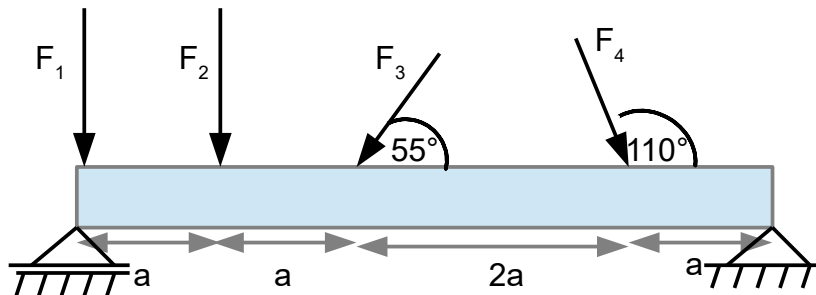


Webinar: Statik

Thema: Resultierende und Gleichgewichtsbedingungen

Aufgabe 1: Resultierende

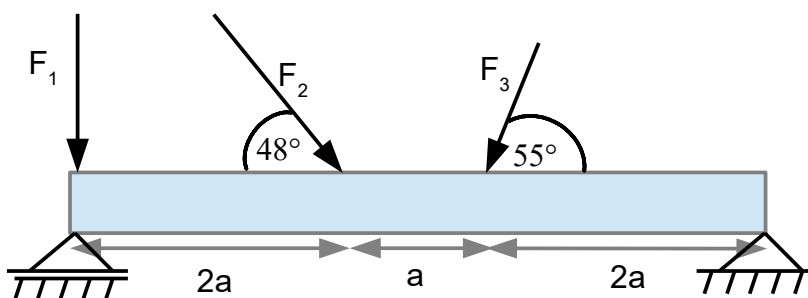


Gegeben:

$$F_1 = 20 \text{ N}, F_2 = 15,5 \text{ N}, F_3 = 36 \text{ N}, F_4 = 12 \text{ N}, a = 4 \text{ m}$$

Bestimme den Betrag, die Richtung und die Lage der resultierenden Kraft für die Kräfte F_1 bis F_4 .

Aufgabe 2: Gleichgewichtsbedingungen



Gegeben:

$$F_1 = 2 \text{ kN}, F_2 = 3,5 \text{ kN}, F_3 = 1,8 \text{ kN}, a = 2 \text{ m}$$

Bestimme die Auflagerkräfte!

Verwendete Formeln:

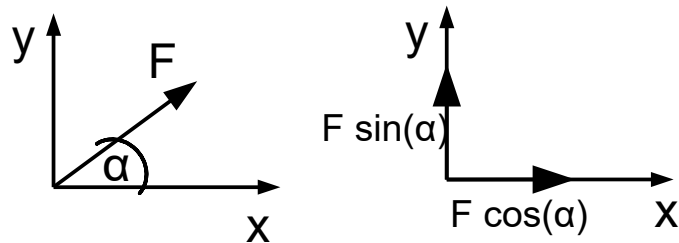
Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M^x = 0$$

Kräftezerlegung:



Bestimmung der Resultierenden (allgemeine Kräftegruppe):

Teilresultierende in x-Richtung: $R_x = \sum F_{ix}$

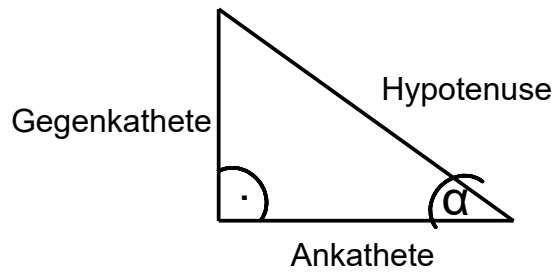
Teilresultierende in y-Richtung: $R_y = \sum F_{iy}$

Betrag der Resultierenden: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

Richtung der Resultierenden: $\tan(\alpha) = \frac{R_y}{R_x}$ Winkel zwischen R und R_x

Hebelarm der Resultierenden: $h = \frac{\sum M^x}{R}$ senkrechter Abstand vom gewählten Bezugspunkt X

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck:



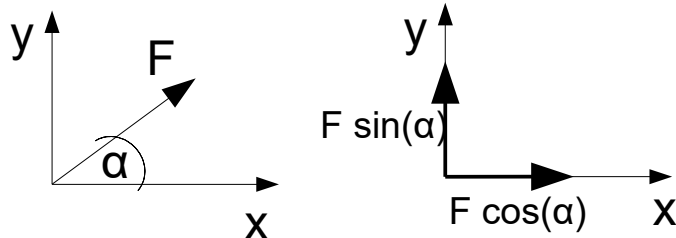
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

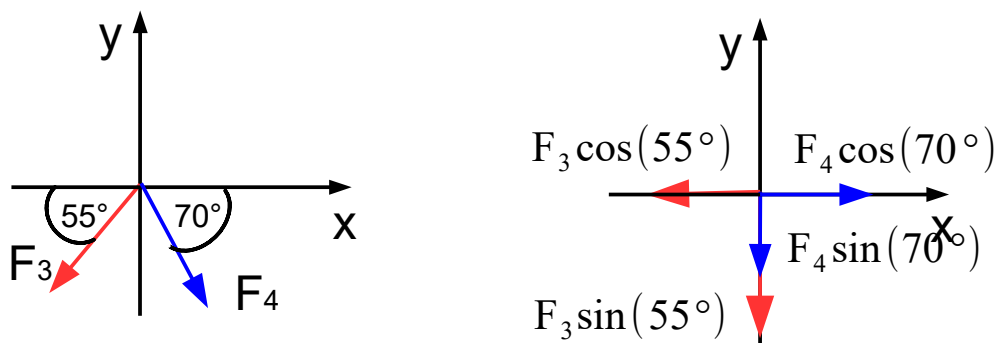
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Lösung:

1. Kräftezerlegung



F_3 und F_4 müssen in ihre Horizontal- und Vertikalkomponente zerlegt werden!



2. Bestimmung der Teilresultierenden

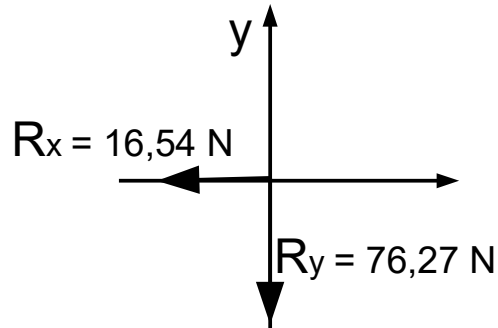
$$\rightarrow R_x = -F_3 \cos(55^\circ) + F_4 \cos(70^\circ)$$

$$\rightarrow R_x = -36 \text{ N} \cos(55^\circ) + 12 \text{ N} \cos(70^\circ) = -16,54 \text{ N}$$

$$\uparrow R_y = -F_1 - F_2 - F_3 \sin(55^\circ) - F_4 \sin(70^\circ)$$

$$\uparrow R_y = -20 \text{ N} - 15,5 \text{ N} - 36 \text{ N} \sin(55^\circ) - 12 \text{ N} \sin(70^\circ) = -76,27 \text{ N}$$

Wir haben R_x nach rechts gerichtet angenommen (siehe Pfeil vor der Berechnung) und R_y nach oben gerichtet. Da nun negative Vorzeichen resultieren, zeigen die Teilresultierenden genau in entgegengesetzte Richtung:



3. Bestimmung der Resultierenden (Betrag)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

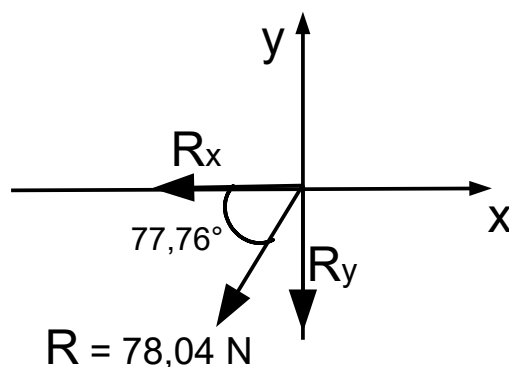
$$R = \sqrt{(16,54 \text{ N})^2 + (76,27 \text{ N})^2} = 78,04 \text{ N}$$

4. Bestimmung der Richtung der Resultierenden

$$\tan(\alpha) = \frac{R_y}{R_x} \quad \text{Winkel zwischen } R_x \text{ und } R$$

$$\tan(\alpha) = \frac{76,27 \text{ N}}{16,54 \text{ N}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{76,27 \text{ N}}{16,54 \text{ N}}\right) = 77,76^\circ$$



5. Bestimmung der Lage der Resultierenden

Über das resultierende Moment können wir die Lage der Resultierenden bestimmen.

$$M_R = h \cdot R$$

Dazu benötigen wir einen Bezugspunkt, der beliebig wählbar ist. Wir bestimmen für diesen Bezugspunkt die Summe aller Momente (=resultierendes Moment) und danach den Hebelarm, indem wir die obige Gleichung nach h auflösen:

Auflösen nach h :
$$h = \frac{M_R}{R}$$

Wir wählen den Bezugspunkt am Balkenanfang bei F_1 und berechnen die Summe aller auf diesen Bezugspunkt wirkenden Momente. Wir wählen die Vorzeichenkonvention, dass alle **linksdrehenden** Momente (gegen den Uhrzeigersinn) positiv berücksichtigt werden:

$$\sum M_i^{(F_1)} = M_R^{(F_1)} = -F_2 \cdot a - F_3 \sin(55^\circ) \cdot 2a - F_4 \sin(70^\circ) \cdot 4a$$

$$M_R^{(F_1)} = -15,5 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} - 36 \text{ N} \sin(55^\circ) \cdot 8 \text{ m} - 12 \text{ N} \sin(70^\circ) \cdot 16 \text{ m}$$

$$M_R^{(F_1)} = -478,34 \text{ Nm}$$

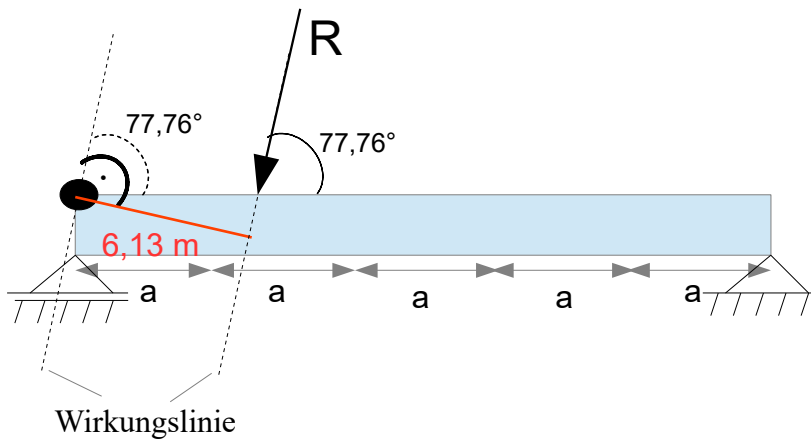
Das Minuszeichen bedeutet, dass die Resultierende den Balken um den festgelegten Bezugspunkt (bei F_1) in einer **Rechtsdrehung** dreht (mit dem Uhrzeigersinn).

$$h = \frac{|478,34 \text{ Nm}|}{78,04 \text{ N}} = 6,13 \text{ m}$$

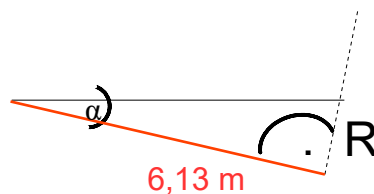
Die Resultierende übt in Bezug auf F_1 ein rechtsdrehendes Moment aus. Unter Berücksichtigung der Wirkrichtung der Resultierenden, kann die Resultierende nur rechts vom Balken liegen. Es muss also der senkrechte Abstand von dem gewählten Bezugspunkt mit $h = 6,13 \text{ m}$ abgemessen werden.

Wir gehen wie folgt vor:

- Einzeichnung der Wirkrichtung der Resultierenden (gestrichelt) mit dem Winkel von $77,76^\circ$ zur Horizontalen in den gewählten Bezugspunkt (F_1).
- Abmessung des Hebelarms ($6,13\text{ m}$) im 90° -Winkel zur Resultierenden.
- Einzeichnung der Resultierenden mit ihrer Richtung und Verschiebung dieser auf ihrer Wirkungslinie nach oben solange, bis diese am oberen Balken angreift.



Wir können hieraus den horizontalen Abstand vom Balkenanfang (F_1) zur Resultierenden bestimmen. Hierfür benötigen wir die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck:



Der Winkel α berechnet sich zu: $90^\circ - 77,76^\circ = 12,24^\circ$.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Hypotenuse} = \frac{\text{Ankathete}}{\cos(\alpha)}$$

$$\text{Hypotenuse} = \frac{6,13\text{ m}}{\cos(12,24)} = 6,27\text{ m}$$

Lösung Aufgabe 2)

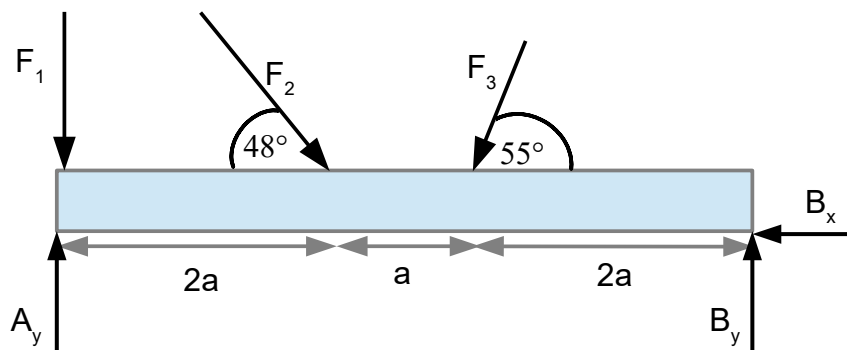
In dieser Aufgabe wollen wir die unbekanntenen Auflagerkräfte berechnen. Dazu können wir die Gleichgewichtsbedingungen heranziehen. Innerhalb der Statik befindet sich der Körper in Ruhe, d.h. die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte ist gleich Null (zweites Newtonsches Gesetz). Die drei Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene ergeben sich wie folgt:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \text{keine Bewegung in x-Richtung}$$

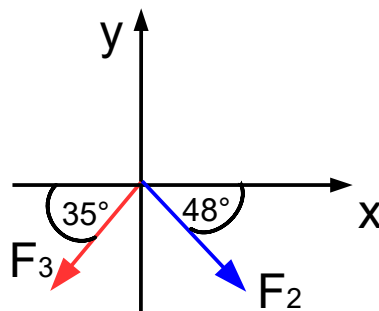
$$\sum F_{iy} = 0 \quad \text{keine Bewegung in y-Richtung}$$

$$\sum M_i^x = 0 \quad \text{keine Rotation}$$

Wir beginnen damit das Freikörperbild zu zeichnen, d.h. also die Lager vom Balken freizuschneiden und stattdessen die Auflagerkräfte abzutragen:



In einem nächsten Schritt müssen wir die Kräfte F_2 und F_3 in ihre x- und y-Komponenten zerlegen:



$$F_3 \cdot \cos(35^\circ) \quad \text{x-Komponente (nach links gerichtet)}$$

$$F_3 \cdot \sin(35^\circ) \quad \text{y-Komponente (nach unten gerichtet)}$$

$F_3 \cdot \cos(48^\circ)$ x-Komponente (nach rechts gerichtet)

$F_3 \cdot \sin(35^\circ)$ y-Komponente (nach unten gerichtet)

Wir wenden als nächstes die Gleichgewichtsbedingungen an.

Horizontale Gleichgewichtsbedingung (in x-Richtung):

$$\sum F_{ix} = 0: F_2 \cos(48^\circ) - F_3 \cos(35^\circ) - B_x = 0$$

$$B_x = F_2 \cos(48^\circ) - F_3 \sin(35^\circ) = 3,5 \text{ kN} \cos(48^\circ) - 1,8 \text{ kN} \cos(35^\circ) = 0,87 \text{ kN}$$

Momentengleichgewichtsbedingung um das Lager A (beliebig wählbar):

$$\sum M_i^{(A)} = 0: -F_2 \sin(48^\circ) \cdot 2a - F_3 \sin(35^\circ) \cdot 3a + B_y \cdot 5a = 0$$

$$B_y \cdot 5a = F_2 \sin(48^\circ) \cdot 2a + F_3 \sin(35^\circ) \cdot 3a$$

$$B_y = F_2 \sin(48^\circ) \cdot \frac{2}{5} + F_3 \sin(35^\circ) \cdot \frac{3}{5}$$

$$B_y = 3,5 \text{ kN} \sin(48^\circ) \cdot \frac{2}{5} + 1,8 \text{ kN} \sin(35^\circ) \cdot \frac{3}{5} = 1,66 \text{ kN}$$

Vertikale Gleichgewichtsbedingung (in y-Richtung):

$$\sum F_{iy} = 0: -F_1 - F_2 \sin(48^\circ) - F_3 \sin(35^\circ) + A_y + B_y = 0$$

$$A_y = F_1 + F_2 \sin(48^\circ) + F_3 \sin(35^\circ) - B_y$$

$$A_y = 2 \text{ kN} + 3,5 \text{ kN} \sin(48^\circ) + 1,8 \text{ kN} \sin(35^\circ) - 1,66 \text{ kN} = 3,97 \text{ kN}$$