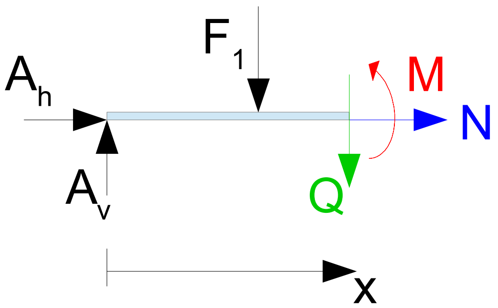
Bestimmung des Moments M_1:

Bei der Bestimmung des Moments wird der Bezugspunkt immer in den Schnitt gelegt, also zwischen 0m und 2m. Die x-Achse wird an den Beginn des Balkens gelegt, beginnt also im Lager A:

$$\circlearrowleft S: \quad -A_v \cdot x + M_1 = 0 \qquad M_1 = A_v \cdot x = 1{,}06\,kN \cdot x$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

Schnitt 2: $2m \leq x \leq 6m$



Bestimmung der Normalkraft N_2:

$$\rightarrow: A_h + N_2 = 0 \quad N_2 = -A_h = -2{,}17\,kN$$

Bestimmung der Querkraft Q_2:

$$\downarrow: -A_v + F_1 + Q_2 = 0 \qquad Q_2 = A_v - F_1 = 1{,}06\,kN - 1\,kN = 0{,}06\,kN$$

Bestimmung des Moments M_2:

Bei der Bestimmung des Moments wird der Bezugspunkt immer in den Schnitt gelegt, also zwischen 2m und 6m. Die x-Achse wird an den Beginn des Balkens gelegt, beginnt also im Lager A:

$$\curvearrowleft S: \quad -A_v \cdot x + F_1 \cdot (x - 2m) + M_2 = 0$$

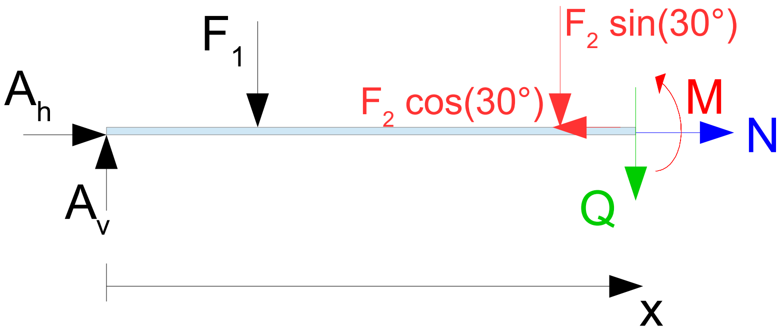
$$M_2 = 1{,}06\,kN \cdot x - 1\,kN(x - 2m)$$ |Klammer auflösen

$$M_2 = 1{,}06\,kN \cdot x - 1\,kN\,x + 1\,kN \cdot 2m$$ | zusammenfassen

$$M_2 = 0{,}06\,kN \cdot x + 2\,kNm$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

Schnitt 3: $6m \leq x \leq 8m$



Bestimmung der Normalkraft N_3:

$$\rightarrow: A_h - F_2 \cos(30°) + N_3 = 0 \qquad N_3 = -A_h + F_2 \cos(30°) = -2{,}17\,kN + 2{,}17\,kN = 0$$

Bestimmung der Querkraft Q_3:

$$\downarrow: -A_v + F_1 + F_2 \sin(30°) + Q_3 = 0$$

$$Q_3 = A_v - F_1 - F_2 \sin(30°)$$

$$Q_3 = 1{,}06\,kN - 1\,kN - 2{,}5\,kN \sin(30°)$$

$$Q_3 = -1{,}19\,kN$$

Bestimmung des Moments M_3:

Bei der Bestimmung des Moments wird der Bezugspunkt immer in den Schnitt gelegt, also zwischen 6m und 8m. Die x-Achse wird an den Beginn des Balkens gelegt, beginnt also im Lager A:

$$\circlearrowleft S: \quad -A_v \cdot x + F_1 \cdot (x - 2m) + F_2 \sin(30°) \cdot (x - 6m) + M_3 = 0$$

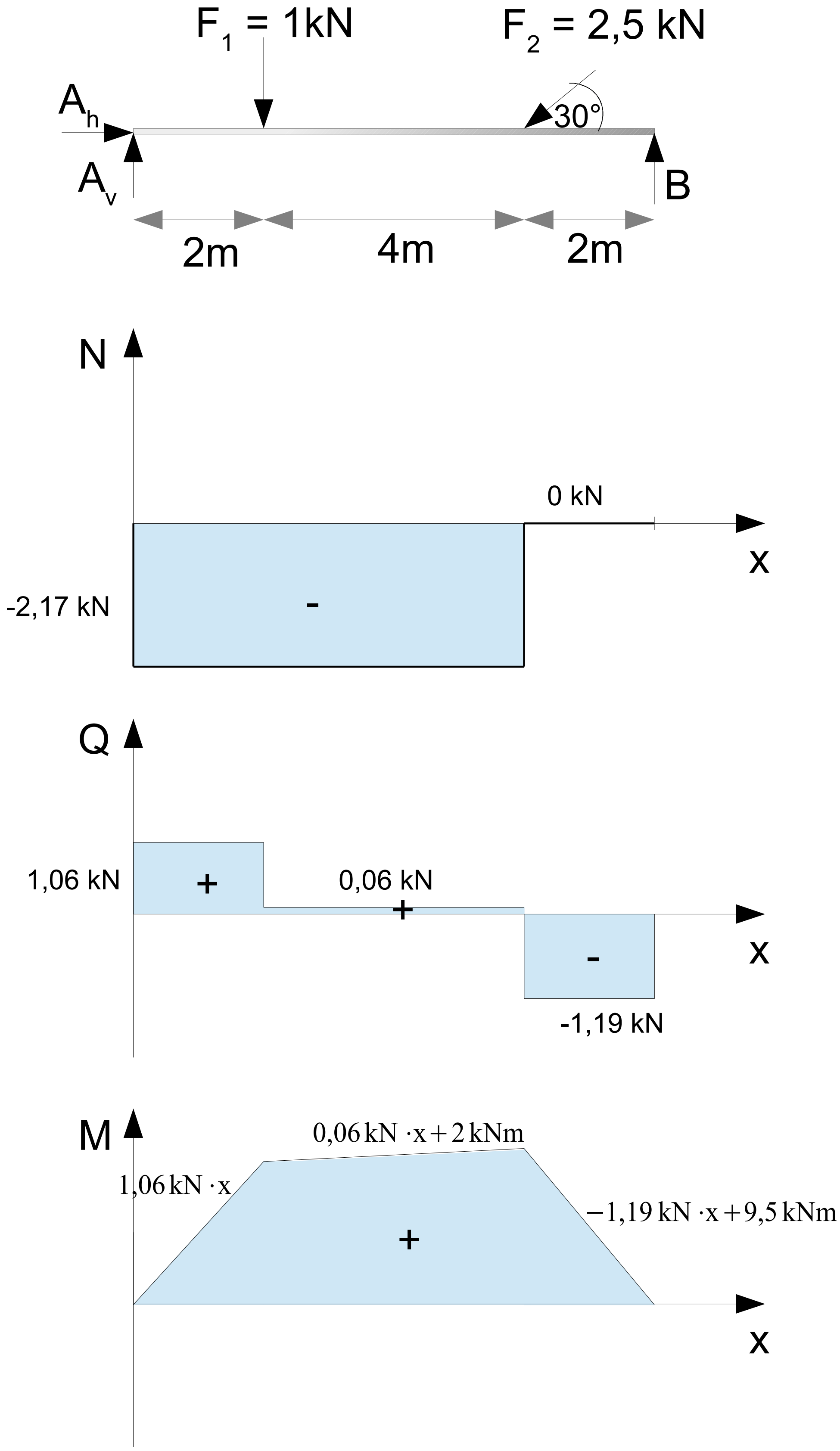
$$M_3 = A_v \cdot x - F_1 \cdot (x - 2m) - F_2 \sin(30°) \cdot (x - 6m) \qquad \text{|Klammer auflösen}$$

$$M_3 = 1{,}06\,kN \cdot x - 1\,kN\,x + 1\,kN \cdot 2m - F_2 \sin(30°) \cdot x + F_2 \sin(30°) \cdot 6m$$

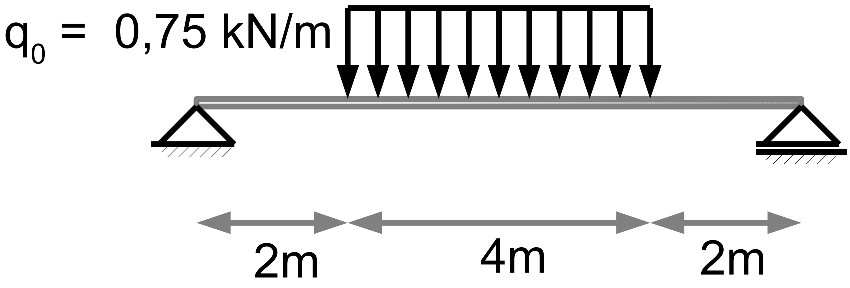
$$M_3 = -1{,}19\,kN \cdot x + 9{,}5\,kNm$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

Die Schnittgrößenverläufen sehen wie folgt aus:

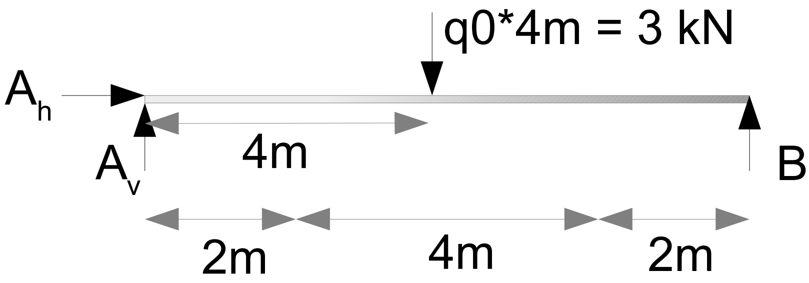


Lösung Teil b)



Zunächst wird der Balken von den Lagern gelöst und die Streckenlast zu einer einzigen Kraft zusammengefasst. Dazu muss der Flächeninhalt der Fläche berechnet werden. Hierbei handelt es sich um eine rechteckige Fläche, demnach : q_0 * 4m

Die Einzelkraft greift im Schwerpunkt der Streckenlast an. Bei rechteckigen Fläche ist das die Mitte:



Bei einer Dreieckslast z.B. müsste der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet werden. Die resultierende Einzelkraft greift dann im Schwerpunkt der dreieckigen Fläche an (nicht die Mitte).

Zunächst werden die Lagerkräfte bestimmt:

Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung:

$$\rightarrow: A_h = 0$$

Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung:

$$\downarrow: -A_v + q_0 \cdot 4m - B = 0$$

Momentengleichgewichtsbedingung um A:

$$\curvearrowleft A \quad B \cdot 8m - (q_0 \cdot 4m) \cdot 4m = 0$$

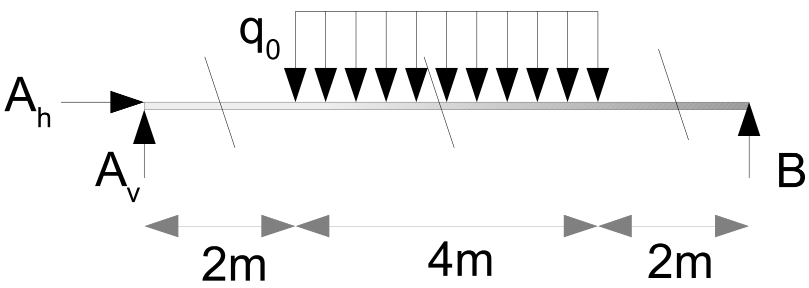
$$B = \frac{(q_0 \cdot 4m) \cdot 4m}{8m} = \frac{(0{,}75\,kN/m \cdot 4m) \cdot 4m}{8m} = 1{,}5\,kN$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung:

$$A_v = q_0 \cdot 4m - B = 0{,}75\,kN/m \cdot 4m - 1{,}5\,kN = 1{,}5\,kN$$

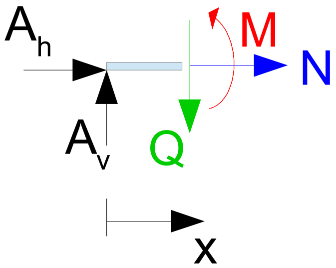
Die Einzellast, welche im Schwerpunkt der Streckenlast liegt (mittig) greift auch genau in der Mitte des Balkens an. Das bedeutet, dass sich diese auf beide Lager gleichmäßig verteilt. Die horizontale Lagerkraft fällt weg, weil keine horizontalen Kräfte an den Balken angreifen.

Nachdem die Auflagerkräfte bestimmt sind, können als nächstes die Schnittgrößen berechnet werden:



Liegt eine Streckenlast bzw. Dreieckslast vor so muss zusätzlich ein Schnitt zwischen dieser Last durchgeführt werden. Insgesamt werden also drei Schnitte betrachtet:

Schnitt 1: $0 \leq x \leq 2m$



Wir beginnen damit die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, um die Schnittgrößen bestimmen zu können. Die Normalkraft kann aus der Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung berechnet werden. Die Querkraft aus der Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung und das Biegemomente aus der Momentengleichgewichtsbedingung.

Bestimmung der Normalkraft N_1:

$$\rightarrow: A_h + N_1 = 0 \quad N_1 = -A_h = 0$$

Bestimmung der Querkraft Q_1:

$$\downarrow: -A_v + Q_1 = 0 \quad Q_1 = A_v = 1{,}5\,kN$$

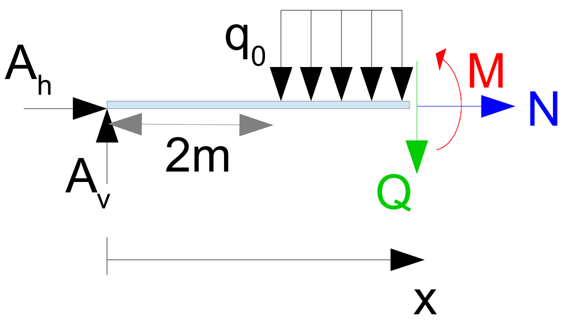
Bestimmung des Moments M_1:

Bei der Bestimmung des Moments wird der Bezugspunkt immer in den Schnitt gelegt, also zwischen 0m und 2m. Die x-Achse wird an den Beginn des Balkens gelegt, beginnt also im Lager A:

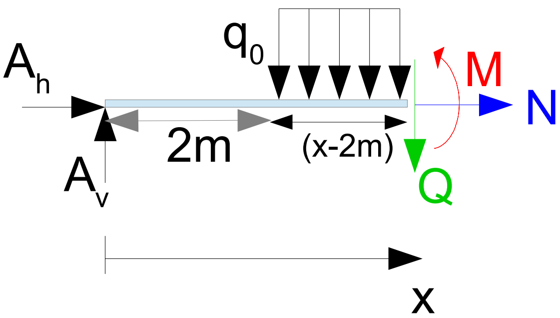
$$\circlearrowleft S: \quad -A_v \cdot x + M_1 = 0 \quad M_1 = A_v \cdot x = 1{,}5\,kN \cdot x$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

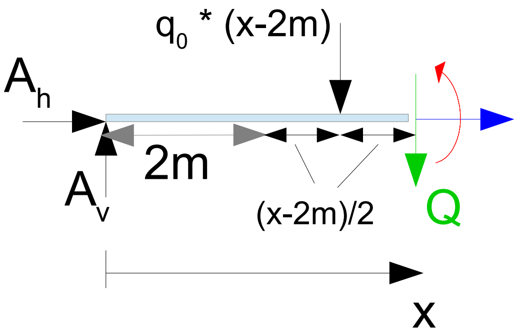
Schnitt 2: $2m \leq x \leq 6m$



Es wird der Schnitt durch die Streckenlast durchgeführt. Als nächstes muss diese Teilstreckenlast wieder zu einer Einzellast zusammengefasst werden (in Abhängigkeit von x):



Es resultiert demnach die Einzellast, indem die Fläche der Teillast bestimmt wird:



Die Einzellast greift im Schwerpunkt der Teilstreckenlast an. Der Schwerpunkt bei einer rechteckigen Last liegt in der Mitte. Die Teilstreckenlast hat eine Länge von (x-2m), die Mitte ist also (x-2m)/2. Der Abstand zum Schnitt hin beträgt demnach (x-2m)/2.

Bestimmung der Normalkraft N_2:

$$\rightarrow: A_h + N_2 = 0 \quad N_2 = -A_h = 0\,kN$$

Bestimmung der Querkraft Q_2:

$$\downarrow: -A_v + q_0 \cdot (x - 2m) + Q_2 = 0$$

$$Q_2 = A_v - q_0 \cdot (x - 2m) = 1{,}5\,kN - 0{,}75\,kN/m\,(x - 2m)$$

$$Q_2 = -0{,}75\,kN/m \cdot x + 3\,kN$$

Bestimmung des Moments M_2:

$$\circlearrowleft S \quad : \quad -A_v \cdot x + q_0 \cdot (x - 2m) \cdot \frac{(x - 2m)}{2} + M_2 = 0$$

$$M_2 = A_v \cdot x - q_0 \cdot (x - 2m) \cdot \frac{(x - 2m)}{2}$$ |Binomische Formel anwenden

$$M_2 = A_v \cdot x - \frac{1}{2} q_0 \cdot (x^2 - 4m\,x + 4m^2)$$ |Klammer auflösen

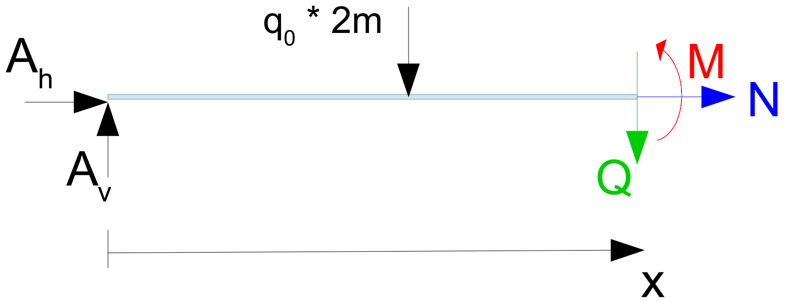
$$M_2 = A_v \cdot x - \frac{1}{2} q_0\, x^2 + 2m \cdot q_0 \cdot x - 2\,m^2\, q_0$$ |Werte einfügen

$$M_2 = 1{,}5\,kN \cdot x - \frac{1}{2} 0{,}75\,kN/m \cdot x^2 + 2m \cdot 0{,}75\,kN/m \cdot x - 2\,m^2 \cdot 0{,}75\,kN/m$$

$$M_2 = -0{,}375\,kN/m \cdot x^2 + 3\,kN \cdot x - 1{,}5\,kNm$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

Schnitt 3: $6m \leq x \leq 8m$



Bestimmung der Normalkraft N_3:

$$\rightarrow: A_h + N_3 = 0 \quad N_3 = -A_h = 0\,kN$$

Bestimmung der Querkraft Q_3:

$$\downarrow: -A_v + q_0 \cdot 4m + Q_3 = 0$$

$$Q_3 = A_v - q_0 \cdot 4m = 1{,}5\,kN - 0{,}75\,kN/m\; 4m = -1{,}5\,kN$$

Bestimmung des Moments M_3:

$$\circlearrowleft S: \quad -A_v \cdot x + q_0 \cdot 4m \cdot (x - 4m) + M_3 = 0$$

$$M_3 = A_v \cdot x - q_0 \cdot 4m \cdot (x - 4m)$$

$$M_3 = 1{,}5\,kN \cdot x - 0{,}75\,kN/m \cdot 4m \cdot (x - 4m)$$

$$M_3 = 1{,}5\,kN \cdot x - 3\,kN \cdot x + 3\,kN \cdot 4m$$

$$M_3 = 1{,}5\,kN \cdot x + 12\,kNm$$

In Abhängigkeit von x kann dann das Biegemoment für diesen Bereich bestimmt werden.

Die Schnittgrößenverläufe ergeben sich wie folgt: