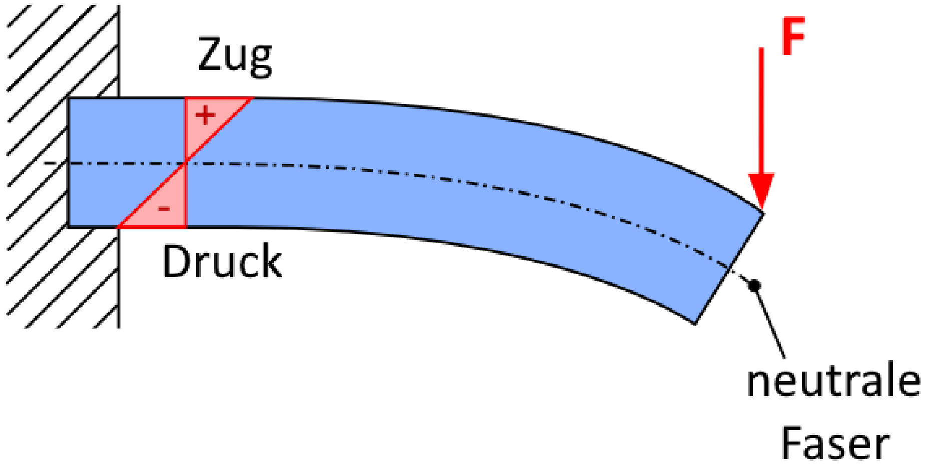
# Differentialgleichung der Biegelinie

## Biegelinie

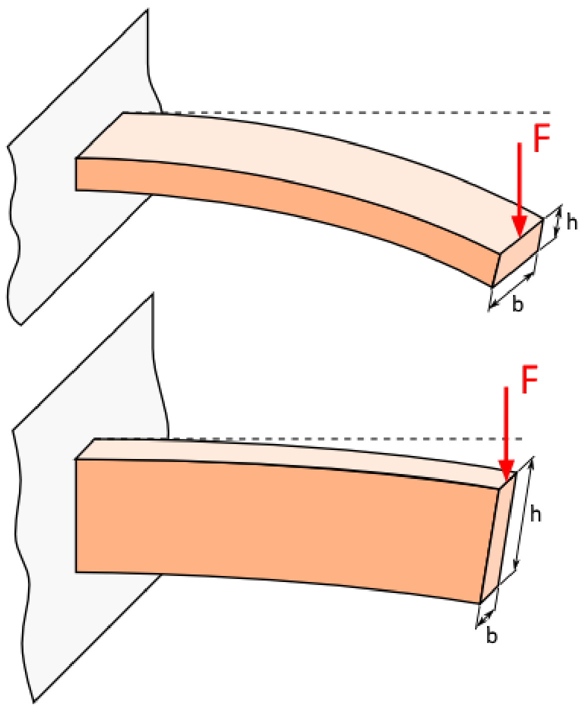
- Die **Biegelinie** ist auch als Durchbiegungslinie oder elastische Linie bekannt
- Ist deckungsgleich mit der **neutralen Faser** eines Balkens
- Beschreibt den **Verformungsverlauf** eines **geraden Balkens** bei mechanischer Belastung



# Kurzer Exkurs: Das Flächenträgheitsmoment

- Das Flächenträgheitsmoment (auch Flächenmoment 2. Grades) definiert den Widerstand eines Bauteils gegenüber Biegung
- Berechnung erfolgt als Ableitung der Querschnittgeometrie des Stabes, Balkens, etc.
- Üblicherweise angegeben in der SI-Einheit $mm^4$
- Bekannt als $\mathbf{I_y}$ . Index y steht für die Koordinatenrichtung, in die das Flächenträgheitsmoment wirkt. Auch in gängigen Tabellenwerken nachzuschlagen
- Flächenträgheitsmoment ist ebenfalls bekannt als $\mathbf{J_{22}}$

## Kurzer Exkurs: Das Flächenträgheitsmoment




$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\boxed{W = \frac{I}{a_{max}}}$$

$$a_{max} = \frac{h}{2}$$

$$\boxed{\text{Biegewiderstandsmoment } W = \frac{\text{Flächenträgheitsmoment } I}{\text{Abstand der Randfaser - neutrale Faser } a_{max}}}$$

## Ermittlung der Biegelinie

- Annahme, dass es sich bei der Durchbiegung um **sehr kleine Verformungen** handelt
- Dadurch kann Veränderung der Balkengeometrie bei Aufstellung der Gleichungen **vernachlässigt werden**!
- Allgemeine Form der DGL für den Zusammenhang zwischen **Balkenkrümmung** und **Biegelinie**:

$$\frac{\omega''(x)}{(1+(\omega'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_y(x)}{EI_y}$$

- Erste Ableitung der Biegelinie im Nenner << 1, daher wird Ausdruck in aller Regel vernachlässigt

## Ermittlung der Biegelinie

- Die genäherte DGL wird hingegen häufiger verwendet:

$$\omega''(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_y}$$

- Durch zweifaches Integrieren kann so die Biegelinie ermittelt werden:

$$EI_y\omega''(x) = -M_y(x)$$

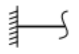
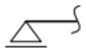
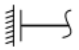
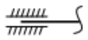
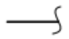
$$EI_y\omega'(x) = -\int M_y(x)dx + c_1$$

$$EI_y\omega(x) = -\iint M_y(x)dx^2 + xc_1 + c_2$$

- $c_1$ und $c_2$ sind Integrationskonstanten. Diese müssen durch Randbedingungen bestimmt werden.

## Randbedingungen der Biegelinie

- Die Rand- bzw. Übergangsbedingungen sind vom Lagerungsfall abhängig und können in Tabellenwerken nachgeschlagen werden:

| Lager | Verformung | Schnittgrößen |
|---|---|---|
|  | $w = 0 \quad w' = 0$ | – |
|  | $w = 0$ | $M = 0$ |
|  | $w = 0$ | $M = 0$ |
|  | $w' = 0$ | $Q = 0$ |
|  | $w = 0 \quad w' = 0$ | – |
|  | – | $Q = 0 \quad M = 0$ |

## Randbedingungen der Biegelinie

- So lässt sich i. A. die Biegelinie bestimmen! An dieser Stelle ist noch der Zusammenhang zwischen **Moment**, **Querkraft** und **Streckenlast**, die am Balken wirken, wichtig.

$$q_z(x) = E \times I \times \omega^{IV}(x)$$

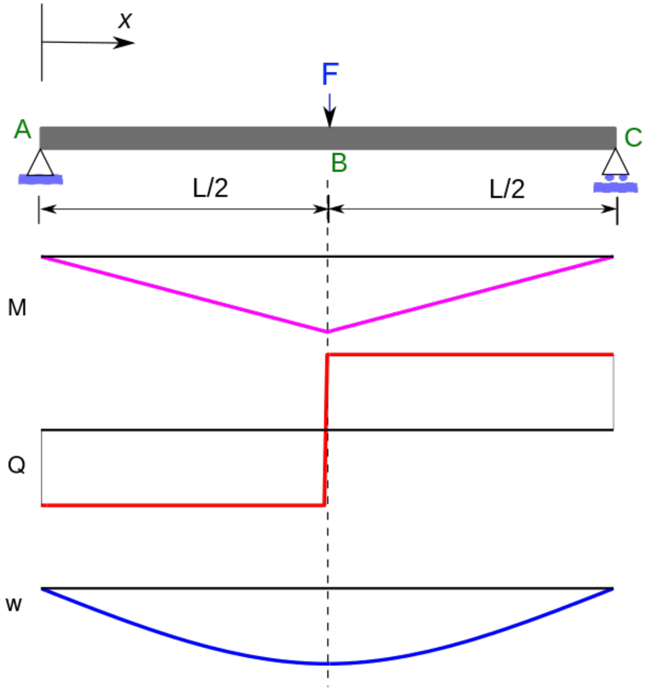
$$-Q(x) = E \times I \times \omega'''(x)$$

$$-M(x) = E \times I \times \omega''(x)$$

- E x I, bzw. **EI** ist auch als **Biegesteifigkeit** bekannt.

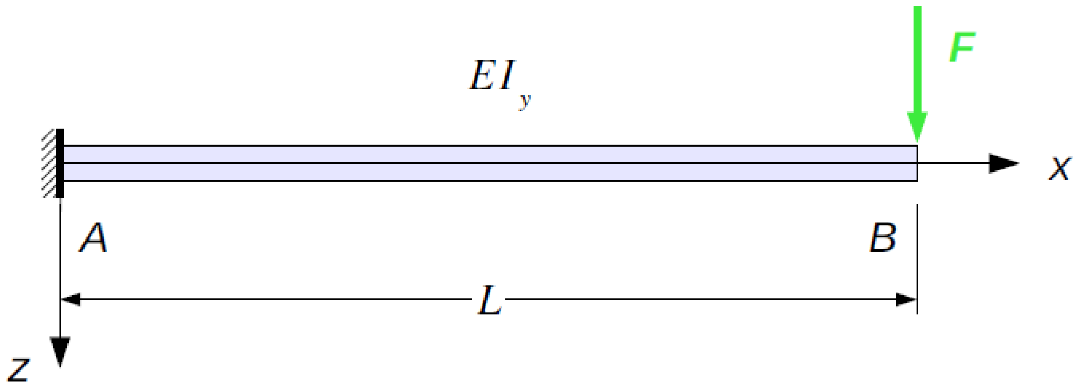
## Randbedingungen der Biegelinie

- Kraft- und Momentverläufe lassen sich im folgenden Schaubild besser nachvollziehen:



## Beispiel zur Einzellast: Kragbalken mit Endlast

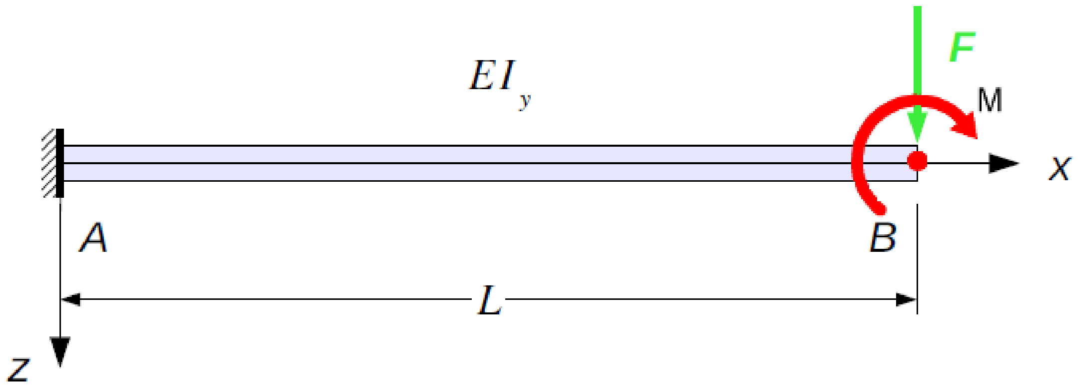
- Balken mit Länge L = 1m, E-Modul E = 210.000 MPa, Flächenträgheitsmoment $I_y$ = 290.000 $mm^4$
- Kraft F = 800 N greift am Ende des Balkens an



## Momentenverlauf

- Zu Beginn müssen wir den Momentenverlauf über den Balken mit Hilfe der Schnittgrößen bestimmen:

$$M_1(x) = -F(l - x)$$



## Integrationskonstanten berechnen

- Um die Integrationskonstanten zu berechnen, verwenden wir folgende Randbedingungen am Balken:

    1. Die Einspannung: Biegelinie w(x) und Krümmung der Biegelinie w‘(x) sind = 0.
       Q und M unbekannt.

    2. Festlager: Biegelinie w(x) und M sind hier = 0. Querkraft Q und Krümmung w‘(x) sind unbekannt.

    3. Der freie Rand: Biegelinie w(x) und Krümmung w‘(x) sind unbekannt. Q und M = 0.

## Integrationskonstanten berechnen

- Formel des Momentenverlaufs in Gleichung für 2. Ableitung der Biegelinie eingesetzt ergibt:

$$w_1''(x) = \frac{F(l-x)}{EJ_{22}}$$

- Durch Integration erhalten wir die Krümmung:

$$W_1' = \int \frac{F(l-x)}{EJ_{22}} dx = \frac{F}{EJ_{22}}(lx - \frac{x^2}{2} + C_1)$$

- Nochmalige Integration liefert die Biegelinie:

$$w_1(x) = \int \frac{F}{EJ_{22}}(lx - \frac{x^2}{2} + C_1)dx = \frac{F}{EJ_{22}}((\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2)$$

## Integrationskonstanten berechnen

- Die Integrationskonstanten erhalten wir nun mit Hilfe der Randbedingungen.
- Die Einspannung sitzt links. Damit müssen Krümmung und Biegelinie dort = 0 sein! Daraus folgt:

$$w_1'(x=0) = \frac{F}{EJ_{22}}(l0 - \frac{0^2}{2} + C_1) = 0$$

$$w_1(x=0) = \frac{F}{EJ_{22}}(\frac{l0^2}{2} - \frac{0^3}{6} + C_1 0 + C_2 0) = 0$$

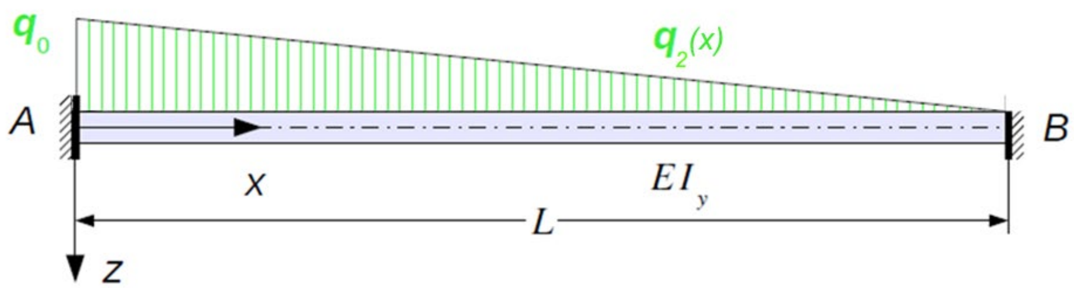
- Sowohl $C_1$ als auch $C_2$ müssen = 0 sein, um die Bedingung zu erfüllen. Daraus folgt für die Biegelinie:

$$w_1(x) = \frac{F}{EJ_{22}}(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}) = 1{,}3136 \times 10^{-8} \frac{1}{mm^2}(500mmx^2 - \frac{x^3}{6})$$

## Beispiel: Dreieckslast

- Gleicher Balken wie eben, gleiche Ausgangsbedingungen, aber diesmal liegt eine Dreieckslast vor:




- $q_2$(x) sei die wegabhängige Streckenlast mit ihrem maximal möglichen Wert $q_0$ an der Einspannstelle

$$q_2(x) = q_0(1 - \frac{x}{l})$$

## Beispiel: Dreieckslast

- Wir betrachten nun einen Lastverlauf, Formel für Biegelinie nicht mehr so einfach verwendbar!
- Wir brauchen nämlich den Momentenverlauf, können ihn aber nicht so schnell bestimmen.
- **Lösung**: Wir müssen den **Momentenverlauf zweimal ableiten** und erhalten so die **Streckenlast q**.
- Zweimalige Ableitung der Biegelinie führt demzufolge zur vierten Ableitung, die die Streckenlast q enthält:

$$w^{IV}(x) = \frac{q(x)}{EJ_{22}}$$

## Beispiel: Dreieckslast

- Einsetzen der Funktion für die Dreieckslast liefert uns für die vierte Ableitung:

$$w_2^{IV}(x) = \frac{q(x)}{EJ_{22}} = \frac{q_0}{EJ_{22}}(1 - \frac{x}{l})$$

- Nun müssen wir tatsächlich viermal integrieren…

$$w_2'''(x) = \int \frac{q_0}{EJ_{22}}(1 - \frac{x}{l})\ dx = \frac{q_0}{EJ_{22}}\left(x - \frac{x^2}{2l} + C_1\right)$$

$$W_2''(x) = \int \frac{q_0}{EJ_{22}}\left(x - \frac{x^2}{2l} + C_1\right) dx = \frac{q_0}{EJ_{22}}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} + C_1 x + C_2\right)$$

$$W_2'(x) = \int \frac{q_0}{EJ_{22}}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} + C_1 x + C_2\right) dx = \frac{q_0}{EJ_{22}}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24l} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3\right)$$

## Beispiel: Dreieckslast

- Durch die letzte Integration erhalten wir $W_2(x)$ mit:

$$W_2(x) = \int \frac{q_0}{EJ_{22}} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24l} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \right) dx$$

$$= \frac{q_0}{EJ_{22}} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120l} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right)$$

- Da wir eine DGL vierten Grades vor uns hatten, folgt dementsprechend daraus, dass wir es mit vier Integrationskonstanten zu tun haben!

- Auch hier liefern uns die Randbedingungen die Integrationskonstanten.

## Randbedingungen

- Betrachten der dritten Ableitung der Biegelinie zeigt aus den Schnittgrößen, dass es sich um den Querkraftverlauf handelt.

- Erste Ableitung des Momentenverlaufs stellt den Querkraftverlauf dar:

$$(M\left(x\right))' = Q\left(x\right)$$

- Das heißt, die dritte Ableitung ist auch = 0, wenn Q(x) = 0 ist. In unserem Fall ist sie das am Balkenende, also bei x = L.

- Für die 2. Abl. wissen wir, dass der Momentenverlauf entscheidend ist.

## Randbedingungen

- Ist das Moment an einer Stelle = 0, dann ist folglich die zweite Ableitung der Biegelinie ebenfalls = 0.
- Das finden wir ebenfalls am Balkenende, also bei x = L. Daraus folgt für die dritte Ableitung der Biegelinie am Balkenende:

$$w_2'''(x=l) = \frac{q_0}{EJ_{22}}\left(l - \frac{l^2}{2l} + C_1\right) = 0$$

$$C_1 = -l + \frac{l^2}{2l} = -\frac{l}{2}$$

- Und für die zweite Ableitung:

$$w_2''(x=l) = \frac{q_0}{EJ_{22}}\left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{6l} - \frac{l}{2}l + C_2\right) = 0$$

## Randbedingungen

- Eingesetzt in $C_2$:

$$C_2 = \frac{l^3}{6l} - \frac{l}{2}l + \frac{l^2}{2} = \frac{l^2}{6}$$

- Die anderen beiden Integrationskonstanten ermitteln wir genauso, nur mit dem Unterschied, dass an der Einspannstelle sowohl Biegelinie als auch Krümmung = 0 sein müssen:

$$w_2'(x=0) = \frac{q_0}{EJ_{22}}\left(\frac{0^3}{6} - \frac{0^4}{24l} - \frac{l0^2}{4} + \frac{l^2}{6}0 + C_3\right) = \frac{q_0}{EJ_{22}}C_3 = 0$$

- Gleichung geht nur auf, wenn $C_3 = 0$ ist.

## Randbedingungen

- An der Einspannstelle ergibt sich für die Biegelinie:

$$w_2\left(x=0\right)=\frac{q_0}{EJ_{22}}\left(\frac{0^4}{24}-\frac{0^5}{120l}-\frac{l0^3}{12}+\frac{l^2 0^2}{12}+C_4\right)=\frac{q_0}{EJ_{22}}C_4=0$$

- Gleichung geht nur auf, wenn $C_4 = 0$ ist. Daraus folgt für die gesamte Formel der Biegelinie:

$$w_2\left(x\right)=\frac{q_0}{EJ_{22}}\left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120l}-\frac{lx^3}{12}+\frac{l^2x^2}{12}\right)$$

- *Wir müssen nun nur noch L, $q_0$, E und $J_{22}$ einsetzen und $x^2$ ausklammern, um die endgültige Gleichung zu erhalten.*