

Webinar: Physik

Thema: Einseitiger und zweiseitiger Hebel

Einführung in die Thematik:

- Unterscheidung zwischen einseitigem und zweiseitigem Hebel
- Einführung des Hebelgesetzes
- Einfache Beispiele zum zweiseitigen und einseitigen Hebel

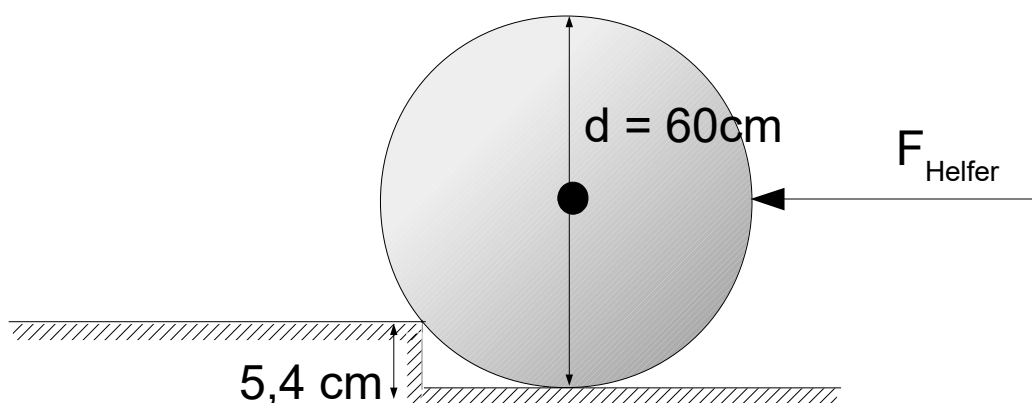
Aufgabe 1) Einseitiger Hebel

In einer Winzergenossenschaft im schönen Ahrtal, soll der Helfer des Kellermeisters ein frisch befülltes Fass Rotwein in den Weinkeller rollen. Auf dem Weg dorthin muss er eine Schwelle, die **5,4 cm** hoch ist, überwinden.

Das Weinfass hat leer eine Gewichtskraft von 170 N und fasst 50 l Rotwein.

Der Durchmesser des Weinfasses beträgt 60 cm. Der Rotwein von der Ahr hat eine Dichte von ungefähr 0,993 kg/l.

a) Der Helfer des Kellermeisters versucht die Schwelle zu überwinden, indem er auf der Hälfte der Fasshöhe eine horizontale Kraft aufbringt. Berechne die hierzu nötige Kraft!



b) Nachdem der Helfer die Aufgabe nicht geschafft hat, zeigt ihm der Kellermeister, wie es richtig geht. Welche Kraft muss er aufbringen?

Unterscheidung einseitiger und zweiseitiger Hebel

Bei einem Hebel handelt es sich häufig um einen stabförmigen Körper, welcher sich um eine feste Achse drehen lässt. Hebel sind Kraftwandler und werden dazu genutzt, um mit einer geringen Krafteinwirkung ein großes Gewicht heben zu können. Sie werden z. B. bei Brechstangen, Scheren, Schraubenschlüsseln, Flaschenöffnern, Waagen oder Wippen genutzt.

Es werden einseitige und zweiseitige Hebel voneinander unterschieden:

Einseitiger Hebel

Bei einem einseitigen Hebel greifen die äußeren Kräfte, von der Drehachse aus gesehen, auf **einer** Seite an, es existiert also nur ein einseitiger Hebelarm.

Beispiele: Flaschenöffner, Schraubenschlüssel, Brechstange etc.

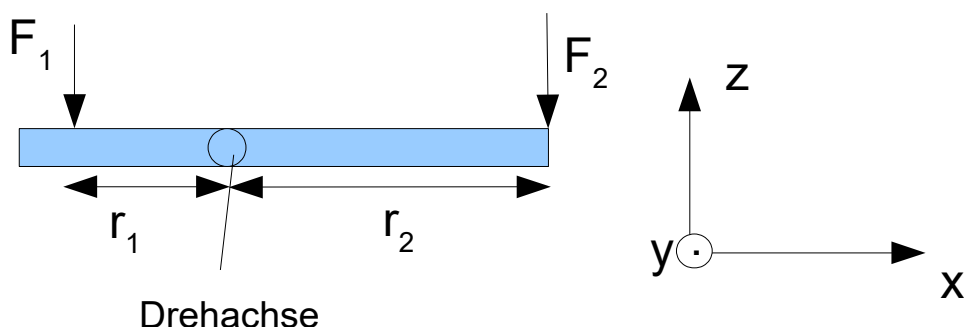
Zweiseitiger Hebel

Bei einem zweiseitigen Hebel greifen die äußeren Kräfte, von der Drehachse aus gesehen, auf **unterschiedlichen** Seiten an, es existiert also je ein Hebel auf beiden Seiten der Drehachse → zweiseitiger Hebel.

Beispiele: Schere, Zange, Balkenwaage, Wippe.

Manche Hebel können als einseitige oder als zweiseitige Hebel genutzt werden, je nachdem, wo die Drehachse liegt. Das gilt z. B. für eine Brechstange.

Das Hebelgesetz



Wir beginnen mit dem Hebelgesetz in der x,z -Ebene. Die Drehachse liegt parallel zur y -Achse, zeigt also auf uns zu bzw. zeigt aus der Ebene raus.

F_1 übt im senkrechten Abstand r_1 ein linksdrehendes Drehmoment auf den Drehpunkt (Drehachse) aus.

F_2 übt im senkrechten Abstand r_2 ein rechtsdrehendes Moment auf den Drehpunkt aus.

Ein Hebel befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe der Momente auf einen Bezugspunkt gleich Null ist.

Die Momentengleichgewichtsbedingung ergibt:

$$\sum M = F_1 \cdot r_1 - F_2 \cdot r_2 = 0$$

Umstellen ergibt das Hebelgesetz:

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

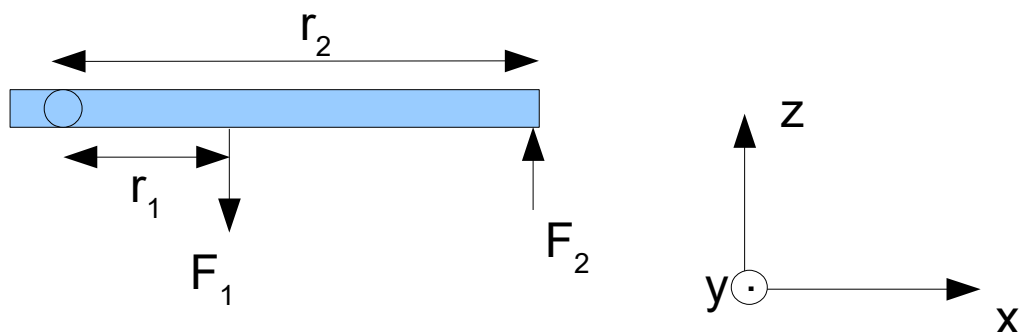
Das Moment welches die Kraft F_1 ausübt muss also genau groß sein wie das Moment welches die Kraft F_2 auf denselben Punkt ausübt:

$$M_1 = M_2$$

Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn das linksdrehende Drehmoment M_1 gleich dem rechtsdrehenden Drehmoment M_2 ist.

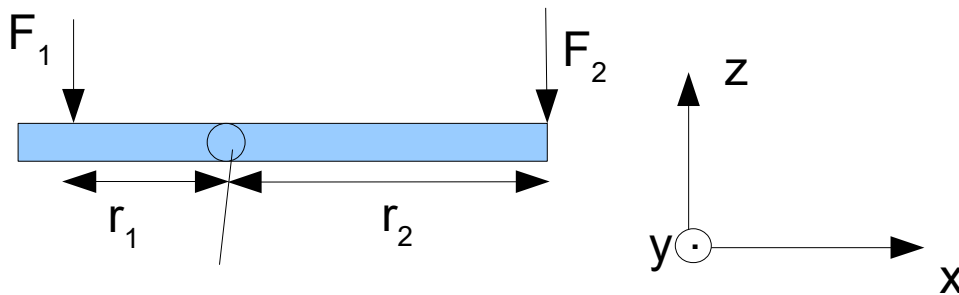
Einseitiger Hebel

Hier wirken die Kräfte vom Drehpunkt aus betrachtet auf der gleichen Seite.



Auch hier gilt das Hebelgesetz. In der obigen Grafik übt F_1 auf die Drehachse ein rechtsdrehendes Moment aus und F_2 ein linksdrehendes Moment. Befindet sich der Hebel im Gleichgewicht, so gilt das Hebelgesetz, d.h. links- und rechtsdrehendes Moment sind gleich groß:

Kleine Beispiele zu den Hebelgesetzen



Gegeben sei:

$$F_2 = 1,5 \text{ kN}$$

$$r_2 = 3 \text{ m}$$

$$F_1 = 3 \text{ kN}$$

Frage: Wie groß muss r_1 sein, damit sich der obige Hebel im Gleichgewicht befindet?

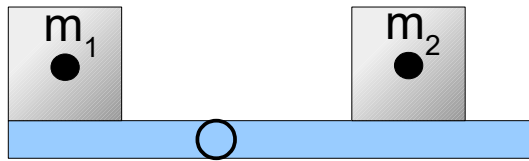
$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

Auflösen nach r_1 :

$$r_1 = \frac{F_2 \cdot r_2}{F_1}$$

$$r_1 = \frac{1,5 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m}}{3 \text{ kN}} = 1,5 \text{ m}$$

Beispiel: Zweiseitiger Hebel



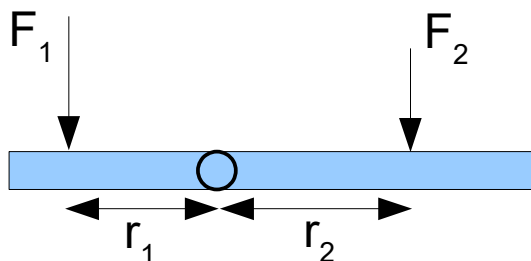
Frage: Gegeben sei obige Balken. Die beiden Kisten sollen so auf den Balken gelegt werden, dass der Hebel sich im Gleichgewicht befindet. Wie muss das Verhältnis der Abstände zueinander sein?

Gegeben:

$$m_1 = 15,6 \text{ kg}$$

$$m_2 = 12,5 \text{ kg}$$

Zunächst ersetzen wir die Kisten durch Kräfte die im Schwerpunkt der Kiste angreifen:



Wir können zunächst die Kräfte berechnen:

$$F_1 = 15,6 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 153,04 \text{ N}$$

$$F_2 = 12,5 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 122,63 \text{ N}$$

Als nächstes stellen wir das Hebelgesetz auf und bilden den Quotienten:

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{153,04 \text{ N}}{122,63 \text{ N}} = 1,248$$

Liegt die Kiste 1 (ihr Schwerpunkt) im Abstand von $r_1 = 1 \text{ m}$ vom Drehpunkt entfernt, so muss die Kiste 2 (ihr Schwerpunkt) im Abstand von $r_2 = 1,248 \text{ m}$ entfernt liegen. Der Abstand r_2 muss also um 1,248-fach größer sein als der Abstand r_1 .

Lösung Aufgabe 1)

Zunächst müssen wir das gesamte Gewicht des vollen Fasses berechnen. Wir haben das Volumen und die Dichte gegeben. Wir können die Berechnung der Masse wie folgt vornehmen:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Wir haben die Dichte des Weins und das Volumen des Fasses gegeben, in welchen der Wein gefüllt wird. Wir stellen die Gleichung also nach der Masse m um:

$$m = \rho \cdot V$$

Wir bestimmen zunächst die Gewichtskraft des Weines:

$$F_{\text{wein}} = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$$

$$F_{\text{wein}} = 0,993 \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 501 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 487,07 \text{ N}$$

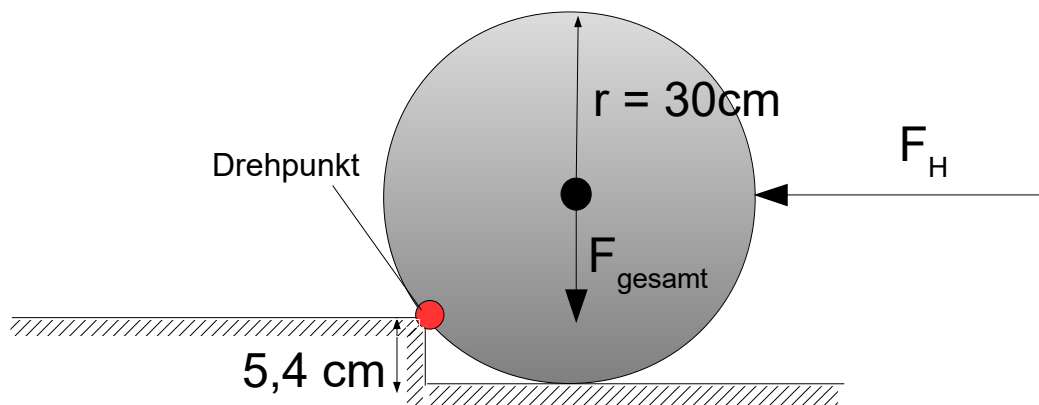
Die Einheit l muss in diesem Fall nicht in m^3 umgerechnet werden, weil sich l rauskürzt.

Danach müssen wir die Gewichtskraft des leeren Fasses draufaddieren:

$$F_{\text{gesamt}} = 487,07 \text{ N} + 170 \text{ N} = 657,07 \text{ N}$$

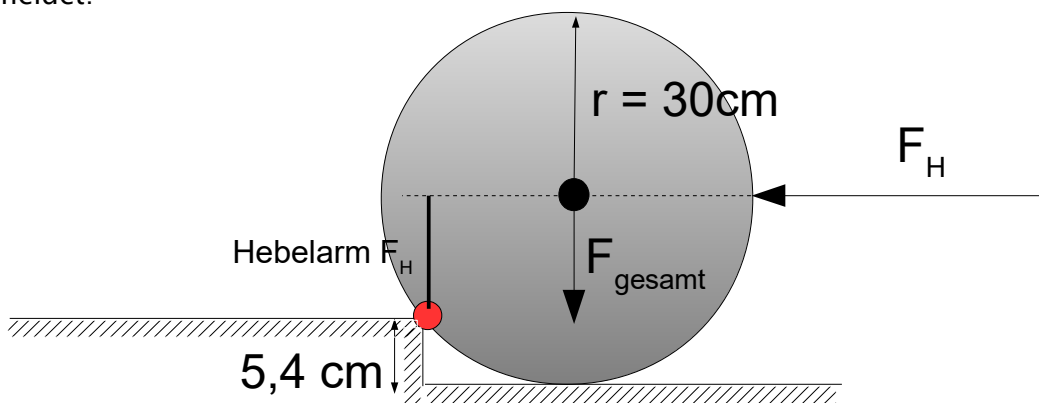
a) Welche Kraft müsste der Helfer aufbringen, um das Weinfass über die Schwelle zu rollen?

Die wirkenden Kräfte können aus der nachfolgenden Skizze entnommen werden:



Beide Kräfte greifen im Schwerpunkt des Weinfasses an. Die Gewichtskraft greift immer im Schwerpunkt an, die Kraft des Helfers soll laut Aufgabenstellung bei der Hälfte der Höhe des Fasses angreifen. Das Fass hat einen Durchmesser von $d = 60 \text{ cm}$. Die Hälfte der Höhe entspricht dem Durchmesser von $r = 30 \text{ cm}$. Demnach greift auch die horizontale Kraft im Schwerpunkt des Fasses an.

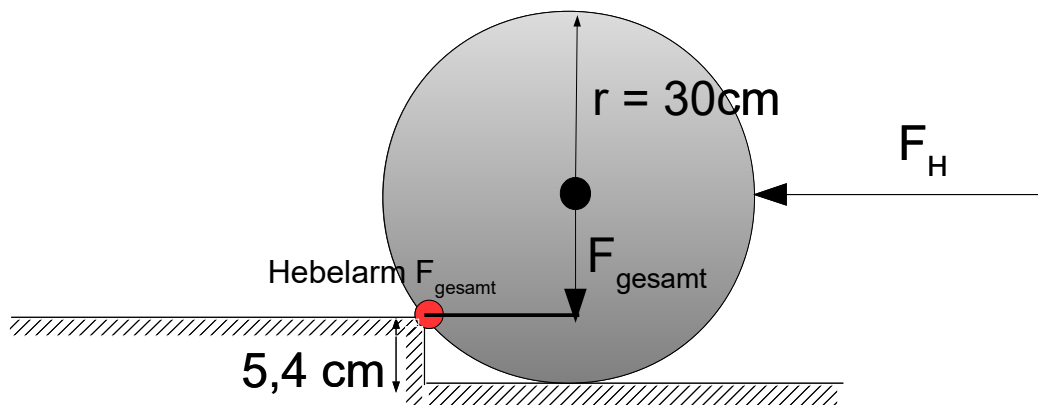
Wir wollen als nächstes die senkrechten (!!) Abstände (=Hebelarme) der Kräfte zum Drehpunkt bestimmen. Die Kraft F_H ist eine Horizontalkraft, demnach muss der Abstand ein vertikaler Abstand sein. Um diesen zu ermitteln stellen wir uns vor wir verschieben die Kraft F_H gedanklich parallel solange zu sich selbst, bis diese (die Wirkungslinie dieser) den Drehpunkt schneidet:



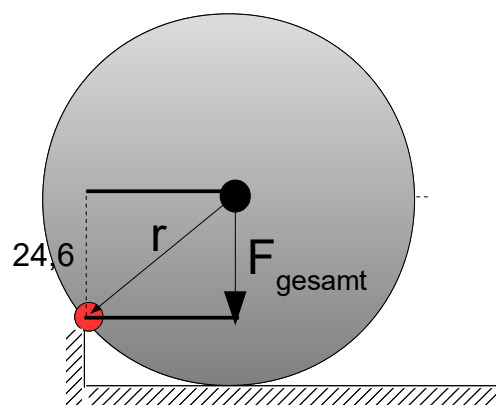
Den Hebelarm können wir berechnen, indem wir den Abstand vom Fassboden bis zum Angriffspunkt der Kraft nehmen (= Radius) und davon die Höhe von 5,4 cm abziehen:

$$h_{F_H} = 30 \text{ cm} - 5,4 \text{ cm} = 24,6 \text{ cm}$$

Als nächstes bestimmen wir den Hebelarm der Kraft F_{gesamt} :



Um diesen Abstand bestimmen zu können betrachten wir das nachfolgende obige rechtwinklige Dreieck:



Gegeben ist die Hypotenuse mit dem Radius $r = 30$ cm und die vertikale Seite mit 24,6 cm (Hebelarm von F_H). Wir können als nächstes mittels Satz des Pythagoras die horizontale Seite (Hebelarm von F_{gesamt}) bestimmen:

$$r^2 = h_{\text{Helfer}}^2 + h_{\text{gesamt}}^2$$

Umstellen nach h_{gesamt}

$$h_{\text{gesamt}} = \sqrt{r^2 - h_{\text{Helfer}}^2}$$

Einsetzen der Werte:

$$h_{\text{gesamt}} = \sqrt{0,3^2 - 0,246^2}$$

$$h_{\text{gesamt}} = 0,172 \text{ m}$$

Um nun die Kraft zu berechnen, die der Helfer aufbringen müsste, um das Weinfass über die Schwelle zu rollen, müssen wir das Hebelgesetz entsprechend umformen:

$$F_H \cdot h_{\text{Helfer}} = F_{\text{gesamt}} \cdot h_{\text{gesamt}}$$

$$F_H = \frac{F_{\text{gesamt}} \cdot h_{\text{gesamt}}}{h_{\text{Helfer}}}$$

Einsetzen der Werte:

$$F_H = \frac{657,07 \text{ N} \cdot 0,172 \text{ m}}{0,246 \text{ m}}$$

$$F_H = 459,41 \text{ N}$$

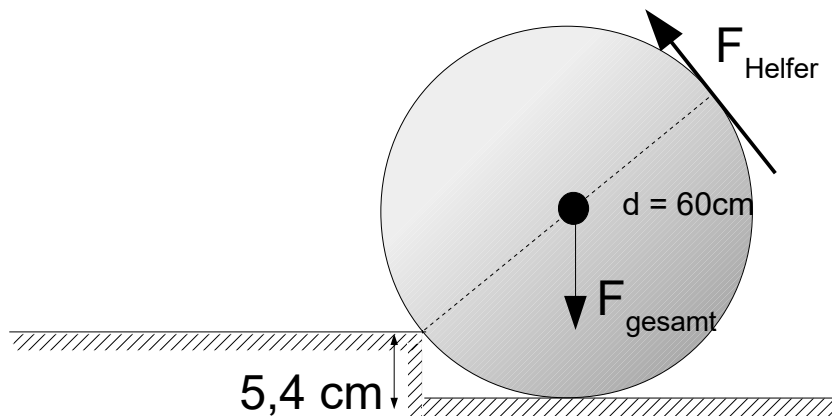
Der Helfer muss eine Kraft von 459,41 N aufbringen, damit das Fass die Schwelle überwindet.

Der Helfer schafft es nicht diese Kraft aufzubringen. Was kann er tun?

Lösung Aufgabenteil b)

Wir wissen, dass Kraft mal Hebelarm das Moment ergibt. Je größer der Hebelarm desto größer das Moment. Da der Helfer sehr schwach ist benötigt er einen größeren Hebelarm um mit weniger Kraft das Fass über die Schwelle zu rollen.

Der Kellermeister geht so vor, dass der den Angriffspunkt seiner Kraft so wählt, dass sein Hebelarm maximal ist. Der maximale Hebelarm ist also der Durchmesser des Fasses!



Der Hebelarm des Helfers ist der senkrechte Abstand zum Bezugspunkt. Dieser Abstand entspricht dem Durchmesser. Der Hebelarm der Kraft des gesamten Weinfasses hingegen bleibt gleich. Es gilt also:

$$F_H \cdot h_{\text{Helfer}} = F_{\text{gesamt}} \cdot h_{\text{gesamt}}$$

$$F_H = \frac{F_{\text{gesamt}} \cdot h_{\text{gesamt}}}{h_{\text{Helfer}}}$$

Einsetzen der Werte:

$$F_H = \frac{657,07 \text{ N} \cdot 0,172 \text{ m}}{0,6 \text{ m}}$$

$$F_H = 188,36 \text{ N}$$

Der Helfer muss eine Kraft von 188,36 N aufbringen, damit das Fass die Schwelle überwindet. Dank des deutlich größeren Hebelarms gelingt es dem Kellermeister, das volle Weinfass mit Leichtigkeit über die Schwelle zu rollen.