Analysis und Lineare Algebra

Grundlagen: Mengenlehre und reelle Zahlen

Autor:
Deleted User

ingenieurkurse.de
DIGITALE PRÜFUNGSVORBEREITUNG

INHALTSVERZEICHNIS

1 Grundlagen: Mengenlehre und reelle Zahlen

Zu Beginn erläutern wir die unterschiedlichen Ausprägungen von Mengen und Zahlen. Im Anschluss werden wir detailliert auf deren Verwendung in diversen mathematischen Rechenbereichen eingehen und dies an Beispielen und Übungsaufgaben vertiefen.

Die Themen dieses Kurses gliedern sich wie folgt:

- Grundlagen
- komplexe Zahlen
- elementare Funktionen
- Vektorrechnung
- Differentialrechnung
- Integralrechnung
- Folgen und Reihen
- lineare Algebra

1.1 Kurseinführung

Herzlich Willkommen in deinem Kurs **Höhere Mathematik 1** zu den Themen *Analysis und Lineare Algebra*. Wir freuen uns, dass du dich dazu entschlossen hast, dich mithilfe dieses Kurses in die sehr interessante, jedoch nicht ganz einfache Thematik der Mengenlehre, Vektorrechnung, komplexen Zahlen, Integral- und Differentialrechnung sowie der linearen Algebra einzuarbeiten. Zu Beginn des Kurses werden wir dich mit den Grundlagen vertraut machen. Anschließend werden wir Schritt-für-Schritt auf die oben genannten Themenpunkte eingehen. Die einzelnen Kurstexte sind übersichtlich gestaltet und mit einer Vielzahl an Grafiken und Beispielen versehen. Außerdem werden wir dir mithilfe von Lernvideos die einzelnen Themen nochmals näher erläutern. Du hast jederzeit die Möglichkeit deinen Umgang mit Definitionen, Formeln und mathematischen Zusammenhängen anhand von Übungsaufgaben zu jedem Themenpunkt zu verbessern. Am Ende eines jeden Kapitels steht eine Abschlussprüfung an, welche das bereits erlernte Wissen aus dem jeweiligen Kapitel überprüft.

Wenn du dich mit unserem Kurs auf eine Klausur vorbereitest, dann wirst du dich nach Absolvieren dieses Kurses sicher fühlen und kannst beruhigt in die Prüfung gehen.

HINWEIS

Übrigens $\longrightarrow$ Am Ende das Kurses befindet sich eine Formelsammlung, die alle relevanten Formeln für deine Klausur enthält.

Wir wünschen dir viel Spaß und Erfolg,

Dein Ingenieurkurse.de-Team

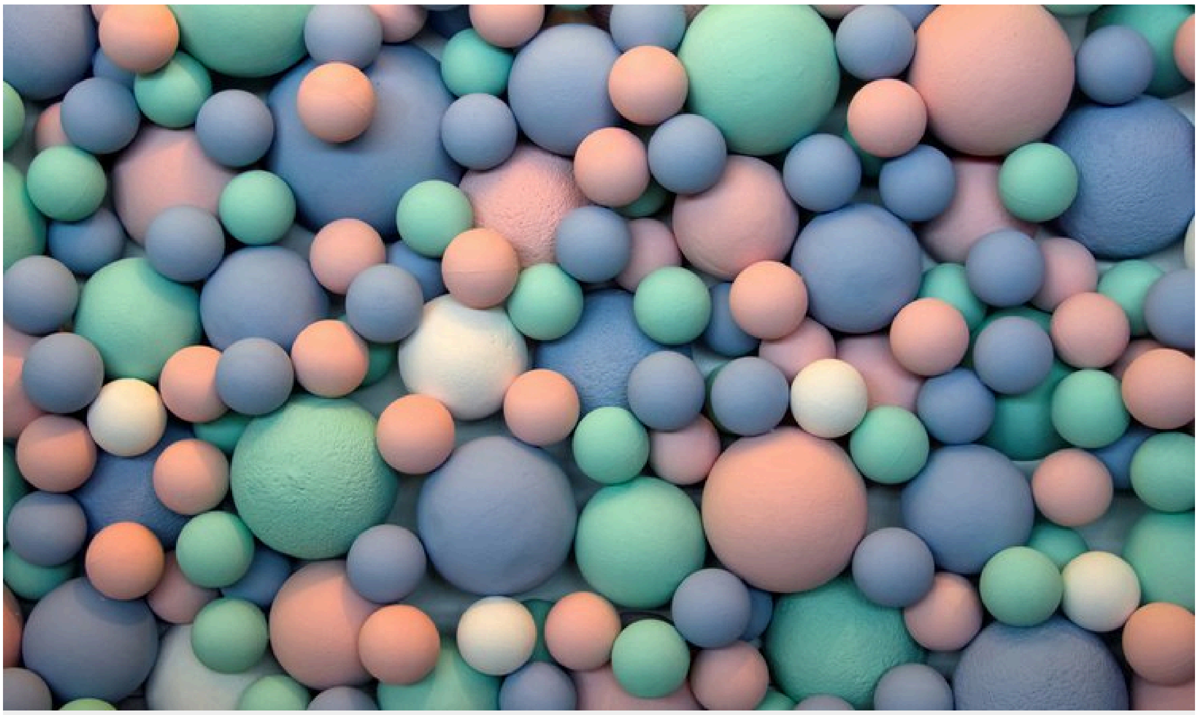
1.2 Mengenlehre

1.2.1 Einführung in die Mengenlehre

MERKE

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Elementen unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

So beschrieb im Jahre 1895 der deutsche Mathematiker Georg Cantor (1845-1918) die primäre Eigenschaft einer Menge.


Kugeln lassen sich nach Kriterien in Mengen unterteilen

Als Menge wird eine Ansammlung von Elementen bezeichnet. Mengen werden in der Regel mit *Großbuchstaben* mit einem zusätzlichen Strich dargestellt (z. B. $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{X}, \dots$). Die Elemente einer Menge werden durch die Mengenklammern { und } eingeschlossen.

MERKE

Man schreibt: , wenn x ein Element von Menge $\mathbb{A}$ darstellt und , wenn x kein Element von $\mathbb{A}$ darstellt.

Betrachtet man z. B. die Menge $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4\}$, so ist $2 \in \mathbb{M}$, wohingegen $5 \notin \mathbb{M}$ ist.

Zahlenmengen

Es existieren unterschiedliche Zahlenmengen, welche im Folgenden aufgeführt werden sollen:

- $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen. . Die natürlichen Zahlen sind alle nicht-negativen ganzen Zahlen. Wenn die Null hinzugezählt werden soll, so schreibt man: .
- $\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen. Diese beinhalten neben den natürlichen Zahlen noch die negativen ganzen Zahlen. $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.
- $\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen. Die rationalen Zahlen sind definiert als die Menge der ganzen Zahlen sowie allen Brüchen $\frac{p}{q}$, für die gilt $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$.
- $\mathbb{R}$ ist die Menge aller reellen Zahlen. Die reellen Zahlen sind definiert als die Menge der rationalen Zahlen plus die Menge der nicht-rationalen Zahlen, wie z. B. $\sqrt{5}$ oder π .

Es besteht die Möglichkeit, eine Zahlenmenge durch ein zusätzliches, hochgestelltes $+$ oder $-$ zu versehen. Wird ein $+$ an eine Zahlenmenge angefügt, so bedeutet dies, dass alle Zahlen der Menge größer als null sind. Wird ein $-$ angefügt, so bedeutet dies, dass alle Zahlen der Menge kleiner als null sind. Soll die Null ebenfalls berücksichtigt werden, so muss diese nach unten gestellt an die Menge angefügt werden.

BEISPIEL

$\mathbb{Z}_0^+$ ist die Menge aller ganzen positiven Zahlen mit Berücksichtigung der Null. Dies entspricht auch gleichzeitig der Menge aller natürlichen Zahlen plus null: $\mathbb{N}_0$.

Der Menge aller natürlichen Zahlen kann natürlich kein $-$ angefügt werden, weil diese nur aus positiven Zahlen besteht.

Für $\mathbb{R}^-$ werden alle reellen Zahlen kleiner als null berücksichtigt, wohingegen für $\mathbb{R}_0^+$ alle reellen Zahlen größer gleich null berücksichtigt werden.

Aussagen und Aussageformen

Aussagen können entweder wahr w oder falsch f sein. Es existieren auch Aussagen, die nicht klar bestimmt sind, die also weder wahr noch falsch sind.

BEISPIEL

Das 2-fache einer Zahl ist kleiner als 20. Wird für die Zahl $x = 5$ eingesetzt, so ist diese Aussage wahr, denn $2 \cdot 5 < 20$. Wird hingegen für diese Zahl $x = 15$ eingesetzt, so ist diese Aussage falsch, denn $2 \cdot 15 > 20$.

Die gerade beschriebene Formulierung: *Das 2-fache einer Zahl ist kleiner als 20* stellt eine **Aussageform** dar. Die Aussageform ist also eine Formulierung, welche eine unbekannte Variable enthält. Wird für diese Variable ein Wert eingesetzt, so entsteht eine **Aussage**, die entweder wahr oder falsch ist. Die Werte, die für diese unbekannte Variable eingesetzt werden, werden einer Grundmenge $\mathbb{G}$ entnommen. Ist keine andere Information gegeben, so wird die Grundmenge immer mit $\mathbb{R}$ angenommen.

In der Mathematik sind typische Aussageformen Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten. Setzt man für die Unbekannte(n) bestimmte Werte ein, so entsteht eine Aussage, die entweder wahr oder falsch ist.

BEISPIEL

Die Gleichung $2x = 4x + 16$ ist wahr für:

$$x = -8: \quad -16 = -16$$

Sie ist hingegen falsch für z. B.

$$x = 5: \quad 10 = 36$$

Es sind nur diejenigen Zahlen von Interesse, die aus der Aussageform (Gleichung) eine wahre Aussage machen, denn diese Zahlen lösen die Gleichung und sind damit Elemente der Lösungsmenge.

HINWEIS

Im Weiteren werden die Mengen mit einfachen Großbuchstaben $\{A, B, ...\}$ dargestellt.

Angabe von Eigenschaften bei Mengen

Die häufigste Beschreibung einer Menge A geschieht durch die Angabe einer Eigenschaft E, die genau allen Elementen von A zukommt. Man schreibt:

HINWEIS

$$A = \{x; x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

Zum Beispiel: $A = \{x; x \text{ ist eine ganze Zahl}\}$ also "die Menge aller x für die gilt: x ist eine ganze Zahl, ist wiederum genau die Menge A.

Für die obige Aussageform wäre also $x = 1$ eine wahre Aussage und damit Lösungsmenge der Menge $A = \{1\}$. Alle ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind demnach Lösungsmenge von $A = \{\mathbb{Z}\}$.

BEISPIEL

Alle Elemente der Menge A sollen die Eigenschaft besitzen, eine Ballsportart zu sein (E = Ballsportart). Fußball, Handball, Basketball besitzen diese Eigenschaft und sind damit . Weitsprung, Skilanglauf und Schwimmen hingegen sind zwar Sportarten, gehören aber nicht zu den Ballsportarten und damit $\notin A$.

Unterscheidung von Mengen

1. Eine Menge A, die keine Elemente enthält, wird mit **leer** bezeichnet. Enthält sie mindestens ein Element, heißt sie **nicht leer.**

BEISPIEL

$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 5 = 0\}$. Kein Element x kann die Eigenschaft erfüllen, dass die Gleichung den Wert 0 annimmt, deshalb ist die Menge A leer.

$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 16 = 0\}$. Die Elemente $x = 4$ und $x = -4$ können die Eigenschaft erfüllen, dass die Gleichung den Wert 0 annimmt. Diese Menge ist demnach nicht leer $A = \{-4, 4\}$.

2. Eine Menge A, die endlich viele Elemente enthält, wird als **endlich** bezeichnet. Eine Menge heißt **unendlich**, wenn sie nicht endlich ist.

BEISPIEL

. Es dürfen nur alle natürlichen Zahlen betrachtet werden, also ist die Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Menge ist **endlich**.

$A = \{x \in \mathbb{N} | x + 3 > 10\}$. Auch hier dürfen nur alle natürlichen Zahlen betrachtet werden, allerdings ist die Menge A hier **unendlich**, weil für $7 < x < \infty$ die Gleichung erfüllt ist, d.h. für alle natürlichen Zahlen die größer als 7 sind, ist die Gleichung erfüllt.

3. Eine unendliche Menge A, dessen Elemente sich als unendliche Folge durchnummerieren lassen, heißt **abzählbar unendlich**. Jede nicht abzählbar unendliche Menge heißt **überabzählbar unendlich**.

BEISPIEL

$A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ heißt **überabzählbar unendlich.** Hier werden alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 betrachtet.

$A = \{x \in \mathbb{N} | x + 3 > 10\}$ heißt hingegen **abzählbar unendlich**, da hier die Zahlen zwar bis unendlich gehen, aber durchnummeriert werden können: $A = \{8, 9, 10, 11, ..., \infty\}$.

4. Eine Menge A und eine Menge B, die keine gemeinsamen Elemente besitzen, heißen **disjunkte Mengen**.

BEISPIEL

$A = \{5, 6, 7\}$ und $B = \{8, 9, 10\}$ heißen **disjunkt.**

4. Eine Menge A und eine Menge B, die identische Elemente besitzen, heißen **äquivalente Mengen**.

BEISPIEL

$A = \{5, 6, 7\}$ und $B = \{5, 6, 7\}$ heißen **äquivalent.**

Operationen für Aussagen

- Verneinung: **nicht** A (Symbol: ¬A)
- Konjunktion: A **und** B (Symbol: A ∧ B)
- Disjunktion: A **oder** B (Symbol: A ∨ B)
- Implikation: aus A **folgt** B (Symbol: A ⇒ B)

1.2.2 Teilmengen

Obermenge/Teilmenge

Teilmengen beschreiben den Zusammenhang zwischen mindestens zwei Mengen. Ist jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge B, so ist die Menge A eine **Teilmenge** von B **:**

METHODE

$A \subseteq B$ A ist Teilmenge von B

BEISPIEL

Gegeben sei die Menge $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sowie die Mengen und $C = \{0, 1, 6, 7\}$.

Die Menge B ist Teilmenge von Menge A, also $B \subseteq A$. Hier ist auch die Menge A Teilmenge von Menge B, also . Die Menge C hingegen ist keine Teilmenge von Menge A oder von Menge B.

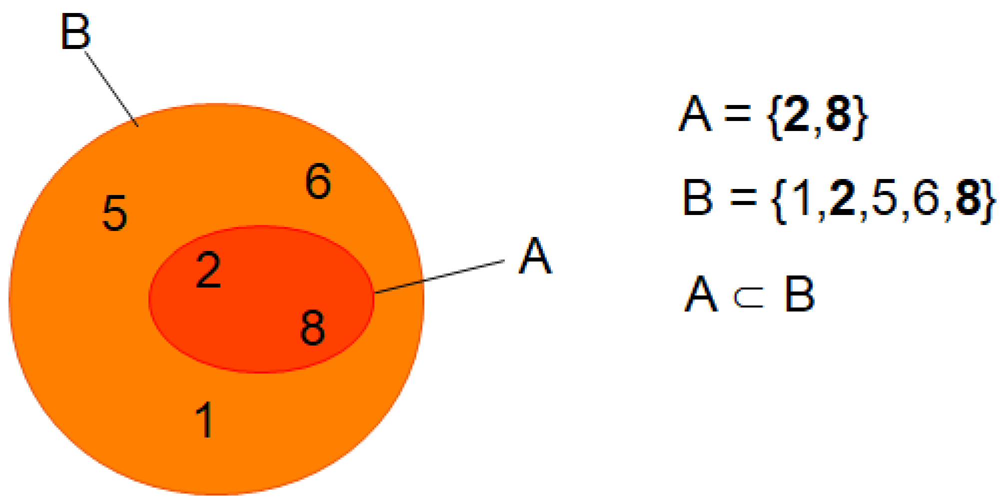
Echte Obermenge/echte Teilmenge

Ist jedes Element von A ein Element von B und enthält B mindestens ein in A nicht enthaltenes Element, so ist A eine **echte Teilmenge** von B :

METHODE

$A \subset B$ A ist **echte** Teilmenge von B

Alternativ kann man sagen, dass A **echt** in B enthalten ist bzw. dass B die **echte Obermenge** von A darstellt.



A ist echte Teilmenge von B

BEISPIEL

Gegeben sei die Menge $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ sowie die Mengen $B = \{0,1,2,3,4\}$ und $C = \{0,1,6,7\}$.

Die Menge B ist **echte** Teilmenge von Menge A, also $B \subset A$, weil alle Elemente von B in A vorkommen und A mindestens ein Element verschieden von B aufweist. Man kann auch sagen, dass A echte Obermenge von B ist.

Die Menge C hingegen ist weder Teilmenge von A noch von B.

Gleiche Mengen/unvergleichbare Mengen

Ist jedes Element von A ein Element von B und umgekehrt, so heißen die beiden Mengen **gleich**. Besitzt keine Menge ein Element der anderen Menge, so sind diese **unvergleichbar** und besitzen keine Relationen.

$A = B \longleftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ **gleiche Mengen**

$A \neq B \longleftrightarrow (A \nsubseteq B \wedge B \nsubseteq A)$ **unvergleichbare Mengen**

BEISPIEL

Gegeben seien die Mengen $A = \{-1, 5, 6, 8, 10, 12\}$, und .

Die Mengen A und B sind gleich bzw. äquivalent. Die Mengen A und C und die Mengen B und C sind unvergleichbare Mengen.

1.2.3 Mengenoperationen

1.2.3.1 Vereinigung von Mengen

Fasst man die Mengen A und B zusammen, so erhält man eine neue Gesamtmenge M. In unserem Beispiel werden dadurch A und B zu **Teilmengen** der **Gesamtmenge** M. Dies nennt man auch die Vereinigung von A und B. Es ist hierbei auch zulässig, dass A Elemente beinhaltet, die ebenfalls in B vorhanden sind.

METHODE

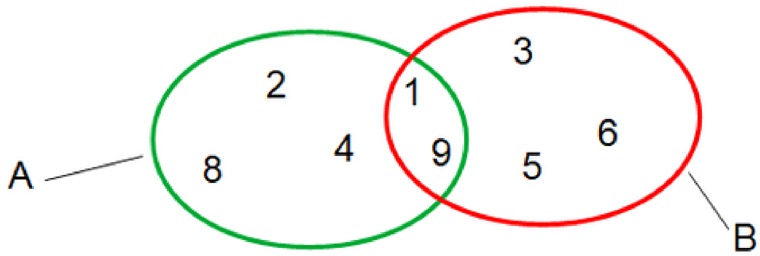
$$A \cup B := \{x \in M | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

HINWEIS

Die mathematischen Zeichen := und =: werden verwendet, um eine Definition *einer* Seite durch die *andere* Seite darzustellen. Wobei der Doppelpunkt auf der <u>zu definierenden</u> Seite steht.

HINWEIS

Das Zeichen $\cup$ bedeutet einfach: Die Zusammenfassung aller Elemente, die in A oder in B oder in beiden enthalten sind.



M = A ∪ B
A = {1,2,4,8,9}
B = {1,3,5,6,9}
M = {1,2,3,4,5,6,8,9}

Vereinigung von Mengen

In der obigen Grafik sind die zwei Mengen $A = \{1, 2, 4, 8, 9\}$ und $B = \{1, 3, 5, 6, 9\}$ gegeben. Die Vereinigungsmenge $M = A \cup B$ ergibt dann: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$.

Wichtig: In der Schnittstelle der beiden Mengen sind die Elemente enthalten, die in beiden Mengen vorkommen. Diese werden bei der Vereinigung aber nur einmal angegeben.

MERKE

Eine Vereinigung ist eine Zusammenfassung der Elemente mindestens zweier Mengen, wobei hierbei doppelt vorkommende Elemente nur einmal gezählt werden.

BEISPIEL

In einer Runde von Freunden soll entschieden werden, wohin der nächste gemeinsame Urlaub gehen soll. Man unterscheidet die Gruppe in jeweils drei Frauen (Menge A) und drei Männer (Menge B). Eine Frau möchte nach Griechenland, eine andere nach Schottland, die Dritte nach Polen. Die Männer wollen jeweils nach Frankreich, England und Polen. Nun haben wir eine Gesamtmenge von nur fünf Urlaubszielen, obwohl sechs Vorschläge unterbreitet wurden. Das liegt daran, dass Polen als Urlaubsland doppelt genannt wurde, es aber als Vorschlag für die Urlaubsziele (Gesamtmenge) nur einmal übernommen wird.

Video: Vereingung von Mengen

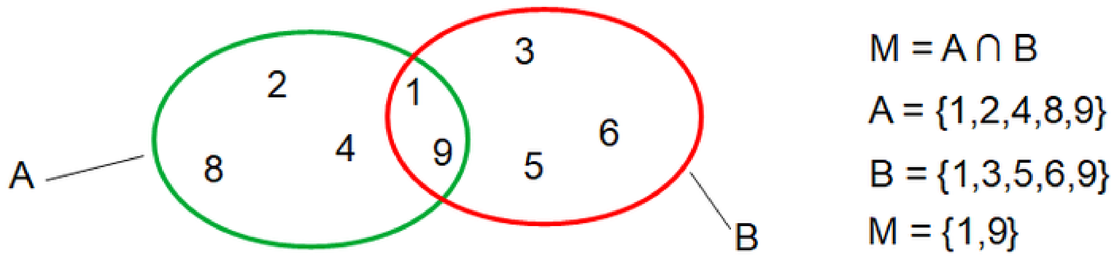
1.2.3.2 Durchschnitt von Mengen

Die Durchschnittsmenge (kurz Durchschnitt) ermittelt sich durch die **gemeinsamen** Elemente von mindestens zwei Mengen und wird mit dem Symbol $\cap$ bezeichnet. Der Durchschnitt der Mengen A und B wird folgendermaßen zusammengefasst:

METHODE

$$A \cap B := \{x \in M | x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Das Zeichen $\cap$ bedeutet einfach: Die Zusammenfassung aller Elemente, die in A **und** in B enthalten sind.



Durchschnitt von Mengen

In der obigen Grafik sind die zwei Mengen A und B gegeben. Die Durchschnittsmenge M ergibt sich dann, indem die gemeinsamen Elemente der Menge zusammengefasst werden. Demnach ist also die Schnittstelle beider Mengen gleich dem Durchschnitt der Mengen.

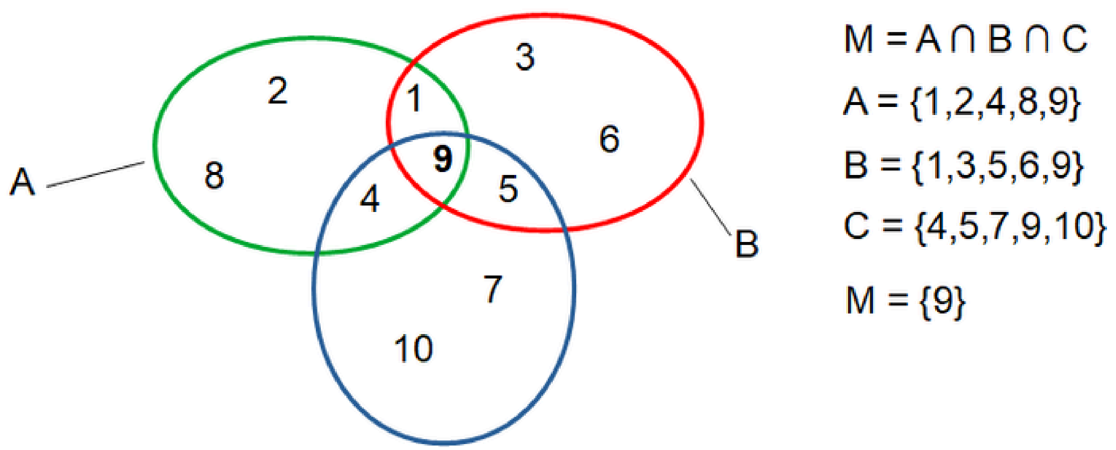
BEISPIEL

Gegeben sei und $B = \{2, 3\}$. Die Gesamtmenge M sieht dann wie folgt aus: $M = \{2\}$.

Der Durchschnitt dreier Mengen wird wie folgt zusammengefasst:

METHODE

Die Zusammenfassung aller Elemente, die in A **und** in B **und** in C enthalten sind.



Durchschnitt dreier Mengen

BEISPIEL

Gegeben sei und $C = \{c, d, e, f\}$. Die Gesamtmenge M sieht dann wie folgt aus: $M = \{c, d\}$.

Video: Durchschnitt von Mengen

1.2.3.3 Differenz von Mengen

Die Differenzmenge umfasst alle Elemente der Menge A, welche nicht auch in der Menge B enthalten sind. Im Gegensatz dazu, umfasst die Differenzmenge alle Elemente der Menge B, welche nicht auch in der Menge A enthalten sind.

METHODE

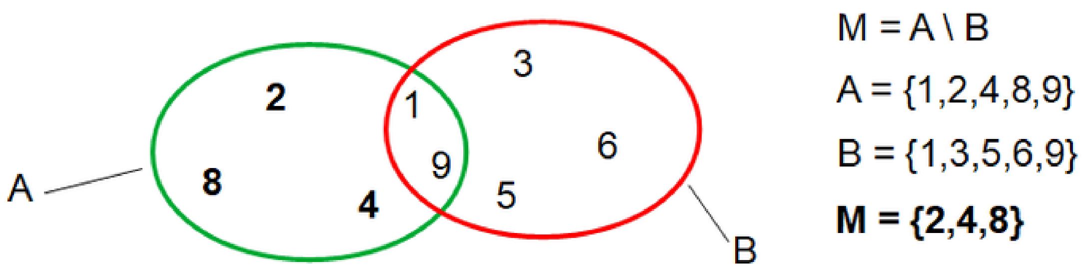
$$A \backslash B := \{x \in M | x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$$

bzw.

Man kann auch vereinfacht sagen:

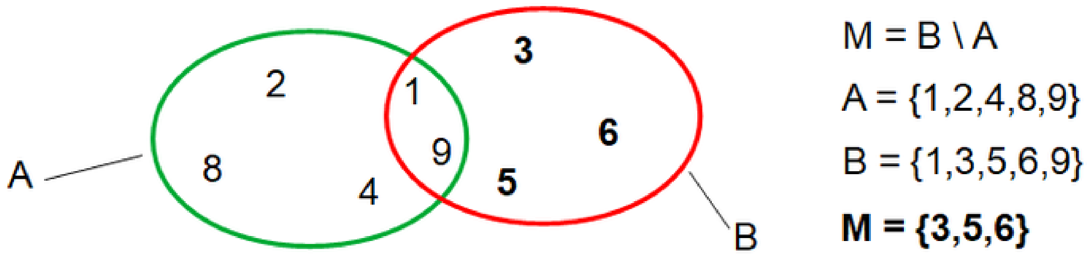
- $A \backslash B$ = A ohne B
- = B ohne A

Zunächst betrachten wir ein Beispiel für A\B:



Differenz: A \ B

Als nächstes betrachten wir B\A:



Differenz: B\A

BEISPIEL

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Die Differenzmengen sehen wie folgt aus:

Video: Differenz von Mengen

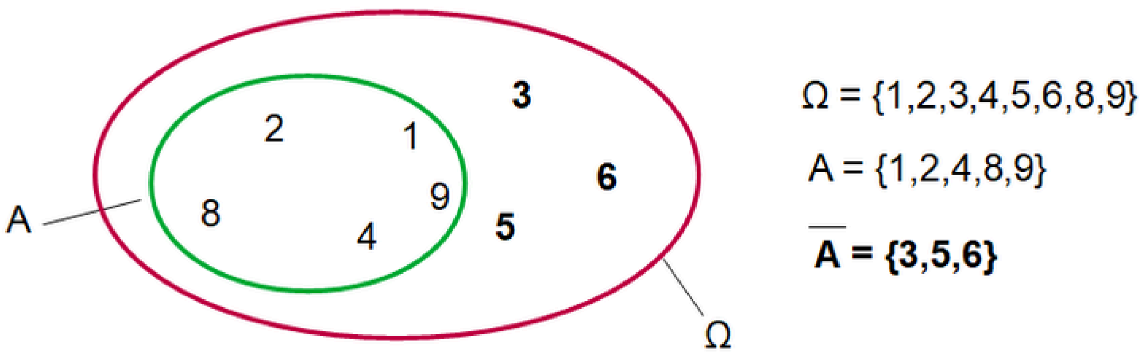
1.2.3.4 Komplementärmengen

Die Komplementärmenge ist eine Sonderform der Differenz und wird dann verwendet, wenn bei einer Mengendefinition eine Grundmenge Ω angegeben wird.

Die Komplementärmenge $\overline{A}$ umfasst alle Elemente aus einer gegebenen Grundmenge Ω, die nicht zur Menge A gehören.

METHODE

$$\overline{A} := \{x \in M | x \in \Omega \;\wedge\; x \notin A\}$$



Komplementärmenge

In der obigen Grafik soll die Komplementärmenge $\overline{A}$ bestimmt werden. Hierzu werden alle Elemente der Grundmenge Ω gewählt, die nicht in der Menge A enthalten sind. Man kann auch sagen $\overline{A}$ = nicht in A.

Gegeben sei ein weiteres **Beispiel zur Komplementärmenge**:

BEISPIEL

Gegeben seien die Grundmenge $\Omega = \{-5, -2, 0, 5, 6, 10\}$ und die Menge $A = \{-2, 0, 6\}$. Wie sieht die Komplementärmenge $\overline{A}$ aus?

Die Komplementärmenge $\overline{A}$ beinhaltet diejenigen Elemente der Grundmenge Ω, die nicht in der Menge A enthalten sind:

$$\overline{A} = \{-5, 5, 10\}$$

1.2.3.5 Produktmengen

Die **Produktmenge** (in der Mathematik auch **kartesisches Produkt** genannt) zweier Mengen A und B ist die Menge aller **geordneter Paare**, die aus den Elementen $x \in A$ und $y \in B$ gebildet werden können.

MERKE

Alle Funktionen und Abbildungen sind als Teilmengen kartesischer Produkte aufzufassen.

Schreibweise: $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ und } y \in B\}$

Hierbei stellt n_1 die Anzahl der Elemente von A und n_2 die Anzahl der Elemente von B dar. Die Produktmenge beinhaltet dann geordnete Paare.
Überträgt man nun diese Paare auf ein kartesisches Koordinatensystem, so erhält man ein Punktegitter von geordneten Paaren (x, y) in der Koordinatenebene.

BEISPIEL

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{X, Y, Z\}$.

A besitzt vier Elemente, B drei Elemente. Die neue Menge $M = A \times B$

müsste also $4 \cdot 3 = 12$ Elemente besitzen.

Wir erhalten somit:

$$A \times B = \{(1,X),(2,X),(3,X),(4,X), < br > (1,Y),(2,Y),(3,Y),(4,Y), < br > (1,Z),(2,Z),(3,Z),(4,Z)\}$$

.

Zudem ist es möglich, das kartesische Produkt aus einer Menge A mit sich selbst zu bilden. Beinhaltet A eine endliche Anzahl n von Elementen, so erhält man eine Elementenanzahl von $A \times A = n^2$.

Mit der Menge A aus dem obigen Beispiel wäre dies: $4 \cdot 4 = 16$

$$A \times A = \{(1,1)(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

1.2.3.6 Übungsbeispiele zur Mengenlehre

In diesem Abschnitt werden einige Übungsbeispiele zur Mengenlehre aufgeführt.

1. Beispiel zur Mengenlehre

BEISPIEL

Gegeben seien die Grundmenge $\omega = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ sowie die Mengen $A = \{0,1,2\}$ und $B = \{1,2,3\}$.

Führe bitte die folgenden Mengenoperationen durch:

$A \cup B$ (Vereinigung)

$A \cap B$ (Durchschnitt)

$A \backslash B$ und $B \backslash A$ (Differenz)

$\overline{B}$

Wir bilden zunächst die Vereinigung. Hierbei gilt: Alle Elemente, die entweder in A oder in B oder in beiden enthalten sind, wobei doppelte Elemente einfach gezählt werden:

$$A \cup B = \{0,1,2,3\}$$

Als nächstes legen wir den Durchschnitt der Mengen fest. Hierbei gilt es, alle Elemente zu berücksichtigen, die sowohl in A als auch in B vorkommen:

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

Die Differenzmenge $A \backslash B$ besagt, dass alle Elemente aus A berücksichtigt werden müssen, die nicht auch in B enthalten sind:

$$A \backslash B = \{0\}$$

Die Differenzmenge $B \backslash A$ besagt, dass alle Elemente aus B berücksichtigt werden müssen, die nicht auch in A enthalten sind:

$$B \backslash A = \{3\}$$

Die Menge $\overline{B}$ (gelesen: B quer) ist die Menge aller Elemente aus ω, welche nicht zu B gehört. $\overline{B}$ ist die Komplementärmenge von B bezüglich der Grundmenge ω.

Das bedeutet also:

$$\overline{B} = \{-2, -1, 0, 4, 5, 6, 7\}$$

2. Beispiel zur Mengenlehre

BEISPIEL

Gegeben seien die Grundmenge $M = \{x \in \mathbb{Z} | -5 \leq x \leq 6\}$ sowie die Mengen $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ und $C = \{0, 2, 6\}$.

Führe bitte die folgenden Mengenoperationen durch:

a) $A \cap B$

b) $A \cap \overline{C}$

c) $(A \cap \overline{B}) \cup B$

d) $\overline{A} \cup B$

e) $A \cup C$

f) $B \cup C$

g) $(A \cup B) \cup C$

h) $(A \cap B) \cap C$

i) $\overline{A} \cap B$

j) $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{C}$

k) $\overline{(A \cap B) \cup C}$

a) Es wird zunächst der Durchschnitt der Mengen festgelegt. Hierbei gilt es, alle Elemente zu berücksichtigen, die sowohl in A als auch in B vorkommen:

$$A \cap B = \{2\}$$

b) Es wird zuerst die Komplementärmenge $\overline{C}$ gebildet. $\overline{C}$ ist die Komplementärmenge von C bezüglich der Grundmenge M. Die Komplementärmenge $\overline{C}$ der Menge C umfasst alle Elemente aus der Grundmenge M, die nicht zur Menge C gehören.

$$\overline{C} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 3, 4, 5\}.$$

Es kann nun der Durchschnitt gebildet werden. Hierbei gilt es alle Elemente zu berücksichtigen, die sowohl in A als auch in $\overline{C}$ vorkommen:

$$A \cap \overline{C} = \{-1, 1\}$$

c) Es wird nun die Komplementärmenge $\overline{B}$ gebildet:

$$\overline{B} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 6\}.$$

Anschließend wird der Durchschnitt gebildet:

$$(A \cap \overline{B}) = \{-1, 0, 1\}$$

Es wird nun mit dem Ergebnis die Vereinigung mit B gebildet. Hierbei werden alle Elemente berücksichtigt, die sowohl in $(A \cup \overline{B})$ als auch in B sowie in beiden vorkommen:

$$(A \cap \overline{B}) \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

d) Es wird zunächst die Komplementärmenge von $\overline{A}$ gebildet:

$$\overline{A} = \{-5, -4, -3, -2, 3, 4, 5, 6\}\,.$$

Anschließend wird die Vereinigung gebildet:

$$\overline{A} \cup B = \{-5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e) Es wird als nächstes die Vereinigung der Mengen A und C gebildet:

$$A \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 6\}$$

f) Danach wird die Vereinigung der Mengen B und C gebildet:

$$B \cup C = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

g) Zuerst wird die Vereinigung der Mengen A und B gebildet:

$$(A \cup B) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Danach wird die Vereinigung aus dem obigen Ergebnis mit der Menge C gebildet:

$$(A \cup B) \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

h) Es wird zunächst der Durchschnitt aus A und B gebildet:

$$(A \cap B) = \{2\}$$

Danach wird der Durchschnitt mit C gebildet:

$$(A \cap B) \cap C = \{2\}\,.$$

i) Die Komplementärmenge wurde bereits weiter oben bestimmt. Es wird jetzt der Durchschnitt gebildet:

$$\overline{A} \cap B = \{3, 4, 5\}$$

j) Die Komplementärmengen sind bereits alle oben bestimmt worden. Es wird zunächst der Durchschnitt gebildet:

$$(\overline{A} \cap \overline{B}) = \{-5, -4, -3, -2, 6\}$$

Dann wird die Vereinigung mit $\overline{C}$ gebildet:

$$(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{C} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 3, 4, 5, 6\}$$

k) Es wird zunächst der Durchschnitt von A und B gebildet:

$$A \cap B = \{2\}$$

Danach wird die Vereinigung mit C gebildet:

$$(A \cap B) \cup C = \{0, 2, 6\}$$

Es wird darauffolgend die Komplementärmenge des obigen Ergebnisses gebildet:

$$\overline{(A \cap B) \cup C} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 3, 4, 5\}$$

3. Beispiel zur Mengenlehre

BEISPIEL

Man zeige:

$$X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$$

Es werden die Elemente x der linken Seite betrachtet und diese dann so umgeformt, dass folgende rechte Seite resultiert:

$$x \in X \backslash (A \cup B)$$

Die Vereinigung $(A \cup B)$ bedeutet, dass alle Elemente sowohl in A als auch in B als auch in beiden vorkommen. Bildet man demnach zuerst die Vereinigung, bedeutet dies:

und damit

$x \in A \vee x \in B$ (Elemente in A oder B)

Das "Oder" $\vee$ ist **nicht-ausschließend** zu verstehen: Die Vereinigung umfasst auch die Elemente, die in **beiden** Mengen enthalten sind.

METHODE

Es ist die Differenz aus X und der Vereinigung von $(A \cup B)$ zu bilden. Das bedeutet, alle Elemente die in X vorkommen, aber nicht in der Vereinigung von A und B. Das kann man demnach auch schreiben zu:

$$x \in X \wedge x \notin (A \cup B)$$

und für:

$$x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$

Das bedeutet demnach, dass x ein Element von X und Nichtelement von A oder B ist. x ist also das Element aus X aber eben nicht aus A oder B oder beiden.

$$(x \in X \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge x \notin B)$$

Das wiederum gibt die Differenz wieder:

$$(x \in X \backslash A) \vee (x \in X \backslash B)$$

x ist Element von X und nicht von A ODER x ist Element von X und nicht von B. Dieses ODER entspricht der Vereinigung:

$$(x \in X \backslash A) \cup (x \in X \backslash B)$$

Zahlenbeispiel zu dieser Aufgabe:

BEISPIEL

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

$X \backslash (A \cup B)$:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$X \backslash (A \cup B) = \{6, 7\}$.

$(X \backslash A) \cap (X \backslash B)$:

$X \backslash A = \{4, 5, 6, 7\}$

$X \backslash B = \{1, 2, 6, 7\}$

$(X \backslash A) \cap (X \backslash B) = \{6, 7\}$

1.2.4 Rechenregel für Mengen

1.2.4.1 Kommutativgesetz

In der Mengenlehre sind die *Vereinigung* und der *Durchschnitt* kommutative Operationen. Für die Mengen A und B gilt somit

METHODE

$A \cup B = B \cup A$ **Vereinigung**

$A \cap B = B \cap A$ **Durchschnitt**

Das bedeutet verbal ausgedrückt, dass die Reihenfolge bei der Bildung der Vereinigung bzw. des Durchschnitts von Mengen unerheblich ist. Es resultiert immer dasselbe Ergebnis.

$A \cup B$ stellt die Menge aller Elemente dar, die entweder in A oder in B oder in beiden vorkommen. Entsprechend gilt auch $B \cup A$. Hierbei handelt es sich um alle Elemente aus A und B.

$A \cap B$ bedeutet die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B vorkommen. Das bedeutet, dass auch $B \cap A$ gilt. Hierbei handelt es sich um die Schnittmenge von A und B.

BEISPIEL

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Der **Durchschnitt** der Menge $A \cap B$ ist dabei gleich $B \cap A$. Es handelt sich also um eine kommutative Operation:

Die **Vereinigung** der Mengen $A \cup B$ ist gleich $B \cup A$:

1.2.4.2 Assoziativgesetz

Das **Assoziativgesetz** besagt, dass bei der Verkettung von mathematischen Operationen, diese in jeder beliebigen Reihenfolge durchgeführt werden können und das Ergebnis immer gleich ist. Im Folgenden wird dies anhand des Durchschnitts und der Vereinigung von drei Mengen veranschaulicht

Durchschnitt von drei Mengen

BEISPIEL

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ und $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Wie kann die Schnittmenge $A \cap B \cap C$ gebildet werden?

1. Möglichkeit: $(A \cap B) \cap C$

Es wird zuerst die Schnittmenge von A und B ermittelt und anschließend die Schnittmenge aus diesem Ergebnis mit der Menge C:

$$(A \cap B) = \{3, 4\}$$

$$(A \cap B) \cap C = \{4\}$$

2. Möglichkeit: $(B \cap C) \cap A$

Es wird zuerst die Schnittmenge von B und C ermittelt und dann die Schnittmenge aus diesem Ergebnis mit der Menge A :

$$(B \cap C) = \{4, 5, 6\}$$

$$(B \cap C) \cap A = \{4\}$$

Es existieren noch die 4 weiteren Möglichkeiten , die alle zum gleichen Ergebnis führen.

Vereinigung von drei Mengen

BEISPIEL

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ und $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Wie kann die Vereinigung $A \cup B \cup C$ gebildet werden?

1. Möglichkeit: $(A \cup B) \cup C$

Es wird zuerst die Vereinigung von A und B ermittelt und dann die Vereinigung aus diesem Ergebnis mit der Menge C :

$$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

2. Möglichkeit: $(B \cup C) \cup A$

Es wird zuerst die Vereinigung von B und C ermittelt und dann die Vereinigung aus diesem Ergebnis mit der Menge A :

$$(B \cup C) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$(B \cup C) \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Es existieren noch die 4 weiteren Möglichkeiten , die alle zum gleichen Ergebnis führen.

1.2.4.3 Distributivgesetz

Das **Distributivgesetz** zeigt die Möglichkeiten auf, die Verkettung von Operationen anders oder vereinfacht darzustellen, um zum gleichen Ergebnis zu gelangen. Im Weiteren erläutern wir dir das Distributivgesetzt anhand von Durchschnitt (Schnittmenge), Vereinigung und Differenz von Mengen.

Schnittmenge und Vereinigung

$$A \cap (B \cup C) \longleftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

BEISPIEL

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ und $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Möglichkeit: $A \cap (B \cup C)$

Die Vereinigung von B und C bilden und daraus dann den Durchschnitt (also die Schnittmenge) mit A.

Vereinigung

Schnittmenge

2. Möglichkeit: $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Den Durchschnitt von A und B sowie A und C bilden und aus diesen dann die Vereinigung.

Schnittmenge

Schnittmenge

Vereinigung

Vereinigung und Schnittmenge

$A \cup (B \cap C) \longleftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$

BEISPIEL

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ und $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Möglichkeit: $A \cup (B \cap C)$

Den Durchschnitt von B und C bilden und das Ergebnis dann mit A vereinigen.

$(B \cap C) = \{4, 5, 6\}$ *Schnittmenge*

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *Vereinigung*

2. Möglichkeit: $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Die Vereinigung von A und B sowie A und C bilden und aus diesen dann den Durchschnitt bilden.

$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *Vereinigung*

$(A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *Vereinigung*

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *Schnittmenge*

Schnittmenge und Differenz

$A \cap (B \backslash C) \longleftrightarrow (A \cap B) \backslash (A \cap C)$

BEISPIEL

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ und $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Möglichkeit: $A \cap (B \backslash C)$

Die Differenz von B und C bilden und dann den Durchschnitt mit A bilden.

$(B \backslash C) = \{3\}$ *Differenz (alle Elemente die in B aber nicht in C enthalten sind)*

Schnittmenge

2. Möglichkeit: $(A \cap B) \backslash (A \cap C)$

Den Durchschnitt von A und B sowie A und C bilden und dann die Differenz aus beiden bilden.

Schnittmenge

Schnittmenge

Differenz

1.2.4.4 Regel von de Morgan

Im Folgenden stellen wir dir die zwei **de Morganschen Regeln** vor und verdeutlichen diese anhand von Beispielen. Die Regeln sind nach dem Mathematiker Augustus De Morgan benannt.

De Morgansche Regel: Vereinigung und Durchschnitt

METHODE

$$\overline{(A \cup B)} \longleftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$$

Der Strich über der Menge bedeutet, dass diejenigen Elemente betrachtet werden, die **NICHT** enthalten sind. Dies entspricht der Komplementärmenge, welche wir bereits im Abschnitt *Komplementärmenge* eingeführt haben.

BEISPIEL

Ausgehend von einer Obermenge X stellen die Mengen A und B Teilmengen dieser Obermenge X dar.

X sei $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

1. Möglichkeit: $\overline{(A \cup B)}$ Vereinigung

Es wird erst die Vereinigung von A und B gebildet.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Es wird nun die Grundmenge X betrachtet und alle Elemente ausgewählt, die nicht in $A \cup B$ enthalten sind:

2. Möglichkeit: $\overline{A} \cap \overline{B}$

Betrachtung aller Elemente in X die nicht in A enthalten sind und die nicht in B enthalten sind. Danach wird aus diesen Elementen der Durchschnitt gebildet.

$\overline{A} = \{0, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \leftarrow$ zeigt Elemente, die nicht in A enthalten sind!

$\overline{B} = \{0, 1, 2, 7, 8, 9, 10\} \leftarrow$ zeigt Elemente, die nicht in B enthalten sind!

Es ist deutlich zu erkennen, dass sowohl $\overline{(A \cup B)}$ als auch $\overline{A} \cap \overline{B}$ zum gleichen Ergebnis $\{0, 7, 8, 9, 10\}$ führt.

De Morgansche Regel: Durchschnitt und Vereinigung

METHODE

$$\overline{A \cap B} \longleftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B}$$

Es wird im Folgenden gezeigt, wie diese Regel angewandt wird.

BEISPIEL

Ausgehend von einer Obermenge X stellen die Mengen A und B Teilmengen dieser Obermenge X dar.

X sei $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

1. Möglichkeit: $\overline{A \cap B}$ Schnittmenge

Zunächst wird der Durchschnitt aus A und B gebildet.

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

Es werden nun alle Elemente der Obermenge X betrachtet, welche nicht in der obigen Schnittmenge enthalten sind:

2. Möglichkeit: $\overline{A} \cup \overline{B}$

Es werden wieder alle Elemente der Obermenge X betrachtet, die nicht in A enthalten sind und alle Elemente, die nicht in B enthalten sind. Aus diesen wird dann die Vereinigung gebildet.

$\overline{A} = \{0, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \leftarrow$ Elemente, die nicht in A enthalten sind.

$\overline{B} = \{0, 1, 2, 7, 8, 9, 10\} \leftarrow$ Elemente, die nicht in B enthalten sind.

Es ist deutlich zu erkennen, dass sowohl $\overline{A \cap B}$ als auch $\overline{A} \cup \overline{B}$ zum gleichen Ergebnis $\{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ führen.

1.3 Reelle Zahlen

Reelle Zahlen umfassen sowohl die rationalen Zahlen (als Bruch darstellbar; endlich oder periodisch) sowie die irrationalen Zahlen (nicht als Bruch darstellbar; unendlich viele, nicht periodische Nachkommastellen).

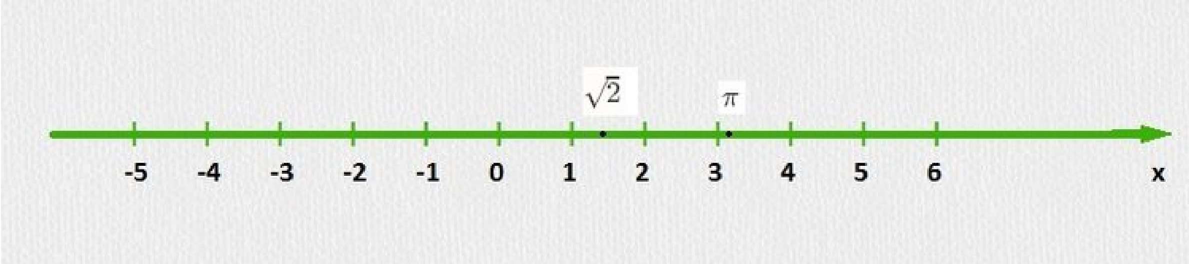
Also $\mathbb{R}$ = $\mathbb{Q}$ + $\mathbb{I}$

Die irrationalen Zahlen werden häufig geschrieben zu:

$\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (reelle Zahlen ohne rationale Zahlen).

BEISPIEL

Bekannte Beispiele für **irrationale Zahlen** sind $\sqrt{2} = 1,4142...$ und die Kreiszahl $\pi = 3,1415...$ denn diese sind nicht als Bruch darstellbar und haben unendlich viele, nicht periodische Nachkommastellen. Hingegen ist $\frac{1}{3}$ als Bruch darstellbar, periodisch und gehört deswegen den **rationalen Zahlen** an.



Wie du in der obigen Abbildung siehst, liegen reelle Zahlen immer als endlicher bzw. unendlicher Dezimalbruch zwischen zwei ganzen Zahlen vor.

MERKE

Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegen unendlich viele weitere reelle Zahlen.

1.3.1 Bezeichnung reeller Zahlen

Reelle Zahlen können bestimmten Beschränkungen (Restriktionen) unterliegen. Sie haben deshalb zusätzliche Bezeichnungen. In der folgenden Tabelle kannst du diese sehen:

Reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist eine rationale oder irrationale Zahl}\}$
reelle Zahlen ohne Null	$\mathbb{R}^* = \{x \mid x \neq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$
positive reelle Zahlen (inkl. Null)	
positive reelle Zahlen (ohne Null)	$\mathbb{R}^*_+ = \{x \mid x > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$
negative reelle Zahlen (inkl. Null)	$\mathbb{R}_- = \{x \mid \leq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$
negative reelle Zahlen (ohne Null)	

1.3.2 Ungleichungen

MERKE

Eine Ungleichung stellt in der Mathematik einen Größenvergleich zwischen zwei oder mehreren Werten dar. Eine Ungleichung besagt nicht, dass zwei Werte **gleich** sind, sondern dass ein Wert **größer** oder **kleiner** (bzw. **größer-gleich** oder **kleiner-gleich**) als ein anderer Wert ist.

Hierbei unterscheidet man im Weiteren die strikte Ungleichung von der nicht-strikten Ungleichung.

Strikte Ungleichung

der Wert x ist kleiner als der Wert y .

oder $x > y \rightarrow$ der Wert x ist größer als der Wert y .

BEISPIEL

Gegeben sei folgende strikte Ungleichung mit einer Restriktion: $x > y | y = 3$

In diesem Fall kann x jeden beliebigen Wert annehmen, so lange der Wert größer als $x > 3$ ist, da $y = 3$.

Nicht strikte Ungleichung

der Wert x ist kleiner oder gleich dem Wert y .

oder $x \geq y \rightarrow$ der Wert x ist größer oder gleich dem Wert y .

BEISPIEL

Gegeben sei folgende nicht-strikte Ungleichung mit einer Restriktion: $y \geq x | x = 2$.

In diesem Fall kann y jeden beliebigen Wert annehmen der größer oder gleich dem Wert 2 ist.

Ungleichungen für mehrere Werte

1) aus $x \leq y \leq z$ folgt $x \leq z$

2) aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$

3) aus $x \leq y$ und $z \geq 0$ folgt

HINWEIS

Im folgenden Abschnitt werden wir dir Anwendungsbeispiele zur Lösung von einfachen Ungleichungen, Bruchungleichungen und Betragsungleichungen vorstellen.

1.3.2.1 Beispiele: Betragsungleichungen, Bruchungleichungen

In diesem Abschnitt zeigen wir dir Beispiele zur Lösung von einfachen Ungleichungen, Betragsungleichungen und Bruchungleichungen auf.

MERKE

WICHTIG: Bei der **Multiplikation/Division** einer Ungleichung mit einer **negativen Größe**, kehrt sich das Ungleichheitszeichen um.

Anwendungsbeispiele: Einfache Ungleichungen

BEISPIEL

Gegeben sei die folgende Ungleichung:

$$-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x \leq -\frac{4}{3}$$

Bestimme bitte alle reellen Lösungen dieser Ungleichung!

Die Ungleichung wird unter Berücksichtigung des Ungleichheitszeichens nach x umgestellt:

$$-\frac{5}{6}x \leq -\frac{4}{3}$$

Nun lösen wir nach x auf. Da bei der Auflösung nach x die gesamte Gleichung mit $-\frac{6}{5}$ multipliziert wird, kehrt sich das Ungleichheitszeichen um:

$$x \geq \frac{8}{5}$$

$$\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{8}{5}\}$$

BEISPIEL

Gegeben sei die folgende Ungleichung:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x \leq -\frac{4}{3}$$

Bestimme bitte alle reellen Lösungen dieser Ungleichung!

Die Ungleichung wird unter Berücksichtigung des Ungleichheitszeichens nach x umgestellt:

$$\frac{5}{6}x \leq -\frac{4}{3}$$

Nun lösen wir nach x auf.

$$x \leq -\frac{8}{5}$$

$$\{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{8}{5}\}$$

BEISPIEL

Gegeben sei die folgenden Ungleichung:

$$-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x \leq \frac{4}{3}$$

Bestimme bitte alle reellen Lösungen dieser Ungleichung!

Die Ungleichung wird unter Berücksichtigung des Ungleichheitszeichens nach x umgestellt:

$$-\frac{5}{6}x \leq \frac{4}{3}$$

Nun lösen wir nach x auf. Da bei der Auflösung nach x die gesamte Gleichung mit $-\frac{6}{5}$ multipliziert wird, kehrt sich das Ungleichheitszeichen um:

$$x \geq -\frac{8}{5}$$

$$\{x \in \mathbb{R} | x \geq -\frac{8}{5}\}$$

Anwendungsbeispiele: Bruchungleichungen

BEISPIEL

Gegeben sei die folgende Ungleichung:

$$\frac{3x+1}{x-2} < 2$$

Bestimme bitte alle reellen Lösungen dieser Ungleichung!

Zunächst wird der Nenner betrachtet. Da hier bei $x = 2$ dieser Null wird und durch Null nicht geteilt werden darf, muss hier $x = 2$ als Lösung ausgeschlossen werden:

$$\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$$

Es wird als nächstes der Nenner auf die andere Seite gebracht. Hierbei muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden, da der Nenner positiv oder negativ werden kann.

1.) Fallunterscheidung für $x < 2$:

Der Nenner wird negativ. Das bedeutet, dass bei der Muliplikation mit dem Nenner das Ungleichheitszeichen umgedreht werden muss.

$$\frac{3x+1}{x-2} < 2 \qquad |$$

$$3x + 1 > 2(x-2)$$

Auflösen nach x ergibt:

$$3x + 1 > 2x - 4 \quad | -2x$$

$$x + 1 > -4 \quad | -1$$

$$x > -5$$

Es resultiert, dass x > -5 ist. Wir haben in der Fallunterscheidung x < 2 gegeben. Wir wissen nun also, dass -5 die untere Grenze dieser Fallunterscheidung ist und 2 die obere Grenze:

$$\{x \in \mathbb{R} | -5 < x < 2\}$$

2.) Fallunterscheidung für $x > 2$:

Der Nenner wird positiv. Das bedeutet, dass bei der Muliplikation mit dem Nenner das Ungleichheitszeichen nicht umgedreht werden muss.

$$\frac{3x+1}{x-2} < 2 \qquad |$$

$$3x + 1 < 2(x-2)$$

Auflösen nach x ergibt:

$$3x + 1 < 2x - 4 \quad | -2x$$

$$x + 1 < -4 \qquad | -1$$

$$x < -5$$

Die Fallunterscheidung besagt, dass x größer als 2 ist. Im Ergebnis erhalten wir wir x ist kleiner als -5. Dies ist ein Widerspruch. Diese Ungleichung ist für $x > 2$ nicht erfüllbar. Werden Werte größer als 2 eingesetzt, so resultiert niemals ein Wert kleiner als -5. Diese Lösungsmenge ist **leer.**

$L = \{\}$ leere Menge

BEISPIEL

Gegeben sei die folgende Ungleichung:

$$\frac{5x+2}{x-4} < \frac{4}{5}$$

Bestimme bitte alle reellen Lösungen dieser Ungleichung!

$$\{x \in \mathbb{R} | x \neq 4\}$$

Es wird als nächstes der Nenner auf die andere Seite gebracht. Hierbei muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden, da der Nenner negativ und positiv werden kann.

1.) Fallunterscheidung für $x < 4$.

Der Nenner wird negativ. Bei der Multiplikation muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden:

$$\frac{5x+2}{x-4} < \frac{4}{5} \quad | \cdot (x-4)$$

$$5x+2 > \frac{4}{5}(x-4)$$

Nach x auflösen:

$$5x+2 > \frac{4}{5}x - \frac{16}{5} \quad | -\frac{4}{5}x$$

$$| -2$$

$$\frac{21}{5}x > -\frac{26}{5} \qquad | \cdot \frac{5}{21}$$

$$x > -\frac{26}{21}$$

$$x > -1,238$$

Die Ungleichung kann für $x < 4$ erfüllt werden:

$$\{x \in \mathbb{R} | -1,238 < x < 4\}$$

2.) Fallunterscheidung für $x > 4$

Der Nenner wird positiv. Bei der Multiplikation muss das Ungleichheitszeichen nicht umgedreht werden:

$$\frac{5x+2}{x-4} < \frac{4}{5} \quad | \cdot (x-4)$$

$$5x+2 < \frac{4}{5}(x-4)$$

Nach x auflösen:

$$5x+2 < \frac{4}{5}x - \frac{16}{5} \quad | -\frac{4}{5}x$$

$$\frac{21}{5}x + 2 < -\frac{16}{5} \quad | -2$$

$$\frac{21}{5}x < -\frac{26}{5} \qquad | \cdot \frac{5}{21}$$

$$x < -\frac{26}{21}$$

$$x < -1,238$$

Diese Ungleichung ist für $x > 4$ nicht erfüllbar. Werden Werte größer als 4 eingesetzt, so resultiert niemals ein Wert kleiner als -1,238. Diese Lösungsmenge ist leer.

BEISPIEL

Gegeben sei die folgende Bruchungleichung:

$$\frac{2x+6}{x+1} > \frac{6x-2}{2x+2}$$

Bestimme bitte alle reellen Lösungen dieser Ungleichung!

Es gilt zunächst, dass bei $x = -1$ beide Nenner den Wert null annehmen, weshalb:

$$\{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$$

Beide Brüche werden als nächstes auf eine Seite gebracht:

$$\frac{2x+6}{x+1} - \frac{6x-2}{2x+2} > 0$$

Nun klammern wir beim 2. Bruch die Zahl 2 im Nenner und Zähler aus. Ziel ist das Kürzen der 2 im Nenner:

$$\frac{2x+6}{x+1} - \frac{2(3x-1)}{2(x+1)} > 0$$

Kürzen der 2:

$$\frac{2x+6}{x+1} - \frac{3x-1}{x+1} > 0$$

Es sind beide Nenner gleichnamig. Deswegen können die Zähler zusammengezogen werden:

$$\frac{2x+6-(3x-1)}{x+1} > 0$$

$$\frac{2x+6-3x+1}{x+1} > 0$$

$$\frac{7-x}{x+1} > 0$$

Fallunterscheidung vornehmen! Bei $x = -1$ wird der Nenner Null. Deshalb wird nun die Fallunterscheidung vorgenommen.

1.) Auflösen nach x für den Fall $x > -1$: Der Nenner wird positiv, das Ungleichheitszeichen muss nicht umgedreht werden.

$$\frac{7-x}{x+1} > 0 \mid \cdot(x+1)$$

$$7-x > 0$$

$$7 > x$$

Hier kann eine Lösungsmenge angegeben werden. x soll größer als -1 , aber kleiner als 7 sein:

$$\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 7\}$$

2.) Auflösen nach x für den Fall $x < -1$: Der Nenner wird negativ, das Ungleichheitszeichen muss umgedreht werden.

$$\frac{7-x}{x+1} > 0 \mid \cdot -(x+1)$$

$$7-x < 0$$

$$7 < x$$

Hier soll x kleiner als -1 und gleichzeitig größer als 7 sein. Das ist nicht möglich, die Lösungsmenge ist hier leer.

Anwendungsbeispiele: Betragsungleichungen

BEISPIEL

Gegeben sei die folgende Ungleichung:

$$4|3-x| - |x+5| \leq 3$$

Bestimme bitte alle reellen Lösungen dieser Ungleichung!

$$4|3-x| - |x+5| \leq 3$$

Der Betragsterm $|3-x|$ wechselt bei $x = 3$ (auflösen nach x) sein Vorzeichen. Das bedeutet also bei $x > 3$ wird der Betragsterm negativ und bei $x \leq 3$ positiv.

EXPERTENTIPP

Wird der **Betragsterm zu Null**, so gehen wir auch davon aus, dass dieser positiv ist. Deswegen wird bei der Fallunterscheidung $x \leq 3$ das $\leq$ -Zeichen verwendet, weil die 3 mit eingeschlossen wird.

Der Betragsterm $|x+5|$ wechselt bei $x = -5$ sein Vorzeichen. Das bedeutet, dass bei $x \geq -5$ der Betragsterm positiv wird und bei $x < -5$ negativ.

Es werden nun die folgenden Fälle betrachtet:

1. Fall: $x < -5$

2. Fall: $-5 \leq x \leq 3$

3. Fall: $x > 3$

1.Fall: $x < -5$

$$4(3-x) - (-(x+5)) \leq 3$$

Bei $x < -5$ wird der 1. Betragsterm positiv und der 2. Betragsterm negativ.

$$12 - 4x + x + 5 \leq 3$$

$$17 - 3x \leq 3$$

$$-3x \leq -14$$

Da die gesamte Ungleichung beim Auflösung nach x mit einem negativen Wert multipliziert wird, muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

$$x \geq \frac{14}{3}$$

Da für $x < -5$ die Ungleichung nicht erfüllt werden kann, ist die Lösungsmenge leer.

2. Fall: $-5 \leq x \leq 3$

$$4(3-x) - (x+5) \leq 3$$

Bei $-5 \leq x \leq 3$ wird der 1. Betragsterm positiv und der 2. Betragsterm positiv.

$$12 - 4x - x - 5 \leq 3$$

$$7 - 5x \leq 3$$

$$-5x \leq -4$$

Da die gesamte Ungleichung beim Auflösung nach x mit einem negativen Wert multipliziert wird, muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

$$x \geq \frac{4}{5} = 0,8$$

Unter der Voraussetzung $-5 \leq x \leq 3$ erhält man als Teillösung:

3. Fall: $x > 3$

$$4(-(3-x)) - (x+5) \leq 3$$

Bei wird der 1. Betragsterm negativ und der 2. Betragsterm positiv.

$$4(-3+x) - x - 5 \leq 3$$

$$-12 + 4x - x - 5 \leq 3$$

$$-17 + 3x \leq 3$$

$$3x \leq 20$$

Da ein positives Vorzeichen vor dem x steht, darf beim Auflösen nach x das Ungleichheitszeichen nicht umgedreht werden.

$$x \leq \frac{20}{3}$$

Es existiert auch hier eine Lösung, da und $x \leq \frac{20}{3} = 6,67$ eine Lösung angeben:

Wir können beide Teillösungen zusammenfassen, da die erste Teillösung 3 einschließt und die 2. Teillösung bei größer 3 beginnt:

$$L_1 \cup L_2 = [0,8|3] \cup (3|6,67] = [0,8|6,67]$$

BEISPIEL

Gegeben sei die folgende Ungleichung:

$$|x+5| - |x-2| \leq |x|$$

Bestimme alle reellen Lösungen dieser Ungleichung!

$$|x+5| - |x-2| \leq |x|$$

Der Betragsterm $|x+5|$ wechselt bei (auflösen nach x) $x = -5$ sein Vorzeichen. Das bedeutet also bei $x \geq -5$ wird der Betragsterm positiv und bei $x < -5$ negativ.

Der Betragsterm $|x-2|$ wechselt bei $x = 2$ sein Vorzeichen. Das bedeutet, dass bei $x \geq 2$ der Betragsterm positiv wird und bei $x < 2$ negativ.

Der Betragsterm $|x|$ wechselt bei $x = 0$ sein Vorzeichen. Das bedeutet, dass bei $x \geq 0$ der Betragsterm positiv wird und bei $x < 0$ negativ.

Es werden nun die folgenden Fälle unterschieden:

1. Fall: $x < -5$

2. Fall: $-5 \leq x < 0$

3. Fall: $0 \leq x < 2$

4. Fall: $x \geq 2$

1.Fall: $x < -5$

$$-(x+5) - (-(x-2)) \leq -x$$

Alle drei Betragsterme werden für $x < -5$ negativ.

$$-x - 5 - (-x+2) \leq -x$$

$$-x - 5 + x - 2 \leq -x$$

$$-7 \leq -x$$

$$7 \geq x$$

Da hier kein Widerspruch besteht und keine Untergrenze resultiert, kann x Werte bis Minus unendlich annehmen.

Es ergibt sich die Teillösung:

$$\{x \in \mathbb{R} | -\infty < x < -5\}$$

2.Fall: $-5 \leq x < 0$

$$(x+5) - (-(x-2)) \leq -x$$

Der erste Term wird positiv und die beiden anderen Terme negativ.

$$x + 5 + x - 2 \leq -x$$

$$x \leq -1$$

Es ergibt sich die Teillösung:

$$\{x \in \mathbb{R} | -5 \leq x \leq -1\}$$

3. Fall: $0 \leq x < 2$

$$(x+5) - (-(x-2)) \leq x$$

Der erste Term wird positiv, der 2. Term negativ und der 3. Term positiv.

$x \leq -3$

Da die Ungleichung für $0 \leq x < 2$ nicht erfüllt werden kann, ist die Lösungsmenge leer.

4. Fall: $x \geq 2$

$(x+5) - (x-2) \leq x$

Alle Terme werden positiv.

$7 \leq x$

Es ergibt sich die Teillösung:

$\{x \in \mathbb{R} | 7 \leq x < \infty\}$

1.3.3 Intervalle

METHODE

Intervalle geben immer einen Bereich auf dem Zahlenstrahl an. Man unterscheidet folgende Intervalle:

- abgeschlossenes Intervall
- offenes Intervall
- halboffenes Intervall
- unendliches Intervall

Abgeschlossenes Intervall

Das abgeschlossene Intervall $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ beinhaltet a und b als Randpunkte. Das bedeutet, dass sowohl a als auch b zu dem Intervall gehören.

BEISPIEL

Zu dem Intervall $[4, 5]$ gehören die Werte 4 und 5 sowie alle Werte die zwischen 4 und 5 liegen.

Offenes Intervall

Das offene Intervall $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ beinhaltet die Randpunkt a und b nicht. Das bedeutet, dass alle Werte zwischen a und b zum Intervall gehören, a und b selbst jedoch nicht.

BEISPIEL

Zu dem Intervall $(4, 5)$ gehören die Werte 4 und 5 **nicht**, jedoch alle Werte die zwischen 4 und 5 liegen.

Halboffenes Intervall

Das halboffene Intervall $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ beinhaltet nur den Randpunkt b, hingegen beinhaltet $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ nur den Randpunkt a.

BEISPIEL

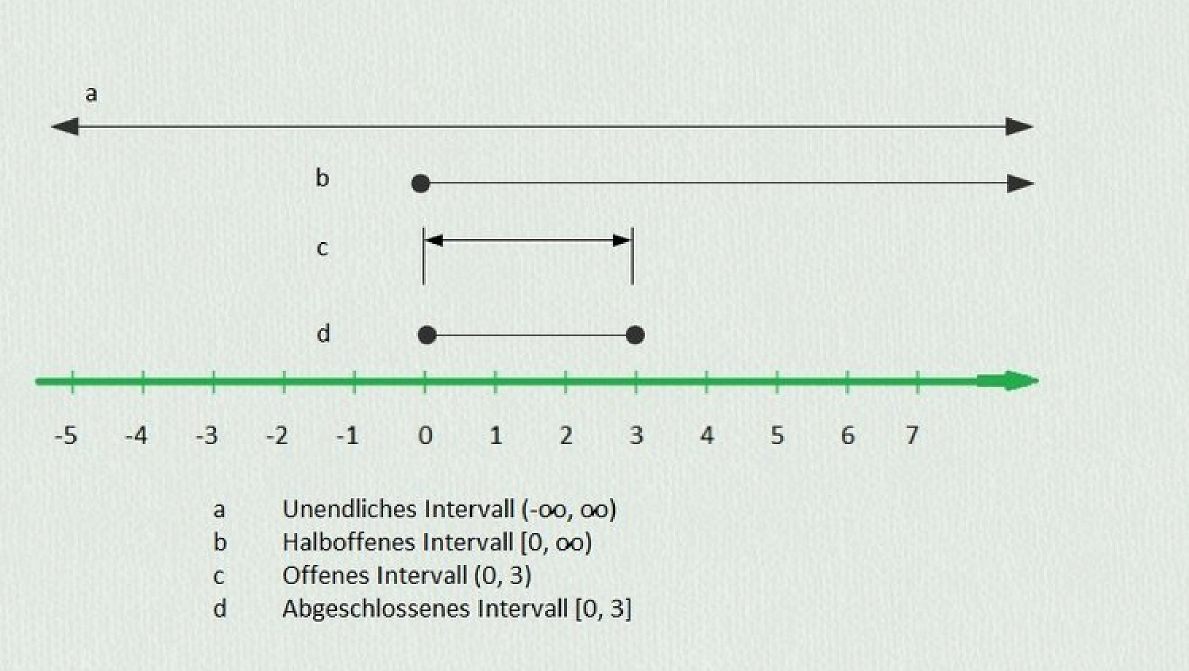
Zu dem Intervall $(4, 5]$ gehören der Wert 5 sowie alle Werte die zwischen 4 und 5 liegen, jedoch nicht der Wert 4.

Unendliches Intervall

Das unendliche Intervall sieht folgendermaßen aus:

$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$ dieses Intervall hat eine geschlossene rechte Grenze und eine linke unendliche Grenze.

dieses Intervall hat eine geschlossene linke Grenze und eine rechte unendliche Grenze.



Intervallarten

1.3.4 Schranken (Supremum, Infimum)

Ist eine Menge nach oben oder nach unten beschränkt, so existiert eine obere oder eine untere Schranke.

Obere und untere Schranke

Eine Menge M reeller Zahlen ist nach oben beschränkt, wenn $M \subseteq (-\infty, b]$ mit $b \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist b eine **obere Schranke** von M.

Eine Menge M reeller Zahlen ist nach unten beschränkt, wenn $M \subseteq [a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist a eine **untere Schranke** von M.

Eine Menge M reeller Zahlen ist beschränkt, wenn sie eine untere Schranke a und eine obere Schranke b besitzt. Es gilt $M \subseteq [a, b]$.

Supremum

Das **Supremum** einer Menge M ist ein Element, welches *oberhalb* (jenseits) aller anderen Elemente in M liegt. Das bedeutet, dass das Supremum nicht nur das größte Element unter den anderen Elementen sein muss, sondern auch jenseits der Menge M liegen kann. Das Supremum ist dabei das kleinste Element oberhalb der anderen Elemente. Das Supremum ist also die kleinste obere Schranke einer Menge.

METHODE

Definition

Eine Zahl s heißt **kleinste obere Schranke** oder Supremum von $M \longrightarrow s = sup(M)$,

(i) wenn s eine obere Schranke von M ist und

(ii) wenn z ebenfalls eine obere Schranke von M ist und es gilt $s \leq z$.

BEISPIEL

Gegeben sei die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} : x < 4\} \subseteq \mathbb{R}$. Was ist das Supremum von M ?

Das Supremum von M ist in diesem Beispiel $sup(M) = 4$. Die 4 ist eine obere Schranke von M, da diese größer oder gleich (in diesem Fall sogar größer) als jedes Element von M ist. Die 4 liegt also oberhalb (jenseits) aller anderen Elemente. Eine weitere obere Schranke wäre die Zahl 6. Allerdings suchen wir die **kleinste** obere Schranke. Daher ist die 4 die kleinste obere Schranke von M und somit das Supremum.

MERKE

Ist M nach oben beschränkt, so wird die kleinste obere Schranke s als Supremum von M bezeichnet.

$\Longrightarrow s = sup(M)$

Infimum

Analog gilt nun für den Begriff **Infimum**, dass ein Infimum nichts anderes ist als die **größte untere Schranke**. Es handelt sich also um das größte Element, welches unterhalb aller anderen Elemente in M liegt.

METHODE

Definition

Eine Zahl s heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von ,

(i) wenn s ist eine untere Schranke von M und

(ii) wenn z ebenfalls eine untere Schranke von M ist und es gilt $s \geq z$.

BEISPIEL

Gegeben sei die Menge $M \subseteq (3, 4]$. Was ist das Infimum und Supremum von M ?

Das Infimum von M ist $inf(M) = 3$. Dieser Wert liegt unterhalb (und in diesem Fall auch außerhalb) der anderen Elemente und stellt den größten unteren Wert dar und ist damit die größte untere Schranke (hingegen wäre 2 auch eine untere Schranken, aber eben nicht die **größte** untere Schranke). Das Supremum von M ist $sup(M) = 4$. Dieser Wert liegt oberhalb aller anderen Elemente (in diesem Fall aber noch innerhalb) und stellt den kleinsten oberen Wert dar und ist damit die kleinste obere Schranke von M .

MERKE

Ist M nach unten beschränkt, so wird die größte untere Schranke s als Infimum von M bezeichnet.

$$\Longrightarrow s = inf(M)$$

1.3.5 Beträge

METHODE

Definition

Der Betrag $|x|$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert durch:

Die Werte zwischen den Betragsstrichen können sowohl positiv als auch negativ sein. Die Betragsstriche bedeuten mathematisch nichts anderes als die Aufforderung, bei der Zahl oder dem Term schlicht die Vorzeichen nicht zu berücksichtigen.

Der Betrag wird immer dann angewendet, wenn es für ein Ergebnis nicht darauf ankommt, ob dieses positiv oder negativ ist. Ein Beispiel für die Berechnung mit Beträgen sind statistische Untersuchungen über Abweichungen eines bestimmten Wertes. Dabei ist es häufig nicht wichtig, ob die Abweichung positiv oder negativ ist, es kommt nur auf die absolute Größe der Abweichung an.

BEISPIEL

Ein Bäckereibetrieb hat seit längerem das Problem, dass die Brötchen nicht richtig gebacken werden. Deshalb wird an einem Tag alle 60 Minuten die Temperatur der Öfen gemessen. Die optimale Temperatur liegt bei . Folgende Werte sind innerhalb von 4 Stunden ermittelt worden: und . Wie hoch ist die mittlere Abweichung vom optimalen Wert?

Die Abweichungen vom optimalen Wert betragen: $-20, -40, 20$ und 40. Würden bei der Ermittlung des Mittelwertes die Vorzeichen berücksichtigt, so läge dieser bei

$$\frac{-20+(-40)+20+40}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

und es würde keine Abweichung resultieren. Demnach muss die negative Abweichung vom optimalen Wert als Betrag gesehen werden: $\frac{|-20|+|-40|+20+40}{4} = \frac{120}{4} = 30$. Die mittlere Abweichung beträgt also vom optimalen Wert.

MERKE

Der Betrag einer Zahl oder eines Ausdrucks ist stets positiv.

Rechenregeln

Aus der obigen Definition ergeben sich **Rechenregeln**, die im Folgenden aufgeführt sind:

(a) $-|a| \leq a \leq |a|$

(b) $|-a| = |a|$

(c) $|ab| = |a||b|$

(d) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ wenn $b \neq 0$

(e)

Dreiecksungleichung

Aus $-|a| \leq a \leq |a|$ und $-|b| \leq b \leq |b|$

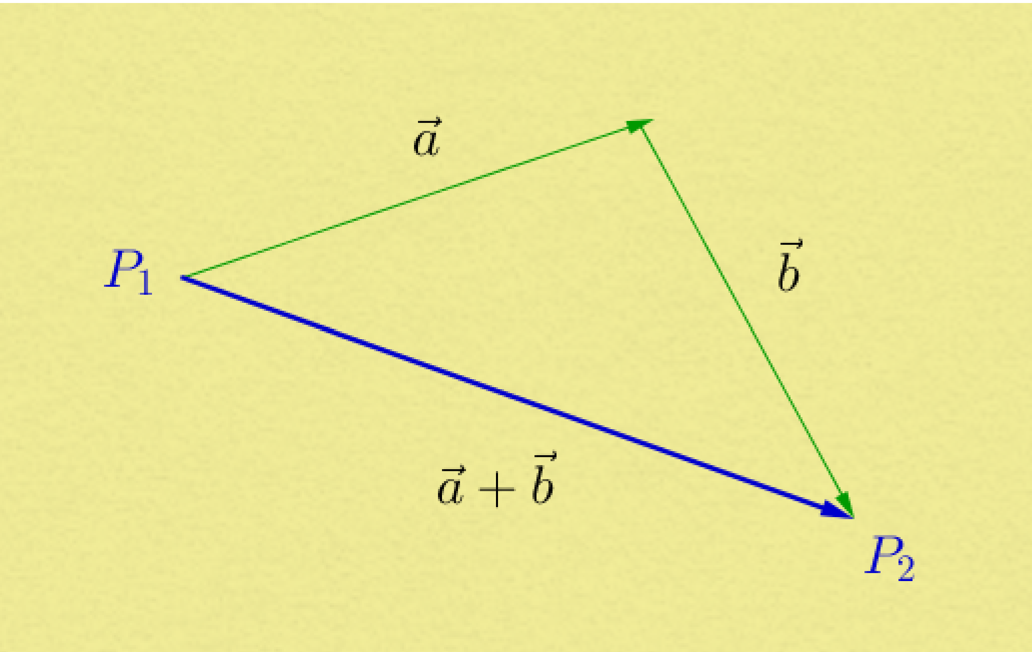
folgt $-(|a| + |b|) \leq (a+b) \leq |a| + |b|$

also gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

MERKE

Dreiecksungleichung: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Die Dreiecksungleichung besagt, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 stets der direkte Weg (geradlinige Verbindung) ist.



Dreiecksungleichung

Das bedeutet also, dass die Strecke $\vec{a}$ und die Strecke $\vec{b}$ zusammen länger sind als die Strecke $\vec{a} + \vec{b}$.

Beweis der Dreiecksungleichung

Es gilt:

Wenn $a \leq |a|$ und **(1)** und

wenn $-a \leq |a|$ und **(2)**

Für $(a+b)$ und $-(a+b)$ gilt auch $|a+b|$.

Zusammenfassen von **(1)** und **(2)** ergibt: $|a+b| \leq |a| + |b|$

1.3.6 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist eine Beweismethode aus der Mathematik. Diese Beweismethode besagt, dass eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zutrifft. Bei der Anwendung dieser Methode steht am Anfang stets eine Behauptung, anschließend folgt der Beweis.

MERKE

$A(n)$ bedeutet, dass Aussage A von einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ abhängt.

METHODE

Die **Induktion** wird in zwei Schritten durchgeführt:

1. Induktionsschritt: $A(1)$, d. h. die Aussage gilt für $n = 1$

2. Induktionsschritt: $A(n+1)$, d. h. für alle natürlich Zahlen $n > 1$ folgt aus $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$

Sind 1. und 2. erfüllt so ist der Beweis erbracht.

HINWEIS

Im folgenden Abschnitt zeigen wir dir Beispiele für die Anwendung der vollständigen Induktion.

1.3.6.1 Beispiele: Vollständige Induktion

In diesem Beispiel zeigen wir einige Beispiele für die Anwendung der vollständigen Induktion.

Beispiel 1 zur vollständigen Induktion

BEISPIEL

Die Gaußsche Summenformel stellt einen einfachen Fall von vollständiger Induktion dar:

Aussage: (Die Herleitung dieser Formel ist hierbei irrelevant).

Prüfe diese Aussage mittels vollständiger Induktion!

Die linke Seite der obigen Aussage ist nichts anderes alls die Summe der natürlichen Zahlen:

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

Demnach ergibt sich die obige Aussage zu:

METHODE

Summenformel

1. Induktionsschritt:

$$n = 1$$

(linke Seite):

(rechte Seite): $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

2. Induktionsschritt:

und $\frac{2(2+1)}{2} = 3$ (Aussage stimmt)

(Aussage stimmt)

Dies lässt sich bis unendlich (theoretisch) fortführen. Wir setzen also $n = k$, dabei ist k eine beliebige Zahl:

METHODE

(1) $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

Gilt dieser Ausdruck für $n = k$, so gilt er auch für jede darauffolgende Zahl $k+1$. Wir setzen nun $k+1$ ein:

METHODE

(2) $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ **Soll bewiesen werden**

Um Gleichung (2) zu beweisen betrachten wir Gleichung (1) und berücksichtigen $i = k+1$, indem wir dieses am Ende der Gleichung (auf beiden Seiten) hinzuaddieren:

METHODE

(3) $\sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

HINWEIS

Es wird demnach von $i = 1, ..., k$ die Summe gebildet und für $i = k+1$ am Ende des Terms aufaddiert. Wichtig ist hierbei, dass $i = k+1$ auf der linken Seite eingesetzt wird und der resultierende Term auf der rechten Seite ebenfalls berücksichtigt wird.

Der nächste Schritt ist nun, dass Gleichung (2) und (3) miteinander verglichen werden sollen. Sind also die beiden Ausdrücke identisch?

$$\sum_{i=1}^{k+1} i$$

$$\sum_{i=1}^{k} i + (k+1)$$

Beide berücksichtigen die Summe von $i = 1$ bis $k+1$. In der ersten Gleichung hingegen, ist die Zahl $k+1$ innerhalb der Summe berücksichtigt, in der zweiten Gleichung als Summand hinten angehängt.

Wir beginnen mit **Gleichung (3)**:

|auf einen Nenner bringen

|Zusammenfassen

$$\sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

Als nächstes betrachten wir die **Gleichung (2)**:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ |Zusammenfassen

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k^2 + 2k + 1k + 2)}{2}$$

Das Ergebnis ist identisch, wir haben also den Beweis erbracht, dass die obige Aussage wahr ist!

Beispiel 2 zur vollständigen Induktion

BEISPIEL

Aussage: Die Summe $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$ der ungeraden Quadratzahlen bis $2n-1$ ist $\frac{n(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$.

Wir können hier die linke Seite wieder in Summenform schreiben:

1. Induktionsschritt:

$A(1)$, d. h. die Aussage gilt für $n = 1$.

Einsetzen von $n = 1$:

(linke Seite): $\sum_{i=1}^{1} (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1$

(rechte Seite): $\frac{1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{3} = 1$

Die Behauptung ist im Fall $n = 1$ richtig.

2. Induktionsschritt:

Einsetzen von $n = 2$:

(linke Seite):

(rechte Seite): $\frac{2 \cdot (2 \cdot 2 - 1) \cdot (2 \cdot 2 + 1)}{3} = 10$

Auch für $n = 2$ ist diese Aussage wahr. Wir müssen uns jetzt die Frage stellen, ob die Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt.

Wir setzen wieder $n = k$, dabei ist k eine beliebige Zahl:

METHODE

(1) $\sum_{i=1}^{k} (2i - 1)^2 = \frac{k(2k-1) \cdot (2k+1)}{3}$

Gilt dieser Ausdruck für $n = k$, so gilt er auch für jede darauffolgende Zahl $k + 1$. Wir setzen nun

$k+1$ ein:

METHODE

(2) $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 = \frac{(k+1)(2(k+1)-1)\cdot(2(k+1)+1)}{3}$ Soll

beweisen werden

Um Gleichung (2) zu beweisen betrachten wir Gleichung (1) und berücksichtigen $i = k+1$, indem wir dieses am Ende der Gleichung (auf beiden Seiten) hinzuaddieren:

METHODE

(3)

HINWEIS

Wenn wir $i = k+1$ einsetzen, so erhalten wir auf der linken Seite $(2(k+1)-1)^2$. Diesen Term müssen wir auch auf der rechten Seite berücksichtigen.

Der nächste Schritt ist nun, dass Gleichung (2) und (3) miteinander verglichen werden sollen. Sind also die beiden Ausdrücke identisch?

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2$$

Beide berücksichtigen die Summe von $i = 1$ bis $k+1$. In der ersten Gleichung hingegen, ist die Zahl $k+1$ innerhalb der Summe berücksichtigt, in der zweiten Gleichung als Summand hinten angehängt.

Wir beginnen mit der **Gleichung (3)**:

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{k(2k-1)\cdot(2k+1)}{3} + (2(k+1)-1)^2$$

Alles auf einen Nenner bringen:

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{k(2k-1)\cdot(2k+1)}{3} + \frac{3(2(k+1)-1)^2}{3}$$

Klammern auflösen:

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{k(4k^2+2k-2k-1)}{3} + \frac{3(2k+2-1)^2}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{4k^3-k}{3} + \frac{3(2k+1)^2}{3}$$

Binomische Formel anwenden:

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{4k^3-k}{3} + \frac{3(4k^2+4k+1)}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{4k^3-k}{3} + \frac{12k^2+12k+3}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{4k^3-k+12k^2+12k+3}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}$$

Als nächstes betrachten wir die **Gleichung (2)** und fassen diese so weit wie möglich zusammen:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 = \frac{(k+1)(2(k+1)-1)\cdot(2(k+1)+1)}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 = \frac{(k+1)(2k+2-1)\cdot(2k+2+1)}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)\cdot(2k+3)}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 = \frac{(2k^2+k+2k+1)\cdot(2k+3)}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 = \frac{(4k^3+6k^2+6k^2+9k+2k+3)}{3}$$

Wir erhalten für beide Gleichungen dasselbe Ergebnis, also dieselbe rechte Seite. Damit ist die Aussage wahr!

Beispiel 3 zur vollständigen Induktion

BEISPIEL

Aussage: $A(n) = n^2 + n$ ergibt stets eine durch zwei-teilbare, gerade Zahl! Diese Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$. Prüfe diese Aussage mittels vollständiger Induktion!

Hier mal ein anderer Aufgabentyp zur vollständigen Induktion:

1. Induktionsschritt

$$n = 1 : 1^2 + 1 = 2$$

2 ist eine gerade Zahl und damit durch 2 teilbar!

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Angenommen die Aussage gilt für n, d.h. $n^2 + n$ ist eine gerade Zahl.

Zu zeigen ist das diese Behauptung auch für $n+1$ gilt:

$(n+1)^2 + (n+1)$

$n^2 + 2n + 1 + n + 1$

So zusammenfassen, dass die Induktionsvoraussetung gegeben ist:

$(n^2 + n) + 2n + 2$

$(n^2 + n) + 2(n+1)$

Da nach Induktionsvoraussetzung $(n^2 + n)$ eine gerade Zahl ist und $2(n+1)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2 ist, ist auch die Summe $(n^2 + n) + 2(n+1)$ eine gerade Zahl.

Beispiel 4 zur vollständigen Induktion

BEISPIEL

Aussage: 3 ist stets ein Teiler von $A(n) = n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

1. Induktionsschritt:

$n = 1 : 1^3 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 3$ ist ein Teiler von 0 .

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Angenommen die Aussage gilt für n , d.h. $n^3 - n$ ist stets ein Teiler von 3.

Zu zeigen ist das diese Behauptung auch für $n+1$ gilt:

$n+1$: (n+1)^3 - (n + 1) (n+1) \cdot (n+1) \cdot (n+1) - (n+1) < /p >< p > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 < /p >< p >< br > Zusammenziehen, sodassobigeForm n^3 -n 3 handelt(Induktionsvorraussetzung) :< /p >< p > (n^3 - n)+ 3n^2 + 3n < /p >< p > (n^3 - n)+ 3(n^2 + n)$

Auch der zweite Term ist infolge der Multiplikation der Klammer mit 3 immer durch 3 teilbar!

1.3.7 Fakultät und Binomialkoeffizienten

Fakultät

Die Fakultät n! ist ein wichtiges Produkt in der Mathematik und wird sehr häufig in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik verwendet.

METHODE

Definition

Für alle natürlichen Zahlen gilt:

$$0! = 1$$

Zahlenbeispiele Fakultät

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Mit $n(n-1)!$ ergibt sich dasselbe Ergebnis:

$$n = 5:$$

$$5 \cdot (5-1)! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

BEISPIEL

3 verschieden farbige Billardkugeln (rot, blau, grün) sollen nacheinander eingelocht werden. Wie viele Variationen einer Reihenfolge ergeben sich?

Es ergeben sich verschiedene Varianten einer Reihenfolge:

(1) rot, blau, grün; (2) rot, grün, blau; (3) blau, grün, rot; (4) blau, rot, grün; (5) grün, rot, blau; (6) grün, blau, rot

Binomialkoeffizienten

METHODE

Für zwei ganze Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ bezeichnet man die ganze Zahl

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

als Binomialkoeffizient.

Pascalsche Dreieck

Wichtig sind folgende Eigenschaften der Binomialkoeffizienten, welche ihre Berechnung aus dem **Pascalschen Dreieck** nach Blaise Pascal (1623-1662) erlauben:

METHODE

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(2)

MERKE

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus insgesamt n Elementen genau k auszuwählen.

BEISPIEL

$$\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Anstelle die obigen Fakultäten 5! und 4! komplett aufzuschreiben, können wir hier auch ab Fakültät 3! im Zähler und Nenner kürzen:

$$\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{4 \cdot 3!} \qquad |\text{kürzen}$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4}{4} = 5$$

Anwendungsbeispiel: Binominalkoeffizient

BEISPIEL

Beim Lotto 6 aus 49 ist die Anzahl der möglichen Ziehungen 49 über 6:

$$= \frac{\cancel{1}* \cancel{2}* \cancel{3} * ...* \cancel{43} * 44 * 45 * 46 * 47 * 48 * 49}{(1 * 2 * 3 * ... * 5 * 6)(\cancel{1}* \cancel{2}* \cancel{3} * ...* \cancel{43})} = \frac{44 * 45 * 46 * 47 * 48 * 49}{1 * 2 * 3 * ... * 5 * 6} =$$
$$13.983.816$$

verschiedene Möglichkeiten 6 "Richtige" zu ziehen.

HINWEIS

In diesem Beispiel können wir den Wert auch gut ohne Fakultät berechnen, da sich der Nenner und der Zähler größtenteils wegkürzen. Weitere Beispiele findest Du am Ende das Kapitels unter *Anwendungsbeispiele: Mengenlehre und reelle Zahlen.*

1.4 Anwendungsbeispiele: Mengenlehre und reelle Zahlen

In diesem Abschnitt folgen einige Anwendungsbeispiele zu den vorherigen Abschnitten.

Intervalle

BEISPIEL

Gegeben seien die folgenden Intervalle der reellen Zahlen:

a) offenes Intervall von 3 bis $\frac{14}{3}$

b) rechts halboffenes Intervall von x_1 bis x_2

c) links halboffenes Intervall von $\frac{5}{8}$ bis z

d) geschlossenes Intervall von -15 bis 0

e) das Intervall aller Zahlen größer oder gleich 3

f) das Intervall aller Zahlen kleiner als 2

Gib bitte diese als Klammerausdruck und in beschreibender Weise wieder!

a) $(3, \frac{14}{3})$

b) $[x_1, x_2)$

$$\{x \in \mathbb{R} | x_1 \leq x < x_2\}$$

c) $(\frac{5}{8}, z]$

$$\{x \in \mathbb{R} | \frac{5}{8} < x \leq z\}$$

d)

e) $[3, \infty)$

$$\{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x\}$$

f) $(-\infty, 2)$

$$\{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$$

BEISPIEL

Bestimme bitte jeweils, ob es sich bei den angegebenen Mengen um Intervalle handelt. Gib in diesem Fall bitte die Intervallschreibweise an!

a) $[0, 1] \cup (1, 2]$

b)

c)

d) $(2, 5] \backslash (4, 5]$

e)

f) $\{x^2 | x \in \mathbb{R}\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$

h) $\{\frac{1}{x} | x \in \mathbb{N}\}$

a) $[0, 1] \cup (1, 2]$

Es handelt sich hierbei um die Zahlen von einschließlich 0 bis einschließlich 1 und um die Zahlen von ausschließlich 1 bis einschließlich 2. Diese sollen nun miteinander vereinigt werden. Es handelt sich demnach um die Zahlen von einschließlich 0 bis einschließlich 2:

$[0, 2]$

b)

Hierbei handelt es sich um kein Intervall. Denn es existiert eine Lücke zwischen null und zwei. $\longrightarrow (0, 2)$

c)

Hier muss der Durchschnitt gebildet werden. Dieser beinhaltet die Zahlen aus dem linken UND aus dem rechten Intervall. Die -2 wird im rechten Intervall ausgeschlossen und darf somit nicht zum Durchschnitt gezählt werden. Die 4 kommt dafür im linken Intervall nicht vor und darf demnach ebenfalls nicht zum Durchschnitt gezählt werden. Das linke Intervall geht nur bis einschließlich 3. Die 3 kommt auch um rechten Intervall vor, demnach wird sie mitberücksichtigt:

$(-2, 3]$

d) $(2, 5] \backslash (4, 5]$

Hier ist die Differenz zu bilden. Wörtlich bedeutet dies: $(2, 5]$ ohne $(4, 5]$

$\longrightarrow (2, 4]$

e)

Hier muss der Durchschnitt gebildet werden. Dieser beinhaltet die Zahlen aus dem linken UND aus dem rechten Intervall. Die 1 wird im rechten Intervall ausgeschlossen und darf somit nicht zum Durchschnitt gezählt werden. Sie stellt die linke Grenze dar. Die 5 wird in beiden Intervallen berücksichtigt und stellt die rechte Grenze dar:

$(1, 5]$

f) $\{x^2 | x \in \mathbb{R}\}$

Aufgrund des Quadrates werden aus negativen ebenfalls positive Zahlen. Die Ergebnisse befinden sich demnach im Intervall:

$[0, \infty)$

g) $\{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$

h) $\{\frac{1}{x}|x \in \mathbb{N}\}$

Hierbei handelt es sich um kein Intervall. Setzen wir für x nur natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..\}$ ein, so ergeben sich die Werte $\frac{1}{x} = \{1, 0,5, 0,333, ...\}$. Das sind Zahlen zwischen 0 und 1, jedoch nicht alle Zahlen zwischen 0 und 1. Zum Beispiel ist die Zahl $0,55$ dort nicht enthalten, weshalb wir hier von keinem Intervall sprechen können.

Supremum, Infimum

BEISPIEL

Gib bitte das Supremum bzw. Infimum an! Handelt es sich hierbei auch um Maxima bzw. Minima?

a) $[0, 2]$

b) $(0, 2)$

c) $\{2, 6\}$

d) $\{\pi, e\}$

e) $\{1 + \frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}\}$

f) $\{0\}$

g) $[0, 2] \cup [3, 4]$

h) $\{z \in \mathbb{Q}|z < 3\}$

i) $\{z \in \mathbb{Q}|z^2 < 9\}$

j) $\{z \in \mathbb{Q}|z^2 < 5\}$

Die kleinere Zahl ist stets das Infimum und die größere Zahl das Supremum. Wird die kleinere Zahl mit eingeschlossen, so liegt ebenfalls ein Minimum vor, wird die größere Zahl mit eingeschlossen so liegt zusätzlich ein Maximum vor.

a) $[0, 2]$

$0(inf, min), 2(sup, max) \longrightarrow$ Die Zahl 0 ist das Infimum und das Minimum. Die Zahl 2 ist das Supremum und das Maximum.

b) $(0, 2)$

$0(inf), 2(sup) \longrightarrow$ Die Zahl 0 ist das Infimum, aber nicht das Minimum, da diese ausgeschlossen wird. Die Zahl 2 ist das Supremum, aber nicht das Maximum, da diese ausgeschlossen wird.

c) $\{2, 6\}$

$2(inf, min), 6(sup, max) \longrightarrow$ Die Zahl 2 ist das Infimum und das Minimum. Die Zahl 6 ist das Supremum und das Maximum.

d) $\{\pi, e\}$

$e(inf, min), \pi(sup, max) \longrightarrow$ Die geschweiften Klammern geben nur die Menge der Zahlen wider. Hierbei ist dies zum einen die Kreiszahl $\pi = 3,14159$ und zum anderen die Eulersche-Zahl $e = 2,71828$. Die Eulersche-Zahl ist kleiner als die Kreiszahl, weshalb e Infimum und gleichzeitig Minimum und π Supremum und gleichzeitig Maximum ist.

e) $\{1 + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$

$1(inf), 2(sup, max) \longrightarrow$ Die natürlichen Zahlen sind $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..\}$. Gibt man nun die kleinste natürliche Zahl 1 ein, so wird $1 + \frac{1}{n} = 2$. Das bedeutet also hier liegt das Supremum und gleichzeitig das Maximum vor. Gibt man für die größte natürliche Zahl näherungsweise eine sehr große gerade Zahl ein, so strebt der Term $1 + \frac{1}{n}$ gegen 1. Die 1 wird aber nur erreicht, wenn der Wert 0 eingegeben wird und dieser gehört sich zu den natürlichen Zahlen. Deswegen ist die 1 zwar das Infimum aber nicht das Minimum.

f) $\{0\}$

$0(inf, min), 0(sup, max)$

g) $[0, 2] \cup [3, 4]$

Die Vereinigung der beiden Intervalle. Das bedeutet, alle Zahlen, die im ersten und im zweiten sowie in beiden vorkommen, wobei doppelte Zahlen einfach gezählt werden. Das Intervall ergibt sich dann zu:

$[0, 4]$

$0(inf, min), 4(sup, max)$

h) $\{z \in \mathbb{Q} | z < 3\}$

Es exsitiert kein Infiumum und demnach auch kein Minimum, da das Intervall nach unten unbeschränkt ist. Nach oben ist es aber beschränkt und es gilt:

$$-, 3(sup)$$

i) $\{z \in \mathbb{Q} | z^2 < 9\}$

$-3(inf), 3(sup) \longrightarrow$ Auflösen nach z ergibt: $z_1 = \pm\sqrt{9}$ und damit $z_1 = 3$ und $z_2 = -3$.

j) $\{z \in \mathbb{Q} | z^2 < 5\}$

$$-\sqrt{5}(inf), \sqrt{5}(sup)$$

Mengen: Vereinigung und Mächtigkeit

BEISPIEL

Für endliche Mengen ist die Mächtigkeit gleich der Anzahl der Elemente der Menge. Bestimme bitte die Mächtigkeit folgender Mengen!

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $B = \{a, b, c, 10\}$

c) $C = A \cup B \cup \{0, ..., 12\}$

d) $D = (A \cup B) \cap \{0, ..., 12\}$

Die Mächtigkeit einer Menge X wird durch $|X|$ angegeben.

a) $|A| = 4$

b) $|B| = 4$

c) Wir bilden zunächst die Vereinigung der Mengen A und B aus den Aufgaben a) und b).

$$\longrightarrow C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, 10\}$$

$$|C| = 16$$

d) Wir bilden wieder zunächst die Vereinigung der Mengen A und B.

$$|D| = 5$$

Binominalkoeffizient

BEISPIEL

Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem Skatspiel (32 Karten) ein Blatt aus 10 Karten zu bekommen?

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot ...10 \cdot ... \cdot 32}{10! \cdot 1 \cdot ... \cdot 10 \cdot ... \cdot 22}$$

Kürzen von 1 bis 10 im Zähler und Nenner:

$$= \frac{11 \cdot ... \cdot 32}{10! 11 \cdot ... \cdot 22}$$

Kürzen von 11 bis 22 im Zähler und Nenner:

$$= \frac{23 \cdot ... \cdot 32}{10!}$$

$$= \frac{23 \cdot ... \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 10}$$

$$= \frac{23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 64.512.240$$

BEISPIEL

Wie groß ist dabei die Wahrscheinlichkeit exakt 2 Damen und 4 Könige zu bekommen?

Es sollen aus 4 Damen 2 gezogen werden und aus 4 Königen genau 4:

Der letzte Faktor ergibt sich, weil ja 10 Karten aus 32 gezogen werden sollen und 6 Karten aus 8 bereits definiert sind (erster und zweiter Faktor), es bleiben also noch 4 aus 24:

Es gibt davon 63.756 Fälle. Die Wahrscheinlichkeit liegt bei:

.

BEISPIEL

Existieren mehr Lottozahlen "6 aus 49" oder mehr Skatblätter "10 aus 32"?

Lottozahlen: $\binom{49}{6} = 13.983.816$.

Skatblätter: $\binom{32}{10} = 64.512.240$.

Es gibt daher $\frac{64.512.240}{13.983.816} \approx 4,6$ -mal mehr Skatblätter.

Analysis und Lineare Algebra

Vektorrechnung

Autor:
Deleted User

INHALTSVERZEICHNIS

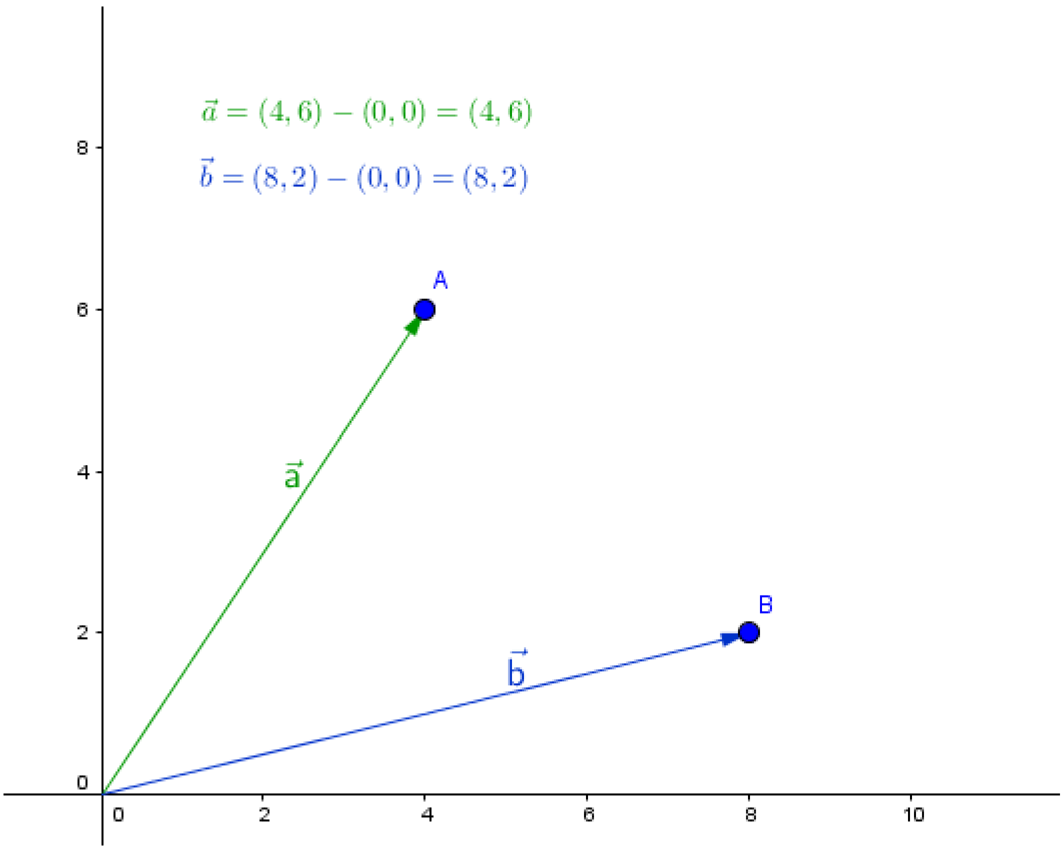
1 Vektorrechnung

1.1 Einführung in die Vektorrechnung

Unter Vektoren versteht man Objekte mit einer vorgegebenen Länge und Richtung. Mit Hilfe von Vektoren kann man z. B. die Geschwindigkeit von Objekten oder die Strömungsrichtungen in einem Raum darstellen. Vektoren werden durch ihre Koordinaten bestimmt. Ein Vektor in einem 2-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ besitzt dabei zwei Koordinaten, ein Vektor in einem 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ drei Koordinaten und ein Vektor in einem n-dimensionalen $\mathbb{R}^n$ Raum n Koordinaten.

Vektor $\vec{a}$ in einem n -dimensionalen Raum: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ . \\ . \\ . \\ n \end{pmatrix}$

Vektoren werden in einem 2-dimensionalen Raum (auch in der Ebene genannt) folgendermaßen dargestellt:



Vektoren in der Ebene

In der obigen Grafik sind die Vektoren und dargestellt.

Ortsvektoren

Wie in der obigen Grafik ersichtlich, können Vektoren dazu verwendet werden, Punkte im Raum zu bezeichnen. So kann z. B. der Ort des Punktes $P_1(4, 6)$ durch den Vektor

$$\vec{a} = O\vec{P}_1$$

dargestellt werden. Diesen Vektor nennt man den zum Punkt $P_1(4, 6)$ gehörenden **Ortsvektor.** O bezeichnet dabei den Koordinatenursprung $(0, 0)$, der für alle Ortsvektoren den Startpunkt bildet und P_1 ist der Punkt auf den der Vektor zeigt.

Vektor aus zwei Punkten: Richtungsvektor

Zur Berechnung eines Vektors aus zwei Punkten A und B benötigt man zuerst die Ortsvektoren zu den Punkten A und B. Geht der Vektor von A nach B, (Spitze zeigt auf B) so zieht man den Ortsvektor A vom Ortsvektor B ab. Geht hingegen der Vektor von B nach A (Spitze zeigt auf A), so zieht man den Vektor B vom Vektor A ab.

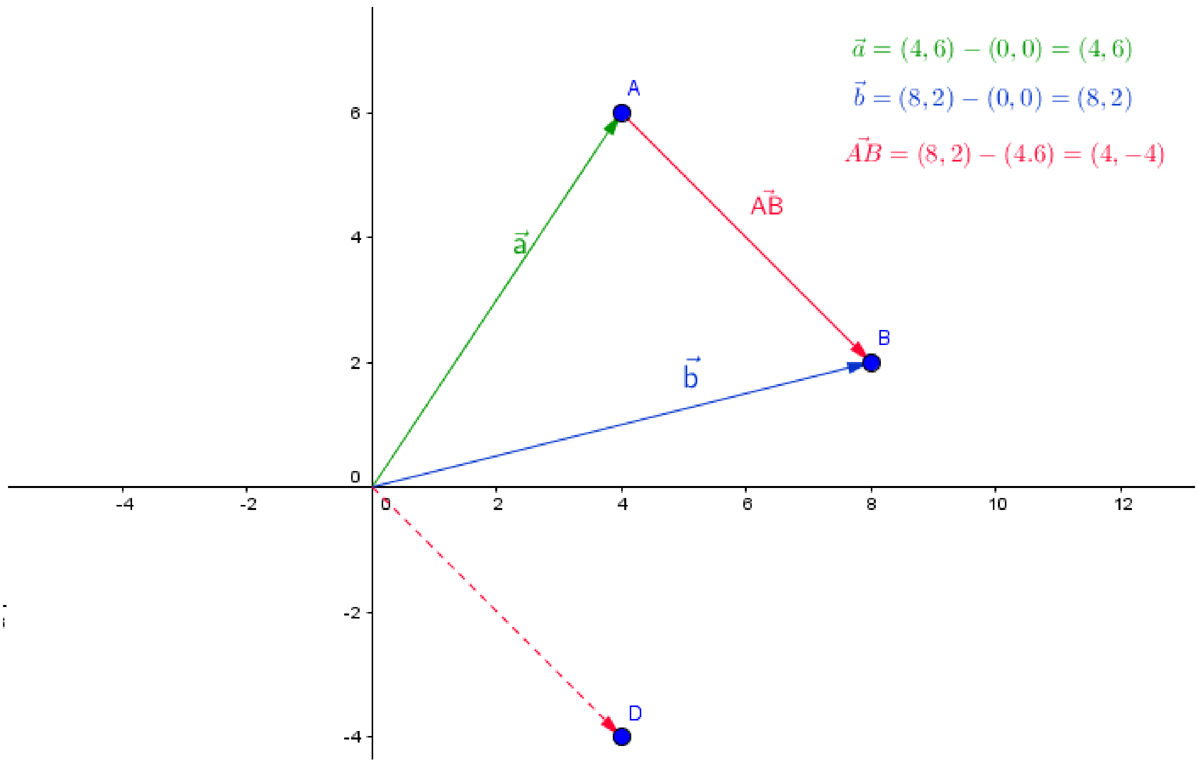
BEISPIEL

Gegeben seien der Punkt $A(4, 6)$ und der Punkt $B(8, 2)$ aus der obigen Grafik.

Die beiden zugehörigen Ortsvektoren sind $\vec{a} = O\vec{A} = (4, 6)$ und $\vec{b} = O\vec{B} = (8, 2)$.

Der dazugehörige Vektor, welcher von A nach B geht, ist:

Der Richtungsvektor $A\vec{B} = (4, -4)$ hat nun die folgende Richtung (rot gestrichelter Vektor):



Vektor aus zwei Punkten

Dieser Richtungsvektor ist ersteinmal ein Ortsvektor mit Beginn im Koordinatenursprung. Mit der Spitze zeigt er auf den Punkt $D(4,-4)$. Verschiebt man diesen nun (parallel zu sich selbst) zu den Punkten A und B hin, so sieht man, dass dies genau der Vektor ist der von Punkt A nach Punkt B geht.

HINWEIS

Im Weiteren werden wir die Addition und Subtraktion von Vektoren, die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren und die Zerlegung von Vektoren behandeln.

1.1.1 Addition von Vektoren

Die Addition von zwei Vektoren und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ist definiert durch:

Die grafische Addition von Vektoren erfolgt, indem der Anfangspunkt des Vektors $\vec{b}$ an den Endpunkt des Vektors $\vec{a}$ angreiht wird. Dabei darf die Richtung der Vektoren nicht verändert werden. Der resultierende Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ wird dann bestimmt, indem der Anfangspunkt des resultierenden Vektors an den Anfangspunkt des ersten Vektors gelegt wird und die Spitze des resultierenden Vektors an die Spitze des letzten Vektors.

BEISPIEL

Gegeben sei der Vektor $\vec{a} = (1, 2)$ und der Vektor $\vec{b} = (-5, 3)$.

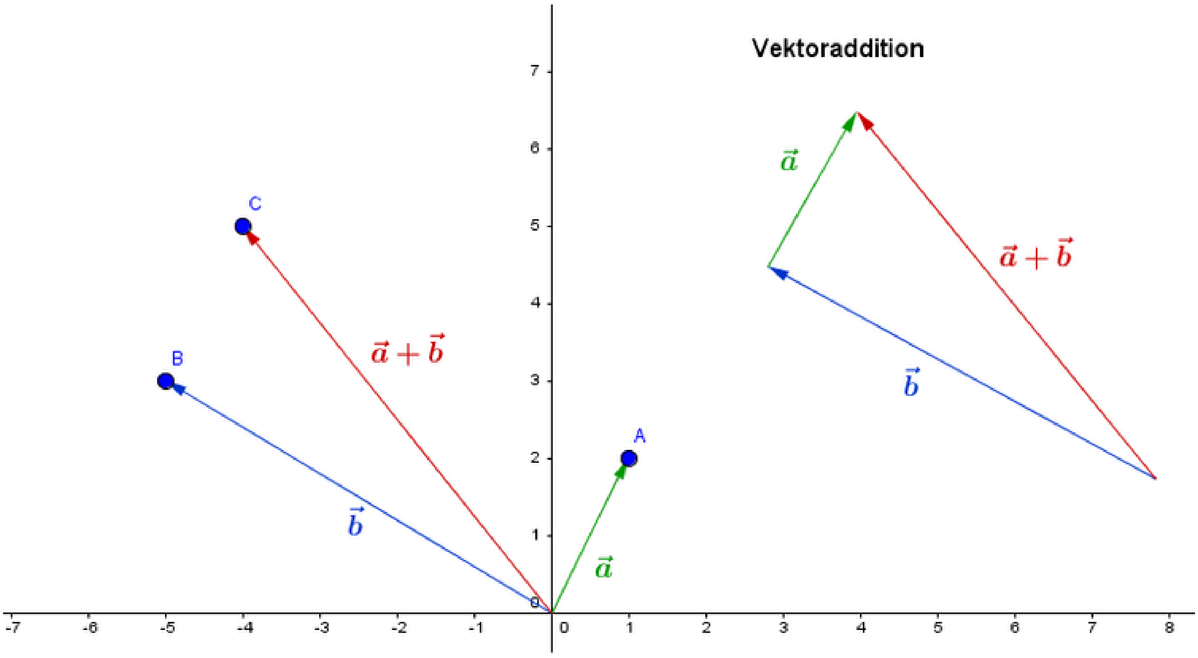
Führe bitte die Addition der beiden Vektoren durch und veranschauliche dies grafisch!

Die Addition wird wie folgt durchgeführt:

$$\vec{a} + \vec{b} = (1 - 5, 2 + 3) = (-4, 5)$$

Dieser resultierende Vektor ist ein Ortsvektor, welcher im Ursprung beginnt (so wie auch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$) und auf den Punkt $(-4, 5)$ zeigen.

Grafisch sieht das Ganze wie folgt aus.



In der obigen Grafik sind unten links die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und die Summe aus diesen beiden $\vec{a} + \vec{b}$ zu sehen. Diese beginnen im Ursprung $(0, 0)$ und zeigen auf die Punkte A, B und C.

Bei der grafischen Addition (oben rechts) wird wie folgt vorgegangen:

Der Anfangspunkt des Vektors $\vec{b}$ wird an den Endpunkt von Vektor $\vec{a}$ gelegt bzw. der Anfangspunkt von Vektor $\vec{a}$ an den Endpunkt von Vektor $\vec{b}$ (Kommutativgesetz). Das Ergebnis dieser grafischen Addition ist der neue Vektor $\vec{a} + \vec{b}$. Dieser wird bestimmt, indem der Anfangspunkt des 1. Vektors und der Endpunkt des letzten Vektors miteinander verbunden werden. Dabei zeigt die Spitze des neuen Vektors auf die Spitze des letzten Vektors.

Im Folgenden zeigen wir dir die Rechenregeln für die Addition von Vektoren.

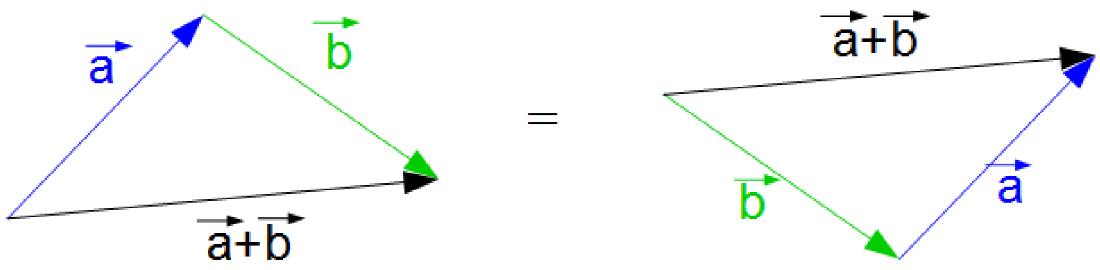
Kommutativgesetz

Das Kommutativgesetz besagt, dass Argumente (Vektoren) einer Operation (Addition) vertauscht werden können, ohne dass sich am Ergebnis etwas ändert:

METHODE

Kommutativgesetz:

In der folgenden Grafik ist das Kommutativgesetz veranschaulicht.



Kommutativgesetz $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

Assoziativgesetz

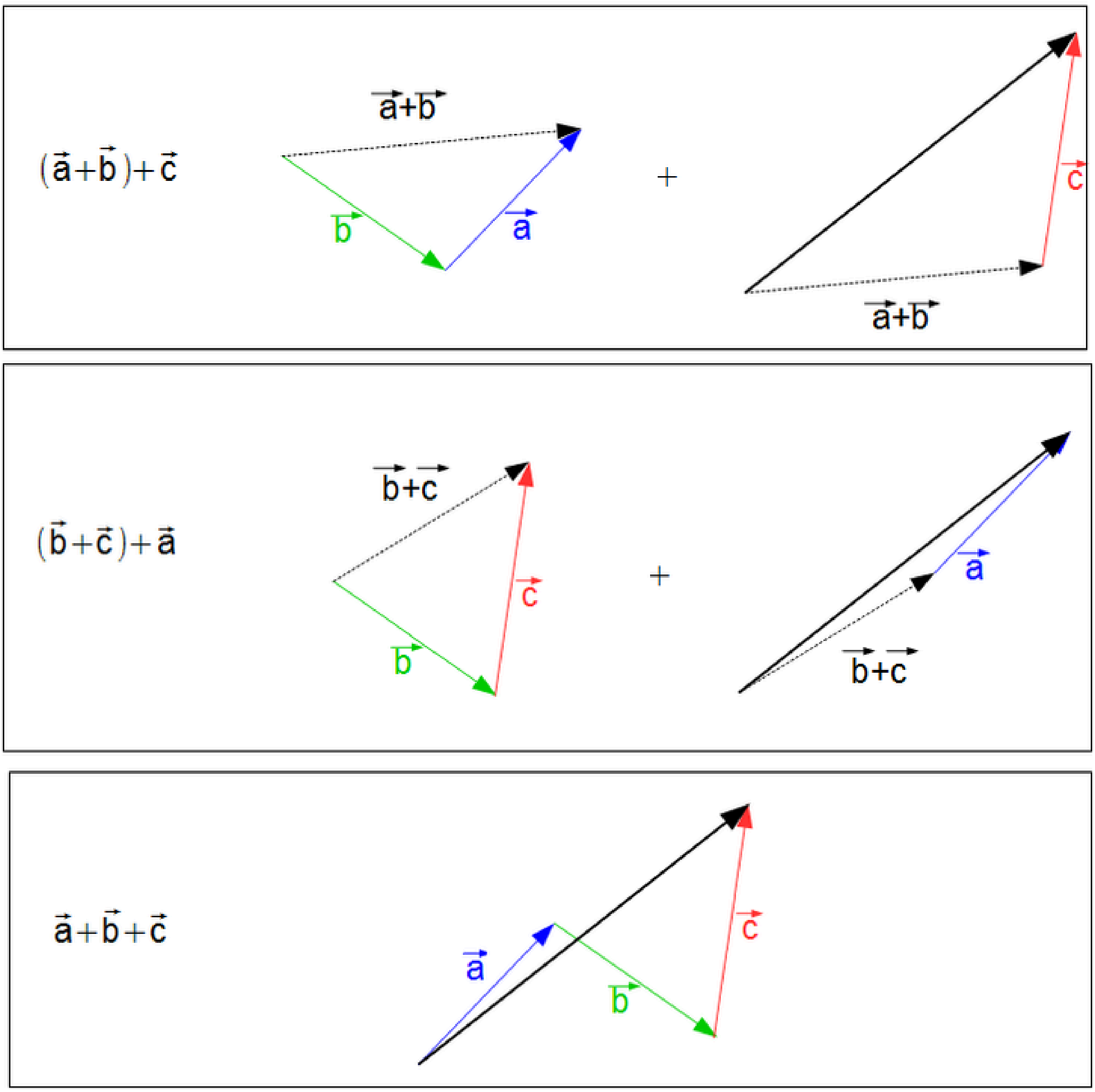
Das Assoziativgesetz besagt, dass man Summanden beliebig zusammenfassen darf, die Summe bleibt immer gleich. Die allgemeine Schreibweise sieht wie folgt aus:

METHODE

Assoziativgesetz: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

In der folgenden Grafik ist das Assoziativgesetz für die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ veranschaulicht.

Assoziativgesetz



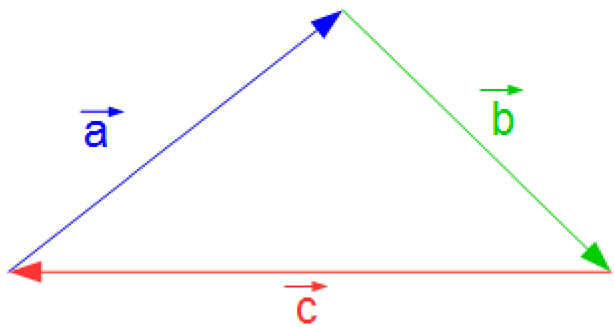
Der resultierende Vektor (dicker schwarzer Vektor) ist bei allen drei Operationen identisch.

Nullvektor

Ein Nullvektor ergibt sich, wenn der Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkt des letzten Vektors zusammenfällt.

Die beispielhafte Skizze der Vektoren   sieht folgendermaßen aus:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$



In der obigen Grafik ist deutlich zu erkennen, dass der Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkt des letzten Vektors zusammenfällt. Das bedeutet, dass hier kein resultierender Vektor existiert und demnach das Ergebnis ein Nullvektor ist.

Anwendungsbeipiel: Kommutativgesetz

BEISPIEL

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (4, 6)$ und . Bitte zeige, dass das Kommutativgesetz gilt!

Der Summenvektor ist:

$$\vec{a} + \vec{b} = (12, 8)$$

$$\vec{b} + \vec{a} = (12, 8)$$

Anwendungsbeispiel: Assoziativgesetz

BEISPIEL

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (4, 6)$, $\vec{b} = (8, 2)$ und $\vec{c} = (1, 3)$. Bitte zeige, dass das Assoziativgesetz gilt!

Assoziativgesetz:

(1) $(\vec{a} + \vec{b}) = (12, 8)$

(2) $(\vec{b} + \vec{c}) = (9, 5)$

1.1.2 Subtraktion von Vektoren

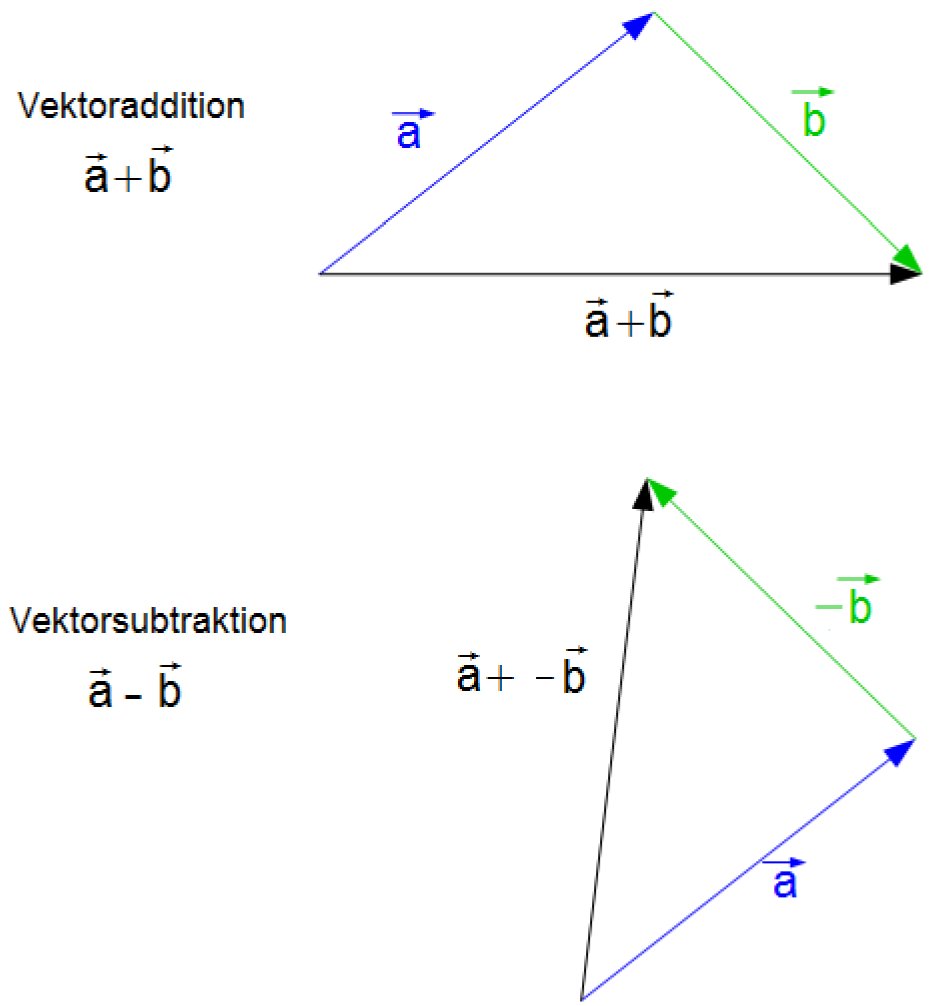
MERKE

Die Subtraktion von zwei Vektoren und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ist definiert durch:

Die grafische Subtraktion des Vektors $\vec{b}$ vom Vektor $\vec{a}$ erfolgt, indem man den entgegengesetzten Vektor $-\vec{b}$ zum Vektor $\vec{a}$ hinzuaddiert. Man tauscht also zunächst den Anfangspunkt und Endpunkt des Vektors $\vec{b}$ miteinander. Man hat denn den Vektor $-\vec{b}$ gegeben.

Dann legt man (wie bei der Vektoraddition) den Anfangspunkt des Vektors $-\vec{b}$ an den Endpunkt des Vektors $\vec{a}$. Der resultierende Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ wird dann bestimmt, indem der Anfangspunkt des resultierenden Vektors an den Anfangspunkt des ersten Vektors gelegt wird und die Spitze des resultierenden Vektors an die Spitze des letzten Vektors.

In der folgenden Grafik ist die grafische Addition und Subtraktion von Vektoren gegenübergestellt:



Subtraktion von Vektoren

BEISPIEL

Gegeben seien die folgenden Vektoren: $\vec{a} = (4,6)$, $\vec{b} = (8,2)$ und $\vec{c} = (6,1)$. Führe die folgenden Operationen durch:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

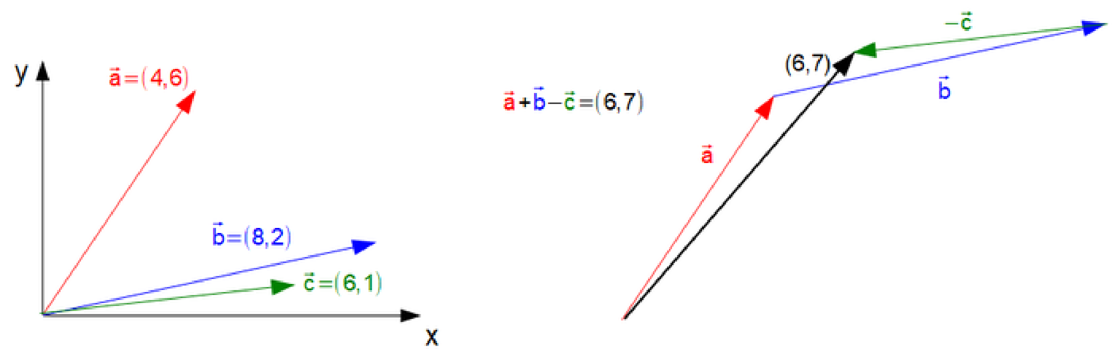
c) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (18,9)$

b) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=(6,7)$

c) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=(-10,3)$

Der Aufgabenteil b) sieht dann grafisch wie folgt aus:



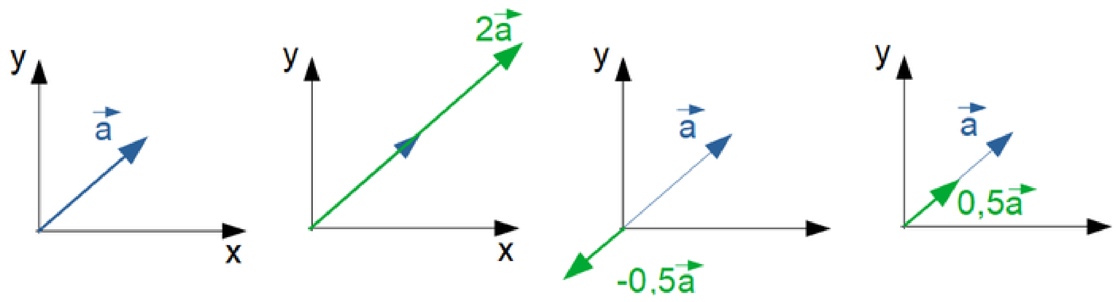
Vektoraddition/Vektorsubtraktion

1.1.3 Skalieren von Vektoren

Die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl nennt man Skalierung eines Vektors. Das Produkt ist wiederum ein Vektor, der entsprechend des mit ihm multiplizierten Wertes

- **länger** $\longrightarrow (2\cdot\vec{a})$,
- **kürzer** $\longrightarrow (0,5\cdot\vec{a})$ oder sogar
- **in entgegengesetzter Richtung** $\longrightarrow (-0,5\cdot\vec{a})$

neu abgebildet wird.



Skalieren von Vektoren

In der obigen Grafik ist deutlich zu erkennen, dass ein Vektor $\vec{a}$ multipliziert mit einem Skalar **größer** 1 (z. B. 2) länger wird.

Wird ein Vektor hingegen mit einem Skalar zwischen 0 und -1 multipliziert, so verkürzt sich dieser und zusätzlich ändert sich seine Richtung um 180°.

Bei der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar zwischen 0 und 1 verkürzt sich die Länge des Vektors, seine Richtung bleibt hingegen gleich.

Bei der Multiplikation mit einem Skalar kleiner -1 verlängert sich der Vektor und seine Richtung ändert sich um 180°. Der Vektor wird dann genau entgegengesetzt eingezeichnet.

Beispiel: Skalieren von Vektoren

BEISPIEL

Wir betrachten den Vektor .

Berechne:

a) $2,5\vec{a}$

b) $-1,25\vec{a}$

c) $0,75\vec{a}$

d) $-0,5\vec{a}$

a)

$$2,5\vec{a} = 2,5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \cdot 4 \\ 2,5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Der Ausgangsvektor verlängert sich und behält seine Richtung bei.

b)

Der Ausgangsvektor verlängert sich und ändert seine Richtung im 180°.

c)

Der Ausgangsvektor verkürzt sich und behält seine Richtung bei.

d)

$$-0,5\vec{a} = -0,5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \cdot 4 \\ -0,5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Ausgangsvektor verkürzt sich um die Hälfte und ändert seine Richtung um 180°.

1.1.4 Einheitsvektor, Länge von Vektoren

Ein Vektor der die Länge $|1|$ besitzt, wird in der Mathematik als Einheitsvektor bezeichnet und weist in Richtung der positiven Koordinatenachsen.

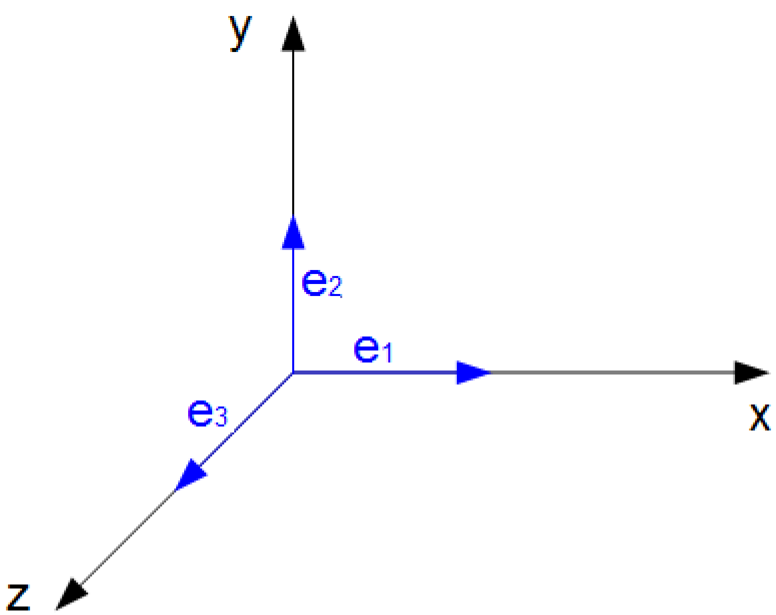
Basisvektoren

Die drei Achsen x, y und z eines dreidimensionalen Koordinatensystems werden durch die drei Einheitsvektoren $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$ und $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$ bestimmt. Da diese drei Vektoren die Basis für das Koordinatensystem bilden, werden diese speziellen Einheitsvektoren auch Basisvektoren genannt.

Hierbei stellt $\vec{e_1}$ den Einheitsvektor in x - Richtung dar, die Einheitsvektoren $\vec{e_2}$ bzw. $\vec{e_3}$ zeigen in y - Richtung bzw. in z - Richtung des dreidimensionalen Koordinatensystems.

MERKE

Die angelsächsische Bezeichnung zur Darstellung der Einheitsvektoren ist $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$.



Einheitsvektoren

Mit Hilfe dieser 3 Basisvektoren lässt sich jeder Vektor im dreidimensionalen Raum als Linearkombination der Basisvektoren darstellen:

BEISPIEL

Gegeben sei der Vektor $\vec{x} = (-10, 20, 5)$.

Der Ortsvektor ist dann eine Linearkombination aus den drei Basisvektoren:

Berechnung des Einheitsvektors

Um den Einheitsvektor eines beliebig langen Vektors zu ermitteln, muss man die einzelnen Komponenten eines Vektors kennen und diese durch die Länge des Vektors dividieren:

METHODE

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Dabei ist $|\vec{a}|$ die Länge des Vektors $\vec{a}$. Die **Länge** von Vektoren kann wie folgt bestimmt werden:

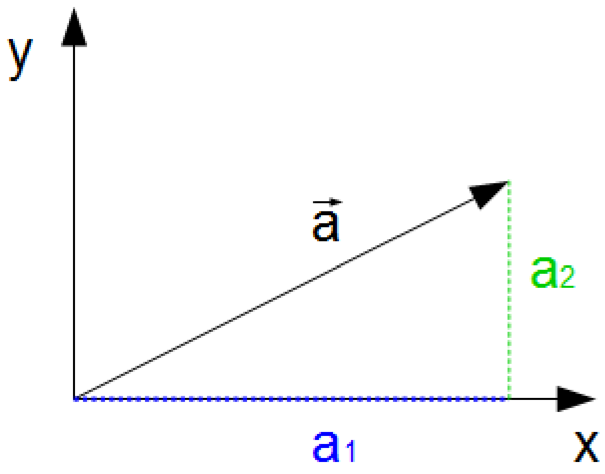
METHODE

Länge eines Vektors in der Ebene: $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

bzw.

Länge eines Vektors im Raum: $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Für den Vektor $\vec{a}$ in der Ebene wird die Länge mittels Satz des Pythagoras für ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt:



Für die Länge von Vektoren gelten die folgenden Rechenregeln:

METHODE

$$|\vec{a}| = |-\vec{a}|$$

$$|c \cdot \vec{a}| = |c| \cdot |\vec{a}|$$

Dreiecksungleichung: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

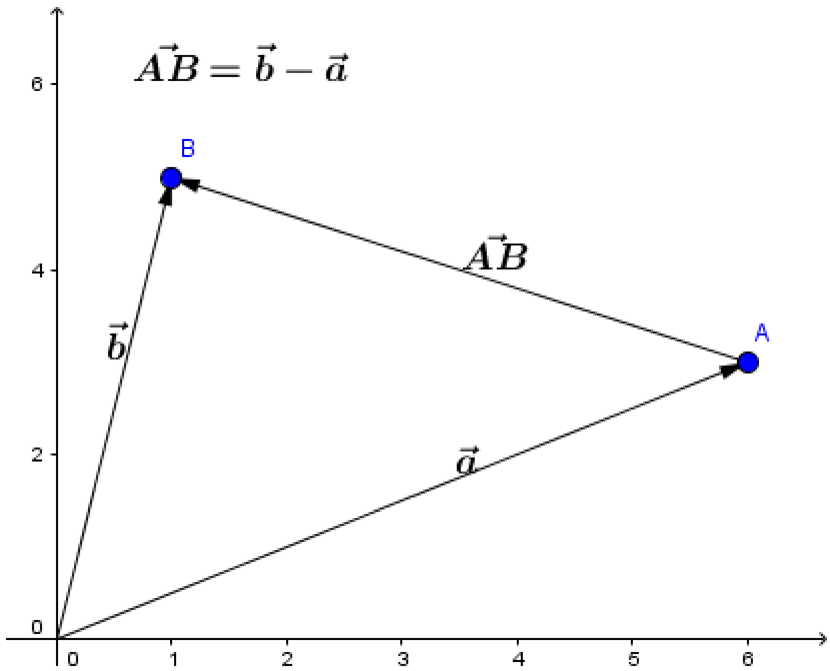
Abstand der Endpunkte von $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$ **:** $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}|$

Anwendungsbeispiel: Länge von Vektoren / Einheitsvektor

BEISPIEL

Bitte berechnen die Länge des Vektors zwischen den Punkten $A(6,3)$ und $B(1,5)$!

Es soll nun die Länge des Vektors $\vec{AB}$ berechnet werden. Dieser Vektor geht vom Punkt A zum Punkt B, der Pfeil zeigt also auf den Punkt B. Die beiden Punkte können mittels der Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden. Diese zeigen vom Koordinatenursprung auf die jeweiligen Punkte.



Es wird zunächst der Vektor $\vec{AB}$ bestimmt, indem der Vektor $\vec{a}$ von dem Vektor $\vec{b}$ subtrahiert wird. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entsprechen den Punkten, auf welchen sie zeigen, da diese im Ursprung $P(0,0)$ beginnen. Formal richtig werden diese bestimmt durch:

$$\vec{a} = A(6,3) - P(0,0) = (6,3)$$

$$\vec{b} = B(1,5) - P(0,0) = (1,5)$$

Es kann nun der Vektor $\vec{AB}$ bestimmt werden:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (1,5) - (6,3) = (-5,2)$$

Der hier berechnete Vektor stellt zunächst ebenfalls einen Ortsvektor dar, welcher im Urpsrung

$P(0,0)$ beginnt und auf den Punkt $(-5,2)$ zeigt. Dieser muss dann parallel zu sich selbst in die Punkte A und B verschoben werden.

Die Länge des Vektors wird dann berechnet durch:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5,39$$

MERKE

Der Vektor $\vec{BA}$ würde bestimmt durch: $\vec{a} - \vec{b}$

Die Länge wäre demnach identisch: $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$

BEISPIEL

Wie sieht der dazugehörige Einheitsvektor aus?

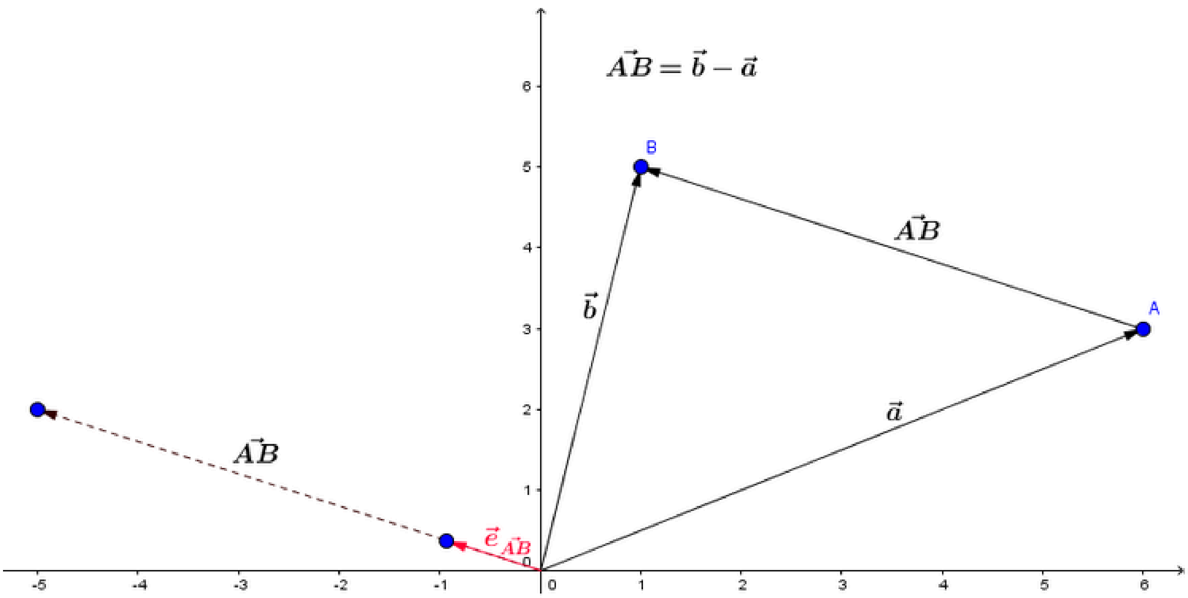
Der Einheitsvektor wird bestimmt durch:

Es wird nun also der Vektor $\vec{AB}$ durch seine Länge geteilt bzw. mit dem Kehrwert multipliziert:

$$\vec{e}_{\vec{AB}} = \frac{1}{5,39} \cdot (-5,2) = (-0,93,\ 0,37)$$

Der Einheitsvektor ist demnach $(-0,93,\ 0,37)$ mit der Länge 1:

$$|\vec{e}_{\vec{AB}}| = \sqrt{(-0,93)^2 + 0,37^2} \approx 1$$



In der obigen Grafik ist der Ortsvektor $\vec{AB}$ (gestrichelt) zu sehen. Dieser zeigt vom Koordinatenursprung auf den Punkt $(-5, 2)$. Wird dieser nun parallel zu sich selbst verschoben, so liegt er genau zwischen den beiden Punkten A und B und zeigt von Punkt A auf den Punkt B.

Der Einheitsvektor $\vec{e}_{\vec{AB}}$ zeigt in Richtung des Vektors $\vec{AB}$, ist jedoch auf die Länge 1 normiert worden. Der Vektor $\vec{AB}$ besitzt hingegen die Länge $5,39$.

BEISPIEL

Berechne bitte die Länge des Vektors zwischen den Punkten $A(9,5,6)$ und $B(7,4,4)$!

Zunächst wird der Vektor $\vec{AB}$ bestimmt:

Dann wird die Länge berechnet:

Die Länge beträgt damit: $|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

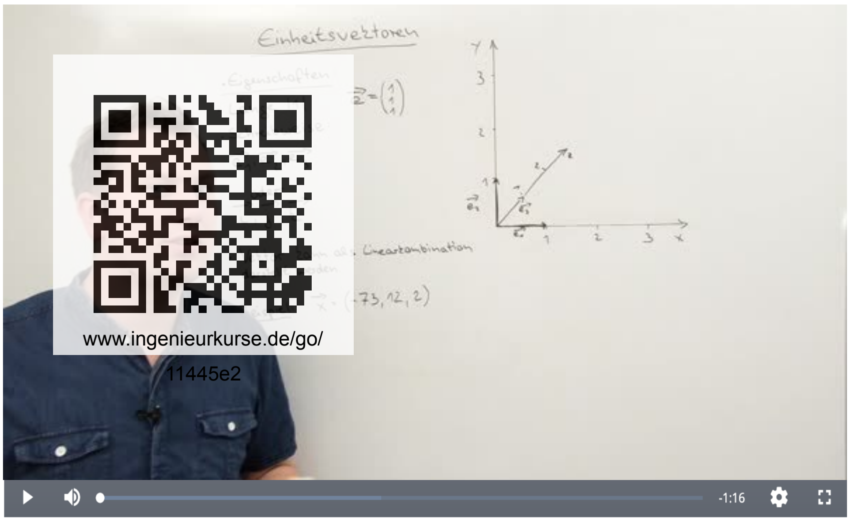
BEISPIEL

Wie sieht der dazugehörige Einheitsvektor aus?

Der Einheitsvektor hat die Länge 1. Um diesen zu ermitteln, muss der Vektor $\vec{AB} = (-2, -1, -2)$ durch seine Länge geteilt werden:

$$e_{\vec{AB}} = (-2, -1, -2) \cdot \frac{1}{3} = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$$

Die Länge des Einheitsvektors beträgt 1:



1.1.5 Dreiecksungleichung

Die Dreiecksungleichung besagt, dass die Summe zweier Seiten eines Dreiecks mindestens so groß ist wie die andere Dreiecksseite.

Dreieck

Analog dazu: Eine Dreiecksseite ist höchstens so lang wie die Summe der beiden anderen Seiten ist. Es muss hier der Betrag der Längen betrachtet werden:

METHODE

Dreiecksungleichung: $|a| + |b| \geq |a+b|$

mit

a = Länge der Seite a

b = Länge der Seite b

$|a+b|$ = Länge der Seite a+b

Für Vektoren gilt analog:

METHODE

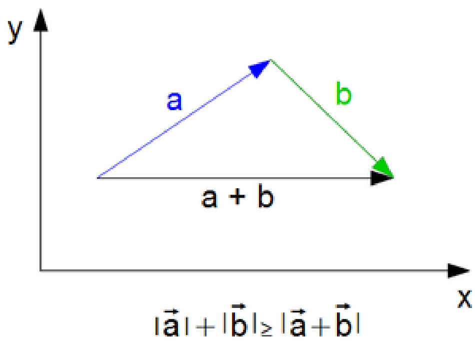
Dreiecksungleichung für Vektoren: $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$

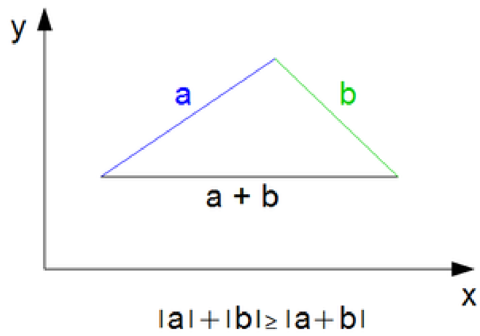
mit

$|\vec{a}|$ = Länge der Seite a

$|\vec{b}|$ = Länge der Seite b

$|\vec{a} + \vec{b}|$ = Länge der Seite a+b





Beweis der Dreiecksungleichung

Der Beweis der Dreiecksungleichung wird wie folgt durchgeführt:

Es gilt:

Wenn $a \leq |a|$ und **(1)** und

wenn $-a \leq |a|$ und **(2)**

Für $(a+b)$ und $-(a+b)$ gilt auch $|a+b|$.

Zusammenfassen von **(1)** und **(2)** ergibt: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Umgekehrte Dreiecksungleichung

Beweis der umgekehrten Dreiecksungleichung

Es gilt: $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$ (Dreiecksungleichung)

(1) Einsetzen von :

$$|\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} - \vec{b} + \vec{b}| \quad = \quad |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a}|$$

(2) Einsetzen von :

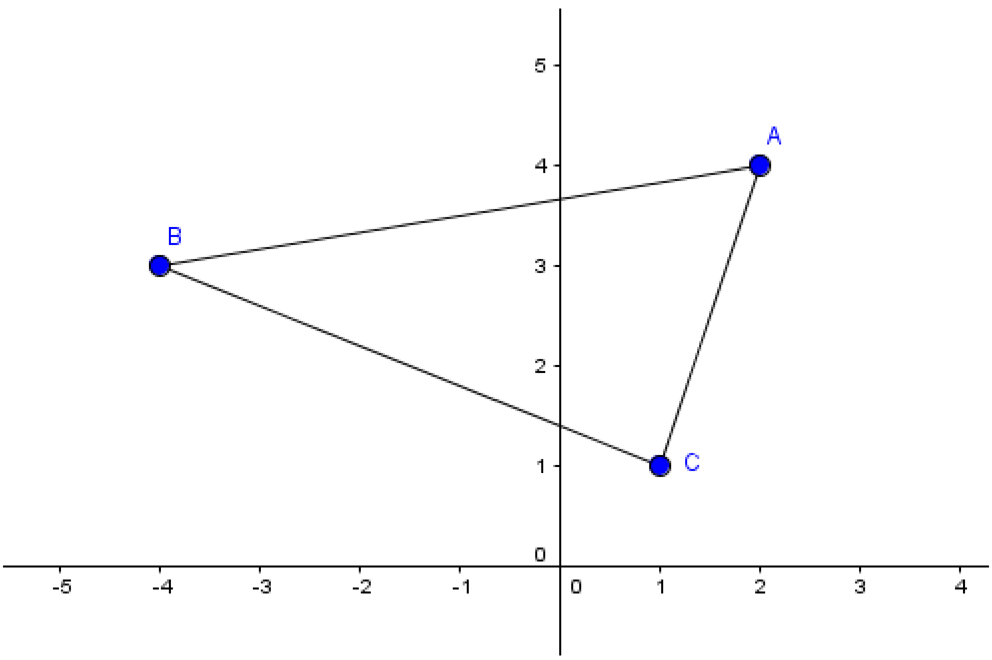
$$|\vec{a}| + |\vec{b} - \vec{a}| \geq |\vec{a} + \vec{b} - \vec{a}| \quad = \quad |\vec{a}| + |\vec{b} - \vec{a}| \geq |\vec{b}|$$

Aus **(1)** folgt:

Aus **(2)** folgt:

Zusammengefasst:

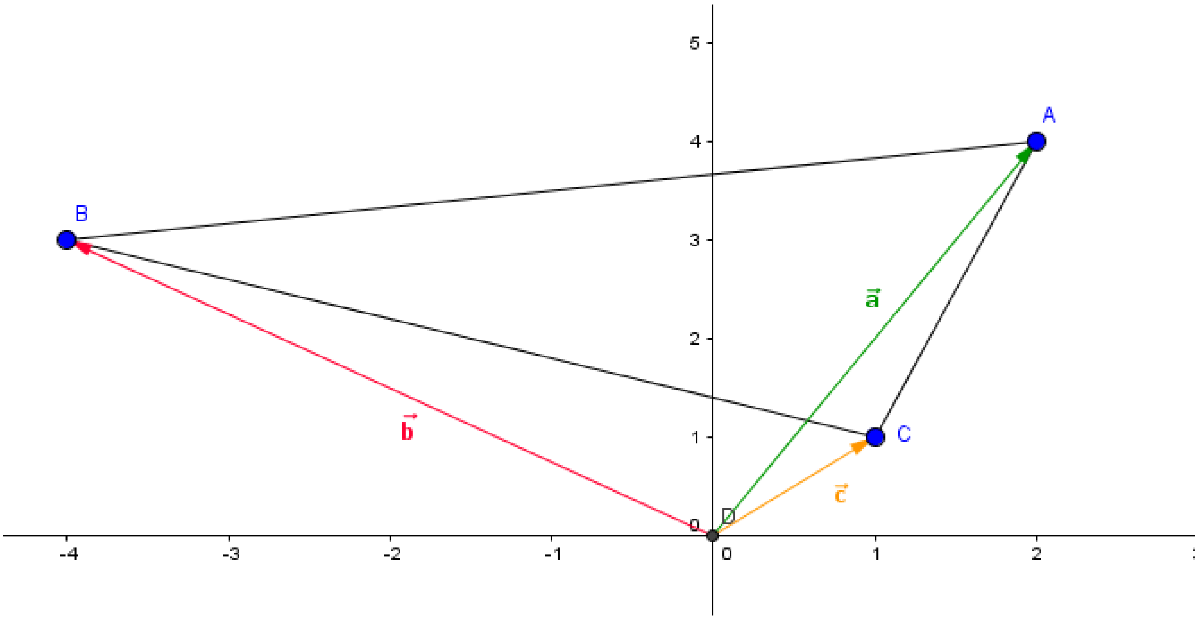
Zahlenbeispiel: Dreiecksungleichung



BEISPIEL

Gegeben seien die drei Punkte $A(2,4)$, $B(-4,3)$ und $C(1,1)$. Bitte zeige, dass die Verbindung von Punkt B über A nach C länger ist als von B nach C.

Zunächst einmal werden die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eingeführt. Dabei zeigt der Vektor $\vec{a}$ vom Ursprung auf den Punkt A, der Vektor $\vec{b}$ vom Ursprung auf den Punkt B und der Vektor $\vec{c}$ vom Ursprung auf den Punkt C:



Die Ortsvektoren werden wie folgt berechnet:

$$\vec{a} = (2,4) - (0,0) = (2,4)$$

$$\vec{b} = (-4,3) - (0,0) = (-4,3)$$

$$\vec{c} = (1,1) - (0,0) = (1,1).$$

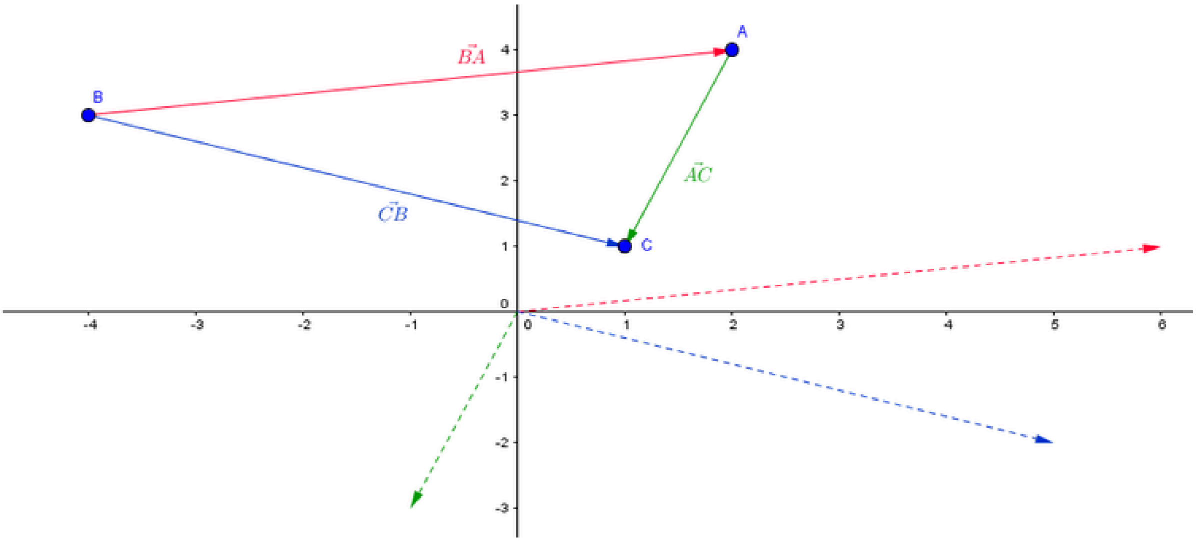
Es können nun mittels Vektoraddition die Vektoren $\vec{BA}$, $\vec{AC}$ und $\vec{BC}$ bestimmt werden:

$$\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b} = (2,4) - (-4,3) = (6,1)$$

$$\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (1,1) - (2,4) = (-1,-3)$$

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (1,1) - (-4,3) = (5,-2)$$

Diese Vektoren stellen zunächst wieder Ortsvektoren dar, die vom Ursprung auf die Punkt (6,1), (-1,-3) und (5,-2) zeigen. Diese werden dann parallel zu sich selbst in die Punkte verschoben. Es ergibt sich das folgende Bild:



In der obigen Grafik sind die Ortsvektoren (gestrichelte Vektoren) eingezeichnet, welche auf die entsprechenden Punkte zeigen. Werden diese nun parallel zu sich selbst in die Punkte A, B, und C verschoben, so sieht man deutlich, dass diese die Vektoren zwischen den Punkten darstellen. Es kann als nächstes die Länge der Vektoren bestimmt werden und dadurch die Dreiecksungleichung gezeigt werden:

$$|\vec{BA}| + |\vec{AC}| \geq |\vec{BC}|$$

$$|\vec{BA}| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

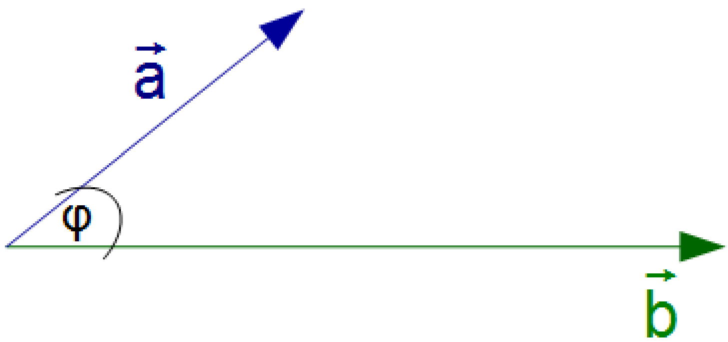
$$9,25 \geq 5,39$$

Die Ungleichung ist erfüllt. Die zwei Dreiecksseiten sind länger als die direkte Verbindung.

1.2 Das Skalarprodukt

1.2.1 Skalarprodukt und Winkel

Sind zwei Vektoren $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$ (also vom Nullvektor verschieden), so existiert ein Winkel φ, welcher von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen wird mit $0 \leq \varphi \leq \pi$.



eingeschlossener Winkel

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt eine Zahl (Skalar).

Für die Berechnung des Skalarprodukts im kartesischen Koordinatensystem verwendet man folgende Formel, bei der der Winkel zwischen den beiden Vektoren nicht bekannt sein muss:

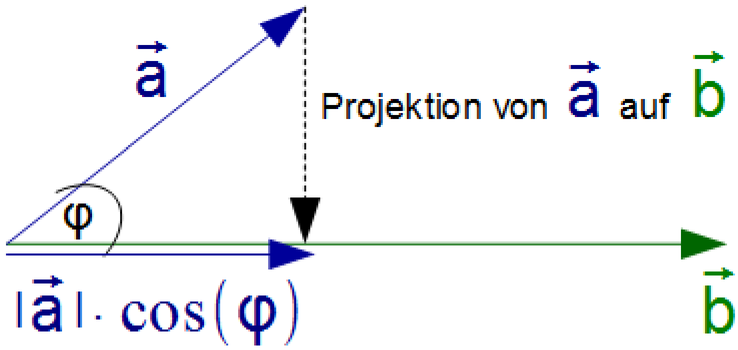
> MERKE
>
> **Skalarprodukt:**

Für die geometrische Berechnung verwendet man die Formel, die den Winkel zwischen den beiden Vektoren enthält:

> MERKE
>
> **Skalarprodukt:** $\vec{a} \cdot \vec{b}$:=

Die Zahl $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ergibt sich folgendermaßen:

Projiziert man den Vektor $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$, so ergibt sich ein Vektor $\vec{a}_b$ (siehe Grafik unten). Der neue Vektor $\vec{a}_b$ besitzt die Länge $|\vec{a}| \cos(\varphi)$. Multipliziert man diese Länge mit $|\vec{b}|$ (Länge des Vektors $\vec{b}$), so erhält man $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



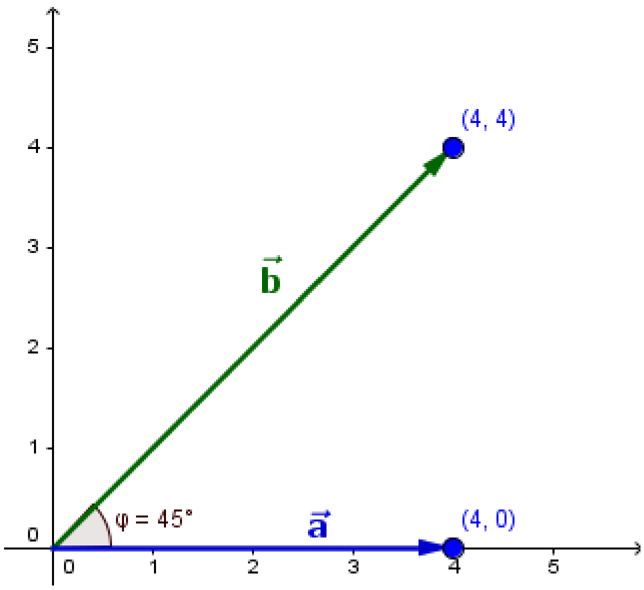
Projektion

Anwendungsbeispiel: Skalarprodukt

BEISPIEL

Es seien folgende Vektoren gegeben: und $\vec{b} = (4, 4)$. Bitte berechne $\vec{a} \cdot \vec{b}$!

Es werden zunächst die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingezeichnet. Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beträgt :



Es wird als nächstes das Skalarprodukt berechnet durch:

Winkelberechnung

Das Ablesen des Winkels (wie im obigen Beispiel) ist selten möglich. Deswegen kann man das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ aus den Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen und daraus den Winkel $\cos(\varphi)$ ermitteln.

MERKE

Berechnung des Skalarprodukts:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Berechnung des Winkels:

$$\Longrightarrow \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Anwendungsbeispiel: Skalarprodukt ohne Kenntnis des Winkels

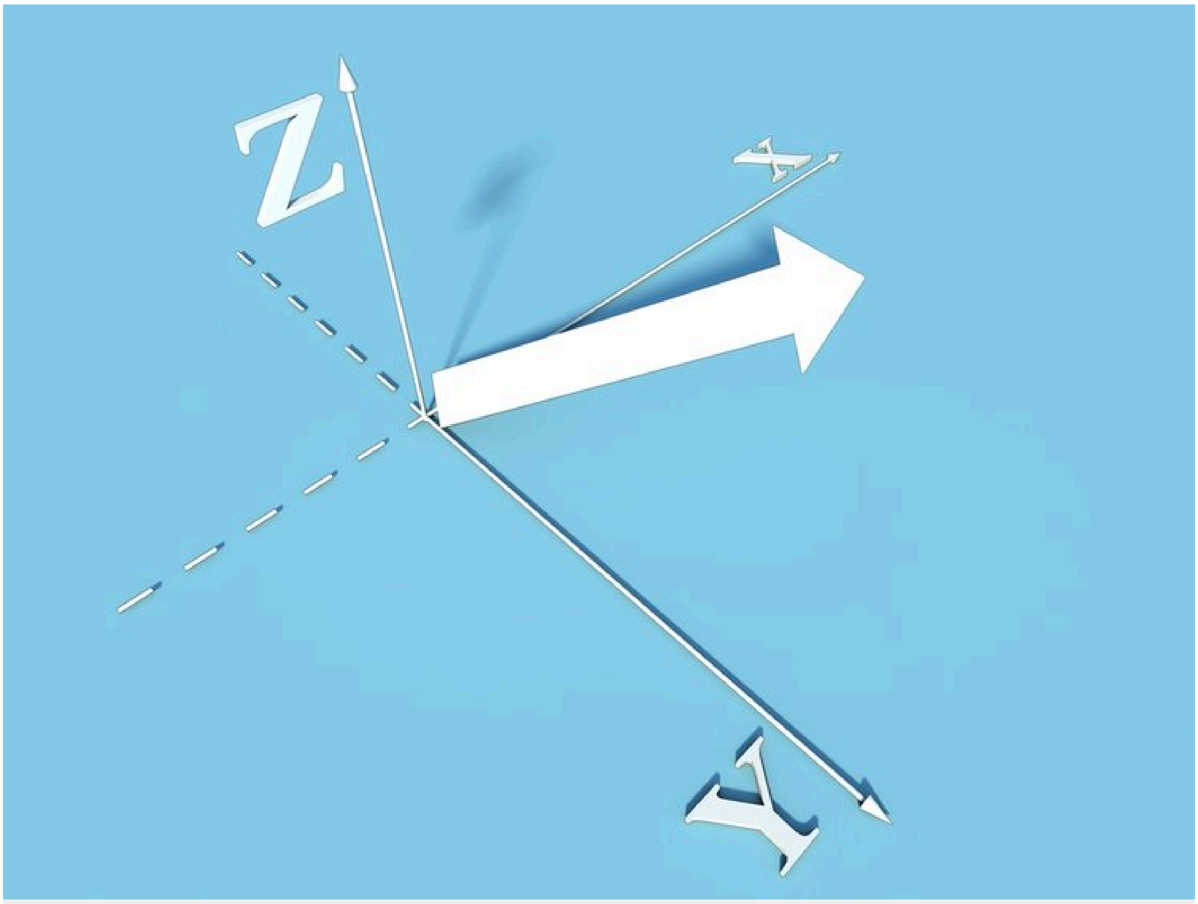
BEISPIEL

Gegeben seien die oben angegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Bitte berechne das Skalarprodukt und den Winkel!

Das Skalarprodukt kann ohne Kenntnis des Winkels wie folgt berechnet werden:

Die Berechnung des Winkels erfolgt dann mit der Formel aus der Merkebox:

1.2.2 Zerlegung von Vektoren



Vektor

Wie bereits in dem vorherigen Kapitel gezeigt, kann man mit dem Skalarprodukt den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie man einen Vektor $\vec{a}$ durch einen anderen Vektor $\vec{b}$ und einem zu $\vec{b}$ orthogonalen (senkrechten) Vektor $\vec{x}$ darstellt.

METHODE

Die orthogonale Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ bezüglich eines Vektors $\vec{b}$ (auch als orthogonale Projektion bezeichnet) ist die Zerlegung des Vektors $\vec{a}$ in zwei Vektoren, einer parallel zu $\vec{b}$ und einer senkrecht zu $\vec{b}$. In Summe ergeben diese Vektoren den Vektor $\vec{a}$.

MERKE

Das bedeutet: Der gegebene Vektor $\vec{a}$ wird durch eine Kombination aus dem gegeben Vektor $\vec{b}$ und einem unbekannten Vektor $\vec{x}$, welcher senkrecht zu $\vec{b}$ ist, dargestellt:

$$\vec{a} = s \cdot \vec{b} + \vec{x}$$

BEISPIEL

Wie müssen wir s und $\vec{x}$ wählen, sodass $\vec{b}$ und $\vec{x}$ orthogonal zueinander (bzw. senkrecht) stehen?

Zwei Vektoren heißen zueinander **orthogonal**, wenn sie einen rechten Winkel bilden und ihr **Skalarprodukt gleich null** ist.

Zwei Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{x}$ sind orthogonal, wenn:

MERKE

orthogonale Vektoren:

Mit diesem Wissen können wir nun das Beispiel lösen:

(1) Die Gleichung $\vec{a} = s \cdot \vec{b} + \vec{x}$ muss nach der unbekannten $\vec{x}$ aufgelöst werden:

(2) Diese Gleichung wird dann in die Gleichung $\vec{b} \cdot \vec{x} = 0$ eingesetzt:

(3) Auflösen nach s ergibt:

$$\vec{b} \cdot \vec{a} - s \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = s \cdot \vec{b} \cdot \vec{b}$$

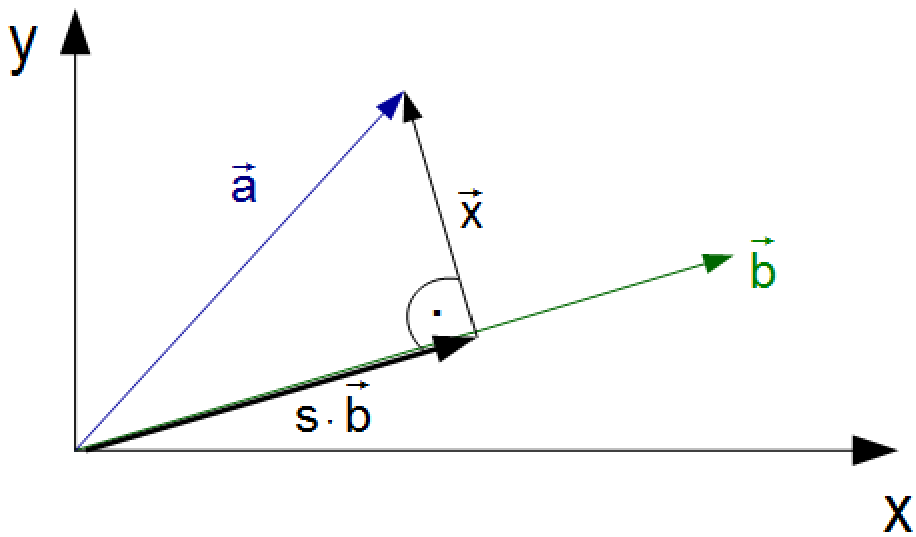
$$s = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

(4) Einsetzen von s in $\vec{x} =$ ergibt:

MERKE

orthogonale Zerlegung von $\vec{a}$ längs $\vec{b}$:

Die obige Gleichung entspricht der orthogonalen Zerlegung von $\vec{a}$ längs $\vec{b}$:



orthogonale Zerlegung

Die obige Grafik zeigt, dass der Vektor $\vec{a}$ durch den Vektor $\vec{b}$ und einem zu $\vec{b}$ senkrechten Vektor $\vec{x}$ dargestellt wird. Dabei muss der Vektor $\vec{b}$ mit der Zahl s so mulitpliziert (skaliert) werden, dass sich dieser verkürzt. In diesem Fall liegt s zwischen 0 und 1 .

Anwendungsbeispiel: Zerlegung von Vektoren

BEISPIEL

Gegeben seien die folgenden Vektoren: $\vec{a} = (0, 4)$ und $\vec{b} = (3, 3)$

Lösung der orthogonale Zerlegung:

$$\vec{a} = s \cdot \vec{b} + \vec{x}$$

Bevor wir die obige Formel

benutzen, berechnen wir die Skalarprodukte:

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

Diese setzen wir anschließend in die Formel ein:

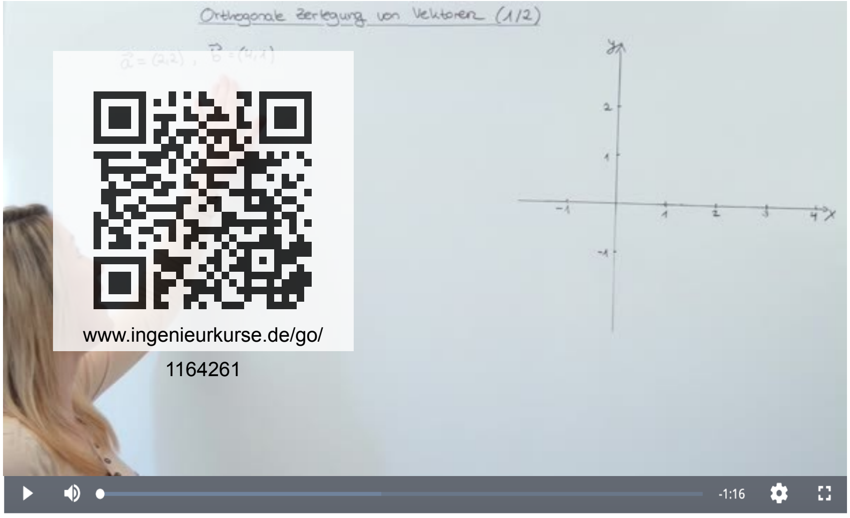
Gegenrechnung

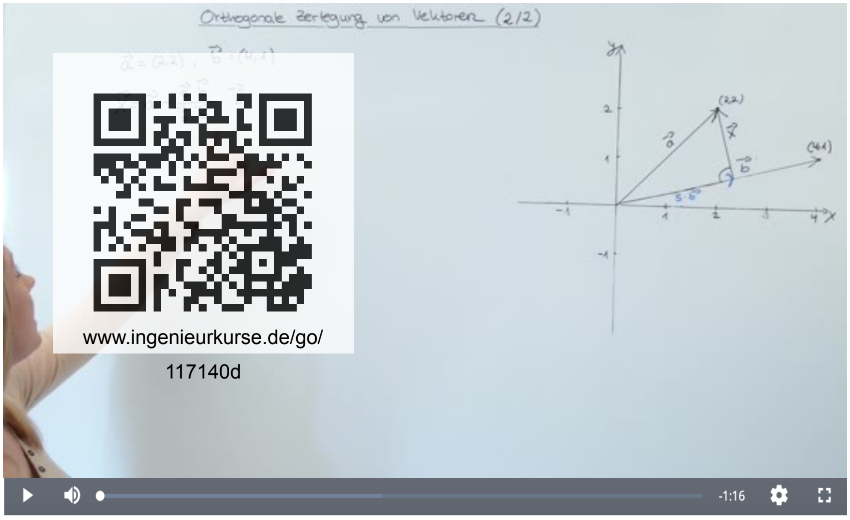
$$\vec{a} = s \cdot \vec{b} + \vec{x}$$

$$\vec{a} = \frac{2}{3} \cdot (3, 3) + (-2, 2) = (0, 4)$$

Prüfung der Orthogonalität

$$\vec{b} \cdot \vec{x} = 0$$





1.2.3 Rechengesetze für das Skalarprodukt

MERKE

Rechengesetze für das Skalarprodukt:

1. Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2. $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (für $\alpha \in \mathbb{R}$)

3. Orthogonalitätstest: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \longleftrightarrow \vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b}$

4. Distributivgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

5. Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Aus der Definition aus dem vorherigen Kurstext ergeben sich direkt die Punkte 1., 2. und 3.

Das Distributivgesetz ist auch für den Fall, dass $\vec{c} = 0$ ist erfüllt. Für den Fall $\vec{c} \neq 0$ legen wir $\vec{c}$ in Richtung der positiven x -Achse. Somit ist dann $\vec{c} = \alpha \vec{e}_1$.

Mit $\vec{a} \geq 0$, mit 2. sowie mit

ergibt sich schließlich:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \alpha \ a_1 \,,$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \alpha \ b_1 \,,$$

.

1.3 Das Vektorprodukt

Das **Vektorprodukt** (auch **Kreuzprodukt**) ist anders als das Skalarprodukt ein **Vektor** und keine Zahl. Gekennzeichnet wird es durch $\times$ statt durch das Multiplikationszeichen $\cdot$ (siehe Skalarprodukt). Bei der Schreibweise $\vec{a} \times \vec{b}$ ergibt sich also ein Vektor als Ergebnis, wohingegen bei der Schreibweise $\vec{a} \cdot \vec{b}$ eine Zahl das Ergebnis ist.

Eigenschaften des Vektorprodukts

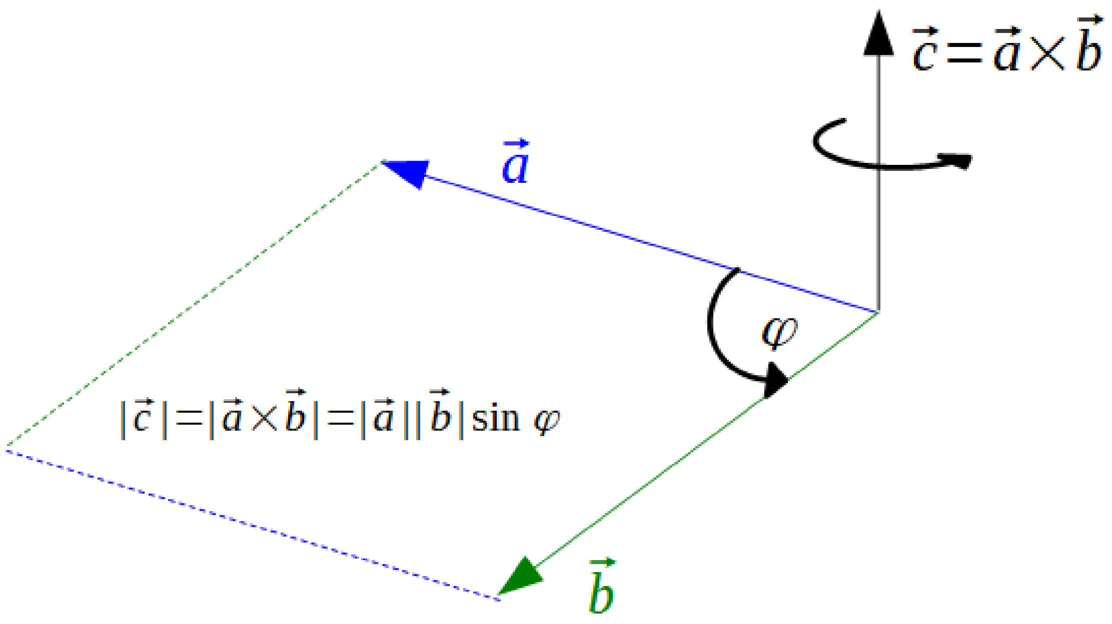
Das **Vektorprodukt** $\vec{a} \times \vec{b}$ aus den beiden **Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein **Vektor**, der die folgenden Eigenschaften aufweist:

METHODE

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, falls $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b} = 0$ oder sich $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$ befindet.

2. Der Betrag des Vektorprodukts $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ gibt den Flächeninhalt F des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms an(dies ist in der Grafik unten veranschaulicht). Dieser Flächeninhalt F ist gleich dem Betrag von Vektor $\vec{c}$. Also: $|\vec{c}| = |veca \times \vec{b}|$.

3. Der resultierende Vektor $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (siehe Grafik), ausgenommen die Vektoren liegen zueinander wie unter Punkt 1. beschrieben.



Vektorprodukt

Um die Richtung des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ festzulegen, bedient man sich folgender Methode:

MERKE

Rechte-Hand-Regel:

Bei der rechten-Hand-Regel werden der Zeige- und Mittelfinger für die Ausgangsvektoren verwendet, welche sich in derselben Ebene befinden. Der Daumen gibt dann die Richtung des resultierenden Vektors an. In Bezug auf die obige Grafik wäre das Vektorprodukt aus $\vec{a} \times \vec{b}$ wie folgt mit der Rechten-Hand-Regel zu bestimmen:

Wir schauen uns zunächst die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an. Wichtig für die Beurteilung welcher Vektor den Zeigefinger und welcher den Mittelfinger erhält ist ein Rechtssystem. So liegt der Vektor, welcher den Zeigefinger erhält immer rechts von dem anderen Vektor, wobei hier immer der kleinere Winkel als Beurteilung gewählt wird.

Im obigen Beispiel liegt Vektor $\vec{a}$ rechts von Vektor $\vec{b}$ ausgehend vom kleineren Winkel. Demnach erhält $\vec{a}$ den Zeigefinger und $\vec{b}$ den Mittelfinger. Der Daumen gibt dann die Richtung von $\vec{c}$ an und steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

Berechnung des Vektorprodukts

Die allgemeine Berechnung sieht wie folgt aus:

METHODE

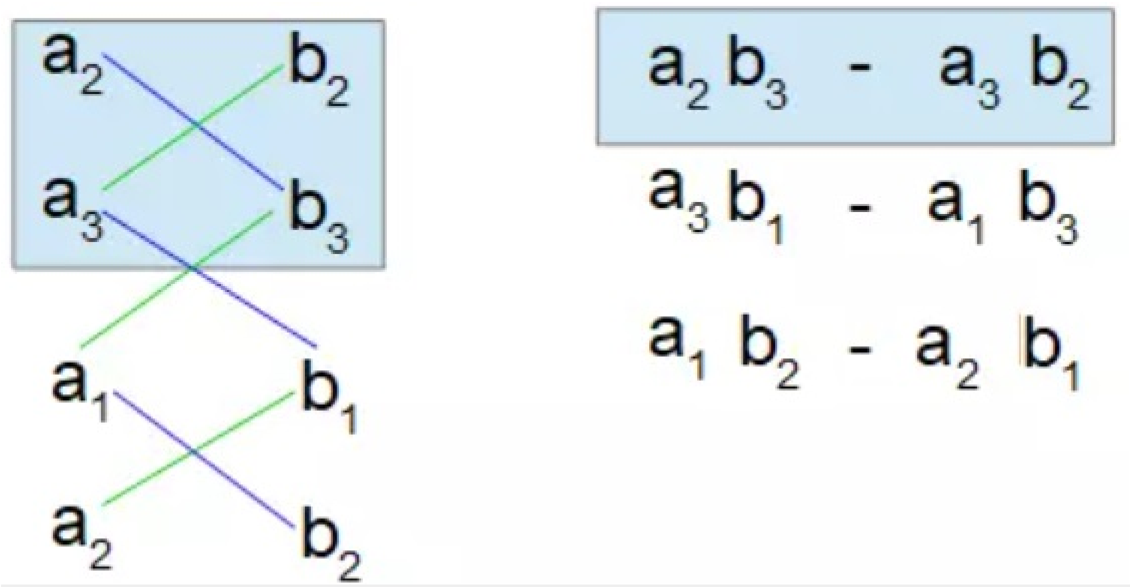
Bei der Berechnung des Vektorprodukts kann also entweder die obige Formel oder eine vereinfachte Variante angewendet werden:

Die Einträge der Vektoren werden zweimal untereinander geschrieben. Die erste Zeile und die letzte Zeile werden gestrichen:

$$\begin{array}{cc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

Vektorprodukt - Vereinfachung

Es werden dann über kreuz immer zwei Einträge miteinander multipliziert:



Vereinfachte Berechnung des Skalaprodukts über Diagonalen

Die Gleichung auf der rechten Seite entspricht genau der oben in der Methode-Box aufgeführten Gleichung.

PRÜFUNGSTIPP

Hast du also innerhalb der Klausur die Formel für das Vektorprodukt vergessen, so kannst du die Vektoren zweimal untereinander schreiben, die erste und letzte Zeile streichen und die obigen Diagonalen bilden. Die grünen Diagonalen müssen dabei von den blauen abgezogen werden.

Beispiel: Vektorprodukt

BEISPIEL

Bilde das Vektorprodukt aus den Vektoren und ! Berechne bitte außerdem die Fläche und den Winkel des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms!

Lösung: Berechnung des Vektorprodukts

Lösung: Berechnung der Fläche

$$F = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Der Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms beträgt $2,45$.

Lösung: Berechnung des Winkels

Der Winkel wird berechnet, wie im Abschnitt *Skalarprodukt und Winkel* beschrieben:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Wir bilden also zunächst das Skalarprodukt:

Danach bestimmen wir die Länge der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

Einsetzen in die obige Formel ergibt:

$$\cos(\varphi) = \frac{7}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{5}} = 0,944$$

Wir lösen nach dem Winkel auf:

Berechnung der Fläche eines Dreiecks aus drei Punkten

BEISPIEL

Gegeben seien die Punkte , und . Wie groß ist die Fläche des durch die drei Punkte aufgespannten Dreiecks?

Ein Dreieck ist ein halbes Parallelogramm. Wir können also die gleiche Methode benutzen. Die resultierende Fläche muss nur mit dem Faktor 1/2 multipliziert werden. Dazu müssen wir in diesem Fall zuerst die zwei aufspannenden Seitenvektoren berechnen:

Aus diesen beiden wird das Vektorprodukt bestimmt:

x

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt damit:

$$F = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8^2 + (-8)^2 + 0^2} = \frac{1}{2}\sqrt{128} \approx 5,66$$

MERKE

Bezieht man sich auf die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, so gelten stets die folgenden Regeln:

- $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0$
  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$
  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$
- $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$
  $\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = 0$
  $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$
- $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$
  $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$
  $\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0$
- Wenn: $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$
  dann: $\vec{e}_3 \times \vec{b} = -b_2\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2$

1.4 Das Spatprodukt

Das **Spatprodukt** stellt eine Kombination aus **Skalar-** und **Vektorprodukt** dar. Es wird aus je drei Vektoren gebildet.

Schreibweise: [$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ $:= \vec{a} \cdot (\vec{b}$ x $\vec{c}) := \vec{b} \cdot (\vec{a}$ x $\vec{c}) := \vec{c} \cdot (\vec{a}$ x $\vec{b})$.

MERKE

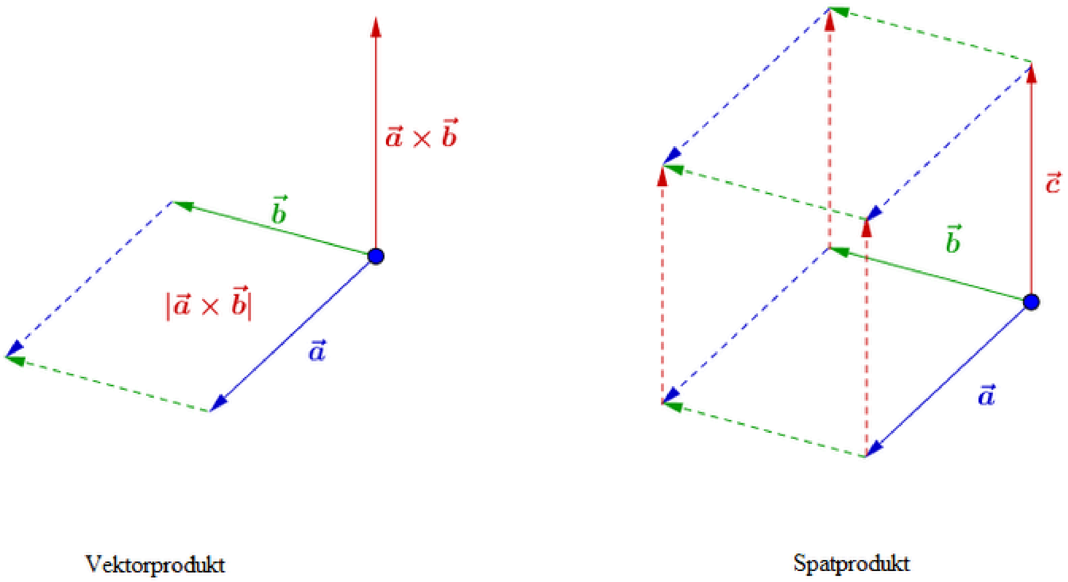
Der von den Vektoren aufgespannte **Spat** hat das **Volumen** $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| \cdot$

Im Umkehrschluss bedeutet dies:

1. Liegen alle 3 Vektoren in einer Ebene, so ergibt ihr **Spatprodukt** null:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$$

2. Ist einer der Vektoren ein **Nullvektor**, so ergibt das **Spatprodukt** ebenfalls null.



Vektorprodukt vs. Spatprodukt

Anwendungsbeispiel: Spatprodukt

BEISPIEL

Bestimme das Volumen des Spats der 3 Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$!

Zuerst empfiehlt es sich, die 3 Vektoren in eine Matrix zu übertragen.

Die Berechnung des Spatprodukts wird wie folgt vorgenommen:

Unter die Ausgangsmatrix werden die ersten beiden Zeilen der Matrix angefügt. Es wird dann diagonal vorgegangen. Beginnend mit dem ersten Wert in der ersten Zeile der Matrix wird nun Diagonal von links nach rechts unten multipliziert, bis der Rand der Matrix erreicht ist. Dieses Produkt wird dann mit der nächsten Diagonalen addiert. Die Anzahl an Zahlen bei der ersten Multiplikation muss dabei beibehalten werden. In diesem Beispiel sind dies 3 Zahlen. Es können also drei Diagonalen gebildet werden (grün). Die vierte Diagonale würde nur noch 2 Zahlen beinhalten. Alle entstandenen Produkte werden miteinander addiert. Danach folgt die Betrachtung der letzten Zahl aus der ersten Reihe. Hier wird nun von rechts nach links unten diagonal multipliziert. Die entstandenen Produkte werden hier jedoch subtrahiert. Am Ende der Rechnung ergibt sich das Volumen des Körpers.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 6 & -1 & -3 \\ -2 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-\qquad\qquad +$$

Berechnung des Spatprodukts

Die Berechnung des Spatprodukts ergibt sich dann wie folgt:

also $V = 69$ Volumeneinheiten.

1.5 Übungsaufgaben zur Vektorrechnung

In diesem Abschnitt stellen wir einige Beispielaufgaben zur Vektorrechnung vor.

Aufgabe 1: Addition und Subtraktion sowie Multiplikation mit einem Skalar

BEISPIEL

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (2, -4, 1)$ und $\vec{b} = (1, 1, -2)$.

Bitte berechne:

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $-2\vec{a}$

c) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

a)

b)

c)

Aufgabe 2: Länge eines Vektors

BEISPIEL

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (8, -3, -5)$ und $\vec{b} = (5, 5, -6)$.

Bitte berechne den Abstand der Endpunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$!

Die beiden Vektoren stellen Ortsvektoren dar, welche jeweils im Koordinatenurpsrung beginnen und auf die beiden Punkte $A(8, -3, -5)$ und $B(5, 5, -6)$ zeigen.

Die beiden Endpunkte sind also A und B. Es soll nun der Abstand zwischen diesen Punkten bestimmt werden. Der Abstand entspricht also gleich der Länge des Vektors, welcher zwischen diesen beiden Punkten liegt. Hierbei kann man den Vektor $\vec{AB}$ oder den Vektor $\vec{BA}$ betrachten, beide weisen dieselbe Länge auf. Es gilt:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

Dieser Vektor zeigt von Punkt A auf Punkt B.

Die Länge des Vektors wird bestimmt durch:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2 + (-1)^2} = \sqrt{74} \approx 8,60$$

Die Länge des Vektors $\vec{AB}$, welcher zwischen den beiden Punkten A und B liegt, ist gleichzeitig der Abstand der Endpunkte der Ortsvektoren $\vec{a}$ (zeigt auf den Punkt A) und $\vec{b}$ (zeigt auf den Punkt B).

Aufgabe 3: Einheitsvektor berechnen

BEISPIEL

Gegeben sei der Vektor $\vec{a} = (-3, 2, 5)$.

Bitte berechne den dazugehörigen Einheitsvektor!

Der Einheitsvektor wird bestimmt durch:

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Es muss demnach zunächst die Länge des Vektors $\vec{a}$ bestimmt werden:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38} \approx 6,16$$

Es kann als nächstes der Einheitsvektor mit der Länge 1 bestimmt werden:

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{6,16} \cdot (-3, 2, 5) \approx (-0,49, 0,32, 0,81)$$

Man bezeichnet dieses Vorgehen auch als Normierung von Vektor $\vec{a}$. Der Einheitsvektor $\vec{e}_{\vec{a}}$ weist in die Richtung von $\vec{a}$ und besitzt die Länge 1 .

1.6 Geraden im Raum

Geraden können mittels Parameterdarstellung durch Vektoren abgebildet werden.

Gerade durch den Ursprung

Eine Gerade durch den Koordinatenursprung wird allgemein definiert als:

METHODE

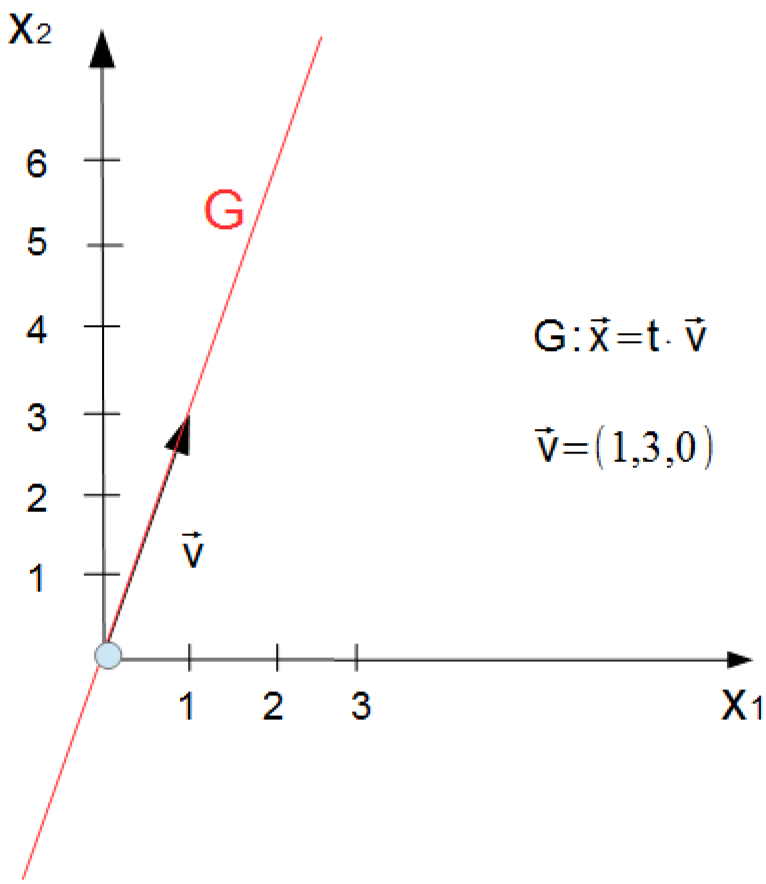
$$G : \vec{x} = t \cdot \vec{v}$$

mit

$t \in \mathbb{R}$ = Parameter

$\vec{v}$ = Richtungsvektor

Die Gerade mit obiger Gleichung verläuft dabei durch den Nullpunkt. Der Richtungsvektor $\vec{v}$ zeigt dabei die Richtung der Geraden an, der Parameter t die Länge der Geraden. In der folgenden Grafik ist der Richtungsvektor $\vec{v} = \{1, 3, 0\}$ zu sehen. Wir haben $x_3 = 0$ gesetzt, damit wir den Sachverhalt zweidimensional veranschaulichen können.

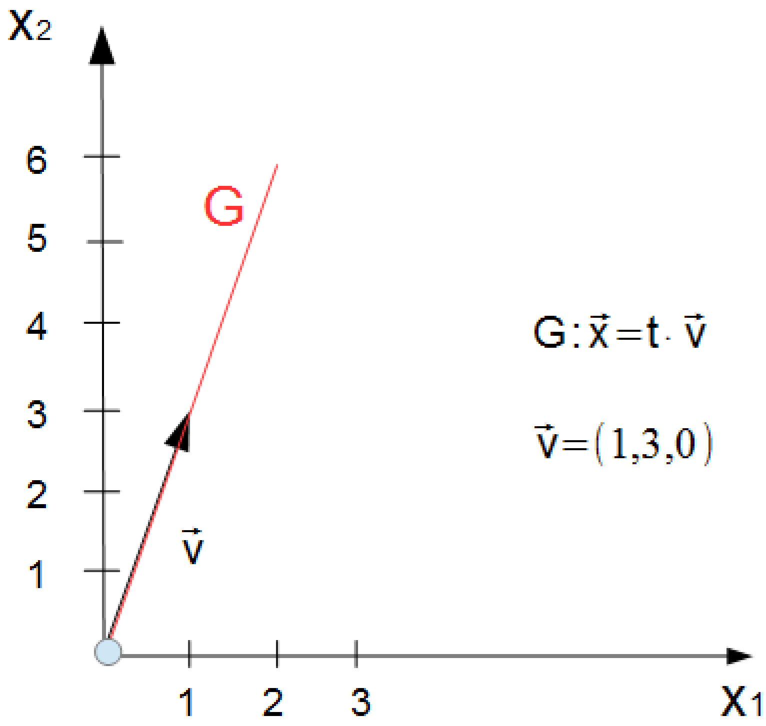


Die Richtung der Geraden ist somit bestimmt. Diese verläuft in Richtung des Richtungsvektors $\vec{v}$. Da der Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist, verläuft die Gerade sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt, je nachdem welche Werte t annimmt. Häufig wird ein Intervall für t angegeben.

Als Beispiel sei $t \in [0, 2]$.

$$\vec{v} = 0 \cdot (1, 3, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\vec{v} = 2 \cdot (1, 3, 0) = (2, 6, 0)$$



Es wurden hier die beiden äußeren Intervallpunkte gewählt und miteinander verbunden. t kann aber alle Werte von 0 bis 2 annehmen. Für die Bestimmung der Geraden reicht es jedoch aus, die Endpunkte miteinander zu verbinden.

Die Gerade verläuft also vom Ursprung in Richtung des Richtungsvektors bis zum Punkt (2,6,0).

Gerade durch einen Vektor

Häufig sind Geraden gegeben, welche nicht durch den Ursprung verlaufen, sondern durch den Endpunkt eines Vektors. Dies ist der Fall bei der folgenden Geradengleichung:

METHODE

$$G : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$$

mit

$\vec{a}$ = Ortsvektor

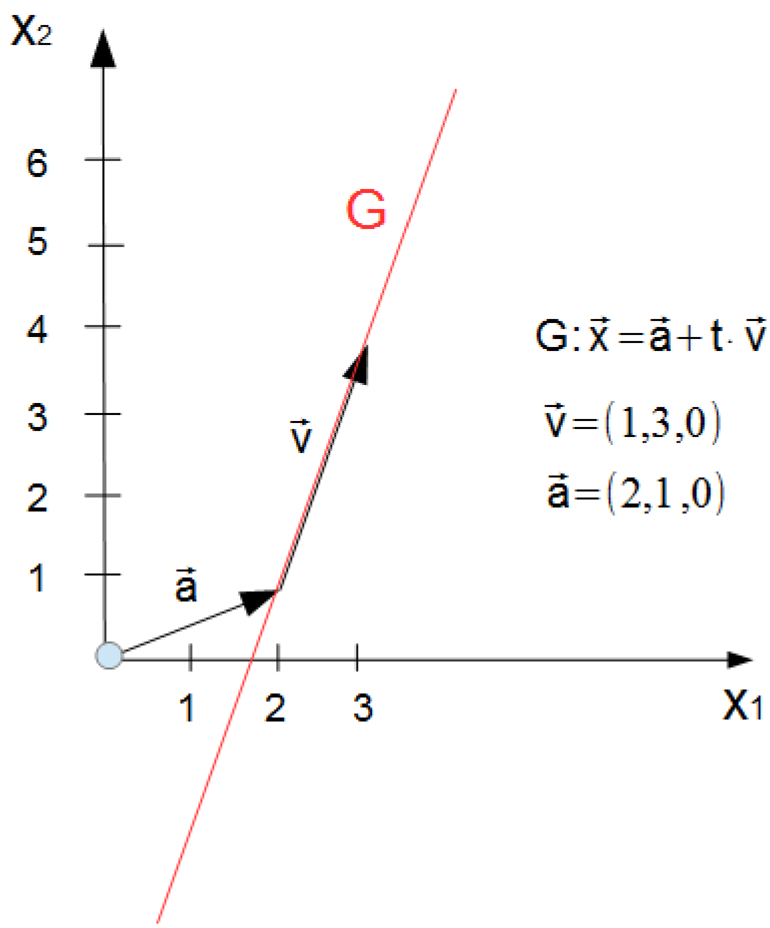
$t \in \mathbb{R}$ = Parameter

$\vec{v}$ = Richtungsvektor

Damit die obige Gerade nicht durch den Ursprung verläuft müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

- $\vec{a}$ muss ungleich null sein.
- $\vec{a}$ und $\vec{v}$ dürfen nicht in die gleiche Richtung weisen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so verläuft die obige Gerade nicht durch den Ursprung, sondern durch den Endpunkt des Ortsvektors $\vec{a}$. Wie diese Gerade eingezeichnet wird, siehst du in der nachfolgenden Grafik.



Der Vektor $\vec{a}$ ist ein Ortsvektor, geht also durch den Ursprung und zeigt auf den Punkt (2,1,0). Der Richtungsvektor $\vec{v}$ wird zunächst ebenfalls vom Ursprung auf den Punkt (1,3,0) eingezeichnet und dann (ohne die Richtung zu verändern) mit dem Fuß an die Spitze des Ortsvektors $\vec{a}$ verschoben (grafische Vektoraddition). Die Gerade verläuft wieder durch den Richtungsvektor $\vec{v}$ und durch die Spitze des Ortsvektors $\vec{a}$. Du erkennst deutlich, dass die Gerade **nicht** durch den Ursprung verläuft.

HINWEIS

In den folgenden Abschnitten betrachten wir jeweils zwei Geraden und zeigen ihre Lagemöglichkeiten zueinander auf. In einem dreidimensionalen Raum existieren für zwei Geraden vier Lagemöglichkeiten:

- Die Geraden sind identisch.
- Die Geraden sind echt parallel.
- Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.
- Die Geraden sind windschief zueinander.

Außerdem berechnen wir den Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden sowie den Abstand zwischen zwei Geraden!

1.6.1 Identische Geraden

Zwei Geraden g und h sind identisch, wenn beide auf derselben Wirkungslinie liegen, also $h = g$ gilt:

$$g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$$

$$h : \vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{u}$$

Bedingungen für identische Geraden:

METHODE

1. Die Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{u}$ sind Vielfache voneinander (kollinear).

2. Der Stützvektor der einen Geraden befindet sich auf der anderen Geraden.

Sind beide Bedingungen erfüllt, so handelt es sich um identische Geraden.

Sind beide Bedingungen erfüllt, so handelt es sich um identische Geraden.

HINWEIS

Der **Stützvektor** ist dabei der Ortsvektor **eines beliebigen Punkts** auf der Geraden. Dieser wird auch als Aufpunkt bezeichnet. So ist zum Beispiel $\vec{a}$ einer von vielen Stützvektoren auf der Geraden g .

Zum besseren Verständnis folgen zwei Beispiele, in welchen gezeigt wird, wann zwei Geraden identisch sind.

Beispiel 1: Identische Geraden

Gegeben seien die beiden Geraden

BEISPIEL

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1.Richtungsvektoren auf Kollinearität prüfen

Zunächst prüfen wir, ob die beiden **Richtungsvektoren** Vielfache voneinander sind. Um dies herauszufinden, müssen wir prüfen, ob die beiden Vektoren linear voneinander abhängig sind. Ist dies der Fall, so sind die beiden Richtungsvektoren kollinear. Wir prüfen also, ob es eine Zahl λ gibt, mit welcher multipliziert der Richtungsvektor der zweiten Geraden zum Richtungsvektor der ersten Geraden wird.

$$\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$$

Wird also beispielsweise der Richtungsvektor $\vec{u}$ der zweiten Geraden mit einer reellen Zahl λ multipliziert, sodass der Richtungsvektor $\vec{v}$ der ersten Geraden resultiert, dann sind beide Vektoren Vielfache voneinander, d. h. linear voneinander abhängig und liegen auf einer Wirkungslinie.

Wir stellen hierzu das lineare Gleichungssystem auf:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) $2 = 3\lambda$

(2) $4 = 6\lambda$

Wir lösen nun beide nach λ auf. Resultiert für λ beides Mal der selbe Wert, so sind beide Vektoren Vielfache voneinander.

(1) $\lambda = \frac{2}{3}$

(2) $\lambda = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Für beide Gleichungen resultiert $\lambda = \frac{2}{3}$. Wird also der Vektor $\vec{u}$ mit $\lambda = \frac{2}{3}$ multipliziert, so resultiert der Vektor $\vec{u}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

HINWEIS

Die erste Bedingung für identische Geraden ist erfüllt.

2. Liegt der Aufpunkt der Geraden h in der Geraden g?

Als nächstes wollen wir bestimmen, ob der Aufpunkt der Geraden h in der Geraden g liegt. Ist dies der Fall, so ist auch die zweite Bedingung erfüllt und es handelt sich um identische Geraden.

Der Aufpunkt der Geraden h ist der Ortsvektor der Geraden:

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir setzen den Aufpunkt der Geraden h mit der Geraden g gleich:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Auch hier stellen wir wieder das lineare Gleichungssystem auf und berechnen t_1 :

(1) $3 = 2 + 2t_1$

(2) $3 = 1 + 4t_1$

Wenn t_1 in allen Zeilen den gleichen Wert annimmt, liegt der Aufpunkt der Geraden h auf der Geraden g .

(1) $t_1 = \frac{1}{2}$

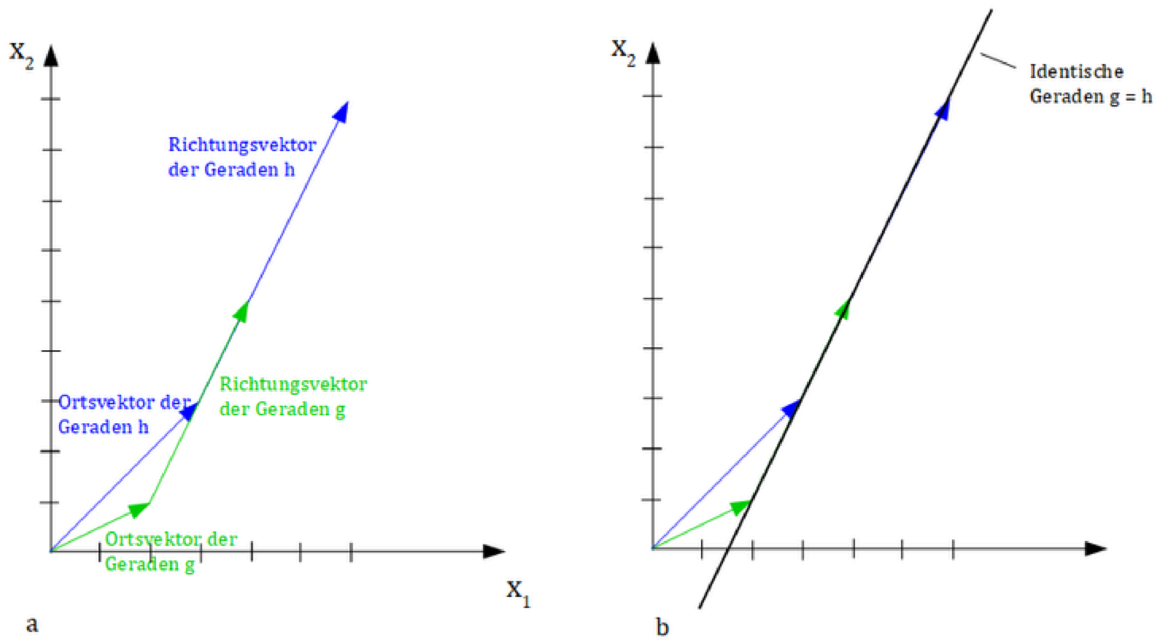
(2) $t_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Da t_1 in allen Zeilen denselben Wert annimmt, liegt der Aufpunkt der Geraden h auf der Geraden g .

HINWEIS

Die zweite Bedingung für identische Geraden ist erfüllt.

Da beide Bedingungen für identische Geraden erfüllt sind, sind beide Geraden Vielfache voneinander und es gilt $g = h$.



identische Geraden

Beispiel 2: Identische Geraden

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Prüfe, ob die beiden Geraden identisch sind!

1.Richtungsvektoren auf Kollinearität prüfen

Zunächst prüfen wir, ob die beiden Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind. Dazu ziehen wir die Richtungsvektoren heran:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

(1) $8 = -2\lambda$

(2) $-4 = 1\lambda$

(3) $2 = -0,5\lambda$

Wir bestimmen für jede Zeile λ :

(1) $\lambda = -4$

(2) $\lambda = -4$

(3) $\lambda = -4$

HINWEIS

Da in jeder Zeile $\lambda = -4$ ist, sind die beiden Richtungsvektoren Vielfache voneinander. Die erste Bedingung ist erfüllt.

Alternativ:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

(1) $-2 = 8\lambda$

(2) $1 = -4\lambda$

(3) $-0,5 = 2\lambda$

Wir bestimmen für jede Zeile λ :

(1) $\lambda = -\frac{1}{4}$

(2) $\lambda = -\frac{1}{4}$

(3) $\lambda = -\frac{1}{4}$

HINWEIS

Da in jeder Zeile $\lambda = -\frac{1}{4}$ ist, sind die beiden Richtungsvektoren Vielfache voneinander. Die erste Bedingung ist erfüllt.

2. Liegt der Aufpunkt der Geraden h in der Geraden g?

Danach überprüfen wir, ob der Aufpunkt der Geraden h in der Geraden g liegt (ist natürlich ebenfalls andersherum möglich).

Aufpunkt der Geraden h :

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Wir setzen den Aufpunkt mit der Geraden g gleich

und stellen das lineare Gleichungssystem auf:

(1) $-3 = 1 + 8t_1$

(2) $4 = 2 - 4t_1$

(3) $-5 = -4 + 2t_1$

Auflösen nach t_1 :

(1) $t_1 = -\frac{1}{2}$

(2) $t_1 = -\frac{1}{2}$

(3) $t_1 = -\frac{1}{2}$

Da in jeder Zeile $t_1 = -\frac{1}{2}$ ist, liegt der Aufpunkt der Geraden h in der Geraden g .

HINWEIS

Beide Bedingungen sind erfüllt, damit sind beide Geraden identisch.

Alternativ:

Wir können auch sagen: Liegt der Aufpunkt der Geraden g in der Geraden h ?

Aufpunkt g : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen des Aufpunktes g mit der Geraden h :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem aufstellen:

(1) $1 = -3 - 2t_2$

(2) $2 = 4 + 1t_2$

(3) $-4 = -5 - 0,5t_2$

Auflösen nach t_2 :

(1) $t_2 = -2$

(2) $t_2 = -2$

(3) $t_2 = -2$

HINWEIS

Es resultiert, dass diese Bedingung erfüllt ist, also der Aufpunkt von g in h liegt.

1.6.2 Parallele Geraden

Wir haben bereits identische Geraden kennengelernt. Parallele Geraden liegen - wie der Name bereits vermuten lässt - parallel zueinander. Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie in jedem Punkt denselben Abstand haben.

Für die Überprüfung muss die erste Bedingung der identischen Geraden erfüllt sein, deren zweite Bedingung darf jedoch nicht erfüllt sein.

Bedingungen für parallele Geraden:

METHODE

1. Die Richtungsvektoren der Geraden sind Vielfache voneinander.
2. Der Aufpunkt der einen Geraden befindet sich **nicht** auf der anderen Geraden.

Sind diese Bedingung erfüllt, so handelt es sich um parallele Geraden.

Beispiel 1: Parallele Geraden in der Ebene

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Prüfe, ob die beiden Geraden parallel zueinander sind!

Zunächst betrachten wir die beiden Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

(1) $2 = 3\lambda$

(2) $4 = 6\lambda$

Nach λ auflösen:

(1) $\lambda = \frac{2}{3}$

(2) $\lambda = \frac{2}{3}$

λ ist in beiden Zeilen gleich, d. h. die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander. Die 1. Bedingung ist erfüllt. Damit es sich um parallele Geraden handelt und nicht um identische, darf der Aufpunkt der einen Geraden nicht auf der anderen Geraden liegen. Wir setzen dazu den Aufpunkt der Geraden g mit der Geradengleichung h gleich:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufstellung des linearen Gleichungssystems:

(1) $2 = 4 + 3t_2$

(2) $1 = 3 + 6t_2$

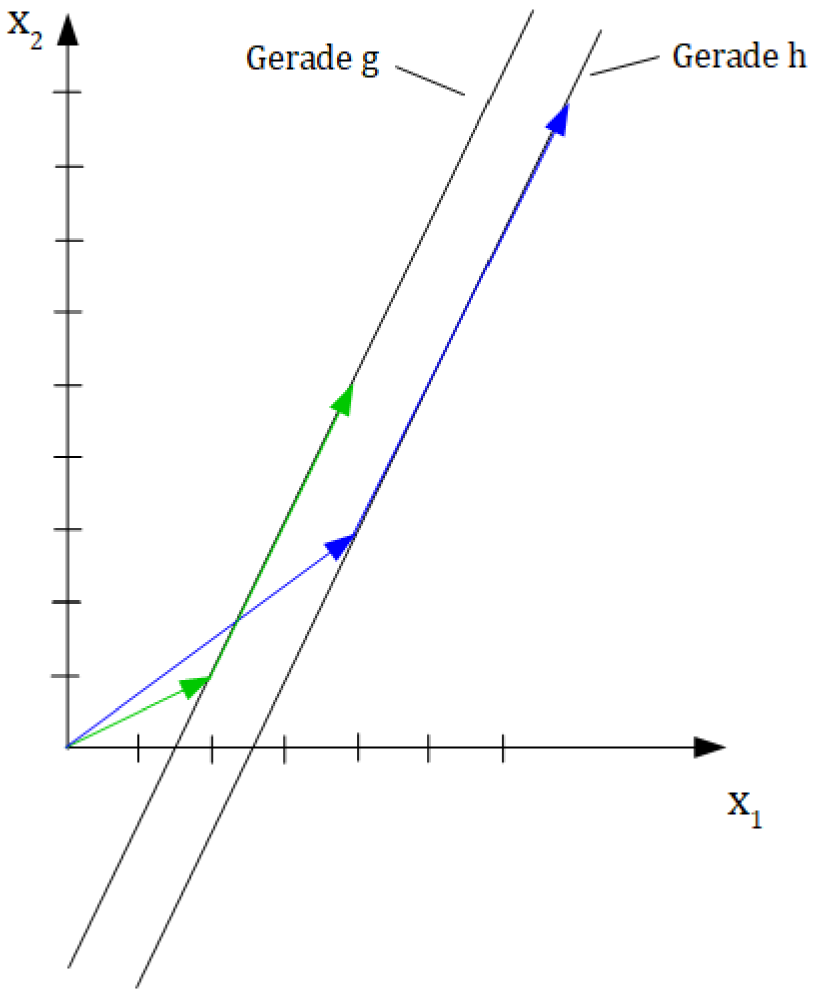
Auflösen nach t_2 :

(1) $t_2 = -\frac{2}{3}$

(2) $t_2 = -\frac{1}{3}$

Da in den beiden Zeilen die Werte für t_2 nicht identisch sind, liegt der Aufpunkt der Geraden g nicht auf der Geraden h . Damit liegen hier parallele Geraden vor.

Parallele Geraden



parallele Geraden

Beispiel 2: Parallele Geraden im Raum

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden Geraden:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Prüfe, ob die beiden Geraden parallel sind!

Zunächst prüfen wir ob die beiden **Richtungsvektoren** Vielfache voneinander sind:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das Gleichungssystem auf:

(1) $8 = -2\lambda$

(2) $-4 = 1\lambda$

(3) $2 = -0,5\lambda$

Auflösen nach λ:

(1) $\lambda = -4$

(2) $\lambda = -4$

(3) $\lambda = -4$

λ ist in allen Zeilen identisch, damit sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache voneinander.

Um identische Geraden ausschließen zu können, darf der Aufpunkt der einen Geraden nicht auf der anderen Geraden liegen. Wir setzen dazu den Aufpunkt der Geraden g mit der Geradengleichung h gleich:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das Gleichungssystem auf:

(1) $4 = -3 - 2t_2$

(2) $2 = 4 + t_2$

(3) $-4 = -5 - 0,5t_2$

Wir lösen nach t_2 auf:

(1) $t_2 = -3,5$

(2) $t_2 = -2$

(3) $t_2 = -2$

Die Werte sind für t_2 nicht identisch, d. h. der Aufpunkt der Geraden g liegt nicht auf der Geraden h. Damit liegen diese Geraden parallel zueinander.

1.6.3 Schnittpunkt zweier Geraden

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie man den Schnittpunkt zweier Geraden berechnet. Die allgemeine Vorgehensweise ist wie folgt:

- Gleichsetzen der Geradengleichungen
- Aufstellung und Lösung des linearen Gleichungssystems
- Bestimmung des Schnittpunktes

Zum besseren Verständnis folgt ein Beispiel zur Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden.

Beispiel: Schnittpunkt zweier Geraden

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Schnittpunkt beider Geraden!

Zunächst setzen wir beiden Geradengleichungen gleich:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Danach stellen wir das lineare Gleichungssystem auf:

(1) $4 - 3t_1 = 1 + t_2$

(2) $2 + 2t_1 = -2 + 2t_2$

Lösen des linearen Gleichungssystems indem (1) und (2) nach t_1 (oder t_2) aufgelöst und gleichgesetzt werden.

(1) $t_1 = -\frac{1 + t_2 - 4}{3} = 1 - \frac{t_2}{3}$

(2) $t_1 = t_2 - 2$

Gleichsetzen:

$$1 - \frac{t_2}{3} = t_2 - 2$$

Nach t_2 auflösen:

$$t_2 = \frac{9}{4}$$

Und damit:

$$t_1 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

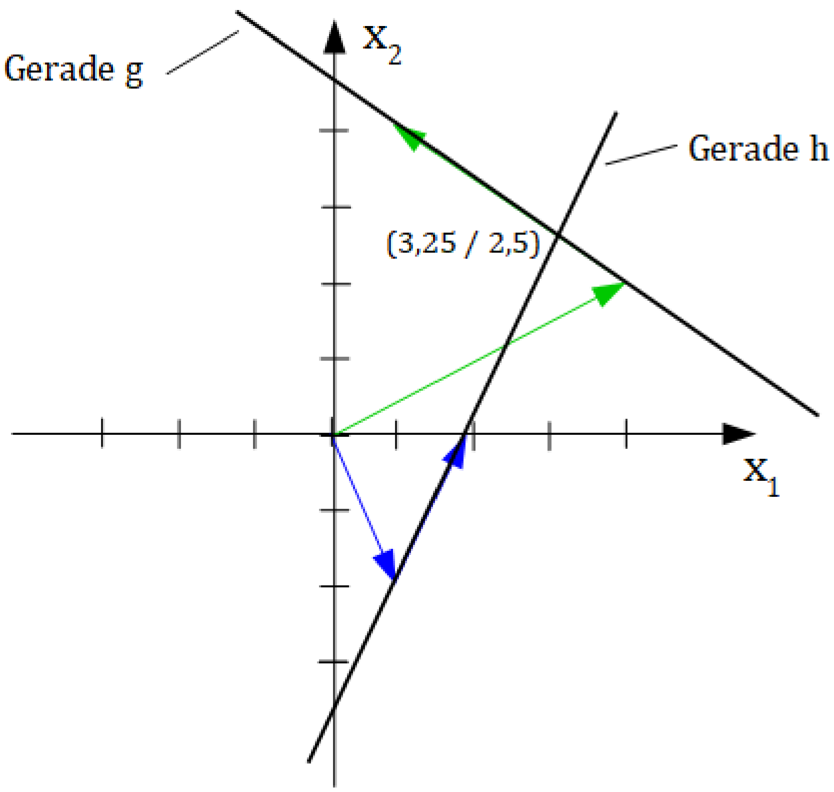
Aus der Geraden g kann der Punkt mit t_1 bestimmt werden:

Aus der Geraden h kann der Punkt mit t_2 bestimmt werden:

Der Schnittpunkt liegt bei

$$S = \begin{pmatrix} 3,25 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt zweier Geraden



Schnittpunkt zweier Geraden

Beispiel 2: Schnittpunkte zweier Geraden

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Schnittpunkt beider Geraden!

Wir setzen die beiden Geradengleichungen gleich:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Danach stellen wir das lineare Gleichungssystem auf:

(1) $1 + 2t_1 = -1 + 2t_2$

(2)

(3) $1 - 3t_1 = 2 - 5t_2$

Wir stellen die ersten beiden Gleichungen nach t_2 (alternativ nach t_1) um:

(1) $t_1 = t_2 - 1$

(2) $t_1 = 2t_2$

Gleichsetzen:

$t_2 - 1 = 2t_2$

Nach t_2 auflösen:

$t_2 = -1$

Einsetzen in (1) oder (2):

$t_1 = -2$

Damit die Geraden einen Schnittpunkt haben, muss die letzte Gleichung eine Lösung besitzen. Um dies zu überprüfen, werden t_1 und t_2 in die Gleichung (3) eingesetzt:

(3) $1 - 3 \cdot (-2) = 2 - 5 \cdot (-1)$

$7 = 7$

Diese Aussage ist **wahr,** damit besitzen die beiden Geraden einen Schnittpunkt.

HINWEIS

Ist die Aussage der dritten Gleichung nicht wahr, so handelt es sich um windschiefe Geraden! Diese folgen im nächsten Abschnitt!

Wir können den Schnittpunkt bestimmen, indem wir t_1 in die Geradengleichung g oder t_2 in die Geradengleichung h einsetzen:

Der Schnittpunkt beider Geraden liegt bei $S = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1.6.4 Windschiefe Geraden

Geraden werden als windschief bezeichnet, wenn sie sich weder schneiden noch parallel zueinander sind. Im zweidimensionalen Raum sind zwei Geraden entweder parallel zueinander (bzw. identisch) oder schneiden sich. Windschiefe Geraden können also nur in mindestens **dreidimensionalen Räumen** auftreten.

Die **Voraussetzungen für windschiefe Geraden** sind:

METHODE

1. Die Richtungsvektoren der Geraden sind **nicht** Vielfache voneinander.
2. Die Geraden schneiden sich nicht.

Zum besseren Verständnis folgt ein Beispiel zum Nachweis von windschiefen Geraden.

Beispiel: Windschiefe Geraden

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden Geraden:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass die beiden Geraden windschief zueinander sind!

Wir müssen zunächst zeigen, dass die beiden Geraden nicht linear abhängig voneinander sind.

Dazu betrachten wir die beiden Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

(1) $0 = -\lambda$

(2) $-2 = \lambda$

(3) $1 = 2\lambda$

Sind **alle** λ gleich, so handelt es sich um linear abhängige Vektoren und damit sind diese parallel (oder sogar identisch).

(1) $\lambda = 0$

(2) $\lambda = -2$

(3) $\lambda = \frac{1}{2}$

Die Vektoren sind linear voneinander unabhängig, weil in den Zeilen nicht immer derselbe Wert für λ resultiert.

Die beiden Geraden sind demnach nicht parallel. Entweder schneiden sie sich in einem Punkt oder sie sind windschief zueinander.

Wir prüfen, ob ein Schnittpunkt vorliegt, indem wir beiden Geraden gleich setzen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

(1) $2 + 0t_1 = 1 - t_2$

(2) $-1 - 2t_1 = 0 + t_2$

(3) $3 + t_1 = -2 + 2t_2$

Aus (1) kann sofort t_2 bestimmt werden:

(1) $t_2 = -1$

Einsetzen in (2):

(2) $-1 - 2t_1 = 0 + (-1)$

$2t_1 = 0$

$t_1 = 0$

Damit die Geraden nun einen Schnittpunkt haben, muss die Gleichung (3) eine Lösung haben. Zur Überprüfung setzen wir die Ergebnisse in die Gleichung (3) ein:

(3) $3 + 0 = -2 + 2 \cdot (-1)$

$3 = -4$

Diese Aussage ist **falsch**, damit besitzen die beiden Geraden keinen Schnittpunkt. Damit sind g und h windschief zueinander!

1.6.5 Abstände von Geraden/Punkten

Wie wir in den vorherigen Abschnitten gesehen haben, können zwei Geraden entweder

- identisch sein
- echt parallel sein oder
- windschief sein.

Identische Geraden haben unendlich viele Schnittpunkte und weisen keinen Abstand zueinander auf. Der Abstand bei identischen Geraden ist also gleich Null.

Ein Punkt und eine Gerade

Gegeben sei ein Punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ und eine Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{v}$ mit dem Ortsvektor $\vec{a}$ und dem Richtungsvektor $\vec{v}$. Dann berechnet sich der Abstand wie folgt:

METHODE

$$d(P, g) = \frac{|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Zwei parallele Geraden

Da der Abstand zwischen zwei *parallelen* Geraden *immer gleich groß* ist, wählt man auf einer der beiden Geraden einen Punkt aus und berechnet den Abstand zwischen der anderen Gerade und diesem Punkt. Am sinnvollsten ist es, den Aufpunkt einer Geraden zu wählen, d. h. den Punkt, auf welchen der Ortsvektor zeigt, und den Abstand von diesem Aufpunkt zur anderen Geraden zu berechnen.

Gegeben seien die parallelen Geraden g und h mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und den Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

$g: \vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{v}$

$h: \vec{x} = \vec{b} + t_2\vec{w}$

Die Berechnung des Abstandes erfolgt dann mit:

METHODE

$$d(g,h) = \frac{|(\vec{a}-\vec{b}) \times \vec{w}|}{|\vec{w}|}$$

bzw.

$$d(g,h) = \frac{|(\vec{b}-\vec{a}) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Zwei windschiefe Geraden

Die kleinste Strecke, die zwei Geraden g und h miteinander verbindet, bezeichnet man als **Gemeinlot** der beiden Geraden. Die Gerade, auf der das Gemeinlot liegt, wird als **Minimaltransversale** der beiden Geraden bezeichnet. Die Minimaltransversale ist diejenige Gerade, die im rechten Winkel zu den beiden Geraden steht. Die Länge des Gemeinlots von g und h ist der Abstand $d = d(g,h)$ der beiden Geraden.

Gegeben seien die windschiefen Geraden g und h mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und den Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

$$g : \vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{v}$$

$$h : \vec{x} = \vec{b} + t_2\vec{w}$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$, welcher senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ steht, kann über das Kreuzprodukt berechnet werden:

METHODE

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

Danach wird der Normalenvektor auf die Länge 1 normiert:

METHODE

$$\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden kann dann berechnet werden zu:

METHODE

$$d(g,h) = |(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{n_0}|$$

MERKE

Wichtig: Windschiefe Geraden treten nur im dreidimensionalen Raum auf!

Beispiel 1: Abstand zwischen Punkt und Geraden

Wir beginnen mit einem Einführungsbeispiel, in welchem wir dir zeigen wollen, wie der Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden berechnet wird:

BEISPIEL

Gegeben seien der Punkt $P(3,2,1)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne den Abstand des Punktes P von der Geraden g !

Wir ziehen die obige Formel heran:

METHODE

$$d(P,g) = \frac{|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Zunächst berechnen wir $(\vec{p} - \vec{a})$:

Danach berechnen wir:

$(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{v}$:

Als nächstes berechnen wir die Länge des Vektors:

$$|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{v}| = \sqrt{(-6)^2 + (-7)^2 + 8^2} = 12,21$$

Der Zähler ist bestimmt. Wir betrachten als nächstes den Nenner und berechnen die Länge des Richtungsvektors:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = 2,45$$

Einsetzen in die Formel ergibt:

$$d(P,g) = \frac{12,21}{2,45} = 4,98$$

Der Abstand des Punktes P zur Geraden g beträgt 4,98.

Beispiel 2: Abstand zweier paralleler Geraden

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden parallelen Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

Bestimme den Abstand der beiden parallelen Geraden!

Am sinnvollsten ist es, den Aufpunkt der einen Geraden zu wählen (also den Ortsvektor) und den

Abstand dieses Aufpunktes mit der anderen Geraden zu bestimmen.

Wir wählen den Aufpunkt der Geraden g mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Wir berechnen den Abstand dieses Aufpunktes zur Geraden h mit der Formel:

METHODE

$$d(g,h) = \frac{|(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{w}|}{|\vec{w}|}$$

Wir berechnen zunächst $(\vec{a} - \vec{b})$:

Danach berechnen wir $(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{w}$:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-0,5) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) - 7 \cdot (-0,5) \\ 7 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Länge des Vektors:

$$|(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{w}| = \sqrt{0^2 + 1,5^2 + 3^2} = 3,35$$

Danach berechnen wir den Nenner, indem wir die Länge des Richtungsvektors der Geraden h berechnen:

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-0,5)^2} = 2,29$$

Einsetzen in die Formel liefert uns:

$$d(g,h) = \frac{3,35}{2,29} = 1,46$$

Beispiel 3: Abstand zweier windschiefer Geraden

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden parallelen Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme den Abstand der beiden windschiefen Geraden!

Wir bestimmen zunächst den Normalenvektor $\vec{n}$, welcher senkrecht auf den beiden Geraden steht:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

Dabei ist $\vec{v}$ der Richtungsvektor der Geraden g und $\vec{w}$ der Richtungsvektor der Geraden h (siehe Kurstext):

Danach wird der Normalenvektor auf die Länge 1 gebracht:

$$\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Der Zähler ist bereits berechnet. Für den Nenner müssen wir die Länge des Normalenvektors berechnen:

$$|\vec{n}| = \sqrt{10^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{140}$$

Einsetzen in die Formel:

$$\vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{140}} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,845 \\ -0,507 \\ -0,169 \end{pmatrix}$$

Der normierte Normalenvektor weist die Länge 1 auf:

VERTIEFUNG

Normalenvektor mit Länge 1

$$|\vec{n}_0| = \sqrt{0,845^2 + (-0,507)^2 + (-0,169)^2} \approx 1$$

Im letzten Schritt kann der Abstand zwischen den beiden windschiefen Geraden bestimmt werden. Hiebei handelt es sich um den kleinsten Abstand zwischen den beiden Geraden (Geimeinlot):

$$d(g,h) = |(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{n}_0|$$

Dabei ist $\vec{a}$ der Orstvektor der Geraden g und $\vec{b}$ der Ortsvektor der Geraden h .

$$(\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 0,845 \\ -0,507 \\ -0,169 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0,845 + -6 \cdot -0,507 + -4 \cdot -0,169 = 6,253$$

Die kleinste Strecke zwischen den beiden windschiefen Geraden beträgt 6,253 Maßeinheiten.

1.6.6 Übungsaufgaben zu Geraden im Raum

Für die nachfolgenden Aufgaben soll die Lage der Geraden zueinander (parallel, identisch, windschief, sich schneidend) bestimmt und der Abstand zwischen den Geraden berechnet werden (bei parallelen und windschiefen Geraden).

Die Geraden werden in der folgenden Parameterdarstellung angegeben:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + t_1 \vec{v}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + t_2 \vec{w}$$

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Geraden

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$ und

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Zunächst wollen wir die Lagebeziehung beider Geraden zueinander bestimmen. Wir prüfen als erstes, ob parallele oder sogar identische Geraden gegeben sind. Ist dies der Fall, so existieren für identische Geraden unendliche viele Schnittpunkte (Geraden liegen aufeinander). Bei parallelen Geraden existiert hingegen kein Schnittpunkt.

Um das herauszufinden, müssen wir prüfen, ob die beiden Geraden Vielfache voneinander sind. Dazu betrachten wir die Richtungsvektoren der beiden Geraden und berechnen λ :

$\vec{v} = \lambda \, \vec{w}$ (alternativ: $\vec{w} = \lambda \vec{v}$).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

(1) $1 = 3\lambda$

(2) $2 = \lambda$

(3) $-2 = -3\lambda$

Jede Zeile nach λ auflösen:

(1) $\lambda = \frac{1}{3}$

(2) $\lambda = 2$

(3) $\lambda = \frac{2}{3}$

Nur wenn λ überall identisch ist, liegen parallele (und ggf. identische) Geraden vor. Da dies hier nicht der Fall ist, können die Geraden nur windschief sein oder sich schneiden.

Wir müssen als nächstes prüfen, ob die Geraden einen Schnittpunkt aufweisen oder keinen und damit windschief sind.

Zur Überprüfung müssen wir beiden Geraden gleichsetzen und das lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

(1) $0 + t_1 = -9 + 3t_2$

(2) $8 + 2t_1 = 0 + t_2$

(3) $-7 + -2t_1 = 6 - 3t_2$

Die erste Zeile (1) ist bereits nach t_1 aufgelöst:

(1) $t_1 = -9 + 3t_2$

Wir können diese also in die zweite Zeile (2) einsetzen, um t_2 zu bestimmen:

(2) $8 + 2 \cdot (-9 + 3t_2) = 0 + t_2$

$$t_2 = 2$$

Einsetzen in die erste Zeile (1) zur Berechnung von t_1 :

$$t_1 = -9 + 3 \cdot 2 = -3 \,.$$

Damit die Geraden einen Schnittpunkt haben, muss die letzte Gleichung eine Lösung haben. Dazu setzen wir die Ergebnisse in die letzte Zeile (3) ein:

(3) $-7 + -2 \cdot (-3) = 6 - 3 \cdot 2$

$$-1 = 0$$

Diese **Aussage** ist **falsch**. Damit besitzen die beiden Geraden **keinen Schnittpunkt**. Die Geraden g und h sind windschief zueinander.

Als nächsten wollen wir den Abstand der beiden windschiefen Geraden zueinander bestimmen. Dazu benötigen wir die folgenden Formel:

$$d(g,h) = |(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{n}_0|$$

Hierbei ist $\vec{n}_0$ der Einheitsvektor, welcher wie folgt berechnet wird:

METHODE

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$, welcher senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ steht, kann über das Kreuzprodukt berechnet werden:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 - 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Danach normieren wir den Normalenvektor auf die Länge 1, indem wir diesen durch seine Länge teilen:

$$\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Dazu berechnen wir zunächst die Länge des Normalenvektors, durch die wir den Normalenvektor anschließend teilen:

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$$

$$\vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,566 \\ -0,424 \\ -0,707 \end{pmatrix}$$

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden kann dann berechnet werden zu:

$$d(g,h) = |(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{n}_0|$$

Die kleinste Strecke zwischen den beiden windschiefen Geraden beträgt 0,705 Maßeinheiten.

Aufgabe 2: Lagebeziehung von Geraden

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Zunächst wollen wir die Lagebeziehung beider Geraden zueinander bestimmen. Wir prüfen als erstes, ob parallele oder sogar identische Geraden gegeben sind. Ist dies der Fall, so existieren für identische Geraden unendliche viele Schnittpunkte (Geraden liegen aufeinander). Bei parallelen Geraden existiert hingegen kein Schnittpunkt.

Um das herauszufinden, müssen wir prüfen, ob die beiden Geraden Vielfache voneinander sind. Dazu betrachten wir die Richtungsvektoren der beiden Geraden und berechnen λ :

$\vec{v} = \lambda \, \vec{w}$ (alternativ: $\vec{w} = \lambda \vec{v}$)

Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

(1) $6 = -8\lambda$

(2) $9 = -12\lambda$

(3) $-12 = 16\lambda$

Auflösen nach λ :

(1) $\lambda = -\frac{3}{4}$

(2) $\lambda = -\frac{3}{4}$

(3) $\lambda = -\frac{3}{4}$

Alle Werte für λ sind identisch, d. h. die Geraden sind Vielfache voneinander. Damit liegen entweder parallele oder identische Gerade vor.

Um zu überprüfen, ob parallele oder identische Geraden vorliegen, wählen wir den Aufpunkt einer der Geraden und setzen diesen mit der Geradengleichung der anderen Geraden gleich.

Wir wählen hier den Aufpunkt der Geraden g und setzen diesen mit der Geradengleichung h gleich:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf:

(1)

(2) $7 = 14 - 12t_2$

(3) $3 = 4 + 16t_2$

Wir lösen nach t_2 auf:

(1) $t_2 = \frac{3}{4}$

(2) $t_2 = \frac{7}{12}$

(3) $t_2 = -\frac{1}{16}$

Da t_2 nicht überall gleich ist, liegt der Aufpunkt der Geraden g nicht auf der Geraden h. Damit handelt es sich hierbei um **parallele Geraden**.

Als nächstes wollen wir den Abstand der beiden parallelen Geraden zueinander bestimmen. Der Abstand bei parallelen Gerade ist in jedem Punkt gleich. Wir können diesen berechnen zu:

$$d(g,h) = \frac{|(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{w}|}{|\vec{w}|}$$

Wir berechnen zunächst die Länge des Richtungsvektors der Geraden h:

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 16^2} = 21,541$$

Danach berechnen wir den Zähler (zunächst ohne Länge):

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{w} = (\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}) \times \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -124 \\ 104 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Länge des resultierenden Vektors im Zähler:

$$|(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{w}| = \sqrt{(-124)^2 + 104^2 + (16)^2} = 162,63$$

Als nächstes können wir den Abstand berechnen:

$$d(g,h) = \frac{162,63}{21,541} = 7,55$$

Der Abstand zwischen den beiden parallelen Geraden g und h beträgt 7,55.

Aufgabe 3: Lagebeziehungen zweier Geraden

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden Geraden

und

.

Zu Beginn gilt es, die Lagebeziehungen der beiden Geraden zu ermitteln. Dabei wird geprüft, ob parallele oder gar identische Geraden gegeben sind. Sollte dies der Fall sein, liegen für identische Geraden unendlich viele Schnittpunkte vor. Sind Sie jedoch parallel, haben Sie keine Schnittpunkte.

Um das herauszufinden, müssen wir prüfen, ob die beiden Geraden Vielfache voneinander sind. Dazu betrachten wir die Richtungsvektoren der beiden Geraden und berechnen λ :

$$| : -3$$

$$\lambda = -\frac{1}{-3} = -0,33$$

$$\lambda = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3} = -0,33$$

$$\lambda = -\frac{1}{3} = -0,33$$

Wir können erkennen, dass sämtliche λ den gleichen Wert haben, somit sind die Vektoren linear abhängig.

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind linear abhängig.

$\Rightarrow$ Die Geraden sind also parallel oder identisch.

Nun setzen wir einen Punkt der ersten Geraden mit der zweiten Geraden gleich. Üblicherweise wird als Punkt der Ortsvektor herangezogen. Wir wählen den Ortsvektor der Gerade g und setzen diesen mit der Geraden h gleich:

Ortsvektor von

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Für jede Zeile ist nun das t zu bestimmen:

Anhand der identischen Werte von t wissen wir, dass der Ortsvektor von g auf der Geraden von h liegt. Beide Geraden sind daher identisch und es gilt:

$h = g$

Aufgabe 4: Lagebeziehungen zweier Geraden

BEISPIEL

Gegeben sind in dieser Aufgabe die Geraden

und

.

Zu Beginn gilt es, die Lagebeziehungen der beiden Geraden zu ermitteln. Dabei wird geprüft, ob parallele oder gar identische Geraden gegeben sind. Sollte dies der Fall sein, liegen für identische Geraden unendlich viele Schnittpunkte vor. Liegen sie jedoch parallel zueinander, haben sie keine Schnittpunkte.

Um dies herauszufinden, stellen wir zunächst ein lineares Gleichungssystem auf und bestimmen für jede Zeile das λ :

Für die λ erhalten wir folgende Werte:

I

$\lambda = 1$

I

$\lambda = 0,5$

I

$\lambda = 0,6$

Wir sehen, dass die Werte für alle λ unterschiedlich sind. Somit sind die Vektoren linear unabhängig.

$\Rightarrow$ linear unabhängig

$\Rightarrow$ Die Geraden haben einen Schnittpunkt oder liegen windschief zueinander.

Für weitere Aussagen sind die beiden Geradengleichungen gleich zu setzen, sodass sich ein lineares Gleichungssystem ergibt:

(1) ||

(2) ||

(3)

Die beiden ersten Gleichungen können schnell nach $-4t$ umgeformt werden:

(1)

(2) $-2s = -4t$

(3)

Durch Gleichsetzen der beiden ersten Gleichungen, erhalten wir den Wert s. Setzen wir diesen Wert in die letzte Gleichung ein, ergibt sich der Wert für t:

|| | $: 2$

$s = 1$

Einsetzen in die letzte Gleichung:

|| -2

$5 = 10t$ || $: 10$

$t = 0,5$

Dass die letzte Gleichung eine Lösung hat, ist Voraussetzung dafür, dass die Geraden einen Schnittpunkt besitzen. Dies können wir dadurch prüfen, indem wir die Ergebnisse für s und t in die letzte Gleichung einsetzen:

(3)

$$7 = 7$$

Das Ergebnis zeigt, dass die Aussage wahr ist. Die Geraden besitzen somit einen Schnittpunkt.

Zur Ermittlung des Schnittpunktes setzen wir eine Lösung in eine der Geradengleichungen ein:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Mit $s = 1$:

oder

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Mit $t = 0,5$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Lagebeziehungen zweier Geraden

BEISPIEL

Gegeben sind in dieser Aufgabe die Geraden

und

.

Zu Beginn gilt es, die Lagebeziehungen der beiden Geraden zu ermitteln. Dabei wird geprüft, ob parallele oder gar identische Geraden gegeben sind. Sollte dies der Fall sein, liegen für identische Geraden unendlich viele Schnittpunkte vor. Liegen sie jedoch parallel zueinander, besitzen sie keine Schnittpunkte.

Zur Prüfung, ob die Richtungsvektoren linear abhängig sind, stellen wir ein lineares Gleichungssystem auf:

$$0 = -1\lambda \quad | : 1$$

$$\lambda = 0$$

$$-2 = \lambda$$

$$\lambda = -2$$

$$| : 2$$

$$\lambda = 0,5$$

Wir sehen, dass die Werte der λ unterschiedlich sind. Daraus schließen wir, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

$\Rightarrow$ linear unabhängig

$\Rightarrow$ Die Geraden sind daher entweder windschief zueinander oder haben einen Schnittpunkt.

Für weitere Aussagen setzen wir die Gleichungssysteme gleich und generieren ein lineares Gleichungssystem:

||

$t = -1$ ||Wert für t in die zweite Gleichung einsetzen. Dadurch ergibt sich der Wert für s :

||

$s = 0$

$3 + s = -2 + 2t$ || -3

Ob die Geraden einen Schnittpunkt haben, finden wir dadurch heraus, dass die letzte Gleichung eine Lösung hat. Um dies zu überprüfen, setzen wir die Ergebnisse in die letzte (dritte) Gleichung ein:

$3 = -4$

Wir sehen, dass die Aussage falsch ist, woraus wir schließen können, dass beide Geraden keinen Schnittpunkt haben.

$\Rightarrow$ g und h liegen windschief zueinander.

Analysis und Lineare Algebra

Matrizen

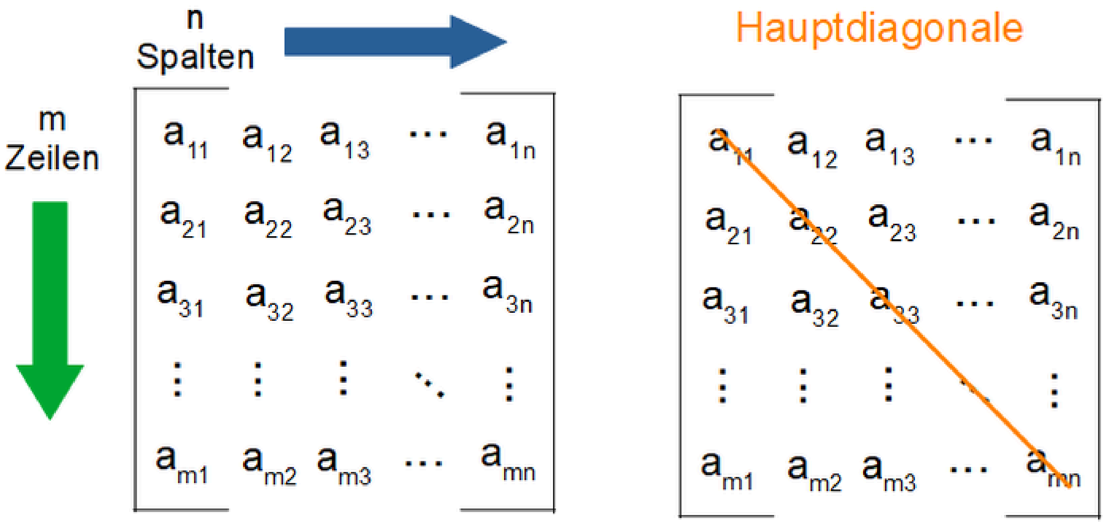
Autor:
Deleted User

ingenieurkurse.de
DIGITALE PRÜFUNGSVORBEREITUNG

INHALTSVERZEICHNIS

1 Matrizen

Eine **Matrix** ist ein rechteckiges Zahlenschema, welche aus Zahlen (Elementen) besteht. Diese sind in m -Zeilen (**Zeilenvektoren**) und n -Spalten (**Spaltenvektoren**) angeordnet. Die allgemeine Form einer Matrix ist:



Allgemeine Matrixdarstellung

Es gibt unterschiedliche Erscheinungsformen einer Matrix, die wir uns im Nachfolgenden mal genauer anschauen wollen.

Einheitsmatrix

Für die Einheitsmatrix gilt, dass die Elemente a_{mn} auf der Diagonalen den Wert 1 annehmen, wobei alle übrigen Elemente den Wert Null annehmen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die obige Matrix ist eine 3×3 Matrix. Alle Elemente auf der Hauptdiagonalen nehmen den Wert 1 an, alle übrigen Elemente sind Null.

HINWEIS

Es existiert für jede Größe einer Matrix eine zugehörige Einheitsmatrix!

Matrix (m-Spalten, n-Zeilen)

Es gibt Matrizen, bei denen die Zeilen- und Spaltenanzahl unterschiedlich ist, wie in den nachfolgenden beiden Beispielen dargestellt:

Quadratische Matrix

Eine quadratische Matrix ist - wie der Name bereits aussagt - eine Matrix, die eine quadratische Form aufweist. Hier ist die Anzahl der Zeilen und Spalten identisch.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 7 & 9 \\ -7 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nullmatrix

Von einer Nullmatrix ist die Rede, wenn alle Elemente innerhalb der Matrix den Wert Null annehmen.

Transponierte Matrix

Vertauscht man in einer Matrix die Zeilen mit den entsprechenden Spalten, so entsteht eine transponierte Matrix A^T (oder Schreibweise A):

$$A = (a_{ik})_{m,n} \longleftrightarrow A^T = (a_{ki})_{n,m}$$

HINWEIS

In Worten: Beim transponieren wird die 1. Zeile mit der 1. Spalte, die 2. Zeile mit der 2. Spalte usw. getauscht.

Dazu betrachen wir das nachfolgende **Beispiel**:

BEISPIEL

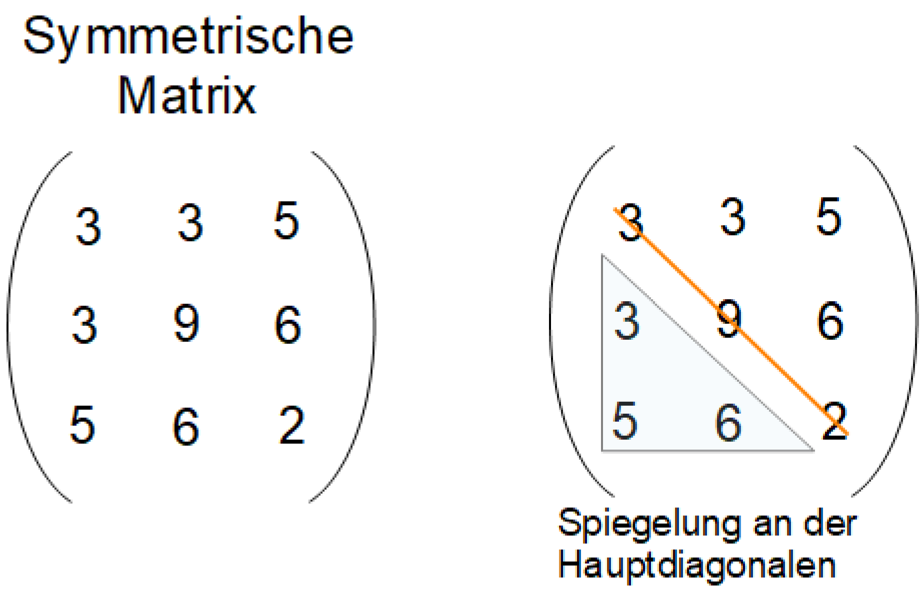
Transponiere folgende Matrix !

Die folgenden **Regeln beim Transponieren** einer Matrix müssen beachtet werden:

-
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(sA)^T = s \cdot A^T$ (s ist ein Skalar.)
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Symmetrische Matrix

Eine symmetrische Matrix ist eine quadratische Matrix (siehe oben), bei welcher die Einträge spiegelsymmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen sind. Eine symmetrische Matrix stimmt mit ihrer transponierten Matrix überein.



Symmetrische Matrix

1.1 Addition und Subtraktion von Matrizen

Matrizen können addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie vom gleichen Typ sind. Vom gleichen Typ bedeutet, dass sie die gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten besitzen.

METHODE

Gegeben seien die Matrizen $A = (\alpha_{ij})$ und $B = (\beta_{ij})$ mit $i, j = 1, ..., n.$

Man addiert (subtrahiert) das Element der i -ten Zeilen und j -ten Spalte der Matrix A mit dem Element der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Matrix B .

BEISPIEL

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 15 \\ 8 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ und . Berechne $A + B$ und $A - B$!

$$A - B = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 15 \\ 8 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 5 & -1 & -5 \\ 8 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

1.2 Multiplikation mit Zahlenwerten bei Matrizen

METHODE

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\ x\ n}$ wird mit einem Zahlenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem jedes Element der Matrix A mit λ multipliziert wird:

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})$$

BEISPIEL

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Berechne $\lambda \cdot A$ mit $\lambda = 2$!

$$\lambda \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

1.3 Rechenregeln für Matrizen

1. $A + B = B + A$ (Kommutativgesetz)
2. $A + 0 = 0 + A = A$ (Nullmatrix)
3. $AE = EA = A$ (Einheitsmatrix)
4. $A(B + C) = AB + AC$ (Distributivgesetz)
5. $A(BC) = (AB)C = ABC$ (Assoziativgesetz)
6. $(AB)^T = B^T A^T$ (Transponierte des Produkts)
7. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (Inverse des Produkts)
8. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
9. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

MERKE

WICHTIG: Das Matrizen**produkt** ist NICHT kommutativ, d. h. es gilt: $AB \neq BA$

1.4 Matrizenmultiplikation

MERKE

Zwei Matrizen können miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der 1. Matrix gleich der Zeilenanzahl der 2. Matrix ist.

Wie bereits im vorherigen Kapitel erwähnt, ist das Matrixprodukt NICHT kommutativ. Wenn Matrix A mit Matrix B multipliziert wird, ergibt sich ein anderer Wert, als wenn Matrix B mit Matrix A multipliziert wird.

HINWEIS

Bitte beachte, dass wenn AB existiert, BA nicht automatisch existieren muss.

Durchführung der Matrizenmultiplikation

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$.

METHODE

Die Multiplikation der beiden Matrizen erfolgt durch:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

MERKE

Bei der Matrizenmultiplikation gilt: Zeile mal Spalte.

Beispiel: Matrizenmultiplikation

BEISPIEL

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$.

Berechne AB !

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+22 & 12+28 \\ 40+55 & 48+70 \\ 70+88 & 84+112 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 40 \\ 95 & 118 \\ 158 & 196 \end{pmatrix}$$

AB liefert ein Ergebnis, da die Spaltenanzahl von A gleich der Zeilenanzahl von B ist. Allerdings liefert in diesem Beispiel BA kein Ergebnis, da die Spaltenanzahl von B (2 Spalten) nicht gleich der Zeilenanzahl von A (3 Zeilen) ist.

Rechenregeln zur Matrizenmultiplikation

1. $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2, \quad A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $EA = AE = A$

BEISPIEL

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Berechne EA sowie AE!

Die Matrix A hat 3 Spalten und 2 Zeilen. Um EA zu berechnen, wird eine Einheitsmatrix benötigt, welche 2 Spalten besitzt. Denn es gilt: Die Spaltenanzahl der 1. Matrix muss gleich der Zeilenanzahl der 2. Matrix sein (und die Einheitsmatrix stellt in diesem Fall die 1. Matrix dar).

Um AE zu berechnen, wird eine Einheitsmatrix benötigt, welche 3 Zeilen besitzt, denn die Einheitsmatrix stellt in diesem Fall die 2. Matrix dar:

MERKE

Die Einheitsmatrix zeichnet sich dadurch aus, dass ihre Diagonale aus Einsen besteht und die restlichen Elemente aus Nullen.

1.5 Gauß Eliminationsverfahren

Das **Gaußsche Eliminationsverfahren** ist ein Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen (LGS). Dieses Verfahren beruht darauf, dass ***elementare Umformungen*** das Gleichungssystem zwar ändern, aber die Lösung trotzdem erhalten bleibt. Durch die Umformungen wird das Gleichungssystem in ein einfacher zu lösendes LGS überführt.

Zu den **elementaren Umformungen** zählen:

- Addition/Subtraktion einer Gleichung zu einer anderen
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar λ ungleich null
- Vertauschen zweier Zeilen
- Addition/Subtraktion des λ -Fachen einer Zeile mit den μ -Fachen einer Spalte.

Lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem ist ein System von m linearen Gleichungen mit n Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Vorgehensweise des Gaußschen Eliminationsverfahrens

In einer Matrix A sucht man die Spalte aus, welche möglichst viele Nullen aufweist und mit einer möglichst einfachen Zahl $\neq 0$. Mit Hilfe dieser Spalte wird versucht, mittels der ***elementaren Umformungen*** Nullen zu erzeugen, sodass das Gleichungssystem gelöst werden kann.

Beispiel: Gauß Eliminationsverfahren

Gegeben sei: $$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

x1	x2	x3	
-1	4	2	4
2	8	4	8
0	3	1	3
3	5	4	5

Die **1. Spalte** wird ausgewählt und die **-1** markiert.
Mithilfe dieser wird versucht in der 1.Spalte Nullen zu erzeugen.

1. Schritt: Um den Wert **2** der gekennzeichneten Spalte Null werden zu lassen, wird die erste Zeile mit **2** multipliziert und dann mit der 2. Zeile addiert.

2. Schritt: Der 3. Wert der 1. Spalte ist bereist Null.

3. Schritt: Um den Wert **3** der gekennzeichneten Spalte Null werden zu lassen, wird die erste Zeile mit **3** multipliziert und mit der 4. Zeile addiert.

0	16	8	16
0	3	1	3
0	17	10	17

Das alte LSG ist nun ersetzt durch die markierte Gleichung (1. Zeile) und die 3 neuen Gleichungen (2. - 4. Gleichung):
Es wird wieder ein „einfacher" Wert markiert (in diesem Fall wieder die **1**), um in der betreffenden Spalte Nullen zu erzeugen.

1. Schritt: Um den den Wert **8** der gekennzeichneten Spalte Null werden zu lassen, wird die 2. Zeile mit **8** multipliziert und dann von der 1. Zeile subtrahiert.

2. Schritt: Um den Wert **10** der gekennzeichneten Spalte Null werden zu lassen, Wird die 2. Zeile mit **10** multipliziert und dann von der 3. Zeile subtrahiert.

0	-8	0	-8
0	-13	0	-13
0	0	0	0

Das alte LSG ist nun ersetzt durch die markierte Gleichung (2. Zeile) und die 2 neuen Gleichungen (1. und 3. Zeile):
Es wird nun der Wert **-8** markiert.

1. Schritt: Um den Wert **-13** der gekennzeichneten Spalte Null werden zu lassen, wird die 1. Zeile mit **-13** und Die 2. Zeile mit **8** multipliziert. Die beiden Zeilen werden dann miteinander addiert.

Gauß Eliminationsverfahren

Die letzte Gleichung ist für alle $x_i = 0$ und wird weggelassen. Das ursprüngliche LGS ist nun durch die blau markierten Gleichungen ersetzt:

(1) $-x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4$

(2) $3x_2 + x_3 = 3$

(3)

Lösung des LGS:

Dieses LGS kann nun aufgelöst werden (rückwärts):

(3) $x_2 = 1$

(2) $x_3 = 3 - 3x_2$

(1) $x_1 = 4x_2 + 2x_3 - 4$

Einsetzen ergibt dann:

Dieses LGS hat die eindeutige Lösung: $(0, 1, 0)$

1.6 Invertierbare Matrix

Eine Matrix A mit $n\ x\ n$ Elementen heißt invertierbar, wenn eine Matrix A^{-1} mit $(n\ x\ n)$ Elementen existiert, so dass gilt:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$$

A^{-1} ist die Inverse Matrix von A.

MERKE

Es existiert genau eine Inverse A^{-1} zu einer invertierbaren Matrix A, deren Multiplikation mit A die Einheitsmatrix E_n ergibt. Erfüllt eine Matrix nicht diese Voraussetzung, so nennt man diese singulär.

Zum besseren Verständnis zeigen wir dir ein Beispiel.

BEISPIEL

Erstelle die Inverse der Diagonalmatrix mit der Form
!

Damit man eine Einheitsmatrix erhält, muss die Inverse A^{-1} die Form

haben. In diesem einfachen Beispiel wurde eine Diagonalmatrix verwendet, da diese immer invertierbar ist. Dies muss aber für andere Matrizen nicht der Fall sein. Zudem ist es relativ selten, dass die Inverse einer ganzzahligen Matrix erneut ganzzahlig wird.

Berechnung der Inversen mithilfe des Gauß-Jordan Algorithmus

Eine Inverse für kleine Matrizen kann mit Hilfe des Gauß-Jordan Algorithmus bestimmt werden. Hierzu bedient man sich der elementaren Zeilenumformung.

BEISPIEL

Erzeuge die Inverse folgender Matrix mit Hilfe der Einheitsmatrix

, !

Man beginnt damit, die vorhandene Matrix in die Einheitsmatrix zu überführen und führt diese Schritte analog mit der Einheitsmatrix durch, die hierdurch zur Inversen A^{-1} von A wird:

1. Subtrahiere den dreifachen Wert der ersten Zeile von der zweiten Zeile:

,

2. Addiere den dreifachen Wert der dritten Zeile zu der zweiten Zeile:

,

3. Subtrahiere den Wert der dritten Zeile von der ersten Zeile:

,

4. Subtrahiere den zweifachen Wert der zweiten Zeile von der dritten Zeile:

,

Links steht nur die Einheitsmatrix

und rechts die Inverse Matrix .

Mit ein wenig Übung und Probieren kannst du so die Inverse bestimmen.

1.7 Rang einer Matrix

Eine Matrix $A = (aij)$ mit $i, j = 0, ..., n$ besteht aus m Zeilenvektoren $\vec{a_1}, ..., \vec{a_m}$ und aus n Spaltenvektoren $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$:

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ besteht **unter anderem**

aus dem **Zeilenvektor**

$$\vec{a_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \end{pmatrix}$$

und dem **Spaltenvektor**

$$\vec{b_j} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

METHODE

Der **Zeilenrang** einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A.

Man schreibt auch rgA.

Es ist ebenfalls möglich, die Spalten der Vektoren als Zeilen zu betrachten. Dazu werden die Vektoren transponiert und in die Matrix eingetragen. Es entsteht die transponierte Matrix, aus welcher dann der Zeilenrang abgelesen wird.

A und A^T haben den gleichen Rang: $rgA = rgA^T$

Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, müssen die einzelnen Zeilenvektoren auf lineare Unabhängigkeit geprüft werden. Ist dies bei der Ausgangsmatrix nicht möglich, kann diese mithilfe elementarer Umformungen (Gauß Eliminationsverfahren) in eine Zeilenstufenform gebracht werden und dann die Zeilenvektoren auf lineare Unabhängigkeit geprüft werden.

MERKE

Elementare Umformungen verändern den Rang der Matrix nicht.

Zeilenstufenform

In der folgenden Grafik siehst du eine Matrix in Zeilenstufenform abgebildet.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix

Die Einträge oberhalb der Stufen können beliebige Einträge sein. Die Einträge auf den Stufen sind Zahlen $\neq 0$. Die Einträge unterhalb der Stufen bestehen nur aus Nullen.

Bestimmung der Ränge von Matrizen

BEISPIEL

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{3} & \underline{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Matrix bereits Zeilenstufenform besitzt, kann die lineare Unabhängigkeit der Zeilenvektoren geprüft werden und somit der Rang ermittelt werden.

Innerhalb der obigen Matrix sind alle 3 Zeilenvektoren (Nullvektor wird nicht berücksichtigt) voneinander unabhängig. Daraus folgt $rgA = 3$.

Elementare Umformungen

Wie wir bereits in einem vorherigen Kurstext gezeigt haben, kann eine Matrix mittels elementarer Umformungen (Gauß Eliminationsverfahren) in eine einfachere Form gebracht werden. Der Rang der Matrix wird dabei nicht verändert.

BEISPIEL

Gegeben sei die folgende Matrix: . Bestimme den Rang der Matrix!

Da diese Matrix keine Zeilenstufenform besitzt, muss sie mittels elementarer Umformungen in diese Form gebracht werden, um dann den Rang zu bestimmen.

					Elementare Umformungen
1)	2	1	0	0	
2)	4	2	0	0	1)*2 – 2)
3)	1	1	2	1	1) – 3) *2
4)	1	1	2	2	1) – 4) *2

1)	2	1	0	0	
2)	0	0	0	0	Vertausche 2) und 4)
3)	0	-1	-4	-2	
4)	0	-1	-4	-4	

1)	2	1	0	0	
2)	0	-1	-4	-4	2) – 3)
3)	0	-1	-4	-2	
4)	0	0	0	0	

1)	2	1	0	0	
2)	0	-1	-4	-4	3) *2 – 2)
3)	0	0	0	-2	
4)	0	0	0	0	

1)	2	1	0	0
2)	0	1	4	0
3)	0	0	0	-2
4)	0	0	0	0

Elementare Umformungen

Es ergibt sich nach den elementaren Umformungen folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Zeilenrangs:

Der Zeilenrang ist $rgA = 3$. Die letzte Zeile wird gestrichen, da dort alle Elemente null sind. Es verbleiben noch drei Zeilen die alle voneinander unabhängig sind.

1.8 Determinanten

Unter einer Determinante versteht man einen eindeutigen Zahlenwert, der genau einer quadratischen Matrix zugeordnet wird. Ist die Matrix nicht quadratisch, so existiert für sie auch keine Determinante.

Die Determinante hat die Kennzeichnung $det(A)$ oder $|A|$.

Berechnung der Determinante von Matrizen unterschiedlicher Größe

Zur Berechnung der Determinante von Matrizen unterschiedlicher Größe existieren verschiedene Möglichkeiten, die im Folgenden aufgezeigt werden.

Determinante der (0, 0) - Matrix

Die Determinante der (0, 0) - Matrix ist 1.

Determinante einer (1, 1) - Matrix

$$det(a) = a$$

Determinante einer (2, 2) - Matrix

.

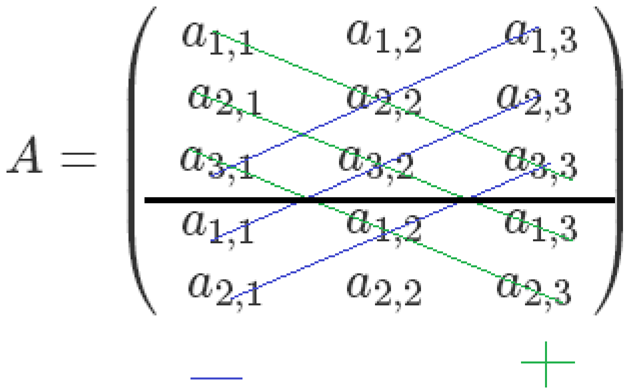
BEISPIEL

Bestimme die Determinante der Matrix !

$$det(A) = 2 \cdot -3 - 4 \cdot 6 = -30$$

Die **Determinante** von A ist gleich -30.

Determinante einer (3, 3) Matrix



Regel von Sarrus

MERKE

Regel von Sarrus: Es werden die ersten beiden Zeilen unter die Matrix geschrieben, dann addiert man das Produkt aus den Elementen auf der grünen Diagonalen und subtrahiert davon das Produkt aus den Elementen auf der blauen Diagonalen.

BEISPIEL

Bestimme die Determinante der Matrix !

Die **Determinante** von A ist gleich -8 .

MERKE

Zur Erinnerung: Es wurde bereits im Kapitel [Das Spatprodukt](#) das Vorgehen für eine solche Rechnung beschrieben und veranschaulicht.

1.8.1 Laplacescher Entwicklungssatz

Mit dem **Laplaceschen Entwicklungssatz** kann man die Determinante einer (n, n) - Matrix „nach einer Zeile oder Spalte entwickeln".

MERKE

Laplaceschen Entwicklungssatz für die i-te Zeile:

$$A = (a_{ij}) \longrightarrow det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \; a_{ij} \; det(A_{ij})$$

Laplaceschen Entwicklungssatz für die j-te Spalte:

$$A = (a_{ij}) \longrightarrow det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \; a_{ij} \; det(A_{ij})$$

Dabei ist A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ - Untermatrix. Sie entsteht durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Wie bei der Bestimmung der Determinante vorgegangen wird, zeigen wir dir anhand eines Beispiels.

Entwicklung nach der i-ten Zeile

BEISPIEL

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Berechne die Determinante dieser Matrix!

Möchten wir nach der ersten Zeile entwickeln, müssen wir als Erstes die drei Streichungsdeterminanten berechnen, um dann die Determinante von A ermitteln zu können.

Vorgehensweise bei der Entwicklung der 1. Zeile

1. Schritt: Streichen der 1. Zeile und der 1. Spalte:

2. Schritt: Streichen der 1. Zeile und der 2. Spalte:

3. Schritt: Streichen der 1. Zeile und der 3. Spalte:

4. Schritt: Einsetzen in die Formel:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot det(A_{1j})$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 0 + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot 3 + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot 1 = -3$$

Die Determinante von A beträgt demnach -3.

Entwicklung nach der j-ten Spalte

BEISPIEL

Gegeben sei dieselbe Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Berechne die Determinante dieser Matrix!

Möchten wir nach der ersten Spalte entwickeln, müssen wir wieder zunächst die drei Streichungsdeterminanten berechnen, um dann die Determinante von A ermitteln zu können.

Vorgehensweise bei der Entwicklung der 1. Spalte

1. Schritt: Streichen der 1. Spalte und der 1. Zeile:

2. Schritt: Streichen der 1. Spalte und der 2. Zeile:

3. Schritt: Streichen der 1. Spalte und der 3. Zeile:

4. Schritt: Einsetzen in die Formel:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot det(A_{i1})$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 0 + (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot 3 + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot 3 = -3$$

Die Determinante von A beträgt demnach -3.

Anwendungsbeispiel

BEISPIEL

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechne die Determinante von A!

Wir entwickeln nach der 4. Spalte, da in dieser die meisten Nullen stehen und sich die Determinante damit einfacher berechnen lässt.

1. Schritt: Streiche 4. Spalte und 1. Zeile:

Die Determinante muss hier nicht berechnet werden, da das Element der Matrix in der Laplaceschen Entwicklungsformel $a_{14} = 0$. Damit wird der gesamte Term

$$(-1)^{1+4} \cdot a_{14} \cdot det(A_{14}) = 0 .$$

Das Gleiche gilt für $|A_{24}|$ und $|A_{44}|$.

Für $|A_{34}|$ allerdings ist das Element $a_{34} = 1$. Demnach wird der Term

$$(-1)^{3+4} \cdot a_{34} \cdot det(A_{34}) \neq 0 ,$$

weshalb wir die Streichungsdeterminante $det(A_{34})$ bestimmen müssen.

2. Schritt: Streiche 4. Spalte und 3. Zeile:

3. Schritt: Anwendung der Regel von Sarrus:

$$A_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$-$ $+$

Regel von Sarrus

4. Schritt: Einsetzen in die Formel:

Die Determinante von A beträgt demnach -12.

Regeln für elementare Umformungen

Für größere Matrizen empfiehlt sich die Matrix in eine einfachere Form zu bringen. Allerdings haben elementare Umformungen von Matrizen Auswirkungen auf die Determinante. Im Folgenden haben wir diese Auswirkungen für dich zusammengefasst.

MERKE

Folgenden **Regeln** bei der Umformung von Matrizen sollten bekannt sein und können dadurch eine Berechnung vereinfachen:

1. Die Determinante einer Diagonalmatrix ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente.
2. Die Determinante ist linear in jeder Spalte.
3. Das Tauschen von 2 Spalten führt zum Vorzeichenwechsel der Determinanten.
4. Die Determinante einer Matrix mit linear abhängigen Spalten ist stets gleich Null.
5. Die Determinante ändert sich nicht, wenn man ein Vielfaches einer Zeile oder Spalte zu einer anderen addiert.
6. Eine Matrix ist nur dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist.

1.8.2 Cramersche Regel

Ist A eine quadratische (n, n)-Matrix mit $|A| \neq 0$, so ist

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

eindeutig lösbar.

Es gilt

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad \text{für} \quad i = 1, ..., n \quad \text{mit} \quad \vec{x} = (x_1, ..., x_n)$$

Die Matrix A_i wird hierbei gebildet, indem die i-te Spalte der Koeffizientenmatrix A durch die rechte Seite des Gleichungssystems $\vec{b}$ ersetzt wird.

Anwendung der Cramerschen Regel

BEISPIEL

Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -8 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Berechnung der Determinanten

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -8 \\ -2 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -8 \end{vmatrix}$$

$$- \qquad\qquad +$$

Regel von Sarrus

$$|A| = -1\cdot5\cdot7+2\cdot6\cdot4+(-2)\cdot2\cdot(-8)-4\cdot5\cdot(-2)-(-8)\cdot6\cdot(-1)-7\cdot2\cdot2 = 9$$

Da $|A| \neq 0$ besitzt das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, welche mit der Cramerschen Regel berechnet werden kann.

Für $|A_1|$ wird die 1. Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt und die Determinante bestimmt:

Für $|A_2|$ wird die 2. Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt und die Determinante bestimmt:

Für $|A_3|$ wird die 3. Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt und die Determinante bestimmt:

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 61$$

Bestimmung der x-Werte

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{242}{9} \approx 26,89$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 26,89 \\ 0,89 \\ 6,78 \end{pmatrix}$$

Wird der Vektor $\vec{x}$ mit der Matrix A multipliziert, so ergibt sich der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.9 Eigenwerte und Eigenvektoren

1.9.1 Eigenwerte

Das Eigenwertproblem

A sei eine quadratische Matrix vom Typ (m, m).

Das **Eigenwertproblem** sucht eine Zahl λ und einen dazugehörigen Vektor $\vec{x}$ damit die Matrizengleichung

$$Ax = \lambda x$$

erfüllt ist.

Die Zahl λ wird als der **Eigenwert** bezeichnet, der Faktor $x \neq 0$ als der **Eigenvektor**.

HINWEIS

Im nächsten Kurstext behandeln wir die Berechnung der Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

Diese Gleichung lässt sich umformen in:

$$Ax - \lambda x = 0$$

Multiplizieren wir die Einheitsmatrix mit dem Eigenvektor, so ergibt dieser sich selbst als Ergebnis. Wir können deshalb $x = Ex$ setzen und formen die Gleichung um:

$$AEx - \lambda Ex = 0$$

$$\longrightarrow (A - \lambda E)x = 0$$

Eigenwerte

Die **Eigenwerte** der Matrix A sind die **Lösungen** der Gleichung $(A - \lambda E)x = 0$, welche ein lineares Gleichungssystem darstellt.

Mit der Voraussetzung dass $x \neq 0$, ist dieses LGS genau dann lösbar, wenn gilt:

Die Determinante stellt ein Polynom n -ten Grades mit der Variable λ dar:

Ist dieses Polynom normiert, so nennt man es das **charakteristische Polynom** $\chi_n(\lambda)$ der Matrix a

MERKE

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_n(\lambda)$ sind die Eigenwerte λ der Matrix A.

Ein Polynom n -ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Somit existieren höchstens n Eigenwerte der Matrix A.

Anwendungsbeispiel

BEISPIEL

Gegeben sei die folgende Matrix: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

1. Schritt: Berechnung des charakteristischen Polynoms und Nullsetzen

2. Schritt: Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms durch Anwendung der p/q-Formel

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{8}{2} \pm \sqrt{(-\frac{8}{2})^2 - 15}$$

$$\lambda_1 = 4 + \sqrt{1} = 5$$

$$\lambda_2 = 4 - \sqrt{1} = 3$$

$\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 3$ sind die **Eigenwerte** der Matrix A .

1.9.2 Eigenvektoren

Im diesem Kurstext zeigen wir dir die Berechnung der Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

Der zu dem Eigenwert λ gehörende Eigenvektor $\vec{x}$ ist die Lösung der Gleichung

$(A - \lambda E)\vec{x} = 0$, wobei $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt.

Anwendungsbeispiel

BEISPIEL

Gegeben sei die Matrix aus dem vorherigen Beispiel $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3$. Berechne die zugehörigen Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2 !

Berechnung des 1. Eigenvektors

Aus $\lambda_1 = 5$ folgt:

$$(A - 5E)\vec{x} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-5 & 0 \\ -4 & 5-5 \end{pmatrix}$$

Ergebnis mit dem $\vec{x}$ multiplizieren und gleich Null setzen:

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

D. h. es ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$-2x_1 + 0x_2 = 0 \quad \rightarrow x_1 = 0$$

$$-4x_1 + 0x_2 = 0 \quad \rightarrow x_1 = 0$$

Es gilt schonmal $x_1 = 0$. Da $\vec{x} \neq \vec{0}$, muss x_2 einen Wert ungleich Null annehmen. Wir setzen

$x_2 = 1$. So ist z.B. der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Problems, denn:

$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt

Berechnung des 2. Eigenvektors

$\lambda_2 = 3$:

$(A - 3E)\vec{x} = 0$:

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-3 & 0 \\ -4 & 5-3 \end{pmatrix}$$

Ergebnis mit dem $\vec{x}$ multiplizieren und gleich Null setzen:

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

D. h. es ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

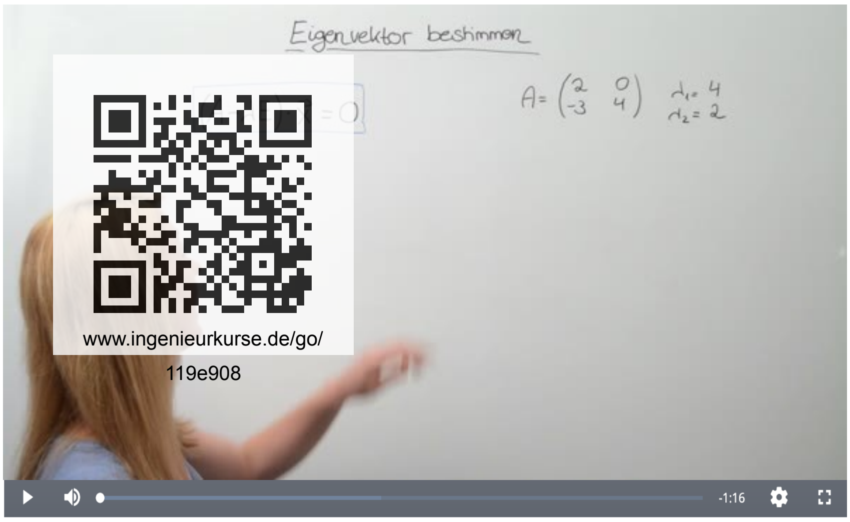
$$0x_1 + 0x_2 = 0$$

$$-4x_1 + 2x_2 = 0 \quad \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

Da hier wieder ein Vektor $\neq 0$ resultieren muss, kann keines der beiden Werte Null werden. Denn für $x_1 = 0$ müsste x_2 ebenfalls gleich null sein, damit der obige Zusammenhang gegeben ist. Also setzen wir $x_1 = 1$. Das bedeutet, x_2 muss den Wert 2 annehmen.

Da $\vec{x} \neq \vec{0}$, ist z.B. der Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist **eine** Lösung des Problems, denn:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt



1.9.3 Diagonalmatrix

In diesem Abschnitt werden die Diagonalmatrix und die Rechenregeln für diese eingeführt.

Als **Diagonalmatrix** bezeichnet man eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen Null sind. Diagonalmatrizen sind deshalb allein durch die Angabe ihrer Hauptdiagonale bestimmt.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ Diagonalmatrix}$$

Sind dabei alle Zahlen auf der Hauptdiagonalen identisch, so spricht man auch von **Skalarmatrizen**. Skalarmatrizen sind also skalare Vielfache der Einheitsmatrix.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Einheitsmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Skalarmatrix}$$

$\Longrightarrow A = 3 \cdot E \longrightarrow$ Skalarmatrizen sind skalare Vielfache der Einheitsmatrix.

Matrizenaddition von Diagonalmatrizen

METHODE

Werden **zwei Diagonalmatrizen** A und B miteinander addiert, so müssen nur die diagonalen Einträge miteinander addiert werden.

BEISPIEL

Addition von $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

METHODE

Wird eine **Matrix** zu einer **Diagonalmatrix** addiert, so ändern sich auch hier nur die Werte in der Diagonalen.

BEISPIEL

Addition von Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ und Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A + D = (3 + 4, 2 + 1, 4 + 2) = (7, 3, 6)$$

$$A + D = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

MERKE

Die Matrizenaddition ist **kommutativ**: $A + D = D + A$

Matrizenmultiplikation von Diagonalmatrizen

Multiplikation mit einem Skalar

METHODE

Die Multiplikation einer **Diagonalmatrix** mit einem **Skalar** wird so durchgeführt, indem nur die diagonalen Einträge mit diesem Skalar multipliziert werden.

BEISPIEL

Vervielfachen der Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit dem Faktor 3.

$$3 \cdot D = 3 \cdot (4, 1, 2) = (12, 3, 6)$$

$$3 \cdot D = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einer Matrix

BEISPIEL

Multiplikation der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mit der Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

METHODE

Multiplikation von links:

Multiplikation einer Matrix **von links** mit einer Diagonalmatrix entspricht der Multiplikation **der Zeilen** von A mit den Diagonaleinträgen.

METHODE

Multiplikation von rechts:

Die entsprechende Multiplikation **von rechts** entspricht der Multiplikation **der Spalten** von A mit den Diagonaleinträgen.

MERKE

Die Diagonalmatrix bietet also bei den Berechnungen Vorteile, weil die Anzahl der Rechenschritte sich stark reduzieren lässt.

HINWEIS

Wie eine Matrix in eine Diagonalmatrix überführt werden kann, zeigen wir dir im folgenden Abschnitt.

1.9.4 Diagonalisierbarkeit

Es ist sinnvoll eine gegebene quadratische Matrix in eine Diagonalmatrix zu überführen, weil sich die Matrizenaddition, die Skalarmultiplikation und die Matrizenmultiplikation vereinfachen (wie im vorherigen Abschnitt gezeigt). Es gibt aber noch weitere Vorteile, die eine Diagonalmatrix aufweist:

- Die Determinante einer Diagonalmatrix ist das Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen.
- Der Rang einer Diagonalmatrix entspricht den Einträgen auf der Hauptdiagonalen, sofern ungleich null.
- Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind die Einträge auf den Hauptdiagonalen mit den kanonischen Einheitsvektoren als Eigenvektoren.

Definition der Diagonalisierbarkeit

Eine $n \times n$ -Matrix A mit Einträgen aus einem Körper K ist genau dann diagonalisierbar, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

METHODE

1. Das charakteristische Polynom zerfällt vollständig in Linearfaktoren.
2. Die **geometrische** Vielfachheit entspricht der **algebraischen** Vielfachheit für jeden Eigenwert λ_i .

Zu 1:

Sind für das charakteristische Polynom einer $n \times n$ -Matrix weniger als n Nullstellen gegeben, so ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

Zu 2:

geometrische Vielfachheit: Anzahl linear unabhängiger **Eigenvektoren**

algebraische Vielfachheit: Die Anzahl der **Eigenwerte**, wobei die **Vielfachheit der Nullstellen** mit berücksichtigt werden muss.

Sind Eigenwerte und Eigenvektoren **identisch**, so ist die Matrix diagionalisierbar!

HINWEIS

Wie eine Matrix auf Diagonalisierbarkeit geprüft wird, zeigen wir dir in den nachfolgenden drei Kurstexten.

1.9.4.1 Beispiel 1: Diagonalisierbarkeit

In diesem Abschnitt prüfen wir, ob das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren zerlegt werden kann. Dies ist der Fall, wenn bei einer $n \times n$ -Matrix n Nullstellen existieren.

Anwendungsbeispiel 1: Diagonalisierbarkeit

BEISPIEL

Ist die obige Matrix diagonalisierbar?

1. Schritt: Berechnung des charakteristischen Polynoms

METHODE

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$$

mit

$\chi_A(\lambda)$ = charakteristisches Polynom

Berechnung der Determinante mittels **Regel von Sarrus** (ersten beiden Zeilen unten anfügen):

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\cdot(-2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - (2-\lambda)\cdot(-\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}$$

HINWEIS

Nur diese beiden Diagonalen sind relevant, weil die anderen null werden!

Ausklammern von $(2-\lambda)$:

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)[(-2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - (-\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}]$$

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)[(-2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - (-5)]$$

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)[(-2-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 5]$$

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)[-4+2\lambda-2\lambda+\lambda^2+5]$$

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)[1+\lambda^2]$$

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\cdot(\lambda^2+1)$$

2. Schritt: Nullstellen\ Eigenwerte bestimmen

Das charakteristische Polynom gleich Null setzen und nach λ auflösen:

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\cdot(\lambda^2+1) = 0$$

Hier können wir die Nullstellen direkt ablesen, ohne eine Polynomdivison durchführen zu müssen. Wird eine Klammer zu Null, so wird der gesamte Ausdruck Null.

Die erste Klammer wird zu Null für $\lambda_1 = 2$.

Die zweite Klammer wird zu Null für:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

$\lambda = \pm\sqrt{-1}$ -> Wurzel aus negativer Zahl für reelle Zahlen nicht möglich

$\Longrightarrow$ Es liegen keine weiteren reellen Nullstellen vor.

Das bedeutet, es existiert *eine reelle* Nullstelle bzw. ein Eigenwert der Matrix A. Bei der gegebenen $n \times n = 3 \times 3$ -Matrix ist also die Anzahl der Nullstellen geringer als n.

Daraus folgt, dass das charakteristische Polynom sich nicht vollständig in Linearfaktoren

zerlegen lässt. Die Matrix ist nicht diagonalisierbar.

1.9.4.2 Beispiel 2: Diagonalisierbarkeit

In diesem Abschnitt überprüfen wir, ob die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit in der Beispielmatrix übereinstimmt.

Anwendungsbeispiel 2: Diagonalisierbarkeit

BEISPIEL

Ist die obige Matrix diagonalisierbar?

1. Schritt: Berechnung des charakteristischen Polynoms

Berechnung des charakteristischen Polynoms mittels Regel von Sarrus:

$$\chi_A(\lambda) = (9 - \lambda) \cdot (6 - \lambda) \cdot (6 - \lambda)$$

Nur eine Diagonale ist relevant, die anderen Diagonalen ergeben null.

2. Schritt: Nullstellen/Eigenwerte bestimmen

Die Eigenwerte können sofort abgelesen werden. Wenn eine Klammer null wird, dann wird der gesamte Ausdruck zu null und die Bedingung $\chi_n(\lambda) = 0$ ist erfüllt.

$$\lambda_1 = 9 \, , \; \lambda_{2,3} = 6$$

Es sind also zwei Eigenwerte berechnet worden, wobei der 2. Eigenwert die Vielfachheit 2 aufweist. Es existieren also 3 Nullstellen für diese 3×3 -Matrix. $\Longrightarrow$ Das charakteristische Polynom zerfällt vollständig in Linearfaktoren.

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren

Es muss als nächstes geprüft werden, ob die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte mit der geometrischen übereinstimmt. Hierfür müssen die Eigenvektoren zu den ermittelten Eigenwerten berechnet werden. Dies geschieht mit der folgenden Formel:

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = 0$$

1. Eigenvektor:

mit $\lambda = 9$ ergibt sich:

Es gilt:

Es wird die Koeffizientenmatrix herangezogen und zunächst auf Zeilenstufenform gebracht (mittels Gauß-Algorithmus):

$$\begin{pmatrix} 9-9 & 0 & -6 \\ 18 & 6-9 & 0 \\ 0 & 0 & 6-9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 18 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad |(2 \times 3.\ \text{Zeile}) - 1.\ \text{Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 18 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es kann nun das lineare Gleichungssystem aufgestellt werden:

(1) $-6x_3 = 0$

(2) $18x_1 - 3x_2 = 0$

Auflösen nach x :

(1): $x_3 = 0$

(2): $x_1 = \frac{1}{6}x_2$

Das vorliegende Gleichungssystem besitzt zwei Gleichungen, aber drei Unbekannte. Das bedeutet, dass das Gleichungssystem unterbestimmt ist und es unendlich viele Lösungen gibt. Eine spezielle Lösung erhält man, indem man für eine der Variablen einen beliebigen Wert einsetzt. Es gilt laut (1): $x_3 = 0$. Aus der 2. Gleichung resultiert, dass wenn $x_1 = 1$ gesetzt wird, dann muss $x_2 = 6$ gesetzt werden. Wir haben also einen Eigenvektor ermittelt:

Man hätte natürlich ebenfalls für $x_1 = 2$ einsetzen können, dann wäre $x_2 = 12$.

Es existieren also unendliche viele Eigenvektoren, die aber alle linear voneinander abhängig sind:

Wir suchen aber linear unabhängige Eigenvektoren. Für $\lambda = 9$ existiert nur **ein** linear unabhängiger Eigenvektor.

2. Eigenvektor:

Als nächstes wird der Eigenvektor für $\lambda = 6$ mit der algebraischen Vielfachtheit 2 gesucht. Es müssen hier 2 unabhängige Eigenvektoren resultieren, damit die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen ist. Es wird nun wieder der Eigenvektor bestimmt:

$$(A - 6 \cdot E) \cdot \vec{x} = 0$$

Es kann als nächstes das lineare Gleichungssystem aufgestellt werden, da keine weiteren Umformungen mittels Gauß möglich sind:

(1) $3x_1 - 6x_3 = 0$

(2) $18x_1 = 0$

Auflösen nach x :

(1) $x_3 = \frac{1}{2}x_1$

(2) $x_1 = 0$

Es gilt $x_1 = 0$. Das bedeutet, dass ebenfalls $x_3 = 0$ gilt (aus Gleichung(1)). Da der Eigenvektor aber vom Nullvektor verschieden sein muss, kann $x_2 = 1$ gesetzt werden. Somit resultiert **ein** Eigenvektor für den Eigenwert 6:

Es resultiert nur **ein linear unabhängiger** Eigenvektor.

Wir haben also ingesamt 2 linear unabhängige Eingenvektoren, aber 3 Nullstellen gegeben. Die Matrix kann nur diagonalisiert werden, wenn die Anzahl der Nullstellen gleich der Anzahl der Eigenvektoren ist. Für die Nullstelle $x_{2,3} = 6$, d. h. für den Eigenwert $\lambda = 6$, müssten demnach 2 linear unabhängige Eigenvektoren resultieren, weil dieser Eigenwert die Vielfachheit 2 aufweist.

MERKE

Die algebraische Vielfachheit stimmt also nicht mit der geometrischen überein. Die Matrix kann nicht diagonalisiert werden.

1.9.4.3 Beispiel 3: Diagonalisierbarkeit

In diesem Abschnitt zeigen wir dir, wie eine Matrix diagonalisiert werden kann.

Anwendungsbeispiel 3: Diagonalisierbarkeit

BEISPIEL

Ist die Matrix A diagonalisierbar? Wenn ja, diagonalisiere die Matrix A (ermittele die Diagonalmatrix B)!

1. Schritt: Bestimmung des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$$

Die Determinante wird mittels **Regel von Sarrus** bestimmt:

$$\chi_A(\lambda) = (-2-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot (-1-\lambda) - (-1-\lambda) \cdot (-2) \cdot 2$$

$$\chi_A(\lambda) = (-1-\lambda) \cdot [(-2-\lambda) \cdot (3-\lambda) - (-2) \cdot 2]$$

$$\chi_A(\lambda) = (-1-\lambda) \cdot (-6 + 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 4)$$

$$\chi_A(\lambda) = (-1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 2)$$

2. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = 0$$

Wird eine der obigen Klammern des charakteristischen Polynoms gleich null, so wird die gesamte Gleichung null. Die Nullstellen sind die Eigenwerte der Matrix. Sie können ermittelt werden, indem Werte für λ eingesetzt werden. Diese Werte λ führen dann dazu, dass die gesamte Gleichung null wird.

$$(-1-\lambda)=0 \quad \rightarrow \lambda_1 = -1$$

$$(\lambda^2-\lambda-2)=0$$

Anwendung der p/q-Formel:

$$\lambda_{2,3} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{(\frac{-1}{2})^2-(-2)}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{-1}{2})^2+2}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = -1$$

Es resultieren also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

$\Longrightarrow$ Es resultieren $n = 3$ Nullstellen für diese 3×3 -Matrix. Das heißt, dass das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren zerlegt werden kann!

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren

Zu den oben angegebenen Eigenwerten sollen die Eigenvektoren bestimmt werden. Für $\lambda = -1$ müssen zwei linear unabhängige Eigenvektoren resultieren und für $\lambda = 2$ ein unabhängiger Eigenvektor, damit die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

$$(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = 0$$

1. Eigenvektor: für $\lambda = -1$

$$(A+1E)\cdot \vec{x} = 0$$

Wir wenden den Gauß-Algorithmus an, um die Matrix soweit wie möglich zu reduzieren:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad |2.\ \text{Zeile} + 2 \times 1.\ \text{Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es kann nicht weiter reduziert werden:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Das lineare Gleichungssystem sieht wie folgt aus:

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 = -2x_2 + x_3$$

Es wird nun für $x_1 = -2x_2 + x_3$ eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Vorziehen eines Faktors (andere Darstellungsform):

Die Eigenvektoren sind:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ und

Es resultieren 2 Eigenvektoren für den Eingenwert $\lambda = -1$ mit der algebraischen Vielfachheit 2. Demnach stimmen hier die geometrische und die algebraische Vielfachheit überein.

2. Eigenvektor: für $\lambda = 2$

$$(A - 2E) \cdot \vec{x} = 0$$

Wir wenden den Gauß-Algorithmus an, um die Matrix soweit wie möglich zu reduzieren:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Analysis und Lineare Algebra

Vektorräume

Autor:
Deleted User

INHALTSVERZEICHNIS

1 Vektorräume

Die nachfolgenden Abschnitte behandeln:

- Linearkombination von Vektoren
- Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren
- Definition: Vektorräume, lineare Hülle, Erzeugendensystem und Basis

1.1 Linearkombination von Vektoren

Die Linearkombination von Vektoren bezeichnet die Summe von Vektoren, wobei jeder Vektor mit einer reellen Zahl multipliziert wird. Das Ergebnis ist wieder ein Vektor.

METHODE

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + ... + \lambda_n \vec{a_n}$$

Dabei sind $\vec{a_i}$ die Vektoren, λ_i die reellen Zahlen und $\vec{v}$ der Ergebnisvektor.

MERKE

Der Vektor $\vec{v}$ ist eine Linearkombination aus den obigen Vektoren $\vec{a_i}$.

Darstellung eines Vektors als Linearkombination

Wir wollen zeigen, wie ein Vektor als Linearkombination von anderen Vektoren dargestellt werden kann. Hierzu betrachten wir ein Beispiel.

BEISPIEL

Der Vektor $\vec{v} = (1,4,6)$ soll als Linearkombination der Vektoren $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ (Einheitsvektoren) dargestellt werden.

$$(1,4,6) = 1 \cdot (1,0,0) + 4 \cdot (0,1,0) + 6 \cdot (0,0,1)$$

Die Summe der drei Vektoren die mit den reellen Zahlen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 6$ multipliziert wurden, ergeben genau den Vektor $(1,4,6)$. Der Vektor $(1,4,6)$ wurde also als

Linearkombination dargestellt.

Das obige Beispiel ist sehr einfach, weil es sich hierbei um die Einheitsvektoren handelt. Wir wollen ein weiteres Beispiel betrachten:

BEISPIEL

Der Vektor $\vec{v} = (1, 4, 6)$ soll als Linearkombination der Vektoren $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 1)$ und $(2, 1, 1)$ dargestellt werden.

Das folgende Gleichungssystem muss gelöst werden:

Bei diesem Beispiel ist es nicht mehr so einfach, die reellen Zahlen λ_i zu bestimmen. Wir müssen uns nun überlegen, welche Werte die λ_i annehemen müssen, damit der Ergenisvektor resultiert.

Dazu stellen wir das folgende Gleichungssystem auf:

$1 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 2$ (x-Koordinaten)

$4 = \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 1$ (y-Koordinaten)

$6 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 1$ (z-Koordinaten)

Alles auf eine Seite bringen:

(1)

(2)

(3)

Hierbei handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem. Wir können hier zur Bestimmung der Unbekannten die elementaren Umformungen vornehmen. Wir starten damit, die Gleichung **(3)** von der Gleichung **(1)** zu subtrahieren. So fallen λ_1 und λ_2 durch Kürzen heraus und λ_3 kann berechnet werden:

(1) - (3):

$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 - 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 6) = 0$ |Klammer auflösen

$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 - 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 6 = 0$ |Zusammenfassen

$\lambda_3 + 5 = 0$ |nach λ_3 auflösen

$\lambda_3 = -5$

Danach subtrahieren wir die Gleichung **(1)** von der Gleichung **(2)**, um λ_1 zu erhalten:

(2) - (1):

$2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 4 - (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 - 1) = 0$ |Klammer auflösen

$2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 4 - \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 + 1 = 0$ |Zusammenfassen

$\lambda_1 - \lambda_3 - 3 = 0$ |Einsetzen von $\lambda_3 = -5$

$\lambda_1 - (-5) - 3 = 0$

$\lambda_1 + 5 - 3 = 0$

$\lambda_1 = -2$

Die Unbekannte λ_2 kann jetzt einfach durch das Einsetzen von λ_1 und λ_3 in eine der obigen Gleichungen bestimmt werden:

(1): $\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 - 1 = 0$

|nach λ_2 auflösen

$\lambda_2 = 13$

Alle Unbekannten sind bestimmt. Die Linearkombination sieht also wie folgt aus:

EXPERTENTIPP

Bei der obigen Berechnung der Unbekannten kann die Berechnung (Subtraktion der Gleichungen) in beliebiger Reihenfolge vorgenommen werden. Sinnvoll ist dabei so vorzugehen, dass möglichst viele Unbekannte wegfallen. Die obigen Berechnungen können auch nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren durchgeführt werden.

1.2 Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit von Vektoren

Wir wollen uns als nächstes mit der **linearen Abhängigkeit** bzw. **Unabhängigkeit von Vektoren** beschäftigen.

Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\cdots$, $\vec{a_n}$ heißen linear abhängig, wenn gilt:

METHODE

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + ... + \lambda_n \vec{a_n} = \vec{0}$$

mit

$$\lambda_i \ (i = 1, 2, ..., n) \in \mathbb{R}$$

Dabei dürfen **nicht alle** $\lambda_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ den Wert Null annehmen, damit die obige Gleichung erfüllt ist.

MERKE

Lässt sich also der Nullvektor $\vec{0} = (0, 0, 0)$ durch eine Linearkombination aus den Vektoren $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\cdots$, $\vec{a_n}$ darstellen und ist **mindestens ein** λ_i **ungleich** null, so sind die Vektoren linear abhängig.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\cdots$, $\vec{a_n}$ heißen linear **un**abhängig, wenn gilt:

METHODE

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + ... + \lambda_n \vec{a_n} = \vec{0}$$

mit

$$\lambda_i \ (i = 1, 2, ..., n) \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_i \; (i = 1, 2, ..., n) = 0$$

Damit die obige Gleichung erfüllt ist, müssen alle $\lambda_i \; (i = 1, 2, ..., n)$ den Wert null annehmen.

MERKE

Der Nullvektor $\vec{0} = (0, 0, 0)$ darf sich nur durch eine Linearkombination aus den Vektoren $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\cdots$, $\vec{a_n}$ ergeben, wenn **alle** λ_i **gleich null** gesetzt werden. Dann sind alle Vektoren linear unabhängig.

HINWEIS

In den beiden nachfolgenden Abschnitten werden wir die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ betrachten.

1.2.1 Lineare Abhängigkeit im R²

Zwei Vektoren im R²

Zwei Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich der Nullvektor durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt:

METHODE

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} = \vec{0}$$

mit

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Nehmen beide λ_i den Wert null an, so sind die Vektoren voneinander unabhängig.

Daraus folgt für die lineare Abhängigkeit, dass nicht beide λ_i den Wert Null annehmen dürfen.

Alternativ kann bei zwei Vektoren die folgende Definition verwendet werden:

Zwei Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ sind genau dann linear abhängig, wenn einer der Vektoren sich als Linearkombination des anderen Vektors darstellen lässt:

METHODE

$$\vec{a_1} = \lambda \vec{a_2}$$

Ergibt sich für λ ein Wert ungleich null, so sind die beiden Vektoren voneinander abhängig

PRÜFUNGSTIPP

Bei der Prüfung der linearen Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit sollte bei **zwei Vektoren** (im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$) grundsätzlich diese Definition herangezogen werden (einfache Berechnung, da nur ein λ). Ergeben die Vektoren eine $n \times n$ -Matrix (also eine quadratische Matrix), so kann auch die Determinante bestimmt werden, indem beide Vektoren in eine Matrix eingetragen werden.

<u>Es gilt also:</u>

- Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie ein Vielfaches voneinander darstellen.
- In der graphischen Darstellung gilt, dass zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ genau dann linear abhängig sind, wenn diese parallel zueinander sind.

Anwendungsbeispiel

Dazu betrachten wir zunächst als einfaches Beispiel die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$.

BEISPIEL

$\vec{e_x} = (1, 0)$ und $\vec{e_y} = (0, 1)$

Da die beiden Einheitsvektoren nicht parallel zueinander sind und im $\mathbb{R}^2$ liegen, sind diese unabhängig voneinander.

Berechnung:

Zwei Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich der Nullvektor durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt:

$$\lambda_1 \vec{e_x} + \lambda_2 \vec{e_y} = \vec{0}$$

Wir können nun beide Vektoren zusammenfassen und die Determinante bestimmen. Ist die Determinante gleich null, so sind beide Vektoren linear abhängig voneinander.

Die **Determinante** einer 2×2 -Matrix berechnet sich wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \qquad det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

Da die Determinante ungleich null ist, sind beide Vektoren voneinander unabhängig.

HINWEIS

Die Berechnung von Determinanten haben wir bereits im Kapitel Matrizen gezeigt.

Alternative Berechnung:

Die beiden Vektoren $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich einer der Vektoren als Linearkombination des anderen Vektors darstellen lässt:

$$\vec{e_x} = \lambda \vec{e_y}$$

$$(1,0) = \lambda(0,1)$$

Lineares Gleichungssystem:

(1) $1 = \lambda \cdot 0 \quad \Rightarrow L =$ Leere Menge

(2) $0 = \lambda \cdot 1 \quad \Rightarrow \lambda = 0$

In der ersten Gleichung **(1)** existiert **keine Lösung**, da linke und rechte Seite nicht gleich sind. Es gibt also keinen Wert für die Variable λ, welche die linke Seite (=1) ergeben würde. Die Lösungsmenge ist daher leer. Aus der zweiten Gleichung (2) erhalten wir $\lambda = 0$. Da λ nicht überall den selben Wert annimmt, sind die beiden Vektoren voneinander unabhängig, ebenso wenn λ überall den Wert null annimmt. (D. h. die beiden Vektoren sind also nur dann linear abhängig voneinander, wenn λ denselben Wert annimmt und dieser ungleich Null ist.)

PRÜFUNGSTIPP

Lineare Abhängigkeit - Vektoren im R² Zum Download: 2 Vektoren im R²

Drei und mehr Vektoren im R^2

Sind im $\mathbb{R}^2$ zwei unabhängige Vektoren gegeben, so ist **jeder weitere** Vektor im $\mathbb{R}^2$ **linear abhängig** von diesen beiden Vektoren.

HINWEIS

In einem späteren Abschnitt wird die Basis von Vektoren behandelt. Im $\mathbb{R}^2$ bilden zwei linear unabhängige Vektoren eine Basis.

Anwendungsbeispiel

Wir zeigen dies anhand eines Beispiels.

BEISPIEL

Gegeben seien die beiden Vektoren $\vec{a} = (1,2)$ und $\vec{b} = (2,1)$.

Beide Vektoren sind voneinander unabhängig, weil der Vektor $\vec{a}$ sich **nicht** als Linearkombination des Vektors $\vec{b}$ darstellen lässt:

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}$$

$$(1,2) = \lambda \cdot (2,1)$$

Wir stellen das Gleichungssystem auf und lösen auf nach λ :

$$1 = 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$2 = 1\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

Es resultieren zwei unterschiedliche Werte für λ. Demnach sind die beiden Vektoren linear unabhängig. Es gibt also kein λ, welches mit dem Vektor $\vec{a_2}$ multipliziert den Vektor $\vec{a_1}$ als Ergebnis hat (und anders herum).

Betrachten wir nun einen dritten Vektor $\vec{c} = (3,5)$, so ist dieser linear abhängig von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, da er sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lässt.

$$\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$$

$$(3,5) = \lambda_1(1,2) + \lambda_2 \cdot (2,1)$$

Lineares Gleichungssystem:

(1) $3 = \lambda_1 + 2\lambda_2$

(2) $5 = 2\lambda_1 + \lambda_2$

Gleichung **(1)** nach λ_1 auflösen:

$$\lambda_1 = 3 - 2\lambda_2$$

Einsetzen in Gleichung **(2)** liefert:

$$5 = 2(3 - 2\lambda_2) + \lambda_2$$

Nach λ_2 auflösen:

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}$$

λ_2 in die umgeformte Gleichung **(1)** einsetzen:

$$\lambda_1 = 3 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{7}{3} \text{ und } \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

Der Vektor $(3,5)$ kann mithin als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden und ist damit linear abhängig.

MERKE

FAZIT: Im $\mathbb{R}^2$ können immer nur zwei Vektoren linear unabhängig voneinander sein. Jeder weitere Vektor lässt sich als Linearkombination dieser Vektoren darstellen und ist damit abhängig von diesen Vektoren.

Zusammenfassung:

- Sind zwei Vektoren im R² gegeben, so bestimmt sich die lineare Abhängigkeit indem der eine Vektor als Linearkombination des anderen Vektors dargestellt wird. Die Auflösung nach λ zeigt dann an, ob die Vektoren linear abhängig oder unabhängig voneinander sind:

  λ nimmt unterschiedliche Werte an. $\Rightarrow$ linear unabhängig
  λ nimmt den Wert Null an. $\Rightarrow$ linear unabhängig
  λ nimmt einen Wert ungleich Null an. $\Rightarrow$ linear abhängig

- Sind drei Vektoren im R² gegeben, so bestimmt sich die lineare Abhängigkeit, indem einer der drei Vektoren als Linearkombination der anderen beiden Vektoren dargestellt wird.

  Alle λ_i nehmen den Wert Null an. $\Rightarrow$ linear unabhängig
  Mindestens ein λ nimmt nicht den Wert Null an. $\Rightarrow$ linear abhängig

1.2.2 Lineare Abhängigkeit im R³

Zwei Vektoren im R³

Zwei Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich der Nullvektor durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt:

METHODE

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} = \vec{0}$$

mit

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Nehmen beide λ_i den Wert null an, so sind die Vektoren voneinander unabhängig. Demnach gilt für die lineare Abhängigkeit, dass nicht beide λ_i den Wert null annehmen dürfen.

Sinnvoll ist es, bei **zwei Vektoren** die folgende Defintion zu wählen (die Berechnung fällt weniger umfangreich aus):

Zwei Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ sind genau dann linear abhängig, wenn einer der Vektoren sich als Linearkombination des anderen Vektors darstellen lässt:

METHODE

$$\vec{a_1} = \lambda \vec{a_2}$$

Ergibt sich für λ **ein** Wert ungleich null, so sind die beiden Vektoren voneinander abhängig.

<u>Es gilt also:</u>

- Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie ein Vielfaches voneinander darstellen.
- In der grafischen Darstellung gilt, dass zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ genau dann linear abhängig sind, wenn diese parallel zueinander sind.

1. Anwendungsbeispiel

Dazu betrachten wir zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

BEISPIEL

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (2, 1, 0)$ und $\vec{b} = (3, 2, 4)$.

Sind die beiden Vektoren abhängig oder unabhängig voneinander?

Man kann hier auch ohne Berechnung erkennen, dass die beiden Vektoren linear unabhängig voneinander sind, da der Vektor $\vec{a}$ an der dritten Stelle eine Null enthält und der Vektor $\vec{b}$ an dieser Stelle keine Null aufweist. Wir wollen aber die Berechnung durchführen, um aufzuzeigen, wie die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit rechnerisch bestimmt wird.

Berechnung:

Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind voneinander unabhängig, wenn sich der Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination des Vektors $\vec{b}$ darstellen lässt:

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Gleichungssystem aufstellen:

$$2 = 3\lambda \quad \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

$$1 = 2\lambda \quad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$0 = 4\lambda \quad \Rightarrow \lambda = 0$$

Da λ nicht überall denselben Wert annimmt (wobei dieser ungleich null sein muss) sind die beiden Vektoren voneinander unabhängig.

2. Anwendungsbeispiel

BEISPIEL

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (4, 2, 1)$ und $\vec{b} = (8, 4, 2)$.

Sind die beiden Vektoren abhängig oder unabhängig voneinander?

Hier können wir bereits erkennen, dass beide Vektoren linear abhängig voneinander sind, weil der $\vec{b}$ ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ entspricht. Wir führen die Berechnung durch:

Berechnung:

Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind voneinander unabhängig, wenn sich der Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination des Vektors $\vec{b}$ darstellen lässt:

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Gleichungssystem aufstellen:

$$4 = 8\lambda \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$2 = 4\lambda \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$1 = 2\lambda \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Da λ überall den selben Wert ergibt und dieser ungleich null ist, sind die Vektoren voneinander abhängig. Wird der Vektor $\vec{b}$ mit $\lambda = \frac{1}{2}$ multipliziert, so ist das Ergebnis der Vektor $\vec{a}$.

Drei Vektoren im R³

Sind im $\mathbb{R}^3$ **drei unabhängige Vektoren** gegeben, so ist jeder weitere Vektor im $\mathbb{R}^3$ linear abhängig von diesen Vektoren.

HINWEIS

In einem späteren Abschnitt wird die Basis von Vektoren behandelt. Im $\mathbb{R}^3$ bilden drei linear unabhängige Vektoren eine Basis.

Zunächst prüfen wir, ob drei Vektoren linear abhängig voneinander sind:

Drei Vektoren $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ und $\vec{a_3}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich der Nullvektor durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt:

METHODE

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3} = \vec{0}$$

mit

$$\lambda_1, \lambda_2 . \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Nehmen alle λ_i den Wert null an, so sind die Vektoren voneinander unabhängig. Demnach gilt für die lineare Abhängigkeit, dass nicht alle λ_i den Wert null annehmen dürfen.

Anwendungsbeispiel

Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit dreier Vektoren an einem Beispiel.

BEISPIEL

Gegeben seien die drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ zu: $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 5, 1)$ und $\vec{c} = (3, 1, 3)$.

Sind diese drei Vektoren linear abhängig oder unabhängig voneinander?

Lässt sich der Nullvektor als Linearkombination der drei Vektoren darstellen bzw. nehmen nicht alle λ den Wert null an, so sind die drei Vektoren linear abhängig voneinander.

HINWEIS

Wir werden bei der Berechnung der Unabhängigkeit der drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sowohl den Gauß-Algorithmus anwenden als auch die Determinante der resultierenden 3×3 -Matrix bestimmen.

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$$

Gauß-Algorithmus

Wir tragen alle drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ in eine Matrix ein. Die rechte Seite (Nullvektor) kann hierbei unberücksichtig bleiben, da es sich um einen Nullvektor handelt:

Danach wenden wir den Gauß-Algorithmus an. Da keine Nullen in den Spalten gegeben sind, beginnen wir mit der 1. Spalte und versuchen möglichst viele Nullen in der Spalte zu erzeugen.

Berechnung der Null in der 2. Zeile (1. Spalte):

$$2.\ \text{Zeile} - 2 \times 1.\ \text{Zeile}:$$

Berechnung der Null in der 3. Zeile (1. Spalte):

$$3.\ \text{Zeile} - 3 \times 1.\ \text{Zeile}:$$

Berechnung der Null in der 3. Zeile (2. Spalte):

$$3 \times 3.\ \text{Zeile} + 2 \times 2.\ \text{Zeile}:$$

Aus der 3. Zeile ergibt sich:

$$-28\lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 0$$

Aus der 2. Zeile ergibt sich:

$$3\lambda_2 + (-5)\lambda_3 = 0 \quad |\lambda_3 = 0 \text{ einsetzen}$$

$$\lambda_2 = 0$$

Aus der 1. Zeile ergibt sich:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \quad |\lambda_{2,3} = 0 \text{ einsetzen}$$

$$\lambda_1 = 0$$

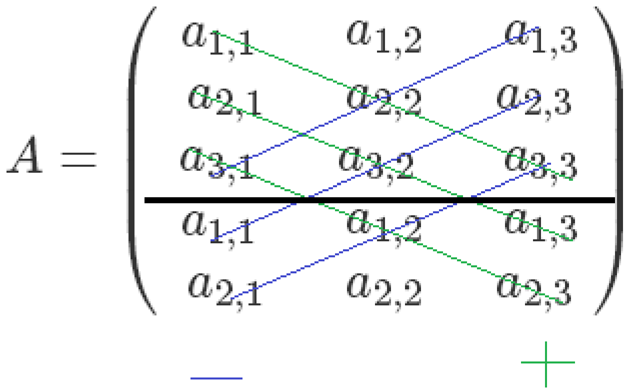
Alle drei λ_i nehmen den Wert null an. Damit sind die Vektoren voneinander unabhängig.

Determinante

Bei drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ kann auch die Determinante berechnet werden, da es sich um eine quadratische 3×3 -Matrix handelt:

METHODE

Repetition der **Regel von Sarrus**: Es werden die ersten beiden Zeilen unter die Matrix geschrieben, dann addiert man das Produkt aus den Elementen auf der grünen Diagonalen und subtrahiert davon das Produkt aus den Elementen auf der blauen Diagonalen.



Regel von Sarrus

$$< br > \begin{array}{ccc} < br > 1 & 1 & 3 \\ < br > 2 & 5 & 1 \\ < br > 3 & 1 & 3 \\ < br > 1 & 1 & 3 \\ < br > 2 & 5 & 1 < br > \end{array} < br >$$

Da sich ein Wert ungleich null ergibt, sind die Vektoren voneinander unabhängig.

Vier und mehr Vektoren im R^3

Haben wir im $\mathbb{R}^3$ drei unabhängige Vektoren gegeben, so ist **jeder weitere** Vektor $\in \mathbb{R}^3$ **linear abhängig** von diesen drei Vektoren.

Anwendungsbeispiel

BEISPIEL

Gegeben seien die drei Vektoren des vorangegangenen Beispiels und zusätzlich ein beliebiger Vektor $\vec{v} = (4, 0, 6)$. Bitte zeige, dass dieser Vektor von den obigen drei Vektoren linear abhängig ist!

Der Vektor $\vec{v}$ ist von den obigen drei Vektoren linear abhängig, wenn er sich als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt:

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{v}$$

Eintragen in eine erweiterte Matrix, wobei die rechte Seite hier berücksichtigt werden muss, da es sich hierbei nicht um den Nullvektor handelt:

$$< br > \begin{array}{ccc} < br > 1 & 1 & 3 \\ < br > 2 & 5 & 1 \\ < br > 3 & 1 & 3 < br > \end{array} < br > \left| < br > \begin{array}{c} < br > 4 \\ 0 \\ 6 < br > \end{array} < br > \right.$$

Zur Berechnung der Unbekannten wenden wir den Gauß-Algorithmus an:

Berechnung der Null in der 2. Zeile (1. Spalte):

$$2.\ \text{Zeile} - 2 \times 1.\ \text{Zeile}:$$

Berechnung der Null in der 3. Zeile (1. Spalte):

$$3.\ \text{Zeile} - 3 \times 1.\ \text{Zeile}:$$

Berechnung der Null in der 3. Zeile (2. Spalte):

$$3 \times 3.\ \text{Zeile} + 2 \times 2.\ \text{Zeile}:$$

Aus der 3. Zeile ergibt sich:

$$-28\lambda_3 = -34 \quad \Rightarrow \lambda_3 = \frac{17}{14}$$

Aus der 2. Zeile ergibt sich:

$$3\lambda_2 - 5\lambda_3 = -8 \quad |\text{Einsetzen von } \lambda_3 = \frac{17}{14}$$

$$3\lambda_2 - 5 \cdot \frac{17}{14} = -8$$

$$\lambda_2 = -\frac{9}{14}$$

Aus der 1. Zeile ergibt sich:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 4 \quad |\text{Einsetzen von } \lambda_1 \text{ und } \lambda_2$$

$$\lambda_1 - \frac{9}{14} + 3 \cdot \frac{17}{14} = 4$$

$$\lambda_1 = 1$$

Mittels der resultierenden Skalare kann der Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dargestellt werden. Dieser ist demnach linear abhängig von den drei Vektoren. Jeder Vektor im $\mathbb{R}^3$ ist von diesen drei voneinander linear unabhängigen Vektoren abhängig, kann also als deren Linearkombination dargestellt werden.

1.2.3 Neuer Eintrag 1

1.3 Vektorraum, Erzeugendensystem, lineare Hülle, Basis

Definition: Vektorraum

Die Elemente eines Vektorraums $\mathcal{V}$ heißen Vektoren. Sie können **addiert** oder mit **Skalaren multipliziert** werden. Das Ergebnis ist wieder ein Vektor desselben Vektorraums $\mathcal{V}$.

Addition von Vektoren

Eine Bedingung ist, dass die Vektoren miteinander addiert werden können. Sind also $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ Vektoren aus $\mathcal{V}$, also $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n} \in \mathcal{V}$, dann muss es möglich sein, ihre Summe zu bilden. Das Ergebnis muss wieder ein Vektor aus $\mathcal{V}$ sein, also:

$$\vec{a_1} + \vec{a_2} + ... + \vec{a_n} \in \mathcal{V}$$

Skalarmultiplikation mit Vektoren

Die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n} \in \mathcal{V}$ müssen mit einer reellen Zahl (Skalar) $\lambda \in \mathbb{R}$ multpliziert werden können. Das Ergebnis ist wieder ein Vektor aus $\mathcal{V}$:

$$\lambda \vec{a_1} \in \mathcal{V}$$

Lineare Hülle/Spann

Unter der linearen Hülle $[M]$ von der Menge $M = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}\}$ (engl: span) versteht man die Menge von Vektoren (in $\mathcal{V}$), die sich als Linearkombination mit Vektoren aus M darstellen lassen:

METHODE

$$[M] = \{\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + ... + \lambda_n \vec{a_n} | \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

Hierbei ist M eine Teilmenge von $\mathcal{V}$.

Die lineare Hülle besteht besteht aus allen Vielfachen der Vektoren (aus M) und deren Summen, ist also die Menge aller möglichen Linearkombinationen, die mit den gegebenen Vektoren gebildet werden können.

BEISPIEL

Wir betrachten zunächst einen Vektor $\vec{a_1}$ im $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$. $M := \{\vec{a_1}\}$. Dieser Vektor sei gegeben mit den Einträgen $\vec{a_1} = (1, 4, 3)$.

Die lineare Hülle eines einzigen Vektors $\vec{a_1}$ ist die Menge aller Vielfachen dieses Vektors:

$$[M] = \{\lambda \cdot \vec{a_1} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Wählen wir z. B. $\lambda = 2$, so ergibt sich:

$$2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot (1, 4, 3) = (2, 8, 6) .$$

Dieser Vektor bildet also unter anderem die lineare Hülle von $\vec{a_1}$. Wird der Vektor $\vec{a_1}$ also mit λ

multipliziert, wobei λ **alle reellen Zahlen** annehmen kann, so resultierenden die Vektoren, die alle die lineare Hülle von $\vec{a_1}$ bilden.

BEISPIEL

Wir betrachten als nächstes zwei Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ im $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ mit . Diese Vektoren seien gegeben mit den Einträgen $\vec{a_1} = (1, 4, 3)$ und $\vec{a_2} = (2, 1, 6)$.

$$[M] = \{\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Ein Vektor ist genau dann in $[M]$, wenn es passende Skalare λ_1 und λ_2 gibt, sodass sich der Vektor als Linearkombination von $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ darstellen lässt.

Setzen wir z. B. $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$, so erhalten wir einen Vektor, der zur obigen linearen Hülle gehört:

$$2 \cdot (1, 4, 3) + 3 \cdot (2, 1, 6) = (2, 8, 6) + (6, 3, 18) = (8, 11, 24)$$

Auch hier können für λ_1 und λ_2 wieder alle reellen Zahlen eingesetzt werden. Man kann sich vorstellen, wie groß die lineare Hülle dieser Menge wird.

BEISPIEL

Betrachten wir nun unendlich viele Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ im $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.
$M := \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}\}$.

Dann ist die lineare Hülle definiert zu:

Ein Vektor ist genau dann in $[M]$, wenn es passende Skalare $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ gibt, sodass sich der Vektor als Linearkombination der Vektoren darstellen lässt.

MERKE

Je mehr Vektoren innerhalb einer Menge gegeben sind, desto größer wird die lineare Hülle dieser Menge.

Erzeugendensystem, Basis

$\mathcal{V}$ sei ein Vektorraum und M Elemente dieses Vektorraums. Dann heißt M Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$, falls die lineare Hülle von M den gesamten Vektorraum $\mathcal{V}$ ergibt:

METHODE

$$[M] = \mathcal{V}$$

Wir betrachten also einen Vektorraum $\mathcal{V}$. Das Erzeugendensystem für diesen Vektorraum ist die Menge von Vektoren, deren lineare Hülle den gesamten Vektorraum abbildet.

MERKE

Einfach ausgedrückt: Die Menge M enthält Vektoren, mit denen wir den gesamten Vektorraum konstruieren können. Diese Menge M ist dann ein Erzeugendensystem. Das Erzeugendensystem kann linear abhängige und unabhängige Vektoren enthalten.

Wenn wir also eine Menge von Vektoren M gegeben haben, dann ist diese Menge ein Erzeugendensystem, wenn jeder Vektor im Vektorraum $\mathcal{V}$ als Linearkombinantion dieser Vektoren dargestellt werden kann.

Wir können prüfen, ob eine Menge M ein Erzeugendensystem darstellt, indem wir die Dimension der lineare Hülle mit der Dimension des Vektorraums vergleichen. Resultieren die gleichen Dimensionen, so ist die Menge M ein Erzeugendensystem.

Basis

MERKE

Eine **Basis** ist ein Erzeugendensystem, bei dem alle Vektoren **linear unabhängig** sind.

Im $\mathbb{R}^2$ besteht die Basis aus zwei linear unabhängigen Vektoren, im $\mathbb{R}^3$ aus drei unabhängigen

Vektoren und im $\mathbb{R}^n$ aus n unabhängigen Vektoren.

Wir können prüfen, ob eine Menge M ein Erzeugendensystem darstellt, indem wir die Dimension der linearen Hülle mit der Dimension des Vektorraums vergleichen. Stimmt die Anzahl der Dimensionen überein, so ist die Menge M ein Erzeugendensystem. Handelt es sich bei der Menge M um eine **Basis**, dann muss zusätzlich **die Anzahl der Vektoren der Dimension** entsprechen.

BEISPIEL

Beispiel: Eine Menge von Vektoren sei im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Diese Menge ist dann ein Erzeugendensystem, wenn genau **3** (wegen $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$) **unabhängige** Vektoren gegeben sind. Es können dazu aber noch weitere Vektoren in der Menge M gegeben sein, die alle eine Linearkombination von den drei unabhängigen Vektoren sind.

Eine **Basis** liegt dann vor, wenn **nur** die 3 linear unabhängige Vektoren gegeben sind. Es dürfen also keine weiteren Vektoren gegeben sein.

Zum besseren Verständnis der oben aufgeführten Themen, ziehen wir ein Beispiel heran.

Anwendungsbeispiel: lineare Hülle, Erzeugendensystem, Basis

BEISPIEL

Im Vektorraum $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ sei die folgende Menge von Vektoren gegeben:

$M = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}\}$ mit

$\vec{a_1} = (1,2)$, $\vec{a_2} = (2,1)$, $\vec{a_3} = (2,0)$, $\vec{a_4} = (0,3)$

Ist die Teilmenge M ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$?

Ist M eine Basis?

Zeige alle möglichen Basen auf!

Erzeugendensystem

Zur Überprüfung können nun verschiedene Rechenwege herangezogen werden. Der einfachste Weg folgt über den Rang einer Matrix.

1. Ist M eine Teilmenge des Vektorraums?

Wir prüfen zunächst, ob die Menge M eine Teilmenge des Vektorraums darstellt. Da alle Vektoren dem $\mathbb{R}^2$ angehören und demnach miteinander addiert sowie mit einem Skalar multipliziert werden können und daraus wieder ein Vektor des $\mathbb{R}^2$ resultiert, ist M eine Teilmenge von $\mathcal{V}$.

2. Vergleichen der Dimension der linearen Hülle mit der Dimension des Vektorraums

Wir bilden die lineare Hülle der Menge M :

$$[M] = \{\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \vec{a_3} + \lambda_4 \vec{a_4}\}$$

Wir schreiben zunächst das Gleichungssystem auf:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 0\lambda_4$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 + 3\lambda_4$$

Eine Möglichkeit ist es nun, die Dimension der linearen Hülle zu bestimmen, indem wir die Vektoren in eine Matrix eintragen und den Rang dieser Matrix bestimmen. Entspricht der Rang der Dimension von $\mathcal{V}$, so ist die Menge M ein Erzeugendensystem des Vektorraums $\mathcal{V}$.

Wir tragen nun die Vektoren in eine Matrix ein:

Hier müssen keine elementaren Umformungen mehr vorgenommen werden, da keine weiteren Nullen in den Zeilen erzeugt werden können, ohne dass eine andere Null verschwindet. Es ist aber deutlich zu erkennen, dass aufgrund der Nullen an unterschiedlichen Stellen, die 1. Zeile von der 2. Zeile unabhängig ist. Der 1. Zeilenvektor kann also nicht als Linearkombination des 2. Zeilenvektors dargestellt werden. Oder: Es gibt keine Zahl mit welcher der 1. Zeilenvektor multipliziert werden kann, damit der 2. Zeilenvektor resultiert.

Demnach sind hier **2 unabhängige Zeilenvektoren** gegeben. Damit ist der Rang der Matrix $rg2$. Zwei Vektoren sind also voneinander unabhängig. Um den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ zu erzeugen, benötigt man zwei linear unabhängige Vektoren.

Die Dimension des Vektorraums und die Dimension der linearen Hülle sind demnach gleich. Damit ist die Menge M ein Erzeugendensystem des Vektorraums $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$, weil gilt:

$$[M] = \mathcal{V}$$

MERKE

Die Vektoren in M können also alle Vektoren des Vektorraums $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ abbilden.

Wählen wir einen beliebigen Vektor des $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} = (8, 1)$$

Dann kann dieser Vektor als Linearkombination der Vektoren in M abgebildet werden. Jeder andere Vektor im $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ kann ebenfalls als Linearkombination der Vektoren in M abgebildet werden:

(frei gewählte Koeffizienten)

Wichtig: Die obigen Koeffizienten sind frei gewählt, so dass der Vektor (8,1) resultiert. Dabei muss mindestens ein Koeffizient λ_i **ungleich** null sein. Dies ist im obigen Beispiel der Fall. Zwei Koffizienten sind ungleich null, zwei gleich null. Mit $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 4$ und $\lambda_4 = \frac{1}{3}$ kann der Vektor $\vec{v} = (8, 1)$ abgebildet werden.

Basis

Eine Basis ist ein Erzeugendensystem mit **linear unabhängigen** Vektoren. Wir betrachten den $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$. Mithilfe von zwei unabhängigen Vektoren lässt sich der gesamte Vektorraum $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ darstellen. Die anderen Vektoren in der Menge M sind nicht notwendig, um den Vektorraum abzubilden. Die Basis ist also ein **minimales** Erzeugendensystem.

Wir müssen also als nächstes prüfen, ob die obige Menge M , die ja ein Erzeugendensystem darstellt, auch gleichzeitig eine Basis darstellt. Dieser Schritt ist nun einfach. Wir haben den Rang 2 $rg2$ ermittelt. Da aber 4 Vektoren gegeben sind, ist die Menge M zwar ein Erzeugendensystem, jedoch keine Basis. Wir haben nämlich nur zwei unabhängige Vektoren, die anderen beiden sind linear abhängig. Demnach ist die Menge M keine Basis.

Für den $\mathbb{R}^2$ gilt, dass die Basis stets aus zwei unabhängigen Vektoren besteht. Jeder weitere Vektor ist nicht linear unabhängig und gehört demnach nicht zur Basis.

MERKE

Eine Basis im $\mathbb{R}^n$ besteht aus n unabhängigen Vektoren.

Wir wollen nun die Basen der obigen Vektoren aus M bilden. Wir betrachten dazu zwei unabhängige

Vektoren, weil wir uns im $\mathbb{R}^2$ befinden. Wir beginnen mit dem Vektor $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$. Lässt sich einer der Vektoren als Linearkombination des anderen Vektors darstellen, so sind beide linear abhängig und bilden keine Basis:

$$\vec{a_1} = \lambda \vec{a_2}$$

$$(1, 2) = \lambda \cdot (2, 1)$$

Nach λ auflösen:

$$1 = 2\lambda \quad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$2 = 1\lambda \quad \Rightarrow \lambda = 2$$

Es resultieren zwei unterschiedliche Werte für λ, demnach sind die beiden Vektoren linear unabhängig. Es gibt also kein λ, welches mit dem Vektor $\vec{a_2}$ multipliziert den Vektor $\vec{a_1}$ als Ergebnis hat (und anders herum).

HINWEIS

Die Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ bilden eine Basis.

Betrachten wir die Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_3}$. Führen wir nun die obige Berechnung durch, so erhalten wir zwei linear unabhängige Vektoren.

HINWEIS

Die Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_3}$ bilden eine Basis.

Für die weiteren Vektoren gilt:

HINWEIS

Die Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_4}$ bilden eine Basis.

Die Vektoren $\vec{a_2}$ und $\vec{a_3}$ bilden eine Basis.

Die Vektoren $\vec{a_2}$ und $\vec{a_4}$ bilden eine Basis.

Die Vektoren $\vec{a_3}$ und $\vec{a_4}$ bilden eine Basis.

Wir haben hier also 6 Basen gegeben, die jeweils zwei unabhängige Vektoren enthalten. Jeder weitere Vektor stellt eine Linearkombination der Vektoren innerhalb der Basis dar.

Wählen wir die erste Basis mit den Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$. So ist z. B. der Vektor $\vec{a_3} = (0,3)$ eine Linearkombination aus diesen Vektoren:

$$(0,3) = \lambda_1(1,2) + \lambda_2(2,1)$$

Wir tragen das Ganze in eine Matrix ein:

$$\left(< br > \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} < br > \middle| < br > \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} < br > \right)$$

Nun wenden wir den Gauß-Algorithmus an. Hierbei versuchen wir, so viele Nullen wie möglich zu erzeugen, um das Gleichungssystem zu lösen. Die 2. Zeile wird mit 2 multipliziert und danach die 1. Zeile abgezogen:

$$\left(< br > \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{matrix} < br > \middle| < br > \begin{matrix} 0 \\ 6 \end{matrix} < br > \right)$$

Aus der 2. Zeile ergibt sich dann:

$$3\lambda_1 = 6 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2$$

Einsetzen in die 1.Zeile:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad | \; \lambda_1 = 2 \text{ einsetzen}$$

$$2 + 2\lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = -1$$

Der Vektor $(0,3)$ kann somit als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ dargestellt werden. Jeder andere Vektor im $\mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination dieser Vektoren dargestellt werden.

Diese Aussage gilt ebenfalls für die anderen 5 Basen.

1.4 Vektorräume: Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1: Untervektorraum

BEISPIEL

sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Überprüfe, ob V einen Untervektorraum darstellt!

Lösung:

Es müssen 3 Bedingungen geprüft werden:

1. Der Nullvektor muß im Unterraum enthalten sein
2. Der Unterraum muss abgeschlossen bezüglich der Addition sein, d. h. wenn zwei Vektoren aus dem Unterraum addiert werden, dann ist die Summe auch wieder in dem Unterraum enthalten.
3. Der Unterraum muss abgeschlossen bezüglich der skalaren Multiplikation sein, d. h. für Skalar mal Vektor aus dem Unterraum liegt wieder ein Vektor im Unterraum vor.

Wir wollen nun also prüfen, ob V einen Vektorraum darstellt.

Ist der Nullvektor im Untervektorraum enthalten?

Für $a = 0$ ergibt sich **kein** Nullvektor:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Demnach ist $\vec{0} \neq V$. Der Nullvektor ist also nicht enthalten. V ist kein Untervektorraum.

Aufgabe 2: Untervektorraum

BEISPIEL

sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Überprüfe, ob V einen Untervektorraum darstellt!

Lösung:

1. Ist der Nullvektor im Untervektorraum enthalten?

Wir setzen für $a = 0$ ein und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Nullvektor ist V enthalten, also $\vec{0} \in V$.

2. Vektoraddition

Wir führen die Vektoraddition aus zwei Vektoren der obigen Menge V durch, wobei wir für a beliebige Werte einsetzen. Es muss wieder ein Vektor aus V resultieren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der resultierende Vektor ist ein Element von V . $a = 3$ ist Element der reellen Zahlen. An der 2. und 3. Stelle resultiert eine Null.

3. Skalarmultiplikation

Wir betrachten als nächstes die Skalarmultiplikation und setzen für $\lambda = 2$ (beliebige Zahl Element der reellen Zahlen) ein:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Auch hier ist das Ergebnis Element von V . Setzen wir nun nämlich für a eine reelle Zahl ein, so resultiert wieder eine reelle Zahl. An den Stellen 2 und 3 stehen Nullen.

Demnach ist V ein Vektorraum.

Aufgabe 3: Vektorraum

BEISPIEL

sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Überprüfe, ob V einen Untervektorraum darstellt!

Lösung:

1. Ist der Nullvektor im Untervektorraum enthalten?

Wir setzen für $a = 0$ ein und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Nullvektor ist V enthalten, also $\vec{0} \in V$.

2. Vektoraddition

Wir gehen wie oben vor und führen die Vektoraddition aus zwei Vektoren der obigen Menge durch, wobei wir für a beliebige, reelle Werte einsetzen ($a = 3$ und $a = 5$):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Der resultierende Vektor ist ein Element von V. Denn wenn $a = 8$, dann ist $16 = 2a$ und $24 = 3a$.

allgemein formuliert:

Seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V$, d. h. und gegeben.

Der Vektor $\vec{b}$ liegt ebenfalls in V, da $b \in \mathbb{R}$. Wir können nun die Vektoraddition durchführen:

Setzen wir nun $c := a + b$, so erhalten wir:

Dieser Vektor liegt in V, da $a, b \in \mathbb{R}$ und damit auch $c \in \mathbb{R}$.

3. Skalarmultiplikation

Wir betrachten als nächstes die Skalarmultiplikation und setzen für $\lambda = 2$ (beliebige Zahl Element der reellen Zahlen) ein:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4a \\ 6a \end{pmatrix}$$

Auch hier ist das Ergebnis Element von V. Setzen wir für a eine reelle Zahl ein, so resultiert wieder eine reelle Zahl.

allgemein formuliert:

Demnach ist V ein Vektorraum.

1.5 Vektorraum, Untervektorraum

1.6 Lineare Hülle, Erzeugendensystem, Basis

Analysis und Lineare Algebra

Komplexe Zahlen

Autor:
Deleted User

ingenieurkurse.de
DIGITALE PRÜFUNGSVORBEREITUNG

INHALTSVERZEICHNIS

1 Komplexe Zahlen

1.1 Definition von komplexen Zahlen

Wie wir bereits im Kapitel "Reelle Zahlen" beschrieben haben, existieren neben rationalen Zahlen auch irrationale Zahlen, welche unendlich viele, nicht periodische Nachkommastellen besitzen. Die reellen Zahlen berücksichtigen allerdings noch nicht alle möglichen Zahlen. So ist zum Beispiel die $\sqrt{-1}$ keine rationale oder irrationale Zahl. Es existiert keine reelle Zahl, deren Quadrat -1 ergibt. Dies liegt daran, dass das Quadrieren jeder reellen (positiven oder negativen) Zahl immer ein *positives* Ergebnis zur Folge hat.

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen hingegen erfassen die Wurzel aus negativen Zahlen. Dies ist nur durch Einführung einer widerspruchsfreien Definition möglich, damit die bisher gültigen Rechenregeln nicht verletzt werden. Wir definieren hierfür:

MERKE

komplexe Zahl: $z = x + i \cdot y$

Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} := \{x + iy \ |x, y \in \mathbb{R}\}$

Die komplexen Zahlen bestehen aus dem **Realteil** x und dem **Imaginärteil** y, den wir mit i (bedeutet *imaginär*) multiplizieren. Das i ist selbst *keine* reelle Zahl. Wir bezeichnen es als **imaginäre Einheit** der komplexen Zahl.

MERKE

$$i = \sqrt{-1}$$

HINWEIS

In der Elektrotechnik wird als Symbol anstatt einem i ein j benutzt, um eine Verwechslung mit dem Momentanwert $i(t)$ der Stromstärke zu vermeiden.

Eine komplexe Zahl, die keinen Imaginärteil besitzt, kann man als reelle Zahl betrachten. Daraus folgt, dass alle reellen Zahlen in der Menge der komplexen Zahlen enthalten ist.

Eine komplexe Zahl $z = 0 + i \cdot 1$ hingegen, die also keinen Realteil besitzt, bezeichnet man als rein-imaginär.

BEISPIEL

Die komplexe Zahl $z = \frac{1}{3} + 0 \cdot i$ entspricht der reellen Zahl $\frac{1}{3}$.

Die komplexe Zahl $z = 0 + \frac{1}{3} \cdot i$ ist rein-imaginär.

Anwendungsbeispiel

BEISPIEL

Es sei die komplexe Zahl $z = 3 + i \cdot 2$ gegeben. Was ist der Real- und was der Imaginärteil?

Die komplexe Zahl $z = 3 + i \cdot 2$ hat den Realteil $x = 3$ und den Imaginärteil $y = 2$.

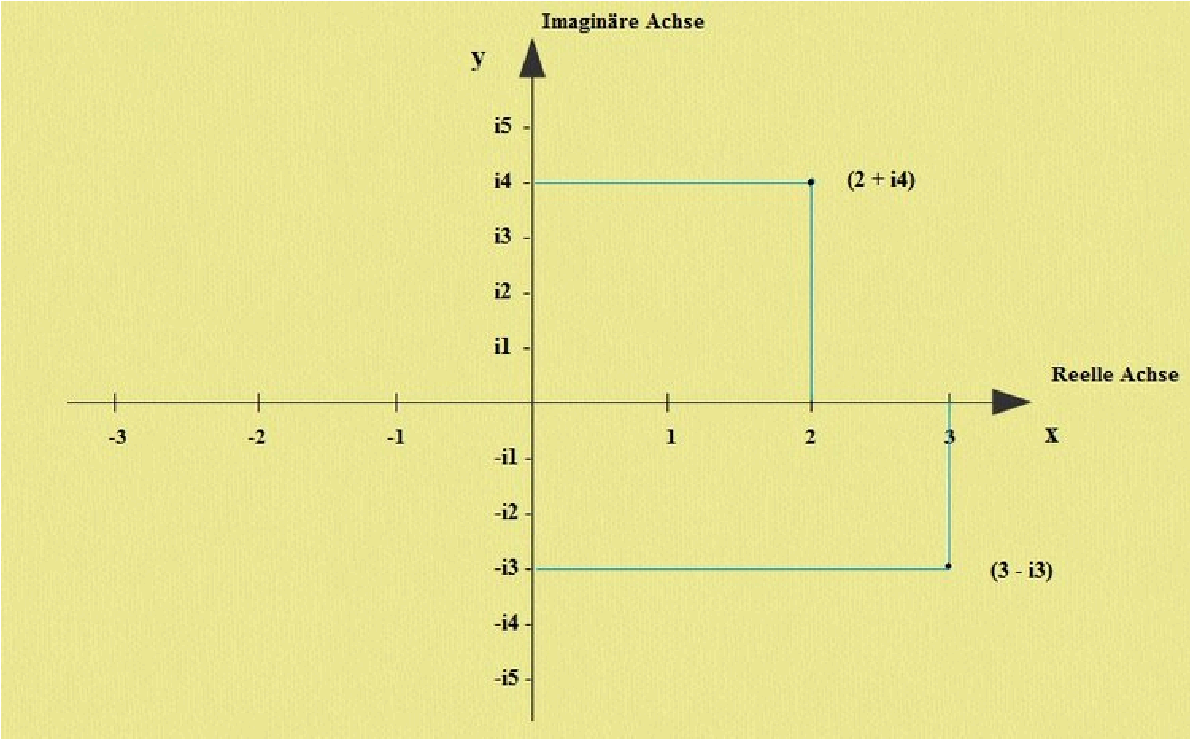
Grafische Darstellung der komplexen Zahlen

Die Menge der *rellen* Zahlen lassen sich durch Punkte auf einer *Zahlengeraden* darstellen.

Die Menge der **komplexen** Zahlen lassen sich als Punkte in einer Ebene, der **gaußschen Zahlenebene** (oder komplexe Ebene), veranschaulichen.

Wie du in der folgenden Grafik erkennst, heißt

- die x -Achse, die die Teilmenge der reellen Zahlen enthält, die **reelle** Achse und
- die y -Achse, die die Teilmenge der rein imaginären Zahlen enthält, die **imaginäre** Achse.



komplexe Zahlen (Imaginärteil, Realteil)

1.2 Grundrechenarten der komplexen Zahlen

Addition bzw. Subtraktion komplexer Zahlen

Zur Ermittlung der Summe bzw. Differenz zweier komplexer Zahlen $z = x + i \cdot y$ und $w = c + i \cdot v$ addiert bzw. subtrahiert man jeweils den Realteil und den Imaginärteil getrennt (wie bei der Addition bzw. Subtraktion von Vektoren):

MERKE

Addition: $z + w := (x + c) + i(y + v)$

Subtraktion: $z - w := (x - c) + i(y - v)$

Multiplikation komplexer Zahlen

Die Multiplikation komplexer Zahlen mit einer reellen Zahlen (hier: λ) entspricht der Skalarmultiplikation von Vektoren:

MERKE

Multiplikation mit einer rellen Zahl: $\lambda z := \lambda x + i \cdot \lambda y$

Unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ lässt sich hieraus die Multiplikation zweier komplexer Zahlen z und w ableiten:

METHODE

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (x+iy)(c+iv) \\ &= xc + xiv + iyc + i^2 yv \\ &= xc + i(xv+yc) + (-1)yv = xc + i(xv+yc) - yv \end{aligned}$$

MERKE

Multiplikation zweier komplexer Zahlen: $z \cdot w := (x+iy)(c+iv)$ $= (xc - yv) + i(xv + yc)$

Division zweier komplexer Zahlen

Die Division von komplexen Zahlen wird mit dem konjugiert komplexen Teil des Nenners erweitert. Bei dem konjugierten Term ändert sich nur das Vorzeichen des imaginären Teils. Der konjugierte Teil wird mit einem Querstrich dargestellt:

MERKE

konjugiert komplexe Zahl: $w = c + iu \quad \longrightarrow \quad \bar{w} = c - iu$

BEISPIEL

Die konjugiert komplexe Zahl von $m = 1 + 2j$ ist $\bar{m} = 1 - 2j$.

Die konjugiert komplexe Zahl von $n = -2 - 3j$ ist $\bar{n} = -2 + 3j$.

Für $z = x + iy$ und $w = c + iv$ mit $w \neq 0$ gilt:

METHODE

$$= \frac{(xc + yv) + i(-xv + yc)}{c^2 + v^2}$$

$$= \frac{xc + yv}{c^2 + v^2} + i\frac{(yc - xv)}{c^2 + v^2}$$

MERKE

Division zweier komplexer Zahlen: $\frac{z}{w} := \frac{x + iy}{c + iv}$

$$= \frac{xc + yv}{c^2 + v^2} + i\frac{(yc - xv)}{c^2 + v^2}$$

Rechenregeln für $z, w \in \mathbb{C}$ **mit** $w \neq 0$

(1)

(2)

(3) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

Der Betrag

Der Betrag |z| von $z = x + iy$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Es gelten folgende **Rechenregeln:**

(1) $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

(2) $|zw| = |z||w|$

(3) $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$

(4) $|z| = |\bar{z}|$

MERKE

Der Betrag einer komplexen Zahl ist ihr Abstand vom Nullpunkt.

Anwendungsbeispiele

BEISPIEL

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z = 2 + i3$ und $w = 4 + i2$.

Berechne $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$ und $\frac{z}{w}$.

(1) $z + w = 6 + 5i$

(2) $z - w = -2 + i$

(3) $z \cdot w = 8 + 4i + 12i + 6i^2 = 2 + 16i$

(4)

BEISPIEL

Beweise:

Mit und $w = c + iv$ gilt:

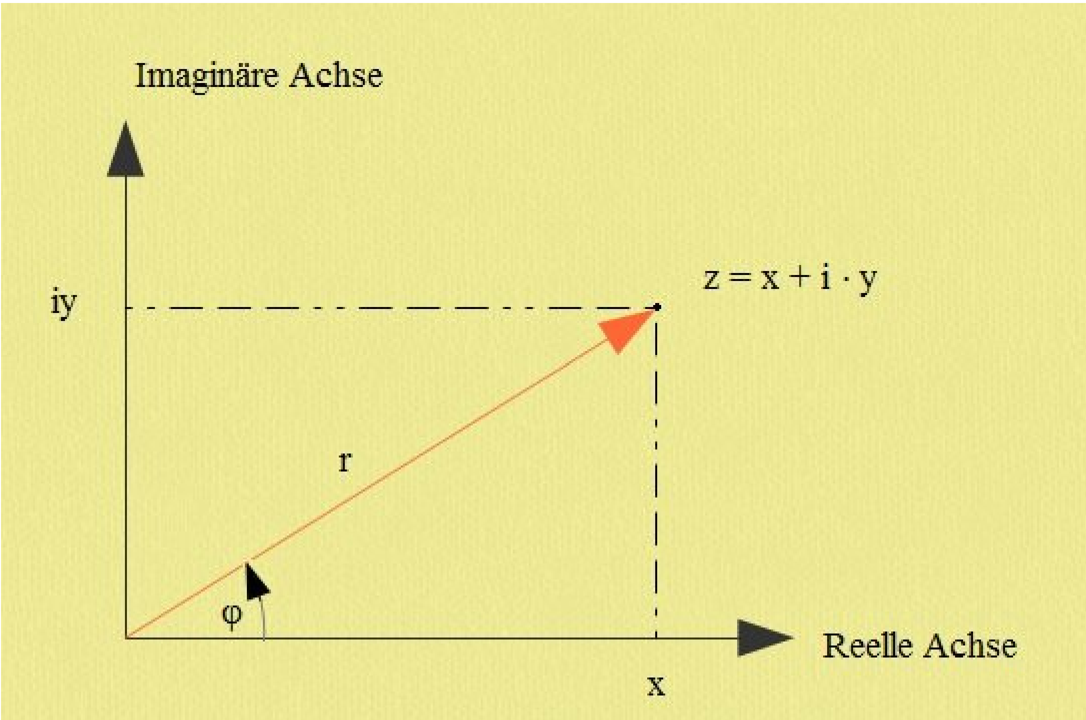
Vorzeichen des Imaginärteils geändert

Umgekehrt gilt:

$$\bar{z}\bar{w} = (x - iy)(c - iv)$$

1.3 Komplexe Zahlen und Polarkoordinaten

Durch den Abstand r (Radius) vom Koordinatenursprung lässt sich die Lage eines Punktes ermitteln. Dabei ist $\vec{r}$ der Vektor, der auf den Punkt zeigt und $r = |\vec{r}|$ ist die Länge des Vektors. Dieser Zusammhang wurde bereits im Kapitel Vektorrechnung behandelt. Ist der Vektor $\vec{r} \neq (0,0)$ (also vom Nullvektor verschieden), dann ist die Länge des Vektor größer null: $r > 0$. Wie du in der folgenden Grafik siehst, existiert dann ein Winkel φ, welcher sich mit der positiven x-Achse (Polarwinkel) bilden lässt.



Polarkoordinaten

Umformung von kartesischen in polare Koordinaten

Wir wollen nun einen Punkt im obigen Koordinatensystem beschreiben. Wenn wir diesen Punkt in kartesischen Koordinaten angeben, so verwenden wir die x - und y -Koordinaten.

Wir können jedoch auch Polarkoordinaten verwenden, um einen Punkt im obigen Koordinatensystem anzugeben. Hier benötigen wir die Länge des Vektors $r = |\vec{r}|$ und den Winkel φ zwischen dem Vektor $\vec{r}$ und der x -Achse.

Wir können hierzu die folgenden Umformungen von kartesischen in Polarkoordinaten verwenden:

(1) $x = r \cdot \cos(\varphi)$

(2) $y = r \cdot \sin(\varphi)$

(3) $z = x + iy = r[\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]$

(4) $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

(5) $\tan\varphi = \frac{y}{x}$

Berechnung des Winkels

Der Winkel φ kann aus der Formel (5) bestimmt werden, indem diese nach φ aufgelöst wird:

$$\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$$

Die Ausgabe des Winkels kann dabei in Grad (°) oder in Radiant erfolgen. Der Radiant ist ein Winkelmaß, bei dem der Winkel durch die Länge des entsprechenden Kreisbogens im Einheitskreis angegeben wird. Ein Vollwinkel also 360° entsprechen dabei $2\pi rad$. Über den Taschenrechner kann die Aussgabe des Winkels in Grad oder Radiant bestimmt werden.

EXPERTENTIPP

Häufig wird die Ausgabe eines Winkels in Radiant oder Grad über die Taste DRG geregelt. Dabei kann zwischen DEG, RAD oder GRD unterschieden werden. DEG bedeutet die Ausgabe erfolgt in Grad (°) und RAD in Radiant (rad). WICHTIG: Grundsätzlich erfolgt die Ausgabe in Grad. Sollte der Taschenrechner also auf RAD gestellt werden um die Ausgabe in Radiant zu erhalten, dann darf nicht vergessen werden den Taschenrechner danach wieder auf GRAD umzustellen.

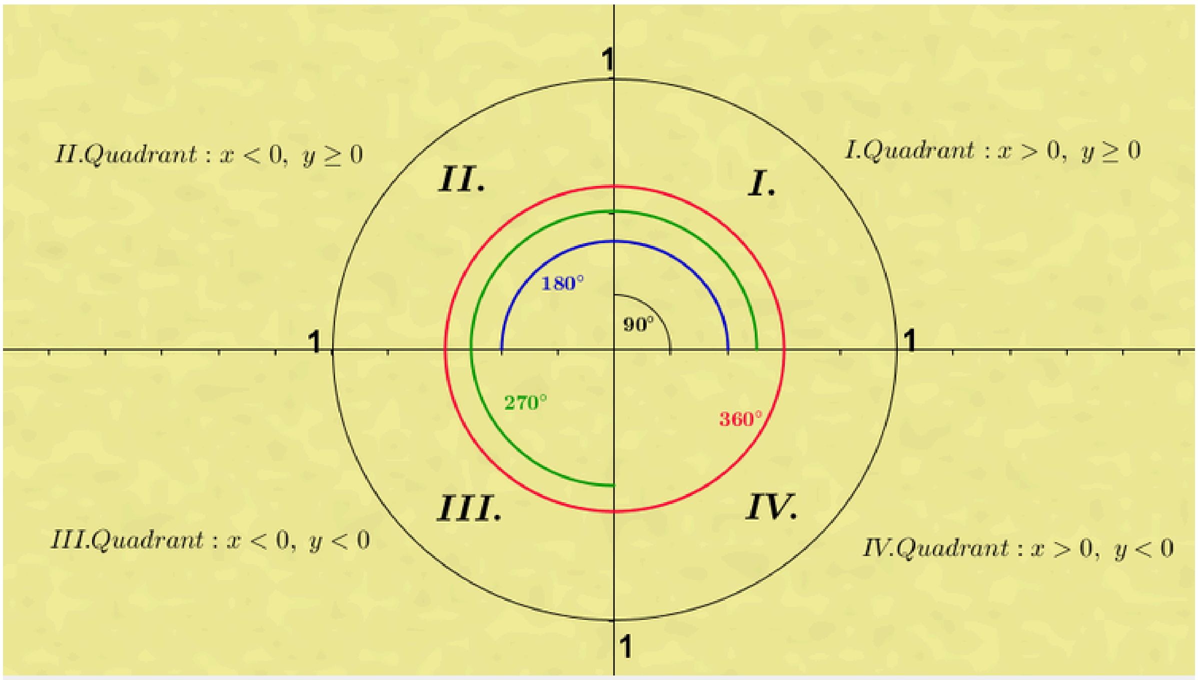
Alternativ kann man die Ausgabe auf GRD (Grad) einstellen und dann manuell in Radiant umrechnen. Die Umrechnung von Grad in Radiant wird wie folgt durchgeführt:

METHODE

MERKE

Im Weiteren sprechen wir von $\hat{\varphi}$, wenn der Winkel in Grad (°) angegeben wird und von φ bei der Angabe des Winkels in Radiant (rad).

Der Winkel φ wird auch das **Argument** von z genannt. Seine Berechnung hängt vom Quadranten ab, in dem z liegt.



Quadranten im Einheitskreis

I. Quadrant

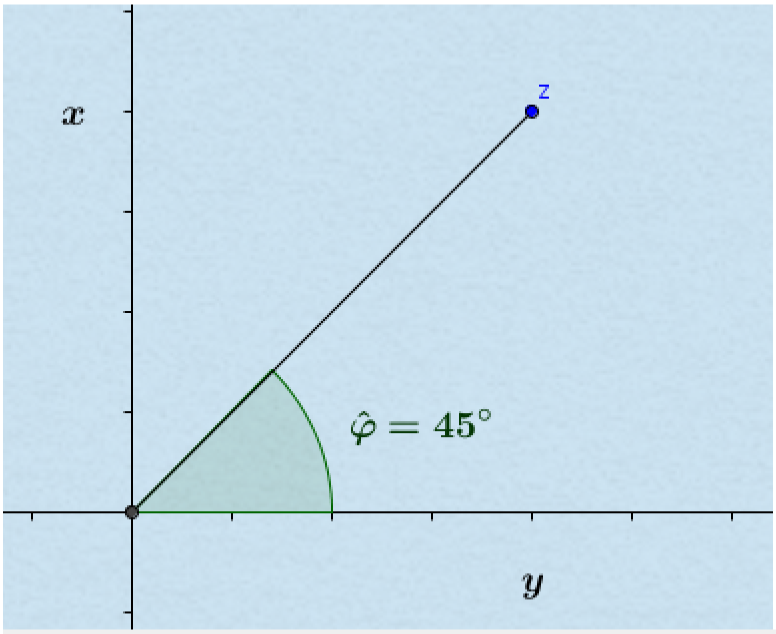
z liegt im I. Quadranten $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, wenn $x > 0$ und $y \geq 0$:

Der Winkel in Grad (°) wird dann berechnet zu:

$$\hat{\varphi} = \arctan(\frac{y}{x})$$

Die Angabe des Winkels in Radiant (rad) erfolgt dann mittels der folgenden Umrechnung:

$$\varphi = \frac{\hat{\varphi}}{360} \cdot 2\pi$$



I. Quadrant

II. Quadrant

z liegt im II. Quadranten $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$, wenn $x < 0$ und $y \ge 0$:

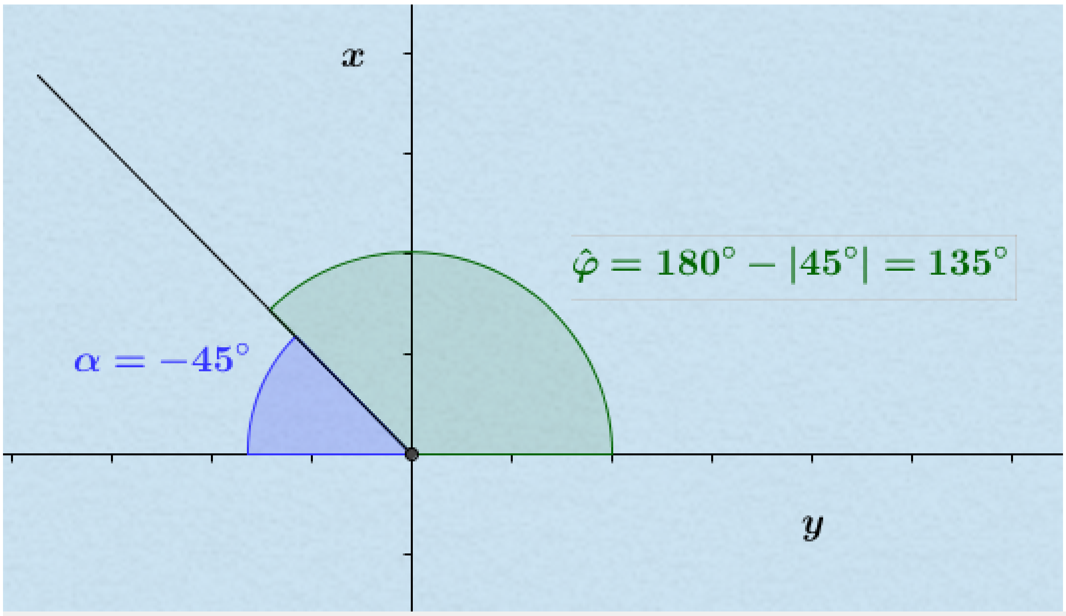
Wir definieren zunächst den Winkel α zwischen r und der negativen x -Achse:

METHODE

Um nun den Winkel zur positiven x -Achse zu erhalten, müssen wir diesen ermittelten Winkel von 180° abziehen:

Die Umrechnung in Radiant wird dann wie folgt vorgenommen:

$$\varphi = \frac{\hat{\varphi}}{360} \cdot 2\pi$$



II. Quadrant

Es wird als erstes der Winkel α berechnet, welcher einen negativen Winkel ergibt, da $x < 0$. Der Betrag von α muss von den gesamten 180° abgezogen werden, damit man den Winkel $\hat{\varphi}$ erhält.

III. Quadrant

z liegt im III. Quadranten $\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, wenn $x < 0$ und $y < 0$.

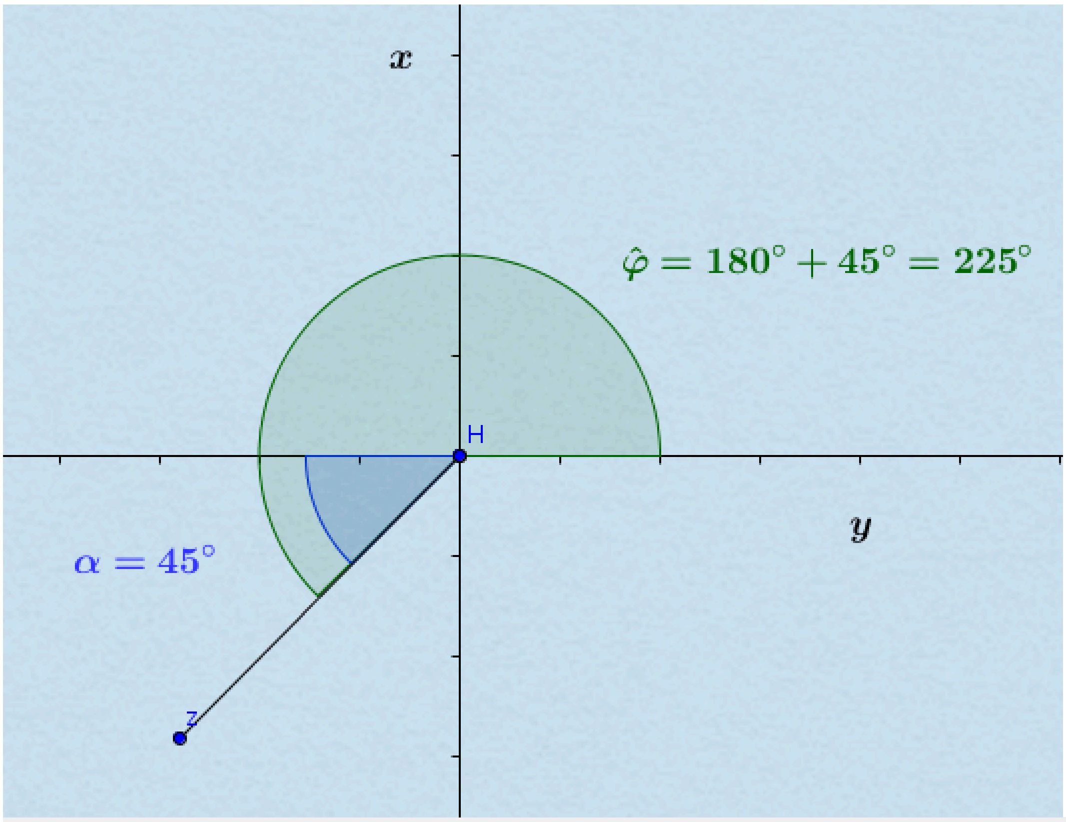
Wir definieren zunächst den Winkel α zwischen r und der negativen x-Achse:

METHODE

Um nun den Winkel zur positiven x-Achse zu erhalten, müssen wir diesen ermittelten Winkel zu 180° addieren:

Die Umrechnung in Radiant wird dann wie folgt vorgenommen:

$$\varphi = \frac{\hat{\varphi}}{360} \cdot 2\pi$$



III. Quadrant

Es wird als erstes der Winkel α berechnet, welcher einen positiven Winkel ergibt, da $x < 0$ und $y < 0$. Dieser muss zu den gesamten 180° hinzugerechnet werden, damit man den Winkel $\hat{\varphi}$ erhält.

IV. Quadrant

z liegt im IV. Quadranten $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$, wenn $x > 0$ und $y < 0$.

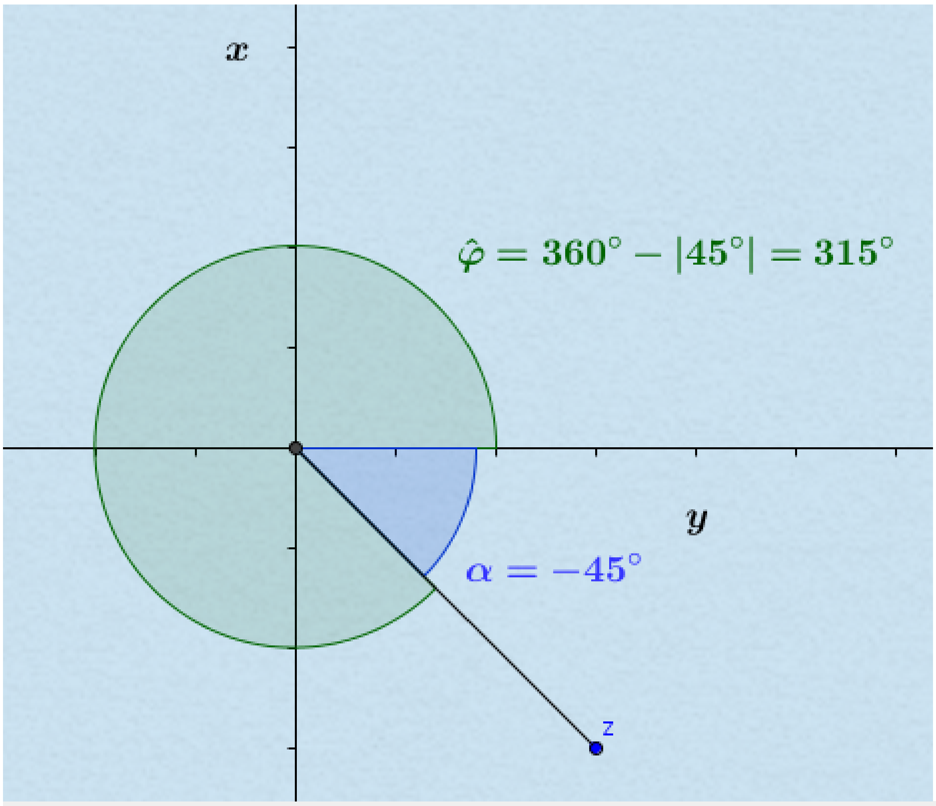
Wir definieren zunächst den Winkel α zwischen r und der positiven x-Achse (von unten):

METHODE

Um nun den Winkel zur positiven x-Achse zu erhalten, müssen wir den Betrag des ermittelten Winkel von 360° abziehen:

Die Umrechnung in Radiant wird dann wie folgt vorgenommen:

$$\varphi = \frac{\hat{\varphi}}{360} \cdot 2\pi$$



IV. Quadrant

Es wird als erstes der Winkel α berechnet, welcher einen negativen Winkel ergibt, da $y < 0$. Der Betrag von α muss von den gesamten 360° abgezogen werden, damit man den Winkel $\hat{\varphi}$ erhält.

Anwendung der Polarkoordinaten

BEISPIEL

Gegeben seien die kartesischen Koordinaten $x = -4$ und $y = 3$ der komplexen Zahl $z = -4 + i3$. Wie lauten die Polarkoordinaten?

Zunächst berechnen wir die Länge des Vektors r. Hierzu verwenden wir die Formel aus (4):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Da $x < 0$ und $y > 0$ befindet sich z im **II. Quadranten**:

$$\alpha = \arctan(\frac{3}{-4}) \approx -36,87$$

(Einheit: Grad)

(Einheit: Radiant)

BEISPIEL

Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 4 - i4$. Wie lauten ihre Polarkoordinaten?

(4) $r = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$

Da $x > 0$ und $y < 0$ befindet sich z im IV. Quadranten:

(Einheit: Grad)

(Einheit: Radiant)

Eulersche Darstellung

Die Eulersche Darstellung gibt die Verbindung zwischen den trigonometrischen Funktionen und den komplexen Exponentialfunktionen mittels komplexer Zahlen an. Die Eulersche Darstellung wird im angegeben durch:

METHODE

Eulersche Darstellung: $z = re^{i\varphi}$

mit

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + i \cdot sin\varphi$$

Die Angabe von φ erfolgt bei der eulerschen Darstellung in Radiant!

BEISPIEL

Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 3 - i4$. Wie lauten ihre Polarkoordinaten?

Wir verwenden hier wieder der kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten:

(4) $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

Da $x > 0$ und $y < 0$ befindet sich z im **IV. Quadranten**:

$$\alpha = \arctan(\frac{-4}{3}) \approx -53,13$$

Nachdem wir r und φ bestimmt haben, können wir die komplexe Zahl mittels der eulerschen Formel angeben:

1.4 Nullstellen von Polynomen

Als **Polynome** bezeichnet man vielgliedrige Summen oder Differenzen. Der Begriff **Binome** wird im Gegensatz dazu für zweigliedrige Summen oder Differenzen verwendet.

Komplexe Zahlen spielen in der Bestimmung **der Nullstellen von Polynomen** eine wichtige Rolle, also die Werte von x , für die das Polynom verschwindet.

Der Ausdruck **algebraische Summe** ist dem Polynom gleichbedeutend.

BEISPIEL

Ein Beispiel für ein fünfgliedriges **Polynom** ist der Term .

HINWEIS

In den folgenden Kurstexten gehen wir auf den **Fundamentalsatz der Algebra** und die **pq-Formel** näher ein.

1.4.1 Fundamentalsatz der Algebra

MERKE

Für jedes Polynom $f(x)$ mit komplexen Koeffizienten ist eine Darstellung als Produkt von n Linearfaktoren möglich.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$\leftrightarrow \; f(x) = a_n(x - b_1) \ldots (x - b_n)$$

Die komplexen Zahlen $b_1, \ldots, b_n$ sind die Nullstellen von $f(x)$.

BEISPIEL

Zerlege das Polynom $x^4 - 1$ in Linearfaktoren!

$x^4 - 1 = (x-1)(x-i)(x+1)(x+i)$ (Beachte, dass $i^2 = -1$!)

Probe:

$$(x-1)(x-i)(x+1)(x+i)$$

$$= (x^2 - 1^2)(x^2 - i^2)$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

$$= x^4 + x^2 - x^2 - 1$$

$$= x^4 - 1$$

Jedes Polynom n -ten Grades lässt sich in ein Produkt von n Faktoren zerlegen.

Hierbei ist anzumerken, dass jede ganzrationale Gleichung n -ten Grades mit komplexen Zahlen genau n Lösungen besitzt. Im obigen Beispiel ist die Gleichung 4 -ten Grades, somit müssen 4 Lösungen existieren, um eine Nullstelle zu erhalten. Die Lösungen lauten $1; -1; i$ und $-i$.

1.4.2 abc- Formel (Mitternachtsformel) und pq-Formel

Die abc- und die pq-Formel sind wichtige Instrumente zur Lösung quadratischer Gleichungen, also dem Auffinden von **Nullstellen eines Polynoms**.

Die abc-Formel

Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung lautet:

METHODE

allgemeine Form der quadratischen Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$

mit:

$a \neq 0$
ax^2 = quadratisches Glied
bx = lineares Glied
c = konstantes Glied (oder Absolutglied)

Ist $b = 0$, dann sprechen wir von einer **reinquadratischen Gleichung**.

Die Lösungen dieser Gleichung berechnen wir mit der sogenannten abc-Formel. Diese Formel wird in Teilen des deutschsprachigen Raumes auch als **Mitternachtsformel** bezeichnet.

METHODE

abc-Formel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Beispiel: abc-Formel / Mitternachtsformel

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion . Berechne die Nullstellen der Funktion mit der abc-Formel.

Wir wenden dazu die obige Gleichung an:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hier gilt:

$a = 4$

$b = -2$

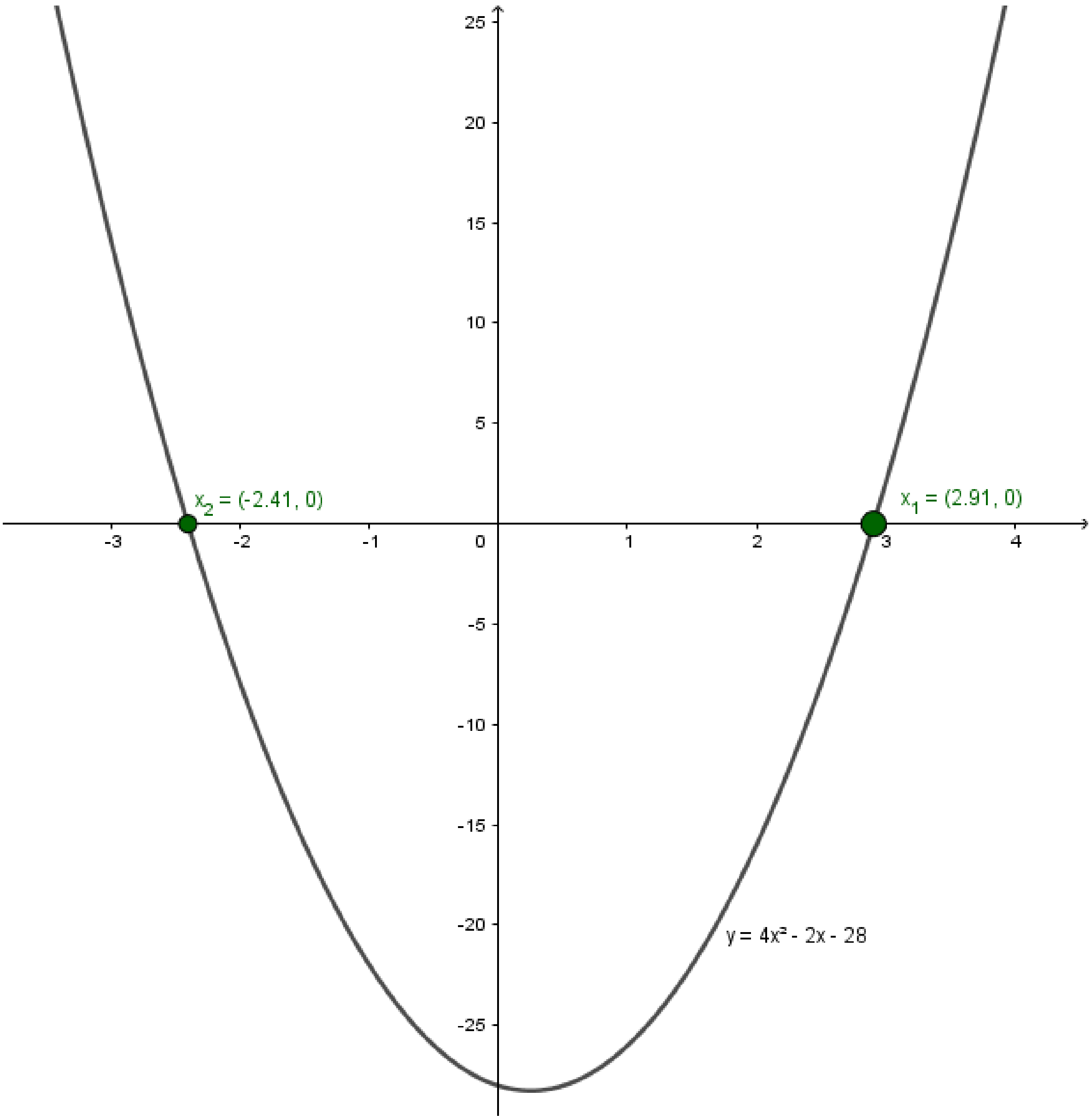
$c = -28$

Einsetzen:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-28)}}{2 \cdot 4}$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-28)}}{2 \cdot 4} = 2,91$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-28)}}{2 \cdot 4} = -2,41$$



Die pq-Formel

Wir sprechen von der **Normalform der quadratischen Gleichung**, wenn in der allgemeinen quadratischen Gleichung $a = 1$ gegeben ist. Dies erreichen wir, indem wir die Glieder der Gleichung durch $a \neq 0$ dividieren. Definieren wir $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$, so erhalten wir die Normalform der quadratischen Gleichung.

METHODE

Normalform der quadratischen Gleichung: $x^2 + px + q = 0$

Die Lösungen dieser Gleichung berechnen wir mit der sogenannten **pq-Formel**. Wir definieren wie oben p und q mit $a = 1$ und setzen diese in die abc-Formel ein:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4aq}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot p \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot p^2 - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot q}$$

Nach den letzten Umformungen erhalten wir die pq-Formel.

METHODE

pq-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

MERKE

Bei der pq-Formel muss also zunächst die gesamte Gleichung durch a dividiert werden, sofern $a \neq 1$ ist.

Beispiel: pq-Formel

BEISPIEL

Gegeben sei die quadratische Gleichung $f(x) = 4x^2 + 16x + 8$. Bestimme bitte die Nullstellen!

Zuerst überführen wir die Gleichung in die Normalform:

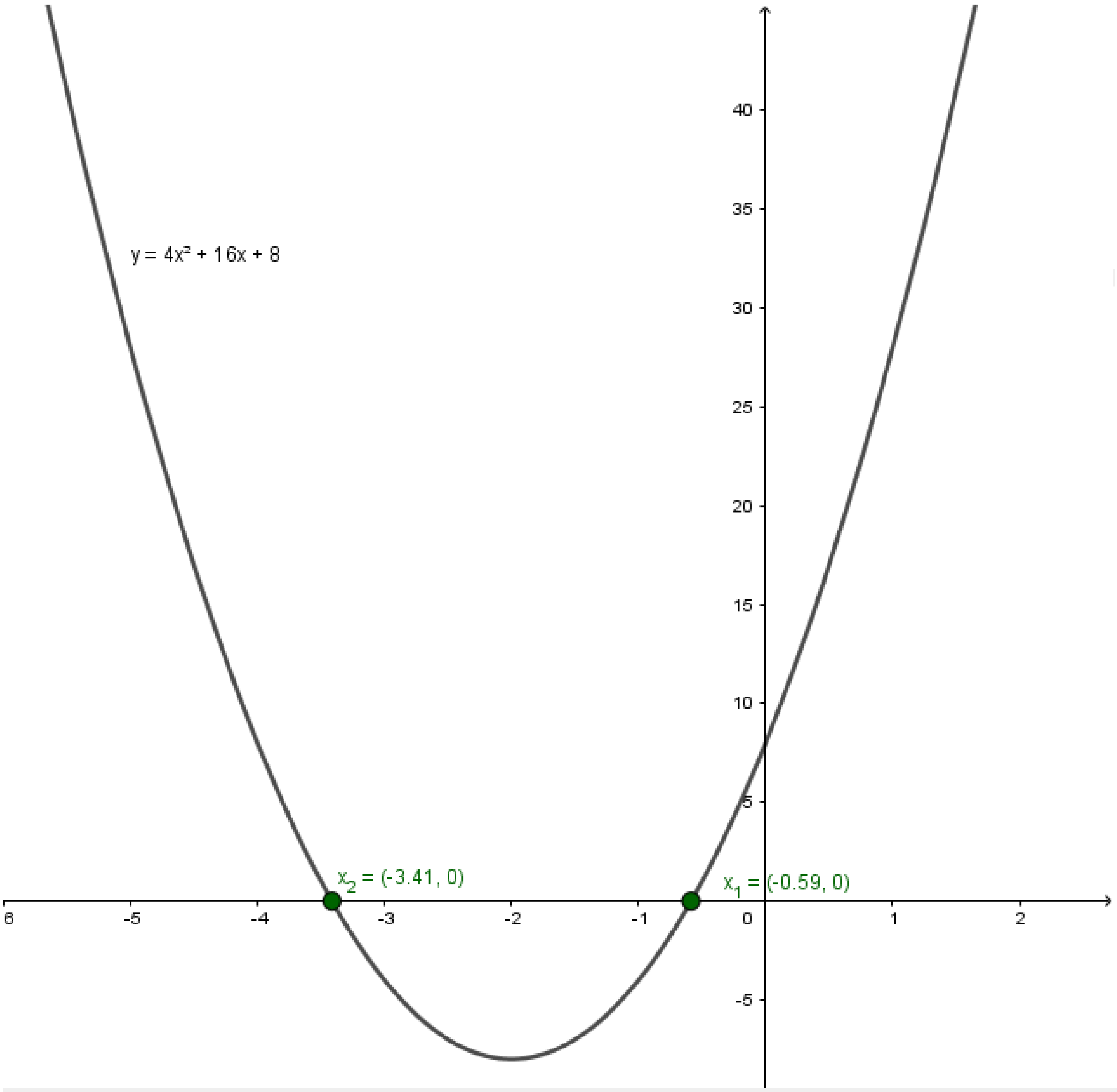
$$4x^2 + 16x + 8 = 0 \quad | : 4$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

In dieser Gleichung ist $p = 4$ und $q = 2$. Mit diesen Werten lässt sich die pq-Formel lösen und damit die Nullstellen bestimmen. Wegen des $\pm$-Zeichens in der Lösungsformel muss die Rechnung zwei mal durchgeführt werden:

(gerundet)

$$x_2 = -\frac{4}{2} - \sqrt{(\frac{4}{2})^2 - 2} = -2 - 1,414 = -3,41$$ (gerundet)



Nullstellen der quadratischen Funktion

Diskriminante und komplexe Zahlen

Der Term unter der Wurzel in der abc- oder pq-Formel hat im Bereich der *komplexen* Zahlen stets eine Lösung. Das heißt, wenn wir *komplexe* Zahlen als Lösungen zulassen, hat **jede** quadratische Gleichung **genau zwei Lösungen**, auch wenn sie in bestimmten Fällen den gleichen Wert haben. Diese Lösungen werden **Wurzeln der Gleichung** genannt.

Im Bereich der *reellen* Zahlen hat eine quadratische Gleichung null bis zwei Lösungen. Die Anzahl der *reellen* Nullstellen einer quadratischen Gleichung können wir mittels der sogenannten **Diskriminante** bestimmen.

METHODE

allgemeine Form der Diskriminante: $D = b^2 - 4ac$

Betrachten wir den Term auf der rechten Seite, so fällt uns auf, dass dieser dem Ausdruck unter der Wurzel in der abc-Formel entspricht. $\Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Die Diskriminante der pq-Formel erhalten wir, wenn wir wie schon oben durchgeführt a , b und c durch p und q ersetzen. In der normierten quadratischen Gleichung ist $a = 1$. Demnach folgt:

$$p = \frac{b}{a} \longrightarrow p = b \text{ und } q = \frac{c}{a} \longrightarrow q = c\,.$$

Setzen wir nun die Variablen in die allgemeine Form der Diskriminante ein, so erhalten wir die normierte Form der Diskriminante.

METHODE

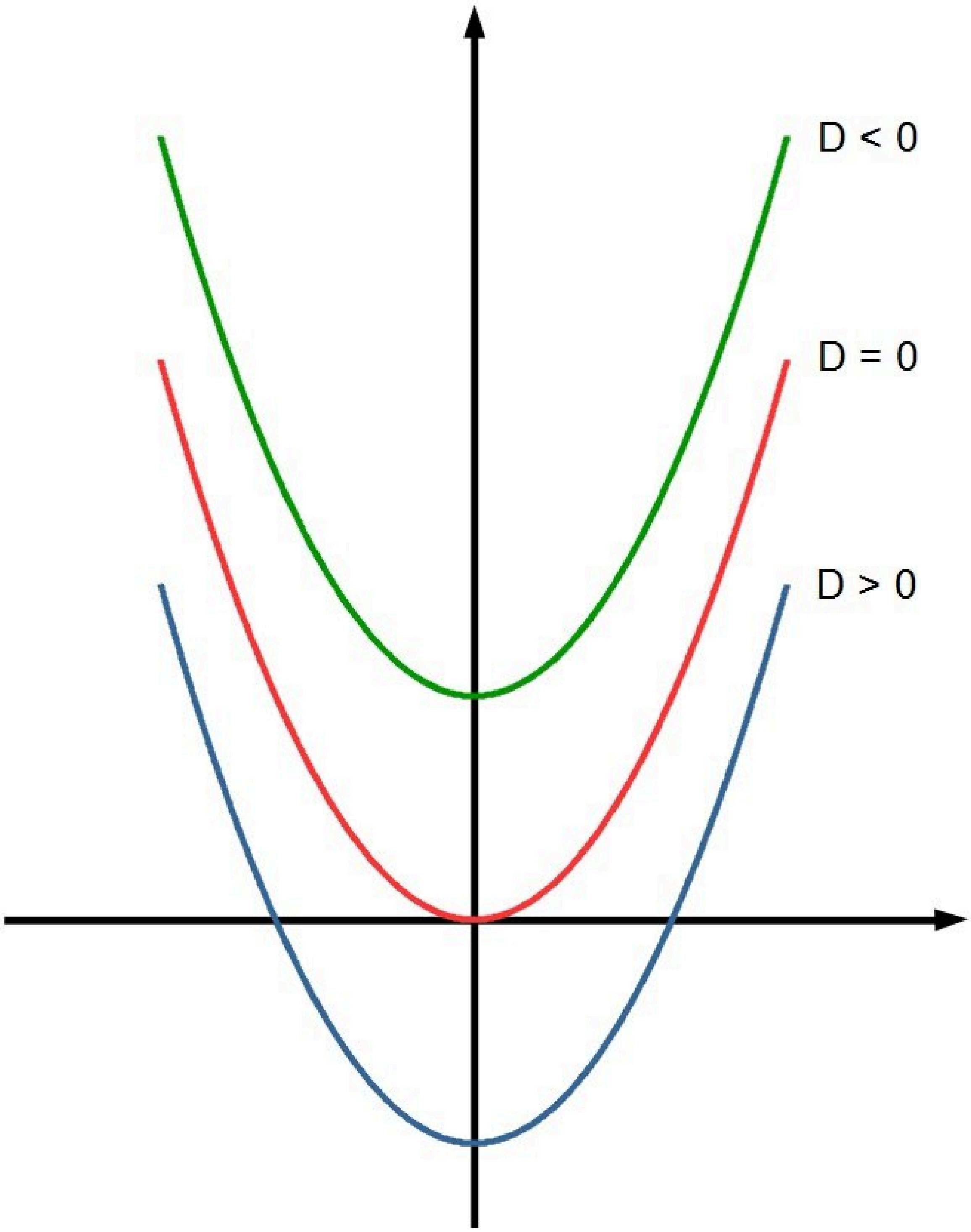
normierte Form der Diskriminante: $D = p^2 - 4q$

Hinsichtlich der Diskriminante können wir **drei Fälle** unterscheiden:

1. $D < 0$: Die quadratische Gleichung hat keine reelle Nullstellen. Das heißt, dass in der grafischen Darstellung kein Schnittpunkt der Parabel der Gleichung mit der x-Achse existiert. Im Zahlenraum der komplexen Zahlen existieren hingegen zwei Lösungen für die Gleichung, welche **konjugiert** zueinander sind. Konjugierte Lösungen besitzen den gleichen *Realteil*. Ihr *Imaginärteil* unterscheidet sich nur das Vorzeichen.

2. $D = 0$: Die quadratische Gleichung hat genau eine (doppelte) relle Lösung. Die Parabel der Gleichung berührt die x-Achse nur an einem Punkt, an ihrem Scheitelpunkt.

3. $D > 0$: Die quadratische Gleichung hat zwei relle Nullstellen. In der grafischen Darstellung hat die Parabel der Gleichung zwei Schnittpunkte mit der x-Achse.



Diskriminante

Beispiel: Diskriminante

BEISPIEL

Gegeben sei die reinquadratische Gleichung $x^2 + 1$. Bestimme bitte die Nullstellen!

Auf den ersten Blick sehen wir, dass dieses Gleichung keine reellen Nullstellen besitzt, denn für jede Zahl x ergibt sich stets ein Wert $\neq 0$. In $\mathbb{C}$ hingegen hat diese Gleichung zwei Lösungen. Trotzdem kontrollieren wir unsere Vermutung mittels der Diskriminante, welche wir aufgrund $a = 1$ in der Normalform bestimmen:

Mit $p = 0$ und $q = 1$ folgt für $D = p^2 - 4q \quad \longrightarrow \quad D = 0^2 - 4 \cdot 1 = -4 < 0$

$\Longrightarrow$ Die quadratische Gleichung besitzt keine reellen, sondern nur zwei komplexe Nullstellen.

Zur Berechnung der Nullstellen nutzen wir wie im obigen Beispiel die pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

$$x_{1,2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{(\frac{0}{2})^2 - 1}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$$

Mit $i^2 = -1$ ergeben sich folgenden Lösungen:

$$x_1 = +\sqrt{-1} = +i \qquad x_2 = -\sqrt{-1} = -i$$

HINWEIS

Zusatzinformation:

Die quadratische Gleichung lässt sich mit diesen beiden Lösungen in Linearfaktoren zerlegen:

$$x^2 + 1 = 0 = (x - i)(x + i)$$

Analysis und Lineare Algebra

Elementare Funktionen

Autor:
Deleted User

INHALTSVERZEICHNIS

Area-Funktionen (Umkehrfunktion)

1 Elementare Funktionen

In der Mathematik sprechen wir von einer Funktion oder Abbildung, wenn zwischen zwei Mengen eine Beziehung besteht, bei der jedem Element der einen Menge (x -Wert, unabhängige Variable oder Funktionsargument genannt) genau ein Element der anderen Menge (y -Wert, abhängige Variable oder Funktionswert genannt) zugeordnet werden kann.

In der Literatur wird der Begriff unterschiedlich definiert. Allgemein wird jedoch davon ausgegangen, dass mathematischen Objekten (z. B. Zahlen, Mengen, geometrische Körper) durch Funktionen mathematische Objekte zuzuordnen sind.

METHODE

mathematische Funktion: $f: \begin{cases} D \to Z \\ x \mapsto y \end{cases}$ oder auch $f: D \longrightarrow Z, x \mapsto y$

Jedem Element x der Definitionsmenge D wird durch die Funktion f **genau ein** Element y der Zielmenge Z zugeordnet. Das dem Element x aus der Definitionsmenge D zugeordnete Element $y \in Z$ bezeichnen wir im Allgemeinen mit $f(x)$.

HINWEIS

Bitte beachte, dass die Umkehrung der Definition in der Methode-Box nicht gilt! Ein Element der Zielmenge kann einem, mehreren oder auch keinem Element zugeordnet sein.

Die verschiedenen Funktionen können in zwei große Gruppen aufgeteilt werden. Wir können in **rationale** und **nichtrationale** (irrationale) Funktionen unterscheiden. Weiterhin können wir in **algebraische** und **transzendente** Funktionen unterscheiden.

Rationale Funktionen

Die rationalen Funktionen unterscheiden wir in

- ganzrationale Funktionen und
- gebrochenrationale Funktionen.

Die ganzrationalen Funktionen können wir weiter unterscheiden in:

- Potenzfunktionen: $f(x) = ax^n$
- konstante Funktionen: $f(x) = a_0$

- lineare Funktionen: $f(x) = a_1 x + a_0$
- quadratische Funktionen: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
- allgemeine ganzrationale Funktionen n-ten Grades (Polynom):

Nichtrationale Funktionen

Zu den nichtrationalen Funktionen gehören

- Wurzelfunktionen: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- trigonometrische Funktionen: bspw. $f(x) = sin\, x$
- Arkusfunktionen: bspw. $f(x) = arcsin\, x$
- Exponentialfunktionen: $f(x) = a^x$
- Logarithmusfunktionen: $f(x) = log_b(x)$
- hyperbolische Funktionen: bspw. $f(x) = sinh\, x$
- Areafunktionen: bspw. $f(x) = Arsinh\, x$

Algebraische Funktionen

Diese Art von Funktionen werden insbesondere in der Algebra verwendet. Definiert sind **algebraische Funktionen** als Lösungen der algebraischen Gleichung:

METHODE

algebraische Gleichung: $P(f(x_1, ..., x_n), x_1, ..., x_n) = 0$

P = irreduzibles Polynom (in $n+1$ Variablen und Koeffizienten)

$f(x_1, ..., x_n)$ = Funktion (in n Variablen)

$x_1, ..., x_n$ = Variablen (der Anzahl n)

Diese Gleichung brauchst Du Dir nicht merken. Um festzustellen, ob eine Funktion algebraisch ist musst du nur in der Formel nachschauen, ob in dieser Formel endlich viele der folgenden Rechenoperationen vorkommen:

- die Grundrechenarten $(+, -, \cdot, \div)$
- das Potenzieren
- das Radizieren (Wurzelziehen)

Zu den algebraischen Funktionen zählen mithin:

- alle rationalen Funktionen
- das Radizieren

Transzendente Funktionen

Alle weitere, nichtalgebraische Funktionen ordnen wir den **transzenten** Funktionen zu. Dementsprechend gehören zu ihnen:

- Exponentialfunktionen
- Logarithmusfunktionen
- trigonometrische Funktionen
- Arkusfunktionen
- Hyperbelfunktionen
- Areafunktionen

Im folgenden Kapitel werden wir die elementaren Funktionen in rationale und irrationale Funktionen eingehen. Die rationalen Funktionen unterteilen wir dabei in

- ganzrationale Funktionen und
- gebrochenrationale Funktionen.

1.1 Stetigkeit einer Funktion

Stetigkeit von Funktionen

Eine mathematische Funktion f heißt *an der Stelle* x_0 *stetig*, wenn:

1. der Funktionswert $f(x_0)$ definiert ist.
2. der Grenzwert $G = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert. $(G \in \mathbb{R})$
3. der Grenzwert G mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt. $\rightarrow G = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ist eine Funktion an der Stelle x_o nicht definiert, so brauchst du dich nicht zu fragen, ob diese in x_0 stetig ist.

BEISPIEL

Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ist in $x_0 = 1$ weder stetig noch unstetig. Sie ist dort einfach nicht definiert.

Damit wir *eine Funktion stetig* nennen können, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

MERKE

Eine beliebige Funktion heißt **stetige Funktion**, wenn sie an **jeder Stelle** ihres Definitionsbereichs D_f stetig ist.

Anders formuliert bedeutet dies, dass Funktionen stetig sind, die innerhalb ihres Definitionsbereiches nicht unterbrochen sind. Beispiele für stetige Funktionen sind:

- rationale Funktionen wie die lineare, die quadratische oder die Potenzfunktion
- bestimmte trigonometrische Funktionen wie die Sinusfunktion
- Exponential oder Wurzelfunktionen
- weitere differenzierbare Funktionen

Unstetigkeit von Funktionen

Eine mathematische Funktion f heißt an der Stelle x_0 unstetig, wenn

1. der Funktionswert $f(x_0)$ definiert ist.

   und mindestens eine der beiden Aussagen zutrifft:

2. Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert **nicht**.

3. Der Grenzwert $G = f(x)$ stimmt **nicht** mit dem Funktionswert $f(x_0)$ überein. $\rightarrow G = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

HINWEIS

Denke daran, du kannst nur die Stetigkeit einer Funktion an einer konkreten Stelle bestimmen, wenn diese definiert ist!

In vielen Quellen heißt auch eine Funktion unstetig, wenn sie an einer betrachteten Stelle nicht definiert ist!

Das liegt in der Verwendung des Begriffs Stetigkeit begründet. Er wird häufig für die globale Beschreibung einer Funktion verwendet. Die Stetigkeit ist jedoch eine lokale Eigenschaft einer Funktion.

Findest du also eine entsprechende Formulierung, dass eine Funktion f an einer bestimmten, **nicht definierten** Stelle x_0 nicht stetig ist, so meint dies, dass die Funktion f an der Stelle x_0 **nicht stetig fortgesetzt** werden kann!!!

Bestimmung der Stetigkeit von Funktionen

Ob eine Funktion stetig ist oder nicht, können wir mit dem rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert bestimmen. Dazu addieren bzw. subtrahieren wir einen beliebig kleinen Wert h zu dem x_0 und lassen diesen gegen null konvergieren.

METHODE

rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h)$

linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 - h)$

Sind diese

1. gleich und
2. der ermittelte Wert stimmt mit dem Funktionswert an dieser Stelle überein,

so ist die Funktion an der betrachteten Stelle stetig:

METHODE

1. $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 - h)$

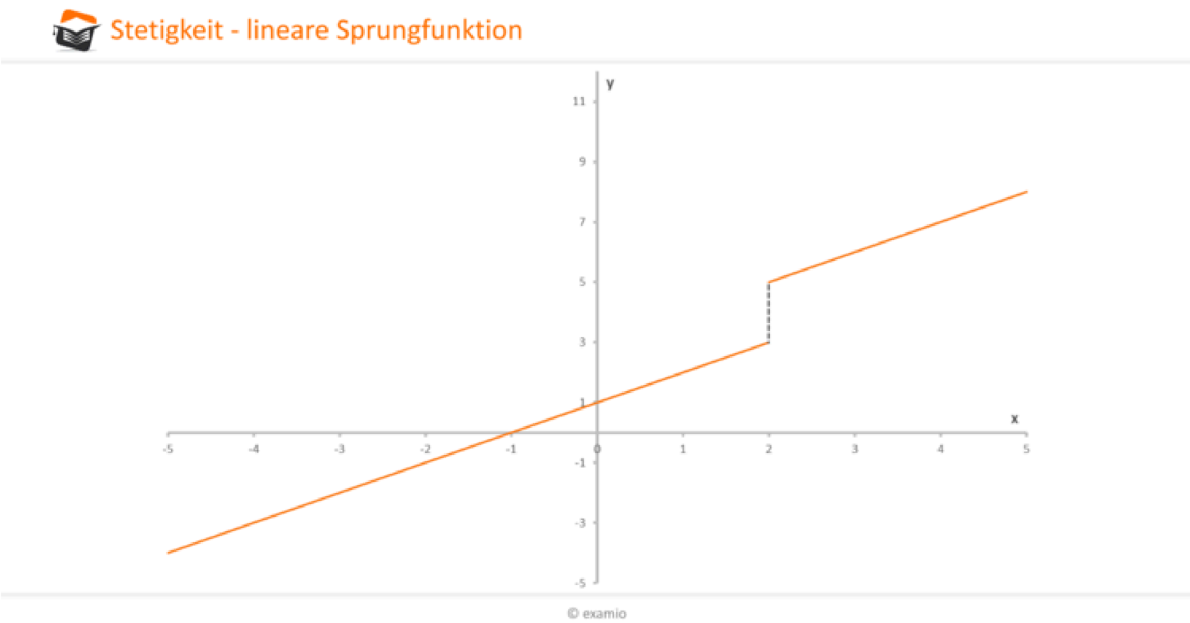
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Beispiel 1 zur Bestimmung der Stetigkeit von Funktionen

BEISPIEL

Gegeben sei die lineare Funktion $f(x) = \begin{cases} x+1 \; |x < 2 \\ x+3 \; |x \geq 2 \end{cases}$.

Diese Funktion ist an der Stelle $x_0 = 2$ unstetig.



Beispiel 2 zur Bestimmung der Stetigkeit von Funktionen

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion

Untersuche die Funktion auf Stetigkeit!

Wir sehen, dass an der Stelle $x_0 = 3$ ist die Funktion definiert ist. Wir können somit prüfen, ob die Funktion stetig ist, indem wir uns von links und rechts dem Grenzwert nähern.

Rechtsseitige Annäherung

Zuerst formen wir Zähler und Nenner der Funktion um:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 6} = \frac{(x-3)(x+3)}{2\,(x-3)}$$

Wir addieren h und lassen es gegen null gehen:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \frac{(3+h+3)(3+h-3)}{2\,(3+h-3)}$$

Linksseitige Annäherung

Wir formen um:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 6} = \frac{(x-3)(x+3)}{2\,(x-3)}$$

Wir substrahieren h und lassen es gegen null gehen:

Wie du siehst, ist die Funktion an der Stelle $x_0 = 3$ stetig, da sie an dieser Stelle defininert ist, der rechts- und linksseitige Grenzwert gleich sind und dass der Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmt.

Stetigkeit - Beispiel

1.2 Grenzwerte von Funktionen

Der **Grenzwert** von Funktionen (auch Limes genannt) bezeichnet in der Mathematik denjenigen Wert, dem sich die Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle annähert. Existiert ein Grenzwert, so **konvergiert** die Funktion, anderenfalls **divergiert** sie.

METHODE

Grenzwert einer reellen Funktion f **für** x **gegen** x_0 **:** $\lim_{x \to x_0} f(x) = G$

x_0 kann dabei sowohl eine reelle Zahl sein, als auch $+\infty$ oder $-\infty$ annehmen:

- $x_0 \in \mathbb{R}$: x_0 muss nicht unbedingt im Definitionsbereich D_f der Funktion liegen. x_0 muss aber ein Häufungspunkt von D_f sein. Das bedeutet, dass in jeder (noch so kleinen) Umgebung von x_0 unendlich viele Elemente von D_f liegen müssen.
- $x_0 = +\infty$: Der Defintionsbereich D_f der Funktion muss nach oben *un*beschränkt sein.
- $x_0 = -\infty$: Der Defintionsbereich D_f der Funktion muss nach unten *un*beschränkt sein.

METHODE

Du kannst Grenz- und Häufungswerte folgendermaßen unterscheiden:

- Grenzwert: In jeder noch so kleinen Umgebung von x_0 müssen **fast alle** weiteren Werte von D_f liegen.
- Häufungspunkt/-wert: In jeder noch so kleinen Umgebung von x_0 müssen *nur* **unendlich viele** weitere Werte von D_f liegen.

Beispiel für die Berechnung von Grenzwerten an definierten und undefinierten Stellen

BEISPIEL

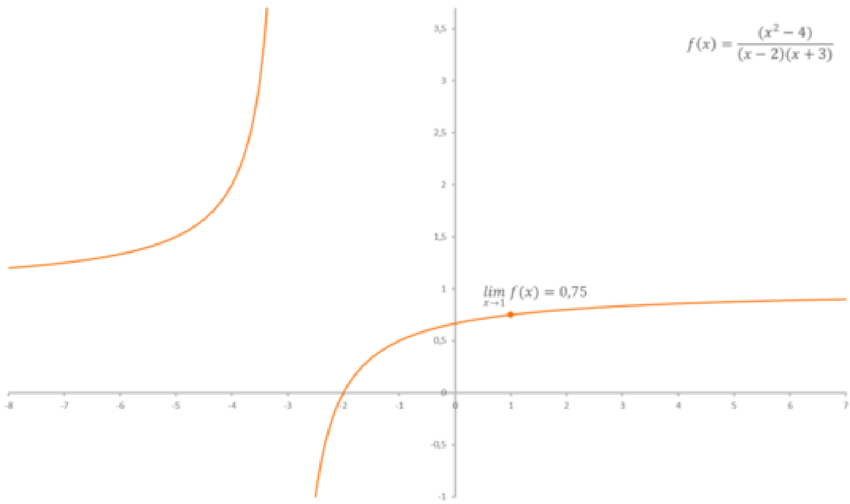
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x-2)(x+3)}$. Bestimme mögliche Grenzwerte!

Grenzwerte an definierten Stellen

Lassen wir den Nenner der Funktion außer Acht und betrachten diese Funktion zunächst als einfaches Beispiel an der Stelle $x = 1$.

Die Funktion hat für $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ den Grenzwert $0,75$. Wenn x gegen 1 läuft, strebt die Funktion gegen $y = 0,75$.

Grenzwerte der Beispielfunktion



Grenzwerte der Beispielfunktion

Betrachten wir nun den Term im Nenner der Funktion:

Die Funktion ist an den Stellen $x = 2$ bzw. $x = -3$ *möglicherweise* nicht definiert.

HINWEIS

Weiteres zu diesem Thema findest du unter dem Kurstext Nullstellen, Definitionslücken im Kapitel der gebrochenrationalen Funktionen. An dieser Stelle ist es wichtig zu wissen, dass eine gebrochenrationale Funktion nicht definiert ist, wenn ihr Nenner den Wert 0 annimmt.

Wir wollen zunächst den Grenzwert G von $f(x)$ für $x \to 2$ ermitteln. Dafür muss die Funktion so umgestellt werden, dass $x = 2$ eingesetzt werden kann. Vorher formen wir deshalb mit Hilfe der binomischen Formeln den Term $x^2 - 4$ um:

$$a^2 + b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\Longrightarrow x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}$$

Wir sehen nun, dass der Term $(x-2)$ gekürzt und damit der Grenzwert bestimmt werden kann:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}$$

Grenzwerte an undefinierten Stellen

Für $x=-3$ ist die Funktion nicht definiert, da wir die Funktion nicht so umformen können, dass eine Lösung für $x=-3$ gefunden werden kann. Wir können jedoch an dieser Stelle den Grenzwert jeweils von rechts und links bestimmen.

Rechtsseitige Annäherung

Wir addieren h zu $x_0=-3$ und lassen es gegen null laufen:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} f(-3+h) = \frac{(-3+h)^2-4)}{(-3+h-2)(-3+h+3)}$$

Konvergiert das h im Zähler und der linken Seite des Nenners gegen null, so erhalten wir konstante Werte. Somit bleibt unter dem Bruchstrich das kleiner werdende h. Für unendlich kleine Werte für h wird der Wert des Bruches unendlich groß:

$$\lim_{h\to 0} f(-3+h) = \frac{5}{(-5)\,(+h)} = -\frac{1}{h} = -\infty$$

Linksseitige Annäherung

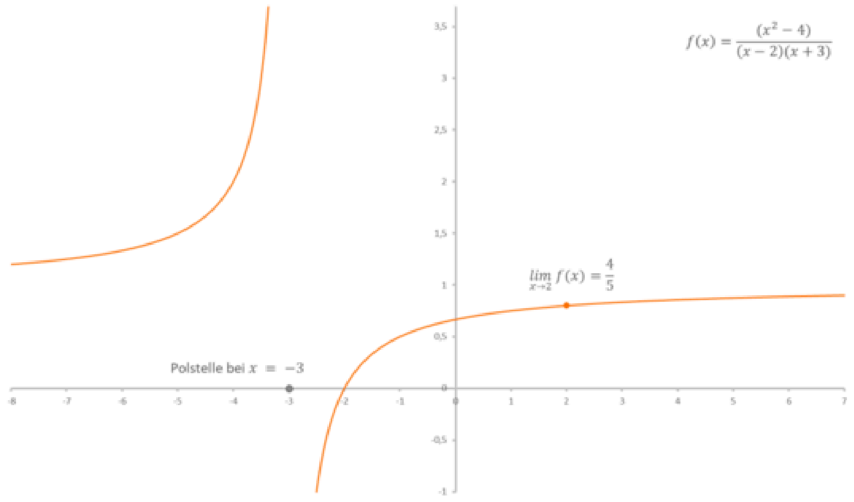
Wir subtrahieren h von $x_0=-3$ und lassen es gegen null laufen. Die weiteren Rechenschritte erfolgen analog der rechtsseitigen Annäherung an den Grenzwert.

$$\lim_{h\to 0} f(-3-h) = \frac{(-3-h)^2-4)}{(-3-h-2)(3-h+3)}$$

An der Stelle $x=-3$ besitzt die Funktion zwei Grenzwerte:

- rechtsseitig: $-\infty$
- linksseitig: $+\infty$

Grenzwerte der Beispielfunktion mit x = -3 und x = 2



© examio

Beispiel Grenzwerte mit x = -3 und x = 2

Grenzwertsätze

Zur Berechnung von Grenzwerten gelten folgende Rechenregeln:

1. $$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

2. $$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

3. $$\lim_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

4. $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

5. $$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

6. $$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \to x_0} f(x))^n$$

7. $$\lim_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

8. $$\lim_{x \to x_0} \log_a f(x) = \log_a(\lim_{x \to x_0} f(x))$$

9. $$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim_{x \to x_0} f(x)|$$

1.3 Rationale Funktionen

In diesem Kursabschnitt werden wir die rationalen Funktionen in

- ganzrationale Funktionen und
- gebrochenrationale Funktionen

unterscheiden und deren Eigenschaften betrachten.

1.3.1 Ganzrationale Funktionen

Definition einer ganzrationalen Funktion

Eine ganzrationale Funktion (auch Polynomfunktion) ist die Summe von Potenzfunktionen mit **natürlichen** Exponenten:

Die **reellen** Zahlen mit $a_n \neq 0$ heißen Koeffizienten, die Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist der Grad des Polynoms.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -3x^4 + 2x^2 - 4x + 8$.

Dies ist eine ganzrationale Funktion (alle n sind natürliche Zahlen) mit dem Grad 4 und den Koeffizienten $-3, 2, -4$ und 8.

Spezialfälle ganzrationaler Funktionen

konstante Funktion: $n = 0 \rightarrow f(x) = a_0$

lineare Funktion: $n = 1 \rightarrow f(x) = a_1 x + a_0$

quadratische Funktion: $n = 2 \rightarrow f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Polynom 3. Grades:

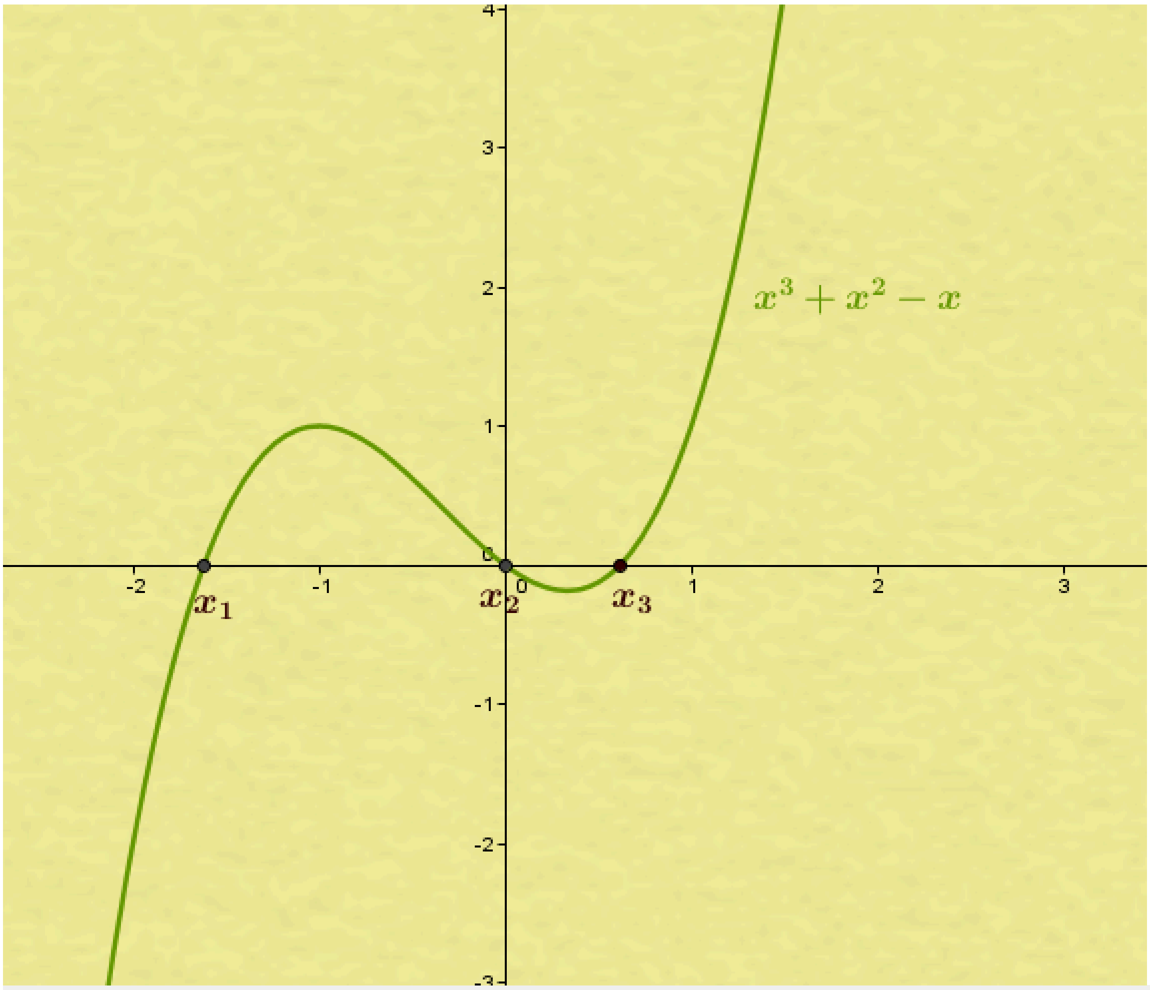
Polynom 4. Grades:

HINWEIS

In den folgenden zwei Abschnitten zeigen wir dir, wie man die Nullstellen von ganzrationalen Funktionen bestimmt. Dabei greifen wir die pq-Formel wieder auf und gehen auf die Substitution sowie die Polynomdivision ein. Außerdem zeigen wir, wie man die Grenzwerte von ganzrationalen Funktionen bestimmt.

1.3.1.1 Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Allgemein versteht man unter einer Nullstelle einer Funktion $f(x)$ diejenige Zahl x_0, für die $f(x_0) = 0$ gilt. Grafisch sieht dies folgendermaßen aus.



Nullstellen einer Polynomfunktion 3. Grades

Dort, wo der Graph der Funktion $f(x)$ die x-Achse schneidet, liegen die Nullstellen von $f(x)$.

Für lineare Funktionen $(n = 1)$ und quadratische Funktionen $(n = 2)$ ist die Berechnung der Nullstellen anhand von Lösungsformeln möglich. Für ganzrationale Funktionen mit $n \geq 3$ hingegen, stehen im Allgemeinen keine Lösungsformeln zur Verfügung. Es existieren allerdings einige Sonderfälle.

Berechnung der Nullstellen bei linearen Funktionen

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3x - 12$. Zur Berechnung der Nullstelle wird die Funktion gleich null gesetzt und nach x aufgelöst:

$$3x - 12 = 0$$

$$3x = 12$$

$x = 4$

Der Graph der Funktion $f(x) = 3x - 12$ schneidet die x -Achse bei $x = 4$.

Berechnung der Nullstellen bei quadratischen Funktionen

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 12$. Zur Berechnung der Nullstelle wenden wir die pq-Formel an:

METHODE

pq-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

Mit $p = 3$ und $q = -12$ folgt:

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 12}$$

$$x_1 = 2,28$$

$$x_2 = -5,27$$

Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 12$ schneidet die x -Achse bei $x_1 = 2,28$ und $x_2 = -5,27$.

Sonderfälle für Funktionen mit Exponenten > 2

Ausklammern von Potenzen

Gegeben sei die Funktion . Durch Ausklammern von x erhalten wir:

$$f(x) = x(x^2 + 2x - 8)$$

Nullsetzen ergibt:

$x(x^2 + 2x - 8) = 0$ bzw. $x = 0$ und $(x^2 + 2x - 8) = 0$

Die erste Nullstelle ist also: $x_1 = 0$

Für $(x^2 + 2x - 8) = 0$ ergeben sich mit der pq-Formel die weiteren Lösungen:

$x_2 = 2$

$x_3 = -4$

Substitution von Potenzen

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 19x^2 + 48$. Durch Ersetzen von x^2 durch z erhalten wir:

$$z^2 - 19z + 48 = 0$$

Wir wenden die pq-Formel an und erhalten für z :

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

$$z_{1,2} = -\frac{-19}{2} \pm \sqrt{(\frac{-19}{2})^2 - 48}$$

$$z_1 = 16$$

$$z_2 = 3$$

Wir machen die Substitution rückgangig und erhalten mit $z = x^2$:

$x^2 = 16$ und $x^2 = 3$

Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten (Polynomdivision)

Ist $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ eine Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten (alle $a_i \in \mathbb{Z}$), dann gilt:

(1) Jede ganzzahlige Nullstelle ist ein Teiler von a_0 .

Ist der Hauptkoeffizient $a_n = 1$, so gilt:

(2) Jede rationale Nullstelle ist eine ganze Zahl und zwar ein Teiler von a_0 .

Zum Auffinden der Nullstellen gehen wir wie folgt vor:

METHODE

Ist $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ eine Funktion mit ganzen Koeffizienten (alle $a_i \in \mathbb{Z}, a_n = 1$), so sucht man alle Teiler von a_0 . Danach setzt man die gefundenen Teiler in die Funktion ein. Für den Teiler, für welchen die Funktion den Wert null annimmt gilt, dass dieser eine Nullstelle der Funktion darstellt. Die erste Nullstelle ist demnach ermittelt. Der Wert der Nullstelle wird dann für die Polynomdivision verwendet. Nach deren Durchführung können dann die Nullstellen für die verbleibende Funktion (z. B. mittels pq-Formel für eine quadratische Funktion) bestimmt werden.

Dieses Vorgehen zeigen wir dir anhand des nachfolgenden Beispiels:

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. Bestimme alle reellen Nullstellen der Funktion und spalte die Linearfaktoren ab!

(1) Funktion durch a_n teilen, falls $a_n \neq 1$. Hier ist $a_n = 1$.

(2) Die Teiler von a_0 (hier: -2) sind ± 1 und ± 2 . Probieren, d. h. Einsetzen von z. B. $x = 2$ zeigt, dass $f(2) = 0$. Das heißt $x_1 = 2$ ist eine Nullstelle der Funktion.

(3) Polynomdivision durchführen:

Da $x = 2 \implies 0 = x - 2$, dividieren wir $f(x)$ durch $(x - 2)$.

$$(x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x - 2) = x^2 + 1$$

$$(-)(x^3 - 2x^2)$$

$$(-)(x - 2)$$

$$0$$

Das Ergebnis $x^2 + 1$ hat keine **reelle** Nullstelle, da $x = \sqrt{-1}$ (Wurzel aus negativer Zahl in $\mathbb{R}$ nicht möglich). Das beudeutet, $x = 2$ ist die einzige reelle Nullstelle.

Würde sich nach der Division eine Funktion ergeben, welche noch Nullstellen besitzt, dann müsste für diese mithilfe des oben genannten Vorgehens (pq-Formel, Substitution, Ausklammern etc.) weitere Nullstellen bestimmt werden.

1.3.1.2 Grenzwerte ganzrationaler Funktionen

Verhalten im Unendlichen

Die Grenzwerte ganzrationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$ sind $+\infty$ sowie $-\infty$ und werden im Allgemeinen durch den Summanden mit dem höchsten Exponenten bestimmt. Das genaue Verhalten hängt davon ab, ob der **Grad** n **einer Funktion** gerade oder ungerade ist und welches Vorzeichen der **Leitkoeffizient** a_n besitzt.

	n gerade	n ungerade
$a > 0$	Für $x \to \pm\infty: f(x) \to \infty$	Für $x \to \infty: f(x) \to \infty$ $x \to -\infty: f(x) \to -\infty$
$a < 0$	Für $x \to \pm\infty: f(x) \to -\infty$	Für $x \to \infty: f(x) \to -\infty$ $x \to -\infty: f(x) \to \infty$

Verhalten im Unendlichen

Überblick zu den Grenzwerten ganzrationaler Funktionen

Für kann man den Summanden mit dem höchsten Exponenten ausklammern. In diesem Fall klammern wir $a_n x^n$ aus:

bzw. gekürzt:

In der Klammer werden die Glieder mit den Brüchen für $x \to \pm\infty$ unendlich klein. Der Grenzwert 1 resultiert:

Da nun der Ausdruck in der Klammer gegen 1 strebt, können wir auch sagen:

MERKE

Die Funktion verhält sich im Unendlichen wie ihr Summand mit dem höchsten Exponenten $a_n x^n$ vorgibt.

Beispiel: Grenzwerte

BEISPIEL

Zeige, dass der Graph der Funktion $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 4x + 8$ für $x \to \pm\infty$ verläuft wie der Graph der Funktion $g(x) = 3x^4$!

Für $x \to \infty$ **:**

(1) $f(x) = 3x^4(1 + \frac{2}{3x^2} - \frac{4}{3x^3} + \frac{8}{3x^4})$:

Daraus folgt für $x \to \infty$: $f(x) \to \infty$

(2) $g(x) = 3x^4$:

Daraus folgt für $x \to \infty$: $g(x) \to \infty$

Für $x \to -\infty$ **:**

(1) $f(x) = 3x^4(1 + \frac{2}{3x^2} - \frac{4}{3x^3} + \frac{8}{3x^4})$:

Daraus folgt für $x \to -\infty$: $f(x) \to \infty$

(2) $g(x) = 3x^4$:

Daraus folgt für $x \to -\infty$: $g(x) \to \infty$

Verhalten für x gegen null

Allgemein wird das Verhalten für $x \to 0$ durch den Koeffizienten mit dem niedrigsten Exponenten bestimmt. Der Graph schneidet die *y*-Achse bei a_0 . Die Steigung an dieser Stelle ist durch a_1 gegeben. Die Tangente im Schnittpunkt mit der y-Achse hat also stets die Gleichung $f(x) = a_1 x + a_0$.

BEISPIEL

Zeige, dass der Graph der Funktion $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 4x + 8$ für $x \to 0$ den gleichen Verlauf wie der Graph der Funktion $g(x) = -4x + 8$ besitzt!

$x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 4x + 8 = 0 + 0 - 0 + 8 = 8$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = -4x + 8 = 0 + 8 = 8$$

Die Graphen beider Funktionen schneiden die y-Achse bei $x = 8$. Die Steigung hat dort den Wert -4 .

MERKE

- Bei ganzrationalen Funktionen entscheidet der Koeffizient mit dem **höchsten Exponent** über das Verhalten der Funktion **im Unendlichen**.
- Der Koeffizient mit dem **niedrigsten Exponenten** entscheidet über das Verhalten der Funktion **gegen null**.

1.3.2 Gebrochenrationale Funktionen

Eine Funktion wird als gebrochenrationale Funktion bezeichnet, wenn sich sowohl im Zähler als auch im Nenner eine ganzrationale Funktion befindet:

MERKE

gebrochenrationale Funktion:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

BEISPIEL

gebrochenrationale Funktion: $y = \frac{x^4 + x^3 + x - 1}{x^3 - x^2 - 2}$

Asymptoten

Eine Asymptote (altgr. asymptotos = *nicht übereinstimmend*) ist eine "einfache" Funktion, zumeist eine Gerade, an die sich der Graph einer Funktion mit zunehmendem Abstand vom Koordinatenursprung annähert, ohne dass sich beide in ihrem Verlauf irgendwo berühren.

- Nähert sich der Graph einer Funktion einer Gerade parallel zur y -Achse an, so spricht man von einer **senkrechten Asymptote**.
- Die **waagerechte Asymptote** ist eine der x -Achse parallelen Gerade für $x \to \pm\infty$.
- Nähert sich der Graph einer Funktion einer Gerade an, die zu keiner der Achsen des Koordinatensystems parallel verläuft, so liegt eine schiefe Asymptote vor.

Nullstellen und Definitionslücken

Nullstellen: Eine Nullstelle liegt vor, wenn der Zähler den Wert null annimmt, der Nenner aber einen Wert ungleich null besitzt.

Definitionslücken: Eine Definitionslücke liegt vor, wenn der **Nenner** für x_0 den Wert **null** animmt, er also eine Nullstelle hat. Man unterscheidet hier zwischen *Pol* und *hebbarer Definitionslücke*:

- **Pol**: Eine Polstelle liegt vor, wenn der Nenner für x_0 den Wert null annimmt, der Zähler hingegen einen Wert ungleich null.
  Außerdem *kann* ein Pol vorliegen, wenn Zähler und Nenner für x_0 eine Nullstelle besitzen. Wir zerlegen Zähler und Nenner in Linearfaktoren und kürzen. Besitzt der erhaltene gekürzte Funktionsterm bei x_0 ebenfalls eine Nullstelle, dann hat die gebrochenrationale Funktion eine Polstelle.
  Der Graph einer gebrochenrationalen Funktion nähert sich an der Polstelle einer senkrechten Asymptoten an.

- **hebbare Definitionslücke**: Diese ist gegeben, wenn sowohl Nenner als auch Zähler für x_0 den Wert null annehmen. Hierbei können wir den Nenner und Zähler als Linearfaktoren darstellen und kürzen. Ist der erhaltene gekürzte Funktionsterm bei x_0 ebenfalls ungleich null, dann ist somit der Definitionsbereich der Funktion erweitert. Die (hebbare) Definitionslücke kann aufgehoben werden.

HINWEIS

Keine Panik, wenn du noch nicht viel verstehst. In den folgenden Abschnitten führen wir dich in die tiefen Abgründe der Bestimmung der Nullstellen, Definitionslücken sowie Polstellen gebrochenrationaler Funktionen und der senkrechten sowie waagerechten Asymptoten ein.

1.3.2.1 Echt/unecht gebrochenrationale Funktion

Echt gebrochen/unecht gebrochenrationale Funktion

Ist der Grad m des Nenners größer als der Grad n des Zählers, so heißt die rationale Funktion $f(x)$ **echt gebrochen.**

BEISPIEL

echt gebrochene Funktion: $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 3x + 3}$

Ist hingegen der Grad m des Nenners kleiner oder gleich dem Grad n des Zählers, so heißt die Fuktion **unecht gebrochen**.

BEISPIEL

unecht gebrochene Funktion: $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x + 5}{x^2 + 5x + 12}$

MERKE

echt gebrochenrationale Funktion:
unecht gebrochenrationale Funktion:

Polynomdivision → Unecht gebrochenrationale Funktion in ganzrationale plus echt gebrochenrationale Funktion umwandeln

Jede unecht gebrochene Funktion lässt sich mittels Polynomdivision in die Summe aus ganzrationaler Funktion und echt gebrochenrationaler Funktion überführen.

BEISPIEL

Zerlege die unecht gebrochene Funktion $\dfrac{x^4 + 2x^3 + x - 1}{x^3 - x^2 + 1}$ mittels

Polynomdivision in eine ganzrationale Funktion plus echt gebrochenrationale Funktion!

$$(x^4 + 2x^3 + x - 1) : (x^3 - x^2 + 1) = x + 3$$

$$(-)(x^4 - \quad x^3 + x)$$

$$3x^3 \qquad - 1$$

$$(-)(3x^3 - 3x^2 + 3)$$

$$3x^2 - 4$$

Ergebnis: $x + 3$ mit dem Rest $\dfrac{3x^2 - 4}{x^3 - x^2 + 1}$

Das bedeutet, dass die unecht gebrochenrationale Funktion auch als ganz rationale Funktion plus echt gebrochenrationale Funktion geschrieben werden kann:

1.3.2.2 Nullstellen und Definitionslücken gebrochenrationaler Funktionen

Nullstellen bei gebrochenrationalen Funktionen

Wie wir im Kurstext *Gebrochenrationale Funktionen* schon erwähnt haben, wird zur Ermittlung der Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen der Zähler herangezogen. Der Zähler der gebrochenrationalen Funktion wird gleich null gesetzt und nach x aufgelöst. Allerdings muss vorher noch geprüft werden, ob der Nenner bei diesem x-Wert null wird, weil sonst eine hebbare Definitionslücke vorliegt (siehe folgenden Unterabschnitt: Definitionslücke). Ist der Nenner ungleich null, so liegt eine Nullstelle der gebrochenrationalen Funktion vor.

METHODE

Nullstelle der Funktion: $f(x) = \dfrac{z(x)}{n(x)}$ mit $z(x) = 0$ und $n(x) \neq 0$

Beispiel: Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen

BEISPIEL

Gegeben sei die gebrochenrationale Funktion . Bestimme die Nullstellen!

Zur Bestimmung der Nullstelle wird der Zähler herangezogen und gleich null gesetzt:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Diesen x -Wert setzen wir nun in den Nenner ein:

$3 + 1 = 4$ und damit $\neq 0$ $\Longrightarrow$ Es liegt keine Definitionslücke vor!

Demnach ist $x = 3$ eine Nullstelle von $f(x)$.

MERKE

Die Ermittlung der Nullstellen bei gebrochenrationalen Funktionen erfolgt nach dem Prinzip der Nullstellenermittlung ganzrationaler Funktionen.

Definitionslücken bei gebrochenrationalen Funktionen

Du hast bereits im Kurstext *Gebrochenrationale Funktionen* gelernt, dass bei gebrochenrationalen Funktionen eine hebbare Definitionslücke oder Polstelle vorliegt, wenn der Nenner null wird. Für Polstellen und hebbare Definitionslücken gilt:

METHODE

Polstelle:

- $f(x) = \dfrac{z(x)}{n(x)}$ $\rightarrow$ $z(x_0) \neq 0$ und $n(x_0) = 0$
- $f(x) = \dfrac{z(x)}{n(x)}$ $\rightarrow$ $z(x_0) = 0$ und $n(x_0) = 0$

$$\longrightarrow f_{fakt}(x) = \frac{z_{fakt.}(x)}{n_{fakt.}(x)} \rightarrow n_{fakt.}(x_0) = 0$$

hebbare Definitionslücke:

- $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ $\rightarrow z(x_0) = 0$ und $n(x_0) = 0$

$$\longrightarrow f_{fakt}(x) = \frac{z_{fakt.}(x)}{n_{fakt.}(x)} \rightarrow n_{fakt.}(x_0) \neq 0$$

$f_{fakt}(x)$ = faktorisierte Form von $f(x)$

$z_{fakt}(x)$ = faktorisierte Form der Zählerfunktion

$n_{fakt}(x)$ = faktorisierte Form der Nennerfunktion

Beispiel: Definitionslücken

BEISPIEL

Gegeben sei die unecht gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$.

Liegt eine Polstelle oder eine hebbare Definitionslücke vor?

Für $x = 2$ wird der Nenner null. Damit liegt hier eine Definitionslücke vor. Ob es sich nun um eine Polstelle oder eine hebbare Definitionslücke handelt, entscheidet dann der Zähler. Hierfür müssen die Nullstellen des Zählers bestimmt werden. Diese können mittels pq-Formel bestimmt werden:

METHODE

pq-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

Wir setzen $p = -4$ und $q = 3$ in die Formel ein:

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{(\frac{-4}{2})^2 - 3}$$

$$x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{(\frac{-4}{2})^2 - 3}$$

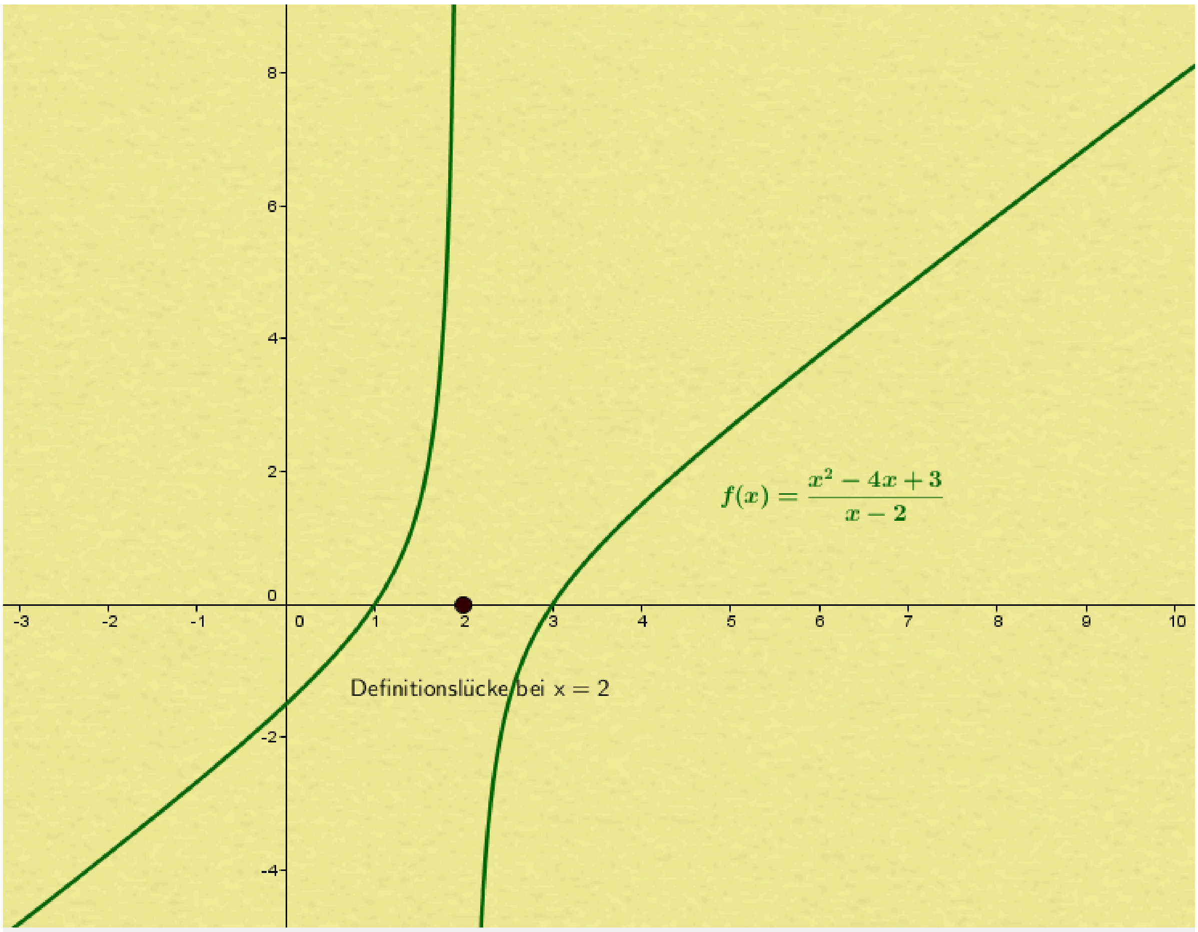
$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

Die Zählernullstellen entsprechen nicht der Nennernullstelle. Das bedeutet, dass es sich bei der Nennernullstelle $x = 2$ um eine **Polstelle** handelt.

Die nachfolgende Grafik veranschaulicht die Nullstellen und die Polstelle der Funktion.



Definitionslücke ? Polstelle

In der Grafik siehst du deutlich, dass die Funktion bei $x = 2$ nicht definiert ist. Dies kannst du auch direkt an der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$ erkennen, da der Nenner bei $x = 2$ gleich null wird und durch null nicht dividiert werden darf. Hier besteht somit eine Definitionslücke. Es handelt sich dabei um eine **Polstelle**, da der Zähler bei diesem Wert ungleich null ist.

1.3.2.3 Hebbare Definitionslücke

Wie schon mehrmals erwähnt ist eine hebbare Definitionslücke gegeben, wenn sowohl der Nenner als auch der Zähler für einen bestimmten Wert für $x_0 = 0$ wird. Der Begriff **hebbar** bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die **Definitionslücke behoben** und damit der **Definitionsbereich erweitert** werden kann.

METHODE

Vorgehensweise:

1. Nullstellen des Nenners bestimmen.
2. Nullstellen des Zählers bestimmen: Resultiert dieselbe Nullstelle wie im Nenner, liegt eine *mögliche* hebbare Definitionslücke vor.
3. Zähler und Nenner faktorisieren und den Bruch kürzen.
4. Gemeinsame Nullstelle aus 2. in den Nenner der gekürzten faktorisierten Funktion aus 3. einsetzen. Wird der Nenner ungleich null, so liegt eine hebbare Definitionslücke vor. Wird der Nenner hingegen null, so liegt eine Polstelle vor.

In 4. muss nochmals überprüft werden, ob eine hebbare Definitionslücke vorliegt. Dafür wird der bei 2. ermittelte Wert (falls hebbare Lücke) in den Nenner eingesetzt.

- Wird der faktorisierte Nenner ebenfalls null, resultiert eine Defintionslücke. Somit liegt eine Polstelle vor.
- Wird der Nenner $\neq 0$, liegt eine hebbare Lücke vor.

Beispiel: Hebbare Definitionslücke

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} = \frac{2x^2 + 2x - 12}{6x^2 - 12x} .$$

Prüfe, ob eine hebbare Definitionslücke vorliegt und behebe diese gegebenenfalls!

1. Nullstellen des Nenners bestimmen

$$n(x) = 6x^2 - 12x \quad | : 6$$

$$n(x) = x^2 - 2x$$

METHODE

pq-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

$$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - 0}$$

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 0$$

2. Nullstellen des Zählers bestimmen

METHODE

Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -3$$

alternativer Rechenweg:

METHODE

pq-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

Dafür muss zunächst der Koeffizient von x^2 herausgekürzt werden:

$z(x) = 2x^2 + 2x - 12 \quad |:2$

$z(x) = x^2 + x - 6$

mit $p = 1$ und $q = -6$

Anwendung der pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (-6)}$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 6)}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{6,25} = -3$$

HINWEIS

Für $x = 2$ werden sowohl der Zähler als auch der Nenner null. Es liegt somit **möglicherweise** eine **hebbare Definitionslücke** vor. Die Nullstelle $x = -3$ ist hingegen nicht gleich Nullstelle des Nenners und damit die Nullstelle der Funktion, da $n(-3) \neq 0$.

3. Zähler und Nenner faktorisieren

Zum Faktorisieren werden die Zähler- und Nennernullstellen herangezogen. Die Faktordarstellung ist allgemein gegeben zu:

METHODE

Faktordarstellung: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Dabei sind x_1 und x_2 die Nullstellen der Funktion und a der Faktor vor x^2 .

Zähler faktorisieren:

$z(x) = 2x^2 + 2x - 12$ | a = 2

Wir haben die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ ermittelt. Einsetzen in die Faktordarstellung:

Nenner faktorisieren:

$n(x) = 6x^2 - 12x$ |a = 6

Wir haben die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 0$ ermittelt. Einsetzen in die Faktordarstellung:

Insgesamt ergibt sich also die faktorisierte Funktion zu:

$$f(x) = \frac{2(x-2)(x+3)}{6x(x-2)}$$

Wir können den Bruch kürzen:

$$f(x) = \frac{2(x-2)(x+3)}{6x(x-2)}$$ |Kürzen von (x-2)

$$f(x) = \frac{2(x+3)}{6x}$$ | Kürzen von 2/6 = 1/3

$$f(x) = \frac{(x+3)}{3x}$$

METHODE

gekürzte faktorisierte Funktion: $f(x) = \frac{x+3}{3x}$

4. Erneut auf hebbare Lücke überprüfen

Die ermittelte mögliche hebbare Lücke lag bei $x = 2$ (für Nenner und Zähler liegt hier eine Nullstelle vor). Dieser Wert wird nun in den **Nenner** der **gekürzten faktorisierten Funktion** eingesetzt. Wird dieser ungleich null, so liegt eine hebbare Definitionslücke vor (anderenfalls eine Polstelle).

$x = 2$ in $n(x) = 3x$ einsetzen:

$$n(2) = 3 \cdot 2 = 6 \ \rightarrow \neq 0$$

MERKE

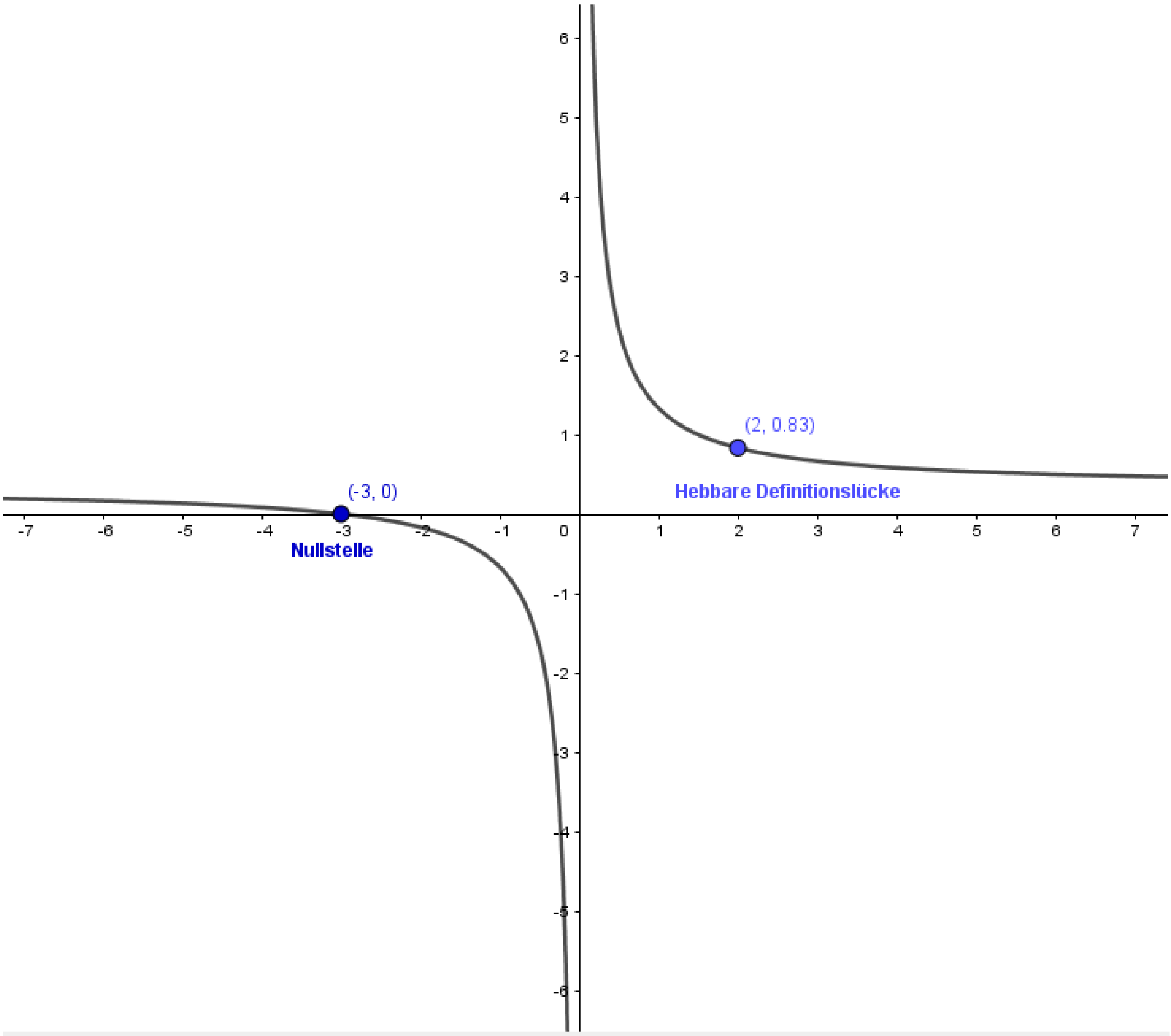
Der Nenner wird **ungleich null**, demnach liegt hier eine **hebbare Definitionslücke** vor.

5. Definitionsbereich erweitern

Der Definitionsbereich der Funktion kann dann wie folgt erweitert werden:

Einsetzen der hebbare Lücke $x = 2$ in den Bruch:

In der nachfolgenden Grafik ist die Funktion sowie die Nullstelle der Funktion bei $x = -3$ und die hebbare Definitionslücke bei $x = 2$ dargestellt.



Hebbare Defintionslücke und Nullstelle der Funktion

1.3.2.4 Asymptoten

Eine Asymptote ist eine Gerade, an die sich der Graph einer Funktion annähert, ohne dass sich beide in ihrem Verlauf irgendwo berühren. Betrachten wir eine beliebige gebrochenrationale Funktion:

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Senkrechte Asymptote

Senkrechte Asymptoten befinden sich, wie wir im Kurstext *Gebrochenrationale Funktionen* bereits erwähnt haben, an Polstellen einer gebrochenrationalen Funktion. Diese liegt vor, wenn in der Polynomform oder in der faktorisierten Form der gebrochenrationalen Funktion der Nenner gleich null ist, der Zähler jedoch nicht.

MERKE

senkrechte Asymptote: $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \rightarrow n(x) = 0 \; z(x) \neq 0$

Beispiel: senkreche Asymptote

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 12}{6x^2 - 12x}$. Bestimme die Polstelle(n)!

Wir berechnen die Nennernullstellen und prüfen, ob es sich um eine Polstelle handelt:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

$n(x) = 6x^2 - 12x$ /6

$$n(x) = x^2 - 2x$$

$$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - 0}$$

$$x_1 = 2$$

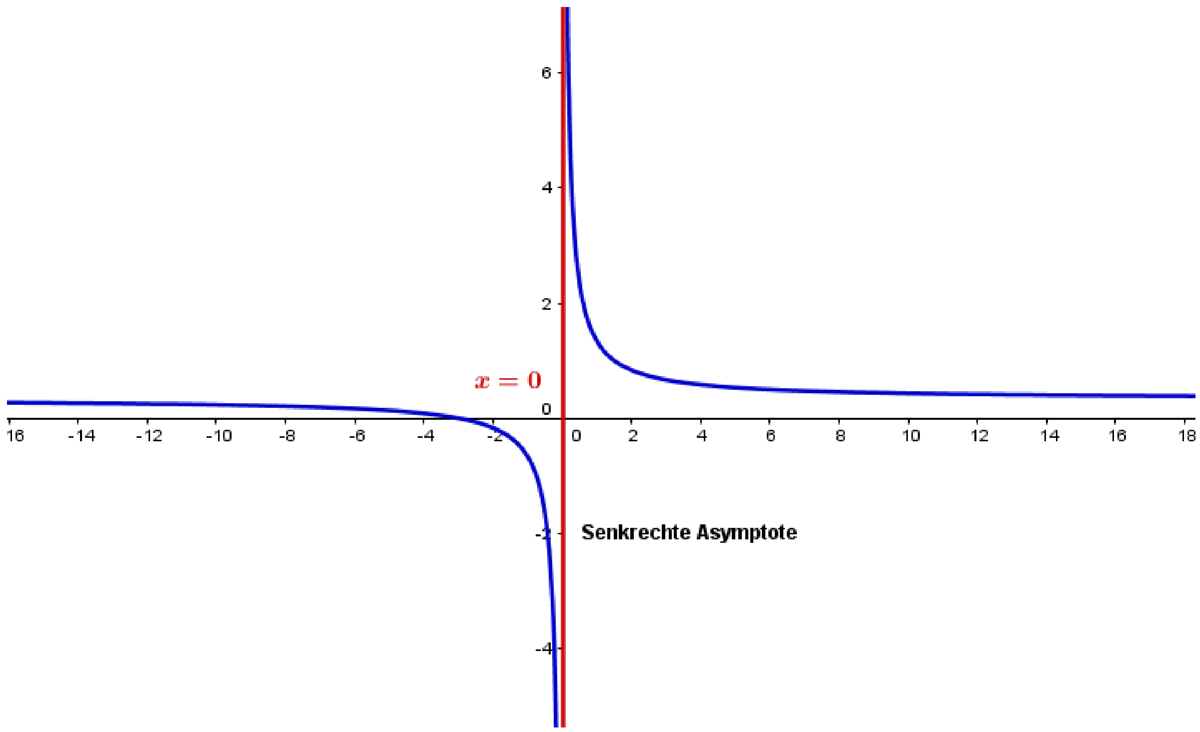
$$x_2 = 0$$

Wir setzen x_1 und x_2 in die Zählerfunktion ein:

$z(x_1 = 2) = 0 \Longrightarrow$ (hebbare) Definitionslücke

$z(x_2 = 0) = -12 \Longrightarrow$ Polstelle

Bei $x_2 = 0$ liegt eine Polstelle vor. Demnach verläuft die senkrechte Asymptote durch $x = 0$:



Die senkrechte Asymptote ist in diesem Fall die y -Achse, da diese durch $x = 0$ verläuft. Hier existiert ebenfalls eine waagerechte Asymptote, da der Zählergrad gleich dem Nennergrad. Die Definition der waagerechten Asymptote wird als nächstes betrachtet.

Waagerechte Asymptote

Für die Berechnung der waagerechten Asymptote müssen Zähler- und Nennergrad verglichen werden.

- Ist der Nennergrad kleiner als der Zählergrad, so ist die waagerechte Asymptote die $x - Achse$.
- Sind beide gleich, so resultiert eine waagerechte Asymptote, die eine Parallele zur x -Achse ist. Ihr Abstand von der x -Achse beträgt $y = \frac{a_n}{b_m}$.

MERKE

waagerechte Asymptoten:

- x **-Achse:** Zählergrad < Nennergrad (n < m)
- **parallele Gerade zur** x **-Achse:** $y = \frac{a_n}{b_m}$, wenn Zählergrad = Nennergrad (n = m)

METHODE

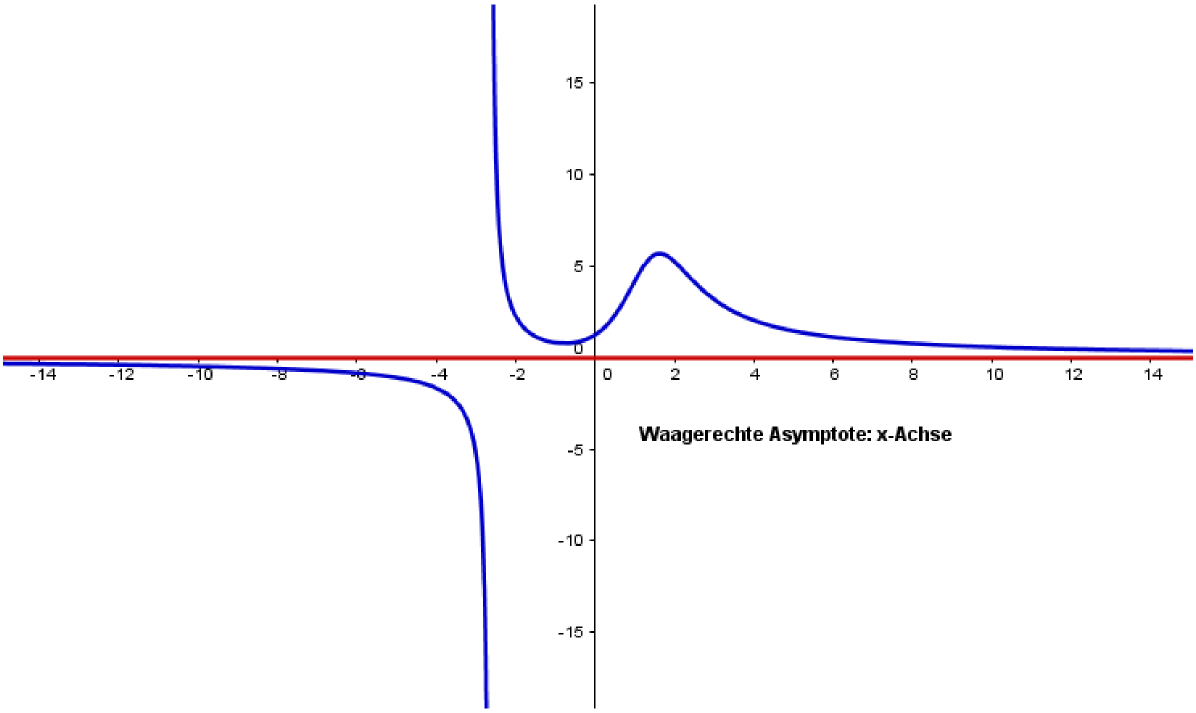
Ist die waagerechte Asymptote eine Parallele zur x-Achse, so beträgt ihr Abstand von der x-Achse $\frac{a_n}{b_m}$.

Beispiel: waagerechte Asymptote

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{5x^2 + 6x + 10}{x^3 - 4x + 8}$. Bestimme bitte die waagerechte Asymptote!

Der Zählergrad x^2 ist kleiner als der Nennergrad x^3, damit ergibt sich: $n < m$. Die x-Achse ist demnach die waagerechte Asymptote der Funktion:

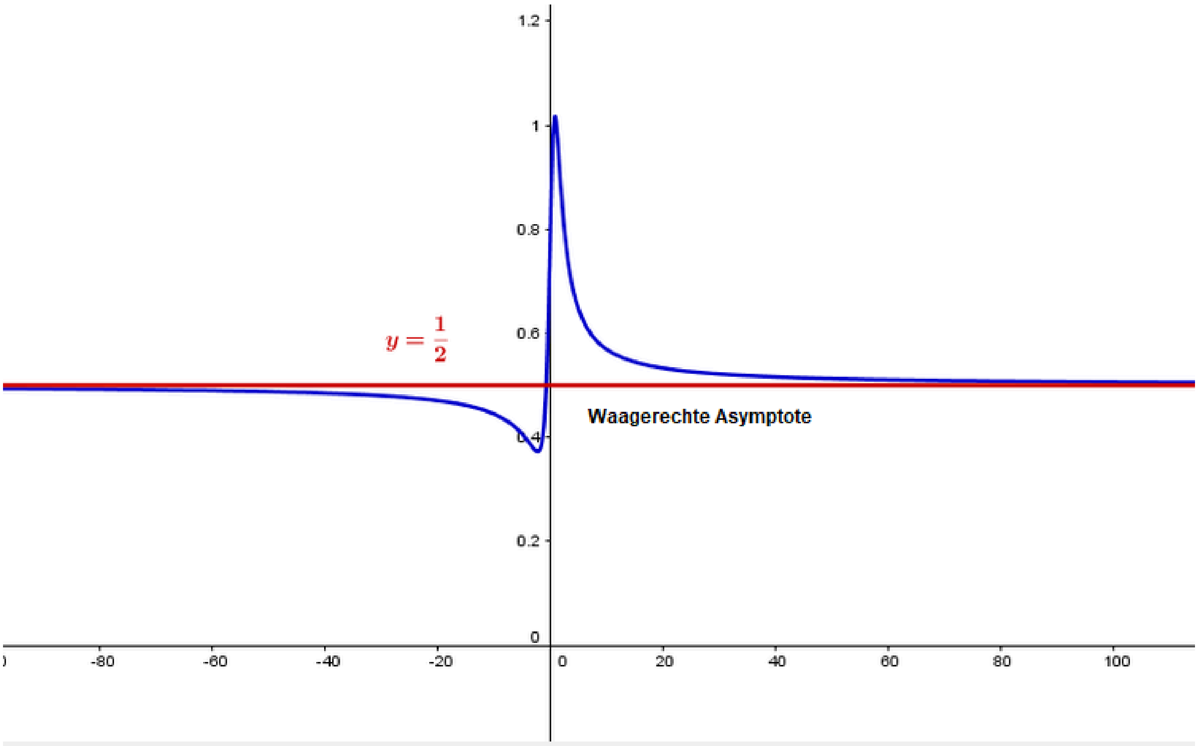


In der obigen Grafik ist deutlich zu erkennen, dass die x-Achse die waagerechte Asymptote darstellt. Da hier der Nenner bei $x = -2,65$ den Wert null annimmt (Nullstellen des Nenners mittels Polynomdivision berechnen) und dies eine Polstelle darstellt, ergibt sich hier ebenfalls eine senkrechte Asymptote.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 5}{4x^2 - x + 6}$. Bestimme bitte die waggerechte Asymptote(n)!

Zählergrad und Nennergrad sind gleich, es gilt: $n = m$. Der resultierende Quotient ist demnach der y-Wert, durch welchen die waagerechte Asymptote verläuft: $y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.



Waagerechte Asymptote

Schiefe Asymptote

Eine schiefe Asymptote ist liegt vor, wenn der Zählergrad um eins größer ist als der Nennergrad.

MERKE

schiefe Asymptote: Zählergrad = Nennergrad + 1 (n = m + 1)

Die Berechnung der schiefen Asymptote wird wie folgt durchgeführt:

METHODE

1. Prüfung der Funktion, ob eine schiefe Asymptote vorliegt
2. Durchführung der Polynomdivision
3. Grenzwertbetrachtung

Beispiel: schiefe Asymptote

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - x}$. Bestimme die Gleichung der schiefen Asymptote!

Der Zählergrad 3 ist um eins größer als der Nennergrad 2. Es gilt demnach $n = m + 1$. Es liegt eine schiefe Asymptote vor. Die Berechnung wird wie folgt durchgeführt:

Polynomdivision:

Wir führen zunächst die Polynomdivison durch. Dafür dividieren wir den Nenner durch den Zähler:

$$(x^3 + 0x^2 - 3x + 2) : (x^2 - x) = x + 1 - \frac{2}{x}$$

$$-(x^3 - x^2)$$

$$x^2 - 3x$$

$$-(x^2 - x)$$

$$-2x + 2$$

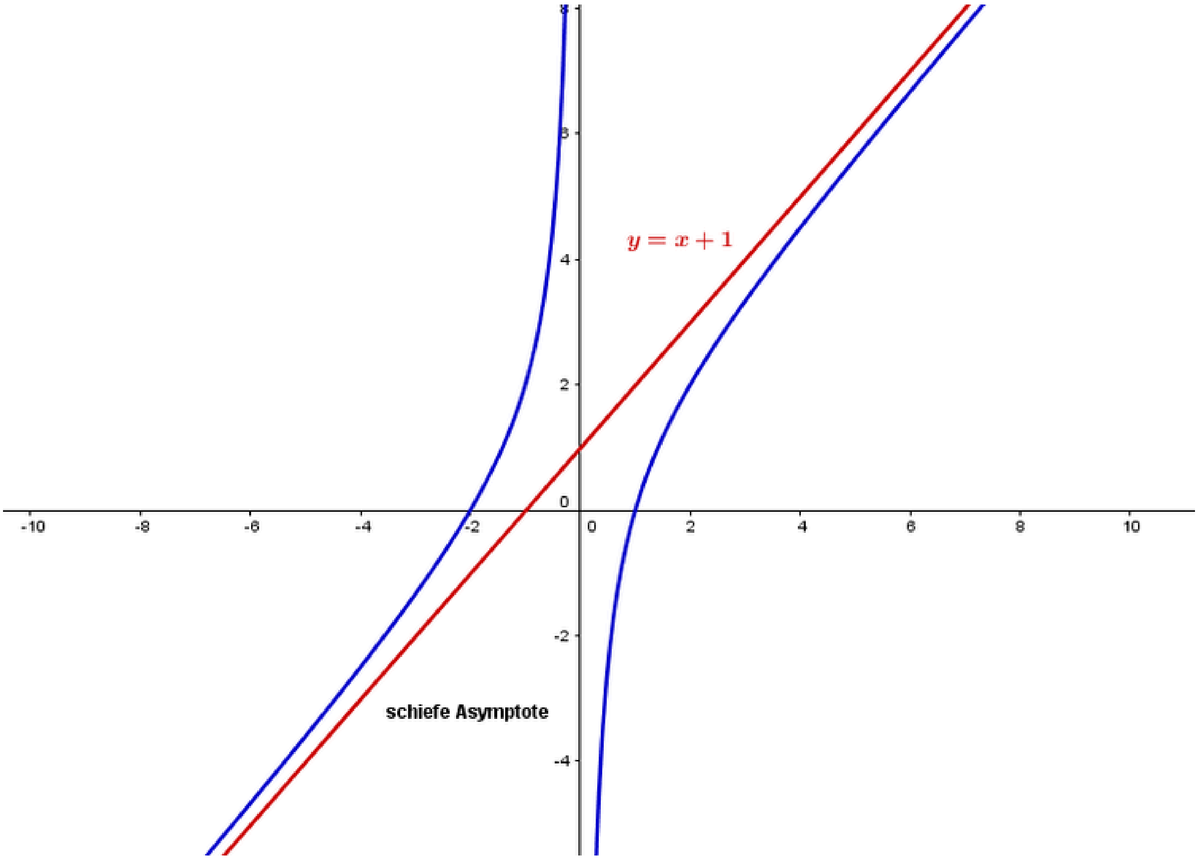
$$-(-2x + 2)$$

$$0$$

Als nächstes muss das Ergebnis aus der Polynomdivision betrachtet werden. Hierzu betrachten wir den Restbruch $-\frac{2}{x}$. Für diesen müssen wir eine Grenzwertbetrachtung für $x \to \pm\infty$ durchführen:

$$\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2}{x} = 0$$

Je größer die Werte von x werden, desto mehr nähert sich der Bruch dem Wert null an. Der Graph der Funktion strebt also gegen die schiefe Asymptote $y = x + 1$.



In der obigen Grafik erkennst du deutlich, dass sich die Funktion an die schiefe Asymptote $y = x + 1$ annähert.

Berechnen wir mittels pq-Formel die Nullstellen des Nenners, so erhalten wir $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Das Einsetzen in die Zählerfunktion zeigt uns, dass für $x_2 = 1$ eine Definitionslücke für $f(x)$ vorliegt, da die Zählerfunktion den Wert 2 annimmt. Für $x_1 = 0$ wird der Zähler 2, woraus hier eine Polstelle für $f(x)$ resultiert. Guckstu Grafik!

Asymptotische Kurve

Eine gebrochenrationale Funktion besitzt eine asymptotische Kurve, wenn der Zählergrad um mehr als 1 größer ist als der Nennergrad.

MERKE

asymptotische Kurve: Zählergrad > Nennergrad + 1 (n = m + 1)

Das Vorgehen zu deren Berechnung enstpricht dem bei der schiefen Asymptote.

1.3.2.5 Grenzwerte gebrochenrationaler Funktionen

In diesem Abschnitt zeigen wir dir die Berechnung von Grenzwerten bei gebrochenrationalen Funktionen. Möchten wir das Verhalten von Funktionen im Unendlichen herausfinden, müssen wir die beiden Fälle $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ betrachten:

MERKE

- $lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$
- $lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$

Für die Berechnung der Grenzwerte vergleichen wir den Grad von Zähler n und Nenner m und unterscheiden dann für unsere Betrachtung von $lim_{x \to +\infty}$ und $lim_{x \to -\infty}$ die drei Fälle:

- $n < m$
- $n = m$
- $n > m$

Grenzwert gegen plus unendlich

Die Funktion $f(x)$ nimmt für $lim_{x \to +\infty}$ die folgenden Grenzwerte an:

MERKE

Liegt der Fall $n > m$ vor, so müssen wir klären, ob der Quotient aus den Leitkoeffizienten von Zähler- und Nennerpolynom $\frac{a_n}{b_m}$ größer oder kleiner als null ist:

MERKE

Grenzwert gegen minus unendlich

Die Funktion $f(x)$ nimmt für $lim_{x \to -\infty}$ die folgenden Grenzwerte an:

MERKE

Liegt der Fall $n > m$ vor, so müssen wir neben zusätzlich zu unserer Betrachtung, ob $\frac{a_n}{b_m}$ größer oder kleiner ist als null, ebenso darauf achten, ob die Zahlenwerte von n und m gerade oder ungerade sind. Dazu können wir zwei Fälle unterscheiden:

MERKE

Fall 1: n und m sind **beide** gerade oder **beide** ungerade:

MERKE

Fall 2: n und m sind **verschieden** (also *einmal* gerade und *einmal* ungerade):

Beispiel 1: Grenzwert einer gebrochenrationalen Funktion

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{6x^2 - 12x}$. Gegen welchen Wert konvergiert die Funktion für $x \to \pm\infty$?

Für die obige Funktion gilt, dass der Zählergrad und der Nenngrad gleich sind:

$$n = m$$

Sowohl für minus als auch für plus unendlich strebt die Funktion gegen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Dies können wir einfach überprüfen, indem wir für x immer größere Werte einsetzen:

x	1	10	100	1000
f(x)	2,0	0,350	0,3365	0,33367

Beispiel 2: Grenzwert einer gebrochenrationalen Funktion

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{2x^2 - 12}{6x^3 - 8x}$. Gegen welchen Wert konvergiert die Funktion für $x \to \pm\infty$?

Für die obige Funktion gilt, dass der Zählegrad kleiner ist als der Nennergrad:

$$n < m$$

Sowohl für minus als auch für plus unendlich strebt die Funktion gegen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Dies können wir einfach überprüfen, indem wir für x immer größere Werte einsetzen:

x	1	10	100	1000
f(x)	5,0	0,032	0,0033	0,00033

Beispiel 3: Grenzwert einer gebrochenrationalen Funktion

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{2x^3 - 12}{6x^2 - 8x}$. Gegen welchen Wert konvergiert die Funktion für $x \to \pm\infty$?

Für die obige Funktion gilt, dass der Zählergrad größer ist als der Nennergrad:

$$n > m$$

Fall 1: $x \to +\infty$

Hier gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

Die Funktion strebt gegen unendlich. Wir müssen noch unterscheiden, ob die Funktion gegen plus oder minus unendlich strebt:

$$\frac{a_n}{b_m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} > 0$$

Der Quotient der Leitkoeffizienten von Zähler und Nenner ist positiv. Die Funktion strebt somit gegen:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Fall 2: $x \to -\infty$

Wir stellen fest, ob Zähler- und Nennergrad gerade oder ungerade sind:

$n = 3$ ungerade

$m = 2$ gerade

Zählergrad und Nennergrad sind verschieden. Wir wissen, dass der Quotient der Leitkoeffizienten positiv ist:

$$\frac{a_n}{b_m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} > 0$$

Daraus folgt:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Die Funktion $f(x)$ strebt für:

- $x \to +\infty$ gegen plus unendlich
- $x \to -\infty$ gegen minus unendlich

1.4 Nichtrationale Funktionen

In den folgenden Kurstexten gehen wir auf die nichtrationalen Funktionen ein und zeigen Dir deren Eigenschaften und stellen dir ihre Rechenregeln vor.

1.4.1 Wurzelfunktionen

Die **Wurzelfunktion** ist eine algebraische, jedoch nichtrationale Funktion. Sie ist die **Umkehrfunktion** der **Potenzfunktion**.

Die allgemeine Form der Wurzelfunktion lautet:

MERKE

allgemeine Wurzelfunktion: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad | x \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$

Wir bezeichnen

$\sqrt[n]{x}$ als Wurzel, Radikal oder Radix,
n als Wurzelexponent und
x als Radikand.

Das Radizieren mit dem Wurzelexponenten n hebt das Potenzieren mit dem Exponenten n auf. Wenn wir eine Zahl x mit dem Wert n potenzieren und anschließend aus dem Ergebnis die n -te Wurzel ziehen, erhalten wir wiederum die Zahl x .

METHODE

$$\Longrightarrow f(x) = \sqrt[n]{x^n} = x$$

Wir können auch sagen, dass das Radizieren mit dem Wurzelexponenten n dem Potenzieren mit $\frac{1}{n}$ entspricht.

METHODE

$$\Longrightarrow f(x) = (x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

BEISPIEL

$$f(25) = \sqrt[5]{25^5} = 25^{\frac{5}{5}} = 25$$

Wurzeln aus positiven Zahlen

Wie du eingangs gelesen hast, ist die Wurzelfunktion die Umkehrung der Potenzfunktion. Potenzfunktionen mit **geradzahligen** Exponenten besitzen im Gegensatz zu Potenzfunktionen mit ungeradzahligen Exponenten **zwei** Lösungen.

BEISPIEL

geradzahlige Exponenten: $x^2 = 9 \longrightarrow x = 3$ und $x = -3$

Vergleichen wir nun mit ungeradzahligen Exponenten, so sehen wir, dass bei ungeradzahligen Exponenten nur eine Lösung existiert.

$$(x_1)^3 = 8 \longrightarrow x_1 = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$(x_2)^3 = -8 \longrightarrow x_2 = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Setzten wir bspw. x_2 für x_1 in die Gleichung für x_1 ein, so erhielten wir nicht dasselbe Ergebnis:

$$(x_2)^3 \neq 8$$

Besitzt also die Potenzfunktion mit geradem Exponenten zwei möglichen Lösungen, steht jedoch die Schreibweise mit dem Wurzelzeichen grundsätzlich für die positive Lösung.

BEISPIEL

$x = \sqrt[2]{9} = 3$ Jedoch nicht -2 .

Daraus folgt allgemein für Wurzeln positiver Zahlen mit geradzahligem Wurzelexponenten $2n$:

MERKE

$$\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$$

Wurzeln aus negativen Zahlen

In vielen Schulbüchern wird noch die Konvention verwendet, dass das Wurzelziehen nur für positive Radikanden definiert ist.

Geradzahlige Wurzelexponenten

Wurzeln mit geraden Wurzelexponenten aus negativen Zahlen sind für relle Zahlen nicht definiert. Erinnere dich an das Kapitel *Komplexe Zahlen*. Es existiert keine relle Zahl x , sodass $x^2 = -1$ gilt. Daraus folgt, dass keine reelle Lösung für $x = \sqrt[2]{-1}$ existiert. Aus diesem Grund sind die *komplexen Zahlen* eingeführt worden.

Ungeradzahlige Wurzelexponenten

Wurzeln mit ungeraden Wurzelexponenten aus negativen Zahlen sind erlaubt.

Für Wurzeln negativer reller Zahlen mit ungeradem Wurzelexponenten gilt allgemein:

MERKE

Die Zahl $y \in \mathbb{R}$ ist diejenige Zahl $y = \sqrt[2n+1]{x}$, für die gilt:

$$y^{2n+1} = x$$

Weiterhin können wir für oben genannte Wurzeln festlegen:

METHODE

$$\sqrt[2n+1]{-x} = -\sqrt[2n+1]{x}$$

Diese Festlegung ist wichtig, da die Schreibweise bspw. $\sqrt[3]{-8}$ undefiniert ist. (Boah, echt ey Leute, fragt mich nicht warum, ich habe keine vernünftige Formulierung gefunden, das müsst ihr leider erstmal so hinnehmen. [Anm. Axel])
Schreibe daher stets $\Longrightarrow -\sqrt[3]{8}$ anstatt $\sqrt[3]{-8}$!

Jedoch ist diese Festlegung mit einigen Eigenschaften der Wurzeln nicht vereinbar:

BEISPIEL

Den Ausdruck $-2 = -\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{-8}$ könnten wir auch erweitert schreiben als $\sqrt[3 \cdot 2]{-8^2} = \sqrt[6]{-8^2}$. Da jedoch $(-8)^2 = 64$, folgt: $\sqrt[6]{64} = +2$! Dies widerspricht der Lösung der Ausgangsgleichung.

Formulieren wir die Wurzelfunktion als $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$,

so funktioniert diese Festlegung ebenso nicht, da wir auch umformulieren können in $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = exp(\frac{1}{n} log(x))$.

Da der Logarithmus von negativen Zahlen nicht definiert ist, siehst du, dass in diesem Fall die Festlegung nicht richtig ist.

Wurzelgesetze

Die Rechenregeln für die Wurzelfunktionen ergeben sich direkt aus Regeln für das Potenzieren. Für die Zahlen a und n, m, k \in \mathbb{N} $geltendiefolgendenRegeln :< /p >< ul >< li > Produktregel$: \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} $< /li >< li > Quotientenregel$: \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} $< /li >< li > gleicher Radikand$: \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \sqrt[m \, \cdot \, n]{a^{m + n}} $< /li >< li > Iterationsregel(Verschachtelungsregel)$: \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \, \cdot \, n]{a} a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k a^{- \frac{k}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}}$

1.4.2 Exponentialfunktionen

1.4.2.1 Die allgemeine Exponentialfunktion

Die allgemeine Exponentialfunktion ist definiert durch:

$y = f(x) = a^x$ mit $\forall\, a \in \mathbb{R}^+ \; | a \neq 1$ und $\forall\, x \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$

Eine besondere Exponentialfunktion ist die *natürliche Exponentialfunktion* $f(x) = e^x$, die wir als **e-Funktion** bezeichnen, also die Exponentialfunktion mit der eulerschen Zahl $e = 2,718282...$ als Basis. Diese hat gegenüber anderen Exponentialfunktionen besondere Eigenschaften. Ihr widmen wir uns im nächsten Kurstext. Wichtig für dich zu wissen ist, dass mit ihrer Hilfe unter Verwendung des natürlichen Logarithmus' sich jede Exponentialfunktion zur Basis e umwandeln lässt. Aus $a = e^{ln\, a}$ folgt:

MERKE

$$f(x) = a^x := e^{x \cdot ln\, a}$$

Kleine Erinnerung: Das Zeichen $:=$ heißt "wird per Definition gleichgesetzt."

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 5^x$.

Für bspw. $x = 2$ ergibt sich: $f(2) = 5^2 = 25$

Mit o. g. Formel ergibt sich mit $x = 2:\; f(2) = e^{2 \cdot ln 5} = 25$

Eigenschaften und Grenzwerte der allgemeinen Exponentialfunktion

Für alle $a > 1$ gilt:

- Die Funktion ist streng monton wachsend.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

Für alle $0 < a < 1$ gilt:

- Die Funktion ist streng monton fallend.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

Rechenregeln

Die oben erwähnte Umwandlung jeder beliebigen Exponentialfunktion in die e-Funktion funktioniert natürlich auch mit beliebigen anderen Werten b als neue Basis:

$$a^x = b^{x \cdot log_b(a)}$$

Die folgenden Rechenvorschriften gelten für alle $a > 1$ und alle $x \in \mathbb{C} \vee \mathbb{R}$:

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

(3) $a^0 = 1$

(4) $(a^x)^r = a^{x\,r}$

1.4.2.2 Die e-Funktion

Die natürliche Exponentialfunktion oder **e-Funktion** lautet:

$$f(x) = e^x$$

Die Zahl $e = 2,718281828459...$ wird Eulersche Zahl genannt. Sie ist durch folgende Grenzwertberechnung definiert:

METHODE

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,718281828459...$$

Die Exponentialfunktion können wir auf verschiedene Weise darstellen. Wir können sie als **Potenzreihe** definieren, die sogenannte **Exponentialreihe**:

MERKE

e-Funktion als Exponentialreihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Wir können sie jedoch auch als Grenzwert einer Folge mit $n \in \mathbb{N}$ definieren:

MERKE

e-Funktion als Grenzwertbetrachtung: $e^x = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$

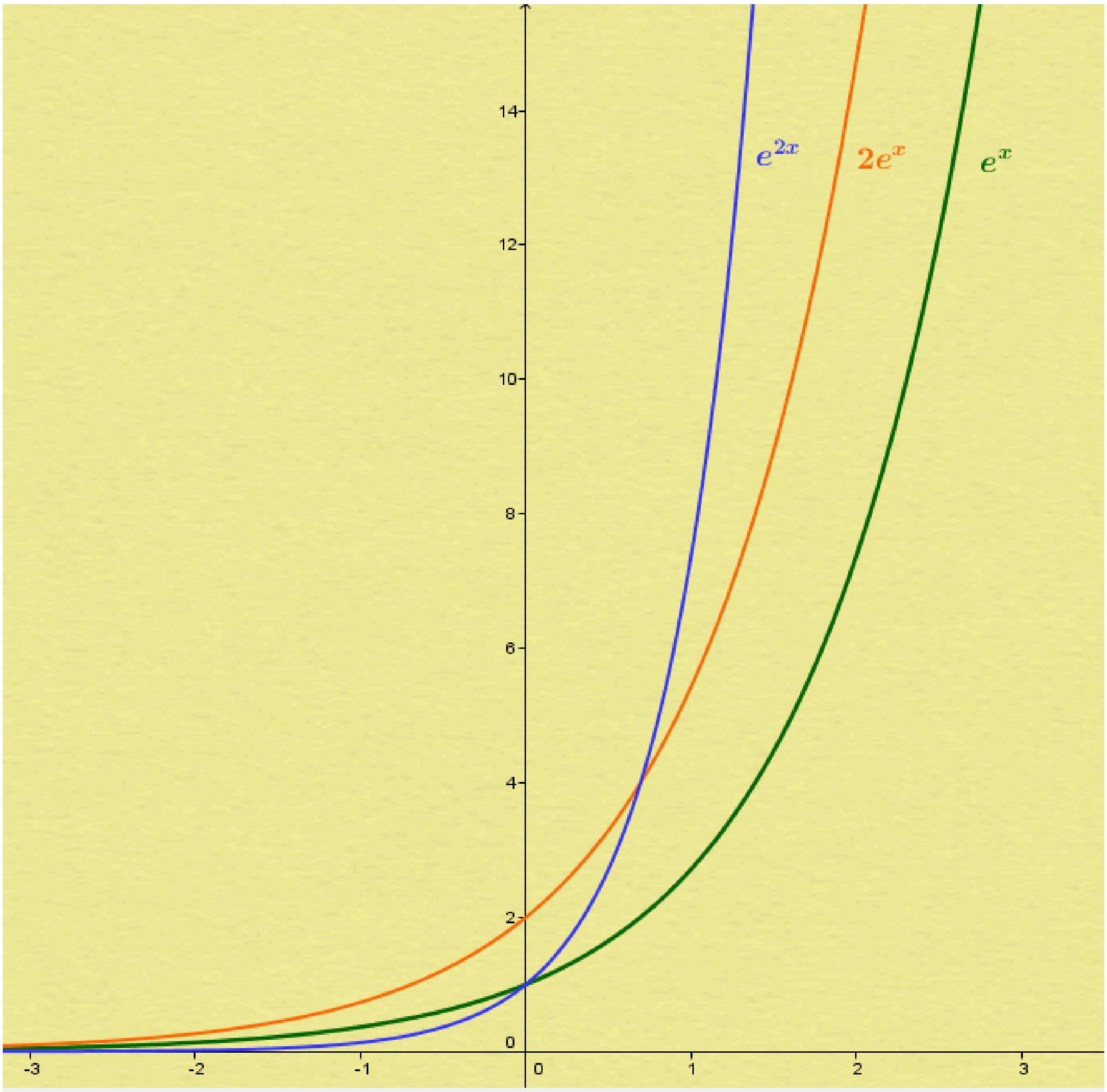
Eigenschaften und Grenzwerte der e-Funktion

- Die e-Funktion ist streng monoton steigend und besitzt für $x \in \mathbb{R}$ keine Nullstellen.
- Grenzwerte:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x \widehat{=} \lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = 0$
- Die Ableitung von $f(x) = e^x$ ergibt wieder e^x .

METHODE

Ableitung der e-Funktion: (e^x)



e-Funktionen

Weitere Grenzwerte

Die e-Funktion steigt im Unendlichen stärker als jede noch so große Potenzfunktion. Der Quotient aus beiden Funktionen geht je nachdem ob die E-Funktion im Zähler oder Nenner steht, geht entweder gegen null oder gegen Unendlich.

METHODE

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

Rechenregeln

Die Rechenregeln für die allgemeinen Exponentialfunktionen gelten auch für die e-Funktion:

(1) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

(2) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

(3) $e^0 = 1$

(4) $(e^x)^r = e^{x\,r}$

1.4.3 Logarithmusfunktionen

Die Logarithmusfunktion ist die **Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.** Ihr Name leitet sich von den griechischen Wörtern *lógos* = "Verständnis, Lehre" und *arithmós* = "Zahl" ab. Schon vor Christi Geburt sind entsprechende Berechnungen belegt. Die Bezeichnung Logarithmus wurde von John Napier zu Beginn des 17. Jahrhunderts eingeführt.

Einführung in den Logarithmus als Umkehrung der Exponentialfunktion

Als Umkehrfunktion der allgemeinen Exponentialfunktion bezeichnet der **Logarithmus** einer Zahl den Exponenten, mit dem ein vorher festglegter Zahlenwert (**Basis**) potenziert werden muss, um die festgelegte Zahl zu erhalten.

Anders ausgedrückt: Das positive reelle x als Potenz zur Basis b wird als die Zahl formuliert, die die Gleichung

$$b^y = x$$

löst. Der Logarithmus ist ihr Exponent

$$y = log_b(x) \, .$$

Setzen wir beide Terme ineinander ein, so können wir die Definition des Logarithmus' mit folgenden Gleichungen wiedergeben:

METHODE

$$b^y = b^{log_b(x)} = x$$

$$log_b(x) = log_b(b^y) = y$$

Wie schon erwähnt, heißt b die **Basis** des Logarithmus'. Wir nennen x das **Argument** des Logarithmus'.

BEISPIEL

Gegeben sei die Gleichung $log_3(x) = 7$. Berechne bitte x !

Wir suchen also das Argument x und sehen, dass die 7 der Exponent zur Zahl 3 ist, um x zu erhalten. Wir können auch schreiben:

$$3^7 = x \longrightarrow x = 2187 \Longrightarrow 7 = log_3(2187)$$

BEISPIEL

Gegeben sei die Gleichung $27 = 3^y$. Berechne bitte y !

Wir suchen den Wert y (Exponent), mit dem wir die Basis 3 potenzieren müssen, um das Argument $x = 27$ zu erhalten.

$$27 = 3^y = 3^{log_3(27)} = x \longrightarrow y = log_3(27) = 3 \Longrightarrow 27 = 3^3$$

Die Eigenschaften und Grenzwerte der allgemeinen Logarithmusfunktion

Logarithmusfunktionen haben eine große Bedeutung in der Wissenschaft, da mit ihnen sehr stark wachsende Zahlenreihen übersichtlich dargestellt werden können. Als allgemeine Logarithmusfunktion zur Basis b bezeichnen wir die Funktion, die bei gegebener fester Basis b jedem Argument x ihren Logarithmus zuordnet:

MERKE

allgemeine Logarithmusfunktion: $f(x) = \log_b(x)$

Die Logarithmusfunktionen sind nur für positive reelle Zahlen sowie für alle positive Basen außer 1 definiert:

MERKE

$x \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}^+ \, |b \neq 1$

Möchten wir das Monotonieverhalten der allgemeinen Logarithmusfunktion bestimmen, müssen wir darauf achten, ob die Basis zwischen 0 und 1 liegt oder größer als 1 ist.

Für alle $b > 1$ gilt:

- Die Funktion ist streng monoton wachsend.
- $\lim_{x \to +\infty} log_b(x) = +\infty$ und $\lim_{x \to 0} a^x = -\infty$
- Für $\lim_{x \to 0} log_b(x)$ ist die y -Achse (negativer Teil) eine senkrechte Asymptote.

Für alle $0 < b < 1$ gilt:

- Die Funktion ist streng monton fallend.
- $\lim_{x \to +\infty} log_b(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to 0} a^x = +\infty$
- Für $\lim_{x \to 0} log_b(x)$ ist die y -Achse (positiver Teil) eine senkrechte Asymptote.

Rechenregeln

(1) $log_b(x^r) = r \cdot log_b(x) \quad |r \in \mathbb{R}$

(2) $log_b(x \cdot y) = log_b(x) + log_b(y)$

(3) $log_b(\frac{x}{y} = log_b(x) - log_b(y)$

(4) $log_b(\frac{1}{x}) = log_b(x^{-1}) = -log_b(x)$

(5) $log_b(\frac{x}{y}) = -log_b(\frac{y}{x})$

(6) Wir kürzen aus der Summe $(x+y)$ das x aus und erhalten: $x + y = x(1 + \frac{y}{x})$

$$\Longrightarrow log_b(x+y) = log_b(x) + log_b(1 + \frac{y}{x})$$

(7) Wurzeln sind nichts anderes als Potenzen mit gebrochenem Exponenten:

$$\Longrightarrow log_b(\sqrt[n]{x}) = log_b(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} log_b(x)$$

Logarithmusfunktionen zu speziellen Basen

In Mathematik und Technik werden häufig Logarithmusfunktionen zu speziellen Basen angewendet:

$f(x) = log_2(x) = lb(x)$ binärer Logarithmus, Logarithmus zur Basis 2
$\longrightarrow$ Anwendung in der Informatik im Binärsystem

$f(x) = log_{10}(x) = lg(x)$ dekadischer Logarithmus oder Briggscher Logarithmus; Logarithmus zur Basis 10
$\longrightarrow$ Anwendung bei numerischen Rechnungen im Dezimalsystem

$f(x) = log_e(x) = ln(x)$ natürlicher Logarithmus oder Logarithmus naturalis; Logarithmus zur Basis e (eulersche Zahl)
$\longrightarrow$ Anwendung im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen

Basisumrechnung

Die meisten gängigen Taschenrechner können nur den dekadischen und den natürlichen Logarithmus einer Zahl bestimmen. Möchtest du den Logarithmus einer beliebigen Zahl berechnen, musst du die **Basisumrechnung** beherrschen.

EXPERTENTIPP

Möchtest du etwas beherrschen, dann reicht es nicht, diese Sache ein Mal richtig zu machen.

Du beherrschst eine Sache erst, wenn du sie nicht mehr falsch machen kannst!

Die Gleichung $y = log_b(x)$ formen wir um in:

$$\rightarrow b^y = x$$

Wir logarithmieren beide Seiten mit einer beliebigen Basis $a \longrightarrow log_a$:

$$\rightarrow log_a(b^y) = log_a(x)$$

$$\rightarrow ylog_a(b) = log_a(x)$$

$$\rightarrow y = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$$

Wir sehen somit, dass sich die Logarithmen zu verschiedenen Basen nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Zur Basisumrechnung verwenden wir also diesen Zusammenhang:

MERKE

Basisumrechnung: $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $150 = 5^x$. Berechne x !

Berechnung mit Hilfe der Basis 10 :

$$x = \frac{\lg(150)}{\lg(5)} \approx 3,1133$$

Berechnung mit Hilfe der Basis e :

$$x = \frac{\ln(150)}{\ln(5)} \approx 3,1133$$

1.4.4 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen (*gr.* trigonon = Dreieck, *gr.* metron = Maß), auch Winkelfunktionen genannt, dienen in der Mathematik zur Berechnung der Zusammenhänge zwischen Winkeln und Seitenverhältinissen. In den Naturwissenschaften dienen sie als fundamentale Funktionen zur Berechnung periodischer Vorgänge.

Die wichtigen trigonometrischen Funktionen sind:

- Sinusfunktion: $f(x) = sin(x)$
- Kosinusfunktion: $f(x) = cos(x)$
- Tangensfunktion: $f(x) = tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$

sowie deren Kehrwerte:

- Kosekansfunktion: $f(x) = csc(x) = \frac{1}{sin(x)}$ $\longrightarrow$ Kehrwertfunktion der Sinusfunktion

- Sekansfunktion: $f(x) = sec(x) = \frac{1}{cos(x)} \longrightarrow$ Kehrwertfunktion der Kosinusfunktion
- Kotangensfunktion $f(x) = cot(x) = \frac{1}{tan(x)} = \frac{cos(x)}{sin(x)} \longrightarrow$ Kehrwertfunktion der Tangensfunktion

HINWEIS

Bitte verwechsle nicht eine Kehrwertfunktion mit einer Umkehrfunktion!

Der Kehrwert ist das Reziproke des Ausgangswertes, eine Kehrwertfunktion entsprechend die reziproke Funktion zur Ausgangsfunktion:

$$\rightarrow f(x) = sin(x) \Longrightarrow k(x) = \frac{1}{sin(x)} = csc(x)$$

Bei einer Umkehrfunktion sind Ziel- und Definitionsmenge gegenüber der umkehrbaren Ausgangsfunktion vertauscht:

$$\rightarrow f(x) = sin \Longrightarrow f$$

Winkelfunktionen am Einheitskreis

In früheren Zeiten waren die trigonometrischen Funktionen nur für Winkel von bis definiert, da sie nur die Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken betrachteten.

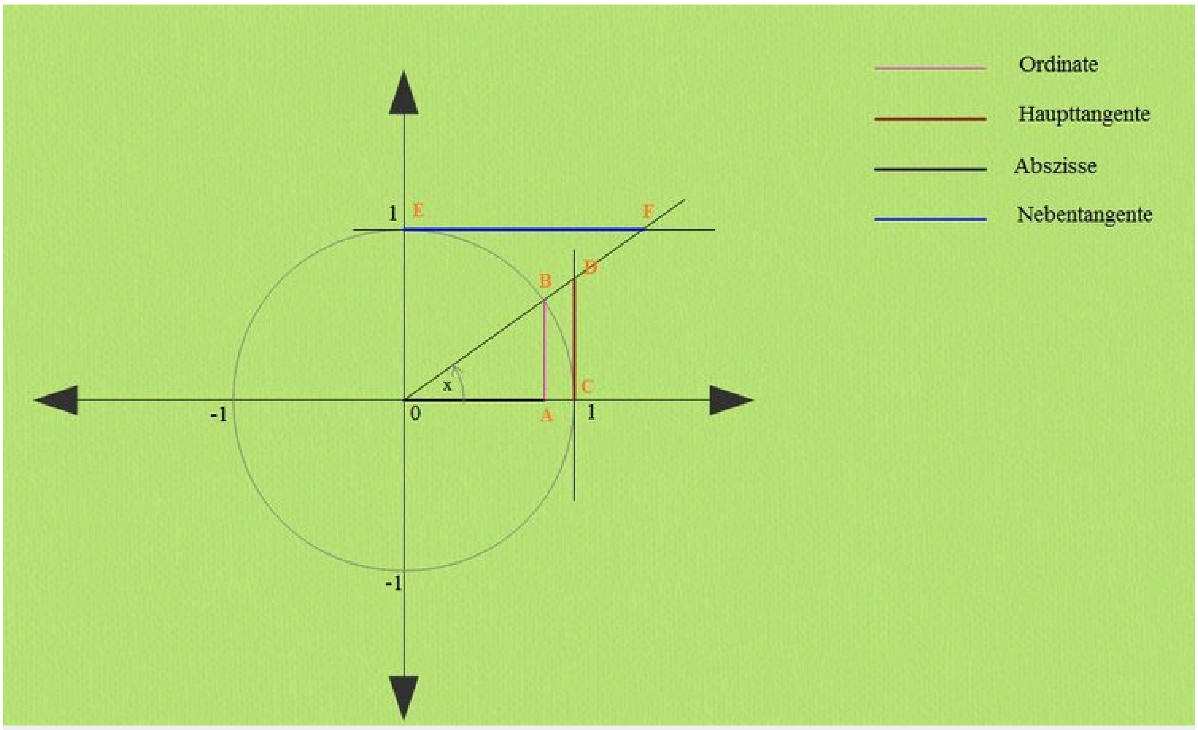
BEISPIEL

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a , b und c sowie den Winkeln α , β und γ . Die Seite a liegt gegenüber α , b gegenüber β und c gegenüber γ .

$$\longrightarrow sin\alpha = \frac{Gegenkathetevon\alpha}{Hypothenuse} = \frac{a}{c}$$

Du erinnerst aus der Schule...

Wir können jedoch den Definitionsbereich der Winkelfunktionen erweitern, indem wir sie als Sekanten- und Tangentenabschnitte am Einheitskreis (ein Kreis mit dem Zentrum im Koordinatenursprung mit Radius 1) berechnen. So sind uns nicht nur alle Winkel bis , sondern auch negative Winkel zugänglich.



Sekanten- und Tangentenabschnitte am Einheitskreis

Berechnung am Einheitskreis:

MERKE

Sinusfunktion:

Ordinate von B: $y = sin\alpha = |\overline{AB}|$

Kosinusfunktion:

Abszisse von B: $y = cos\alpha = |\overline{0A}|$

Tangensfunktion:

Haupttangentenabschnitt: $y = tan\alpha = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = |\overline{CD}|$

sowie

Kosecansfunktion:

Abstand vom Koordinatenursprung: $y = csc\alpha = |\overline{0F}|$

Secansfunktion:

Abstand vom Koordinatenursprung: $y = sec\alpha = |\overline{0D}|$

Kotangensfunktion:

Nebentangentenabschnitt: $y = cot\alpha = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} = |\overline{EF}|$

HINWEIS

In den weiteren Kurstexten werden wir uns nur mit den wichtigen trigonometrischen Funktionen wie der Sinus-, der Kosinus-, der Tangens- sowie der Kotangensfunktion befassen.

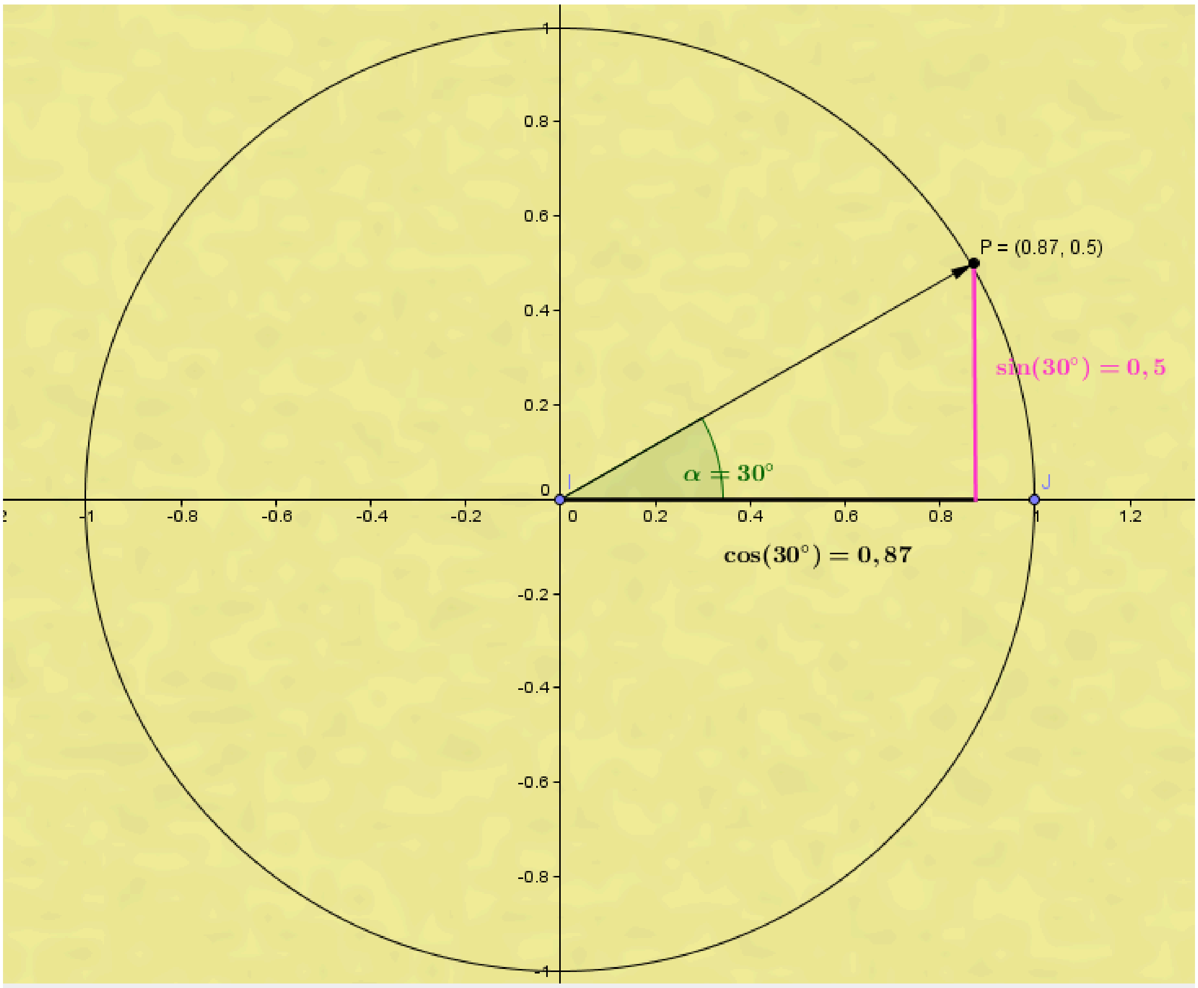
Berechnung eines Punktes auf dem Einheitskreis

Zu jedem Winkel α zwischen und gehört ein Punkt P auf dem Einheitskreis mit den Koordinaten (x, y).

BEISPIEL

Welche Koordinaten besitzt der Punkt auf dem Einheitskreis wenn ist?

Die Koordinaten des Punktes lauten: $P(0,87|0,5)$



Berechnung eines Punktes auf dem Einheitskreis

1.4.4.1 Das Bogenmaß und Eigenschaften der trigonomterischen Funktionen

Die Quadranten des Einheitskreises

MERKE

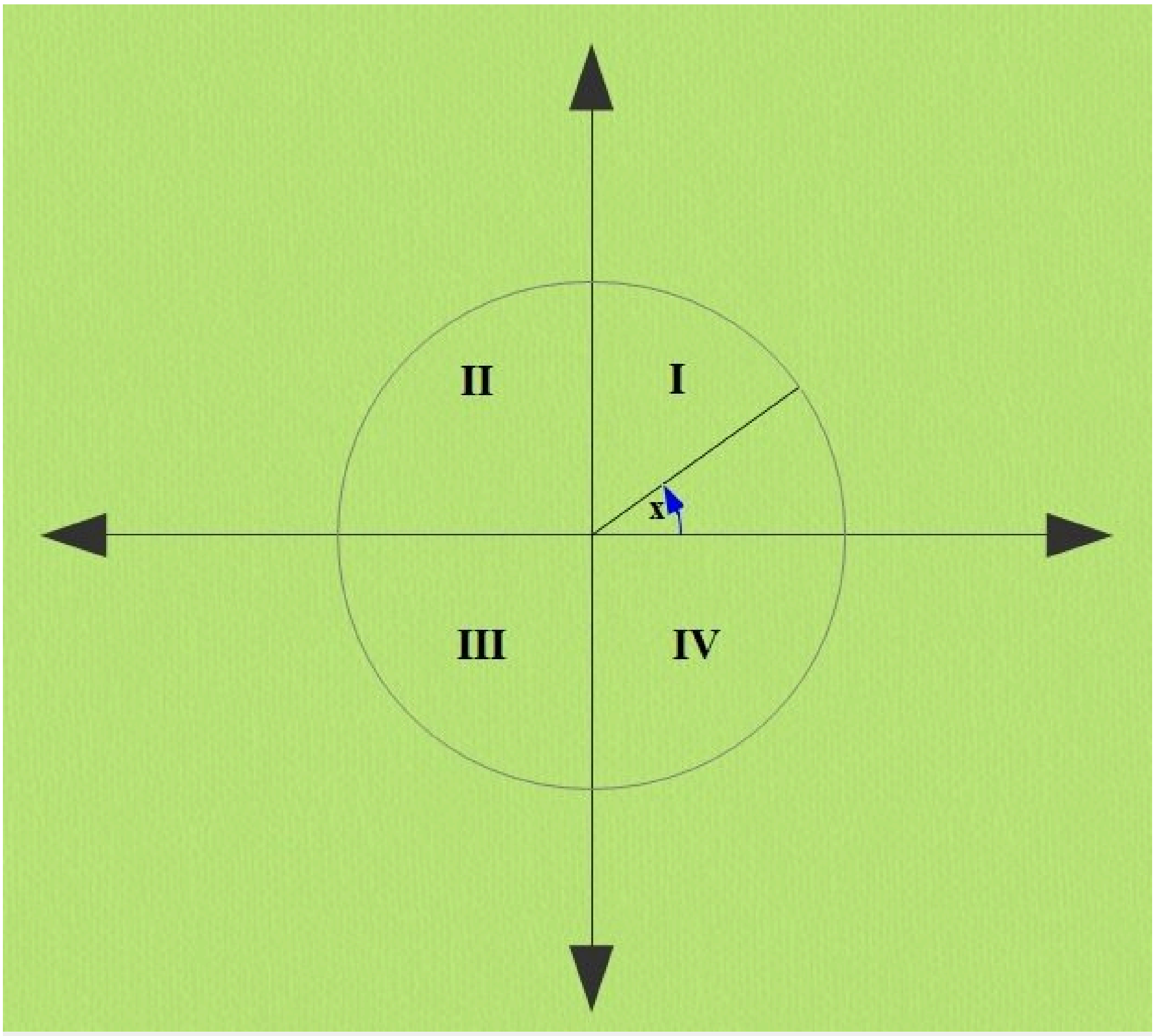
Das Koordinatensystem unterteilt den Einheitskreis in vier Quadranten:

Quadrant I: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Quadrant II: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Quadrant III: $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

Quadrant IV: $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\,\pi$



Quadranten des Einheitskreises

MERKE

Winkel die im **Uhrzeigersinn** überstrichen werden, sind **negativ**, Winkel die gegen den **Uhrzeigersinn** überstrichen werden **positiv**.

Das Bogenmaß mit der Einheit Radiant

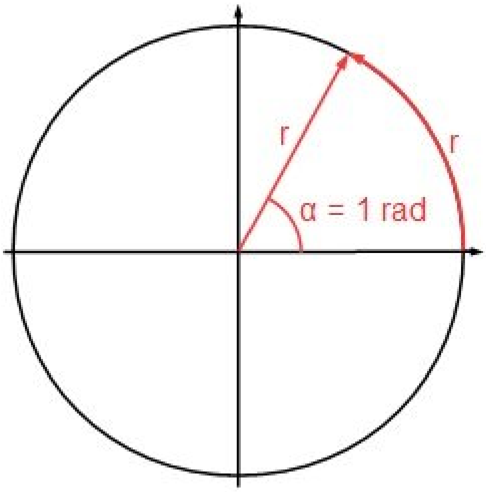
Für die Betrachtungen am Einheitskreis verwenden wir nicht für einen Winkel nicht die Einheit *Grad* ( ), welche wir für gewöhnlich zur Winkelberechnung benutzen. Am Einheitskreis verwenden wir zur Angabe eines Winkels das **Bogenmaß** mit der Einheit **Radiant** (rad), bei dem der Winkel durch die Länge des entsprechenden Kreisbogens des Einheitskreises angegeben wird. Die Länge des Kreisbogens L_{KB} ist proportional dem Radius L_r des Kreises. Die Dimension der Einheits rad ist 1 , da wir die Länge des Kreisbogens durch die Länge des Radius' teilen:

$$rad = \frac{L_{KB}}{L_r} = 1$$

Aus diesem Grund können wir auf das Anhängen der Einheit zur Beschreibung des Winkels in Berechnungen verzichten.

BEISPIEL

Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3\,cm$. Ein Winkel von einem rad entspricht auf dem Kreis einem Bogen der Länge von $3\,cm$.



Winkel = 1 rad

Ein Vollkreis besitzt den Umfang U von $U = 2\,\pi r$. Dementsprechend beträgt der Vollwinkel $\omega = 2\,\pi\,rad$.

METHODE

Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen

In den vier Quadranten haben die trigonometrischen Funktionen folgende Vorzeichen:

Quadrant	sin	cos	tan	cot
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

$sin(\alpha)\widehat{=}$ **Abschnitt auf der** y **-Achse:**

Alle Punkte auf dem Einheitskreis mit positiven y -Wert befinden sich oberhalb der x -Achse. Somit sind die Sinuswerte im I. und II. Quadranten ( ) positiv. Im III. und IV. Quadranten ( ), also unterhalb der x -Achse, sind die Sinuswerte negativ.

$cos(\alpha)\widehat{=}$ **Abschnitt auf der** x **-Achse:**

Alle Punkte auf dem Einheitskreis mit positiven x -Werten befinden sich auf der rechten Seite der y -Achse. Somit sind die Kosinuswerte im I. und IV. Quadranten ( ) positiv. Alle x -Werte links von der y -Achse sind hingegen negativ, weshalb im II. und III. Quadranten ( ) die Kosinuswerte negativ sind.

$sin(\alpha) = y$ -Wert: Alle Punkte auf dem Einheitskreis mit positiven y -Wert befinden sich oberhalb der x -Achse. Somit sind der Sinuswert im I. und II. Quadranten positiv ist, hingegen ist der Sinuswert im III. und IV. Quadranten, also unterhalb der x -Achse, negativ.

$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$:

Im I. Quadranten sind die Tangenswerte positiv, da Sinus und Kosinus beide positiv sind: $tan(\alpha) = \frac{(+)}{(+)} = (+)$. Im II. Quadranten ist: $tan(\alpha) = \frac{(+)}{(-)} = (-)$ im III. Quadranten: $tan(\alpha) = \frac{(-)}{(-)} = (+)$ und im IV. Quadranten: $tan(\alpha) = \frac{(-)}{(+)} = (-)$.

$cot(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$:

Da die Kotangensfunktion die Kehrwertfunktion der Tangensfunktion ist, sind die Vorzeichen in den jeweiligen Quadranten die gleichen wie die der Tangensfunktion.

Eigenschaften und Grenzwerte der trigonometrischen Funktionen

In der folgenden Tabelle sind die grundlegenden Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen aufgeführt:

	sinx	cosx	tanx	cotx
Definitionsbereich D f	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}, x \mid x = \pi/2 + k\pi$	$\mathbb{R}, x \mid x = k\pi$
Wertebereich W f	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Nullstellen x_0	$k\pi$	$\pi/2 + k\pi$	$k\pi$	$\pi/2 + k\pi$
Pole x_p	-	-	$\pi/2 + k\pi$	$k\pi$
Extrema x_E	$\pi/2 + k\pi$	$k\pi$	-	-
Wendepunkte x_W	$k\pi$	$\pi/2 + k\pi$	$k\pi$	$\pi/2 + k\pi$
Asymptoten	-	-	$y = \pi/2 + k\pi$	$y = k\pi$

1.4.4.2 Beziehungen trigonometrischer Funktionen

Zwischen den trigonometrischen Funktionen bestehen enge rechnerische Beziehung. Eine Funktion würde schon ausreichen, um jedwedes trigonometrische Problem zu berechnen. Zur Vereinfachung können jedoch mehrere verschiedene Kreisfunktionen verwendet werden. Falls es die Rechnung erfordert, können diese auch in einander überführt werden. Im Folgenden stellen wir dir die wichtigsten Beziehungen kurz vor.

Komplementbeziehungen

Wir können mit den **Komplementbeziehungen** in einem rechtwinkligen Dreieck den Sinus, Kosinus, Tangens usw. eines unbekannten Winkels β mit Hilfe eines bekannten Winkels α bestimmen. Die Komplementbeziehungen (*lat.* komplementum = Abschluss) bezeichnen die Beziehungen zweier Winkel, die addiert ergeben:

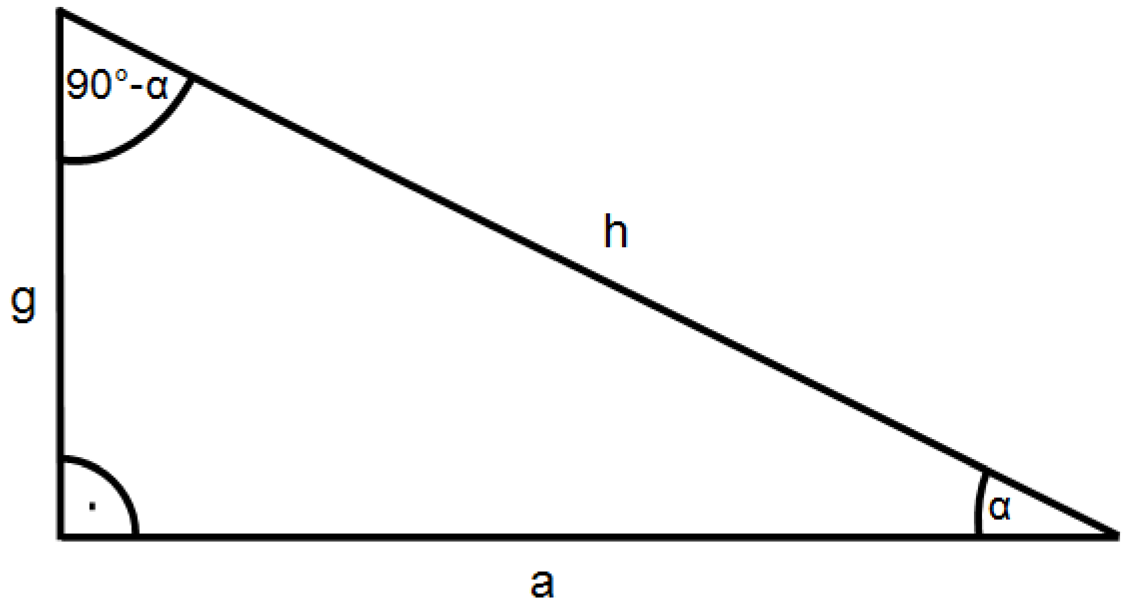
Ziehen wir in einem rechtwinkligen Dreieck den rechten Winkel von der Innenwinkelsumme eines Dreiecks von ab, so sehen wir, dass die beiden anderen Winkel im rechtwinkligen Dreieck in ihrer Summe ergeben:

Daraus ergibt sich:

Somit können wir β in den folgenden Betrachtungen durch ersetzen, wie Du auch in der folgenden Abbildung erkennen kannst.

Die Komplementbeziehungen können wir uns bildlich vor Augen führen, indem wir die Innenwinkel und

Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks betrachten.



rechtwinkliges Dreieck

Somit gilt für die Innenwinkelsumme:

Den Sinus anwenden ergibt:

$$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse} = \frac{g}{h}$$

Genauso gilt für den Kosinus:

$$cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse} = \frac{a}{h}$$

Für Tangens und Cotangens folgt:

$$\longrightarrow tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} \text{ und } cot(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

Der Defintionsbereich von Tangens- und Kotangensfunktion ist eingeschränkt, wie du in der Tabelle am Ende des vorigen Kurstextes sehen kannst. Im Gradmaß sind alle ganzzahligen Vielfachen eines rechten Winkels nicht definiert.

Supplementbeziehungen

Supplementbeziehungen (lat. supplementum = Ergänzung) bezeichnen die Beziehungen zweier Winkel, die addiert ergeben:

Wir können analog für die Komplementbeziehungen, folgende Gleichungen aufstellen:

Daraus folgt:

Wir können die Supplementbeziehungen sehr leicht am Verlauf der Sinus- und Kosinuskurven in einem Koordinatensystem herleiten oder am Einheitskreis nachvollziehen:

HIER EIN BILD REIN, WO DER INHALT DER FOLGENDEN GLEICHUNGEN GRAFISCH DARGESTELLT WIRD!!! (Am besten ein 2geteiltes, wo einmal bestimmte Werte für sin und cos und einmal für tan und cot jeweils in einem Koordinatensystem eingezeichnet sind sowie als einfache Variante sin und cos am Einheitskreis dargestellt sind.)

Quadrantenbeziehungen

Komplement- und Supplementbeziehungen gehören zu den sogenannten **Quadrantenbeziehungen**, mit denen wir die Berechnung jedes beliebigen Winkelfunktionswertes auf die Berechnung eines Winkelfunktionswertes zwischen und zurückführen können. Du kannst am Einheitskreis wie für die Bestimmung der Supplementbeziehungen in gleicher Weise α von , und abziehen oder zu diesen Winkeln addieren.

BEISPIELBILD EINHEITSKREIS: Da dann ein beliebiges alpha zu 90, 180, 270 und 360 Grad addieren und dann die entsprechenden Sinus und Kosinuswerte (ginge auch für tan und cot, reicht aber der Einfachheit halber mit sin und cos farblich hervorheben.

In den folgenden zwei Tabellen haben wir die sogenannten Reduktionsformeln der Quadrantenbeziehungen aufgeführt:

$sin\alpha$	$+cos\alpha$	$+sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$
$cos\alpha$	$+sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$+cos\alpha$
$tan\alpha$	$+cot\alpha$	$-tan\alpha$	$+cot\alpha$	$-tan\alpha$
$cot\alpha$	$+tan\alpha$	$-cot\alpha$	$+tan\alpha$	$-cot\alpha$

$sin\alpha$	$+cos\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$+sin\alpha$
$cos\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$+sin\alpha$	$+cos\alpha$
$tan\alpha$	$-cot\alpha$	$+tan\alpha$	$-cot\alpha$	$+tan\alpha$
$cot\alpha$	$-tan\alpha$	$+cot\alpha$	$-tan\alpha$	$+cot\alpha$

Grundbeziehungen

In Formelsammlungen findest du viele Rechenregeln zum Umrechnen der trigonometrischen Funktionen. Einige Wichtige stellen wir dir kurz vor und benutzen hier die Schreibweise im Bogenmaß, da dieses in den meisten Berechnungen Verwendung findet.

- Eine wichtige Umrechnungsformel ist der **trigonometrische Pythagoras**.

MERKE

Trigonometrischer Pythagoras: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$

Teilen wir die Formel des trigonometrischen Pythagoras durch $sin^2(x)$ oder $cos^2(x)$, so erhalten wir:

$$\frac{sin^2(x)}{sin^2(x)} + \frac{cos^2(x)}{sin^2(x)} = \frac{1}{sin^2(x)} \text{ bzw. } \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$1 + cot^2(x) = \frac{1}{sin^2(x)} \text{ bzw. } 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

- Da Tangens und Cotangens Umkehrfunktionen voneinander sind, ist ihr Produkt gleich 1.

MERKE

$$cot(x) = \frac{1}{tan(x)} \implies tan(x) \cdot cot(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

- Möchten wir die Summe aus Sinus und Kosinus quadrieren, so wenden wir eine binomische Formel an:

$$[sin(x) \pm cos(x)]^2 = sin^2(x) + 2\, sin(x)\, cos(x) + cos^2(x)$$

Aus dem trigonometrischen Pythagoras folgt:

$$sin^2(x) + cos^2(x) + 2\, sin(x)\, cos(x) = 1 + 2\, sin(x)\, cos(x)$$

- Wir setzen in dem Additionstheorem $sin(x+y) = sin(x)\, cos(y) + sin(y)\, cos(x)$ die beiden Winkel x und y gleich:

$$x = y \longrightarrow x + y = 2x$$

Wir sehen, dass:

$$sin(2x) = sin(x)\, cos(x) + sin(x)\, cos(x) = 2 \cdot sin(x)\, cos(x)$$

Nun ersetzen wir in der Formel den Term $2\, sin(x)\, cos(x)$. Für Addition bzw. Subtraktion resultiert die folgende Formel:

MERKE

$$[sin(x) \pm cos(x)]^2 = 1 \pm sin(2\,x), \quad x \in \mathbb{R}$$

1.4.4.3 Rechenoperationen trigonometrischer Funktionen

Es existieren noch weitere Rechenregeln für den Umgang mit trigonometrischen Funktionen. Folgende sind besonders wichtig:

- Additionstheoreme für Sinus und Kosinus, bspw. $sin(x+y)$
- Regeln für Summen und Differenzen von trigonometrischen Funktionen, bspw.

$sin(x) + cos(y)$

- Regeln für Produkte und Quotienten von trigonometrischen Funktionen, bspw. $sin(x) \cdot cos(y)$
- Regeln für Potenzen von trigonometrischen Funktionen, bspw. $sin^2(x)$

Im Folgenden stellen wir nur die Additionstheoreme und die Summen und Differenzen von trigonometrischen Funktionen vor. Im Ingenieursstudium müssen bei Bedarf jedoch auch Regeln für die Produkte, Quotienten und Potenzen der trigonometrischen Funktionen angewandt werden. Diese findest du in umfangreichen Formelsammlungen in Formelbüchern oder im Internet.

1.4.4.3.1 Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen

Additionstheoreme

$$sin(x \pm y) = sinx\, cosy \pm cosx\, siny$$

$$cos(x \pm y) = cosx\, cosy \mp sinx\, siny$$

$$tan(x \pm y) = \frac{tanx \pm tany}{1 \mp tanx\, tany} = \frac{sin(x \pm y)}{cos(x \pm y)}$$

$$cot(x \pm y) = \frac{cotx\, coty \mp 1}{cotx \pm coty} = \frac{cos(x \pm y)}{sin(x \pm y)}$$

1.4.4.3.2 Summen und Differenzen trigonometrischer Funktionen

Aus den im vorherigen Abschnitt aufgeführten Additionstheoremen lassen sich Funktionen ableiten, die es ermöglichen die Summe bzw. Differenzen aus zwei trigonometrischen Funktionen als Produkt darzustellen:

$$sin\alpha \pm sin\beta = 2\, sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2\, cos\frac{\alpha + \beta}{2} cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2\, sin\frac{\alpha + \beta}{2} sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

1.4.5 Hyperbelfunktionen

Hyperbelfunktionen beziehen sich im Gegensatz zu trigonometrischen Funktionen, die am

Einheitskreis mit der Formel $x^2 + y^2 = 1$ definiert sind, auf analoge Strecken an der gleichseitigen Hyperbel mit der Formel $x^2 - y^2 = 1$.

Es existieren sechs Hyperbelfunktionen

- Sinus **Hyperbolicus** (abgekürzt sin**h**),
- Kosinus Hyperbolicus (cosh),
- Tangens Hyperbolicus (tanh),
- Kotangens Hyperbolicus (coth),
- Sekans Hyperbolicus (sech),
- und Kosekans Hyperbolicus (csch).

Die ersten drei Funktionen, also Sinus Hyperbolicus, Kosinus Hyperbolicus und Tangens Hyperbolicus, sind für alle komplexen Zahlen definiert und sind in jedem Punkt komplex differenzierbar. Die restlichen drei Hyperbelfunktionen haben hingegen Pole auf der imaginären Achse.

Die Definition von $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ und $\coth$ verfolgt durch

$$\sinh\ x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh\ x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

.

.

Dabei sind $\sinh x$ und $\coth x$ ungerade Funktionen (z.B. $\sinh\ (-x) = -sinh\ x$) und $\cosh x$ eine gerade Funktion ($\cosh\ (-x) = \cosh\ x$)

MERKE

Jede Gleichung mit einer oder mehrerer trigonometrischer Funktionen lässt sich in eine Gleichung mit Hyperbelfunktionen übertragen, indem man $cos\ x \to cosh\ x$ und $sin\ x \to sinh\ x$ ersetzt.

Additionsterme der Hyperbelfunktionen

.

Hieraus folgen:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \,,$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x) \,,$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \,,$$

und $\sinh^2 x = -\frac{1}{2}(1 - \cosh 2x) \,.$

Area-Funktionen (Umkehrfunktion)

Auch für die Hyperbelfunktionen existieren inverse Funktionen (Umkehrfunktionen), diese werden als **Area-Funktionen** bezeichnet.

Man unterscheidet $arcosh\ x, arsinh\ x, artanh\ x$ und $arcoth\ x \,.$

Wenn man bedenkt, dass Hyperbelfunktionen durch die e-Funktion definiert sind, ist es nur logisch, dass sich Area-Funktionen durch ln-Funktionen ausdrücken lassen.

BEISPIEL

$arcosh\ x = ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ für $x \geq 1 \,,$

$arsinh\ x = ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ für $x \in \mathbb{R}$

$artanh\ x = \frac{1}{2} ln \frac{1 + x}{1 - x}$ für $|x| < 1$

$arcoth\ x = \frac{1}{2} ln \frac{x + 1}{x - 1}$ für $|x| > 1$

Analysis und Lineare Algebra

Differentialrechnung

Autor:
Deleted User

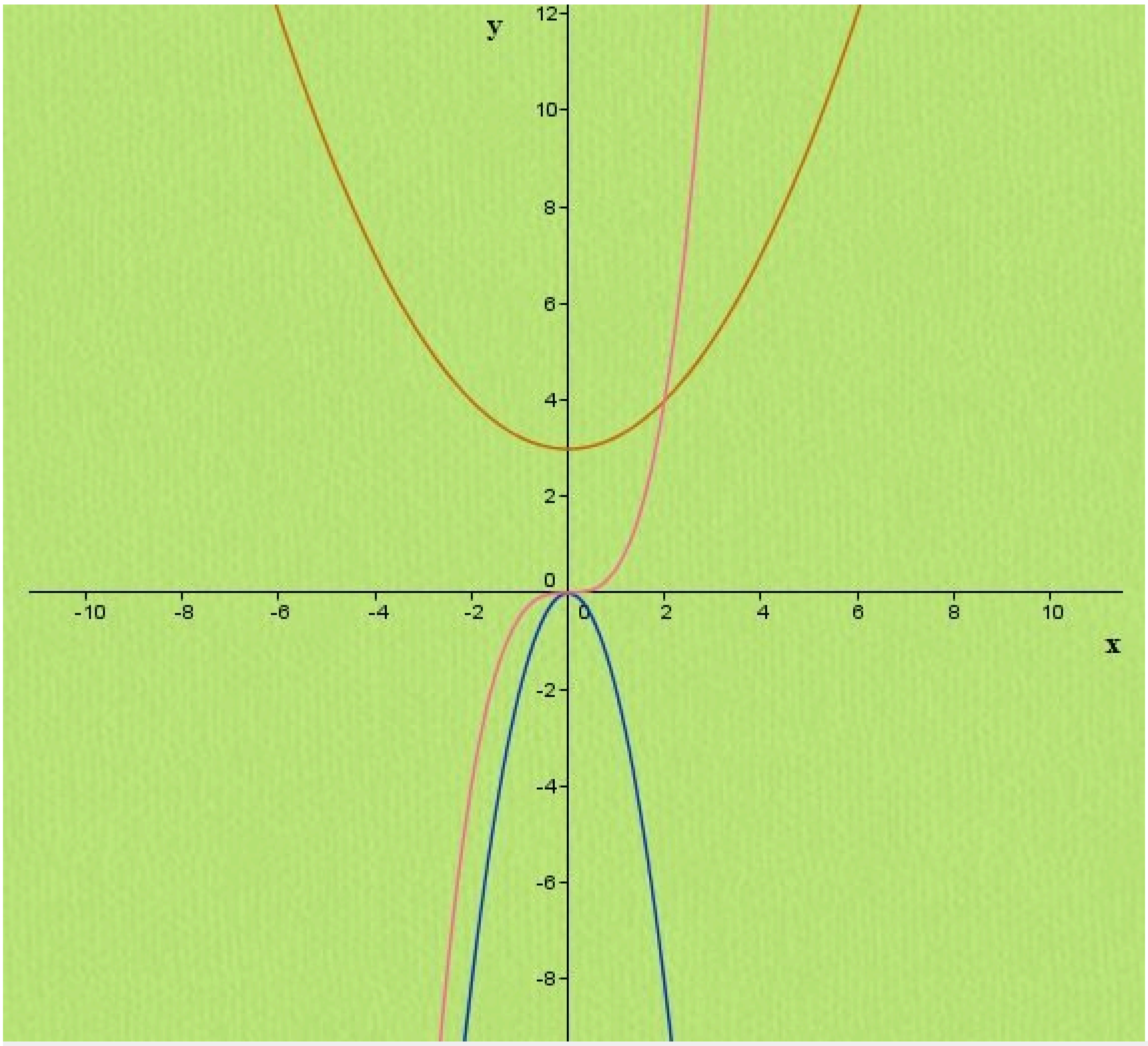
ingenieurkurse.de
DIGITALE PRÜFUNGSVORBEREITUNG

INHALTSVERZEICHNIS

1 Differentialrechnung

1.1 Ableitungen

Ableitungen sind ein wichtiges Instrument zur Beschreibung von zeitlich veränderlichen Größen wie Ort oder Geschwindigkeit. Speziell in zwei- oder mehrdimensionalen Koordinatensystemen kann mittels Ableitungen bestimmt werden ob ein Graph steigt oder fällt. Außerdem können Sattelpunkte, Wendepunkte sowie Hoch- und Tiefpunkte bestimmt werden.



Funktionen mit Steigung, Sattelpunkt, Hochpunkt und Tiefpunkt

In der obigen Abbildung sind drei Graphen eingezeichnet. Der Graph fällt zuerst, erreicht bei (0;3) seinen Tiefpunkt und steigt anschließend wieder. Der blaue Graphen ist durch ein negatives Vorzeichen gespiegelt und steigt somit zuerst, um dann nach Durchschreiten des Hochpunktes (0;0) zu fallen. Der Graph steigt hingegen durchweg mit der Ausnahme eines Sattelpunktes im Punkt (0;0).

In diesem Kapitel wird auf die einzelnen Bereiche der Differentialrechnung eingegangen.

1.1.1 Ableitungen erster Ordnung

Ableitungen, bzw. **Differentialquotienten,** werden aus der **Stammfunktion** erzeugt. Die Ableitung erster Ordnung gibt die Änderung der Stammfunktion an, d.h. sie gibt Auskunft über die Steigung der Funktionskurve.

METHODE

Liegt eine Funktion f auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und ist $x_0 \in I$, so ist f in x_0

differenzierbar, wenn der **Grenzwert**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)]$$ existiert und

endlich ist. Diesen Grenzwert bezeichnet man mit oder .

Ein allgemeines Beispiel für eine Funktion mit einer Ableitung erster Ordnung ist

$$f(x) = a \cdot x + b \to f \; .$$

Die Funktion hat in jedem Punkt die gleiche Steigung. Also egal welchen x -Wert man betrachtet, die Funktion hat an jeder Stelle die Steigung a .

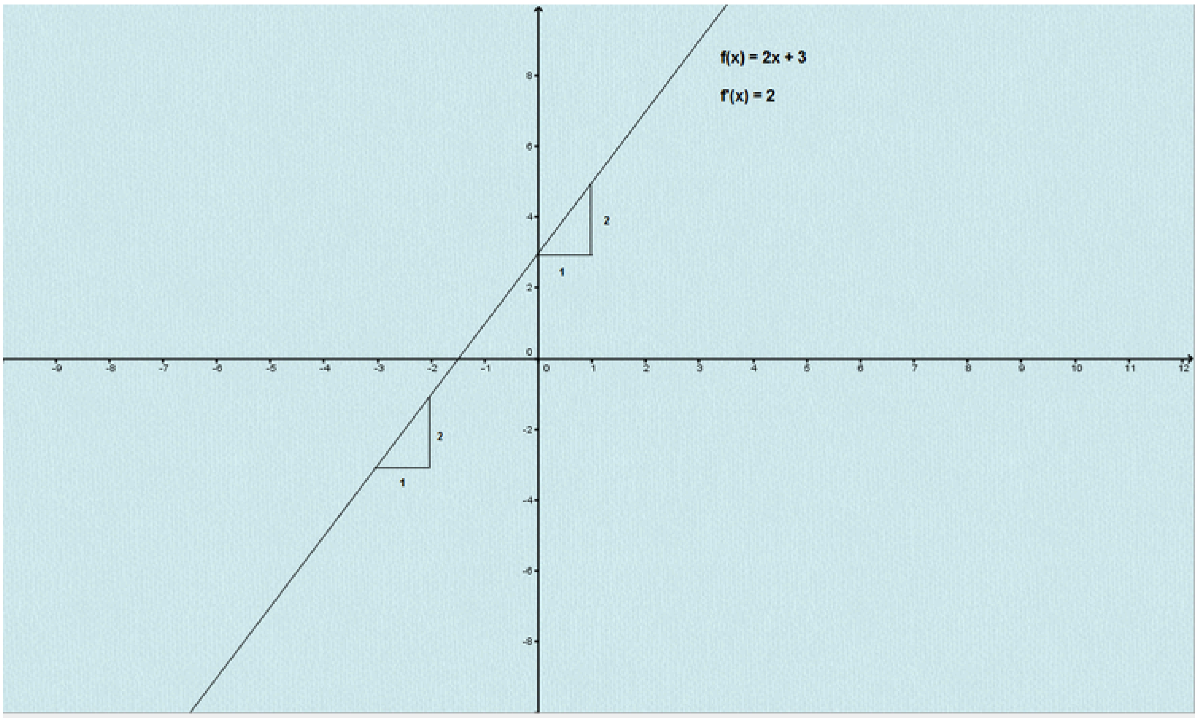
Beweis

f

f

f

f



Funktion mit konstanter Steigung

Die Funktion $f(x) = ax^2 + b \to f$ hingegen hat die Steigung $2ax$. Das bedeutet, dass die Funktion für verschiedene x-Werte auch eine unterschiedliche Steigung aufweist.

Beweis

f

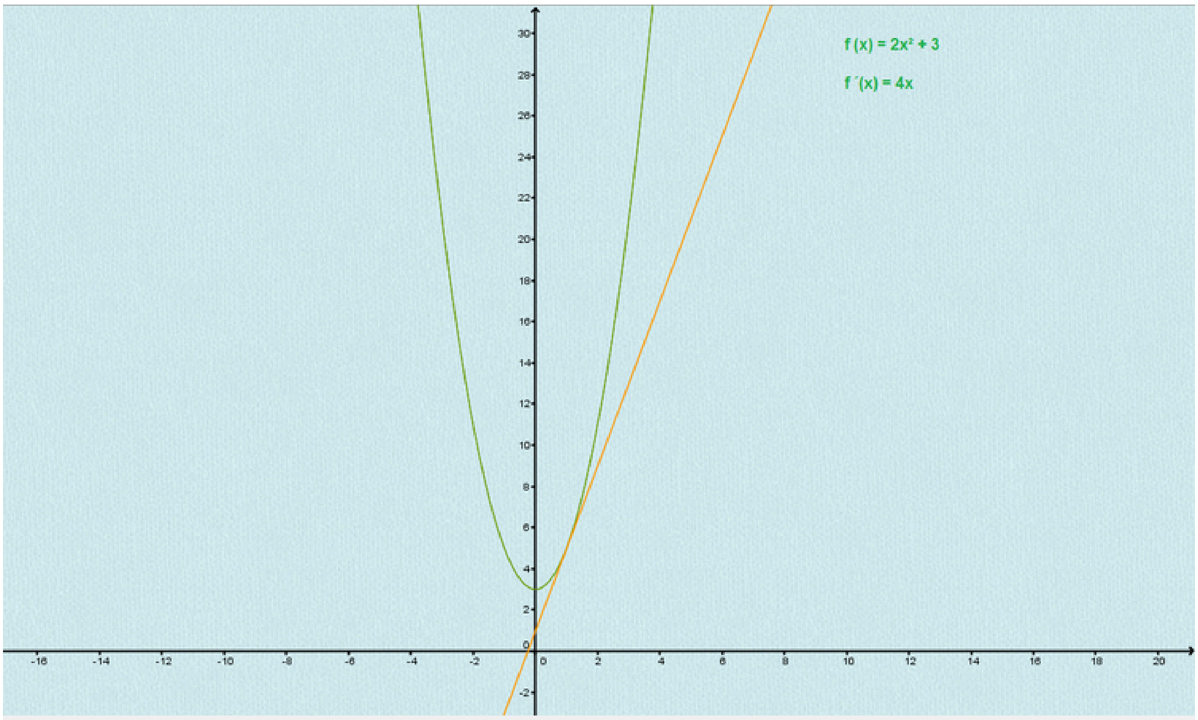
f

f

f

f

f



Funktion mit unterschiedlicher Steigung

In der obigen Grafik ist deutlich zu sehen, dass die Steigung in den einzelnen Punkten unterschiedlich ist. Zur Verdeutlichung wurde eine Tangente eingefügt, welche die gleiche Steigung wie der Punkt $x = 1$ besitzt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die anderen Punkte eine andere Steigung aufweisen.

Die in der obigen Grafik eingezeichnete Tangente liegt im Punkt $x = 1$ und weist dieselbe Steigung auf wie die Funktion in diesem Punkt. Für jeden Punkt auf der Funktion kann eine solche Tangente approximiert werden.

MERKE

Beim Ableiten wird die Funktion linearisiert, d.h. durch eine einfachere Funktion, nämlich eine Gerade (lineare Funktion), ersetzt. Bei dieser Gerade handelt es sich um die Tangente im Ableitungspunkt.

Allgemeine Bestimmung der Tangente

METHODE

Bei x_0 handelt es sich um den betrachteten Punkt, für welchen die Tangente bestimmt werden soll. Diese weist dieselbe Steigung auf, wie die Funktion in diesem Punkt x_0 .

Im obigen Fall für $x_0 = 1$:

$g(x) = 5 + 4(x - 1)$

$g(x) = 4x + 1$ Tangente im Punkt $x = 1$ mit derselben Steigung wie die Funktion in diesem Punkt

MERKE

Wiederholung: Die Ableitung 1. Ordnung für Funktionen mit Exponenten sieht wie folgt aus

$$f(x) = x^n \rightarrow f \; .$$

BEISPIEL

Differenziere folgende Stammfunktion $f(x) = 5 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 9$

Hierbei wird der bisherige Wert des Exponenten mit dem Faktor vor der Variablen x multipliziert und der Exponent um den Wert Eins reduziert. Terme ohne Variable fallen, wie bereits erwähnt, weg.

MERKE

Setzt man die 1. Ableitung gleich Null und löst diese nach x auf, so erhält man die Extrempunkte bzw. Wendepunkte der Funktion. Um diese jedoch genau bestimmen zu können, benötigt man die nächst höhere Ableitung.

1.1.2 Ableitungen höherer Ordnung

Existiert eine differenzierbare Funktion $f(x)$ und besitzt diese zudem eine differenzierbare Ableitung f , so ist f zweimal differenzierbar.

Die **2. Ableitung** schreibt sich f

Ist die Funktion $f^{(n)}$ mehrfach differenzierbar, so spricht man von der n **-ten Ableitung** von f .

BEISPIEL

Man berechne die 2. Ableitung von $f(x) = x^3 + 3x^2$

Man erhält in 2 Schritten:

I $\rightarrow f$

II $\rightarrow f$

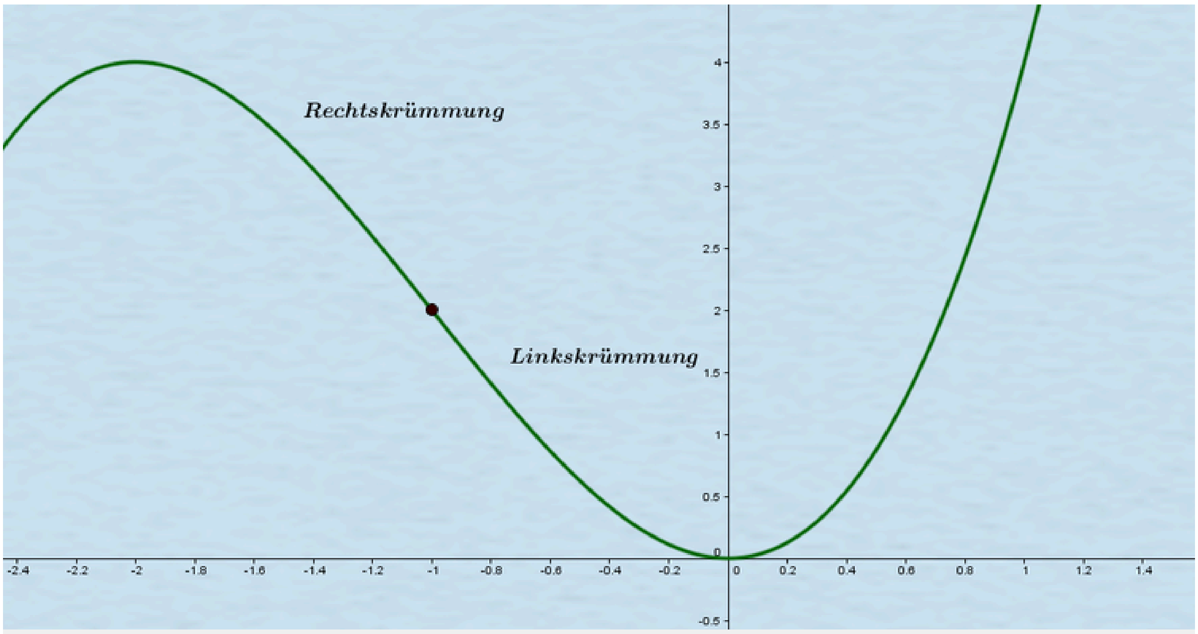
Die Vorgehensweise des Differenzierens ist identisch mit der Ableitung erster Ordnung und kann für eine Funktion n -ten Grades n-mal durchgeführt werden.

Krümmungsverhalten

Die **2. Ableitung** bestimmt das **Krümmungsverhalten der Stammfunktion** $f(x)$ an der Stelle x . Ist die Krümmung positiv, so handelt es sich um eine "Links-Kurve" und ist sie negativ um eine "Rechts-Kurve".

MERKE

Eine Funktion f heißt linksgekrümmt wenn f %200' border='0'/> und rechtsgekrümmt wenn f .



Krümmungsverhalten

In der obigen Grafik ist zu erkennen, dass für alle Werte $x < -1$ eine Rechtskrümmung vorliegt, also und für alle Werte $x > -1$ eine Linkskrümmung vorliegt, also $f“(x) > 0$. Bei $x = -1$ geht die Funktion von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung über. Diesem Punkt nennt man Wendepunkt.

1.2 Wendepunkte

Ein Wendepunkt ist der Punkt (x, y) an dem der Funktionsgraph sein Krümmungsverhalten ändert. Der Graph wechselt hier entweder von einer Linkskurve in eine Rechtskurve oder umgekehrt. Dieser Wechsel wird auch Bogenwechsel genannt.

Einen Wendepunkt bestimmt man, indem man die 2. Ableitung gleich Null setzt und nach x auflöst. Den sich ergebenden x -Wert setzt man in die 3. Ableitung ein:

Für einen Wendepunkt an der Stelle x gilt stets:

- Ist dann wechselt der Graph seine Krümmung von rechts nach links
- Ist dann wechselt der Graph seine Krümmung von links nach rechts.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x$.

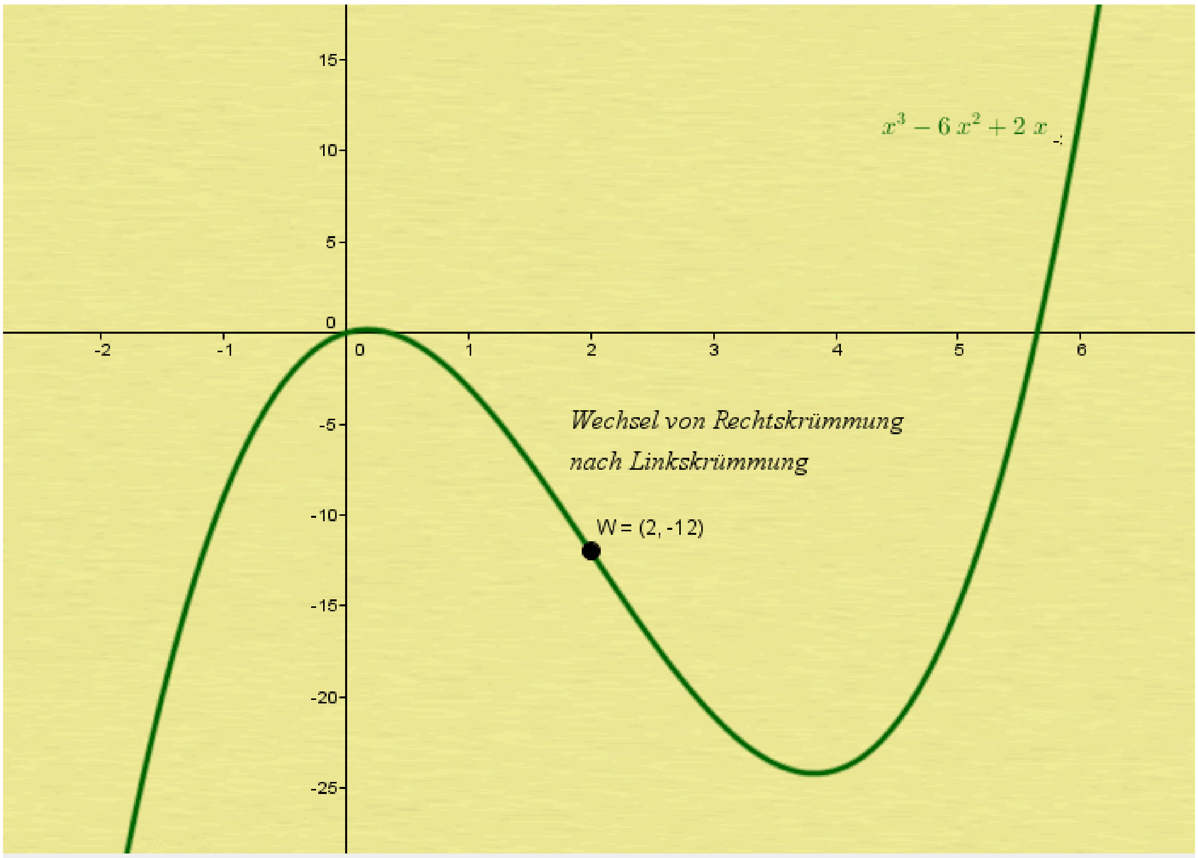
-
-

$\rightarrow \; x = 2$

- Wendepunkt

Da f wechselt der Graph seine Krümmung von **rechts nach links.**

Der Wendepunkt ist bei $f(2) = -12$.



Wendepunkt

Wendetangente

Eine Wendetangente ist eine Tangente, welche durch den Wendepunkt geht. Das bedeutet, dass eine Wendetangente die gleiche Steigung aufweist, wie der Funktionsgraph im Wendepunkt. Die Wendetangente $g(x)$ wird folgendermaßen berechnet:

mit:

$x_0 = x$ -Wert des Wendepunktes

erste Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 $\rightarrow$ Steigung

$f(x_0) =$ Funktionswert im Punkt x_0

BEISPIEL

Gegeben sei die oben angebene Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x$ mit dem Wendepunkt $x_0 = 2$.

$x_0 = 2$

f

Einsetzen von $x_0 = 2$:

f

Einsetzen des Wendepunktes in die Ausgangsfunktion:

$$f(x_0 = 2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2$$

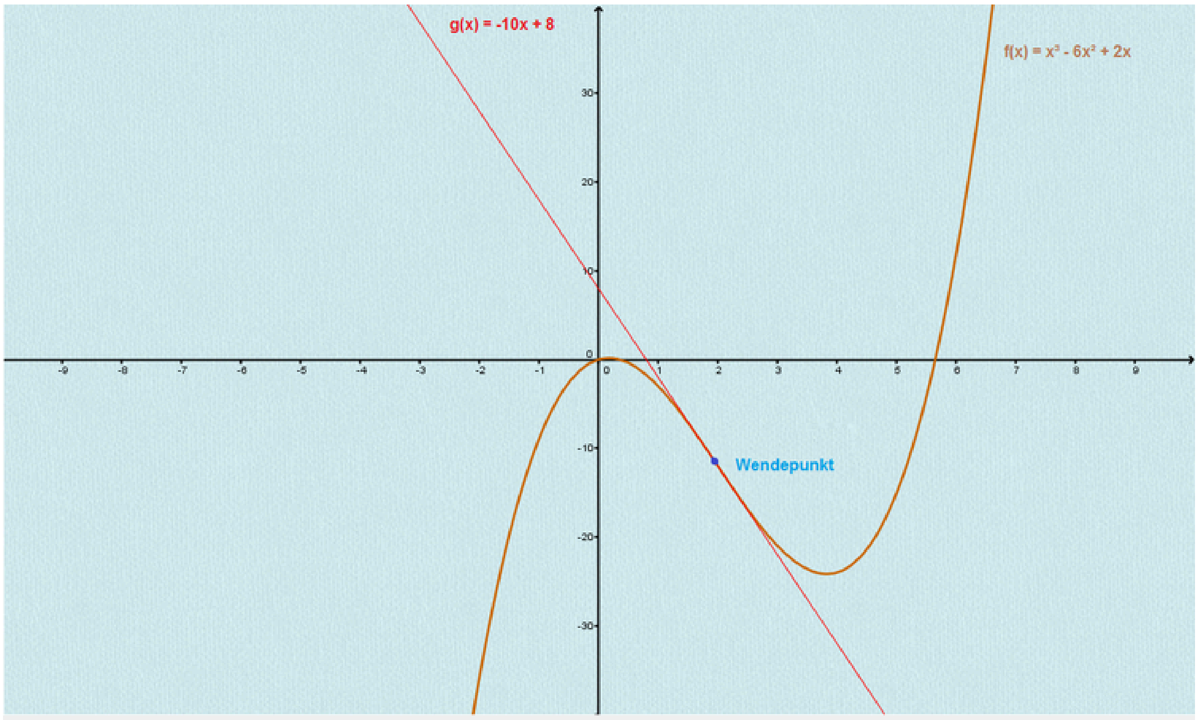
$$f(x_0) = -12$$

Einsetzen in die Tangentenfunktion:

$$g(x) = -10(x - 2) - 12$$

METHODE

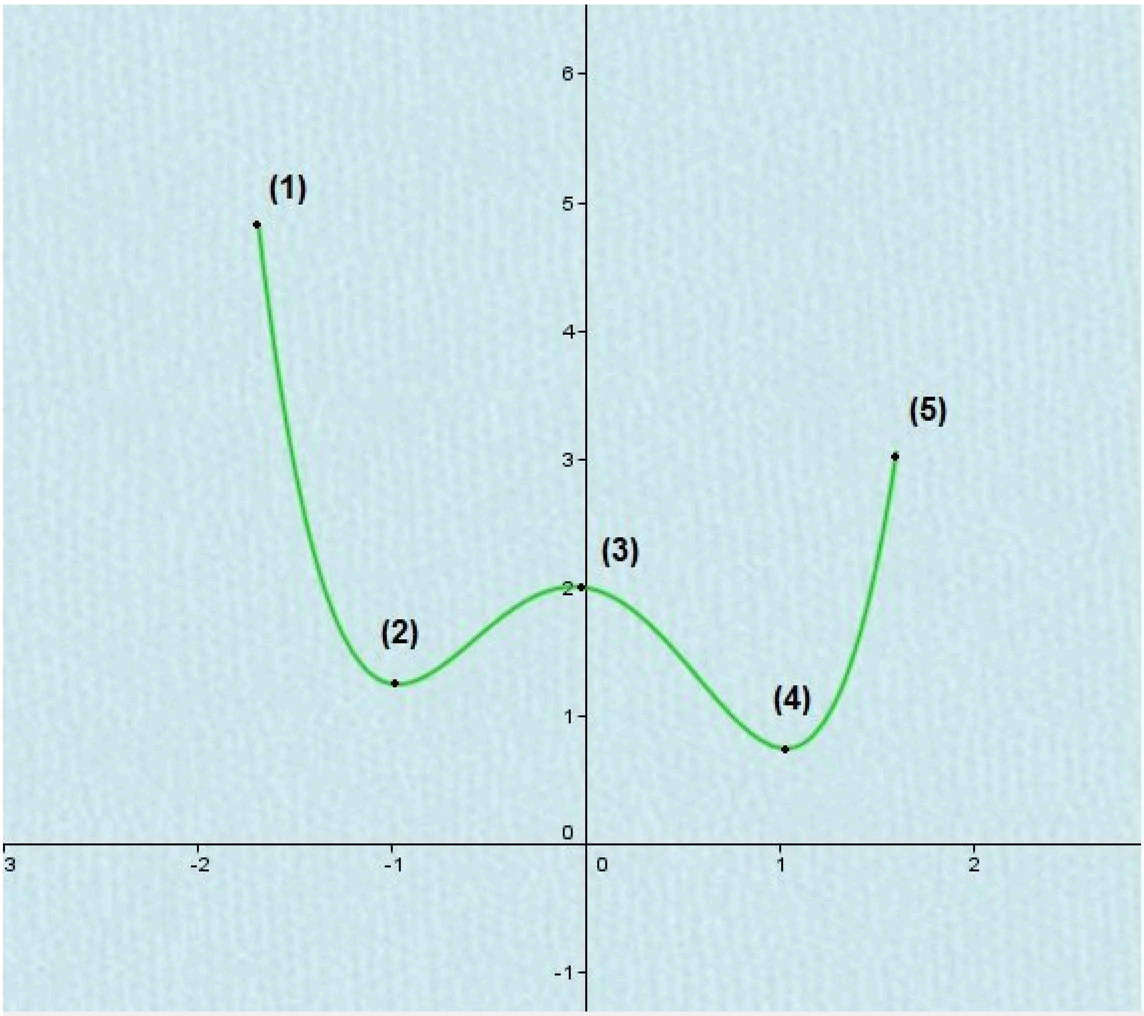
$$g(x) = -10x + 8$$



Wendetangente

In der obigen Grafik ist deutlich zu erkennen, dass die Wendetangente durch den Wendepunkt geht. Diese hat also genau die Steigung wie der Funktionsgraph im Punkt $(2, -12)$.

1.3 Extremwerte



Extremwerte

- $f(x)$ hat bei **(1)** ein Maximum. Es handelt sich hierbei um ein **globales (absolutes) Maximum**, denn das Maximum stellt den höchsten Punkt der Funktion dar.
- $f(x)$ hat bei **(2)** ein **lokales (relatives) Minimum,** denn es handelt sich um den tiefsten Punkt in diesem Bereich, allerdings nicht um den tiefsten Punkt der Funktion.
- $f(x)$ hat bei **(3)** ein **lokales (relatives) Maximum**.
- $f(x)$ hat bei **(4)** ein Minimum. Das Minimum bei (4) stellt den tiefsten Punkt der kompletten Funktion dar. Damit handelt es sich hier um ein **globales (absolutes) Minimum**.
- $f(x)$ hat bei **(5)** ein **lokales (relatives) Maximum**.

MERKE

Ein **Maximum** ist immer dann vorhanden, wenn der Graph der Funktion erst steigt (monoton wachsend) und anschließend wieder abfällt (monoton fallend). Ferner entsteht ein **Minimum**, wenn der Graph der Funktion erst abfällt und dann wieder steigt. Die Steigung an solchen Hoch- und Tiefpunkten ist immer gleich Null: .

Extremwerte identifizieren

Ist f eine auf dem offenen Intervall I differenzierbare Funktion, so gilt:

: Lokale Extremstelle von f

Die Betrachtung der 1. Ableitung reicht nicht aus, um zu sagen, ob es sich um Extremwerte handelt. Wechselt die 1. Ableitung ihre Vorzeichen an der Stelle x_0 , dann handelt es sich um Extremstellen. Das bedeutet, dass vor einem Minimum der Graph der Funktion monoton fällt (-) und nach dem Minimum monoton wächst (+). Vor einem Maximum hingegen wächst der Graph der Funktion monoton (+) und nach dem Maximum ist dieser monoton fallend (-).

1. Das einfachste Verfahren um herauszufinden ob es sich um eine Extremstelle an dem Punkt x_0 handelt ist es also, einige Funktionswerte vor und nach dem Punkt x_0 auszurechnen und miteinander zu vergleichen.

2. Eine weitere Möglichkeit ist die Betrachtung der 2. Ableitung. Ist , dann liegt ein Minimum vor (weil die Funktion nach einem Minimum monoton wächst). Ist , dann liegt Maximum vor (weil die Funktion nach einem Maximum monoton fällt). Ist f´´(x) = 0, kann es sich um Extremwerte oder Sattelpunkte handeln. Hier muss solange eine Ableitung durchgeführt werden bis . Ist bei der n -Ableitung n gerade, so liegt ein Extrempunkt vor, ist n ungerade so liegt ein Horizontalwendepunkt vor.

METHODE

Extremstellen berechnen

Extremwerte sind nur vorhanden, wenn

(1) ist (kritische Punkte) oder

(2) $f(x)$ nicht differenzierbar ist (z.B. Randpunkte).

Vorgehensweise

(1) kritische Punkte:

(a) Untersuchung der kritischen Punkte ohne höhere Ableitung:

(a1) Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen: setzen (kritische Punkte)

(a2) Werte > und < x_0 in einsetzen:

- wechselt in dem kritischen Punkt x_0 das Vorzeichen, so liegt ein Extremum vor:

- wechselt von + nach -, so liegt bei x_0 ein lokales (relatives) Maximum vor
- wechselt von - nach +, so liegt bei x_0 ein lokales (relatives) Minimum vor

(b) Untersuchung der kritischen Punkte mit höherer Ableitung

(b1) Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen: setzen (kritische Punkte)

(b2) Die gefundenen kritischen Punkte x_0 in die 2. Ableitung einsetzen:

- : es liegt ein lokales (relatives) **Minimum** vor.
- : es liegt ein lokales (relatives) **Maximum** vor.
- : Es könnte ein Extrempunkt vorliegen, allerdings ebenfalls ein Sattelpunkt.

Ergibt die 2. Ableitung gleich Null, dann werden solange weitere Ableitungen f^n gebildet und die kritischen Punkte in diese Ableitungen einsetzen, bis der Funktionswert einer höheren Ableitung ungleich Null wird. Entscheidend ist hierbei, ob es sich dann um eine **gerade** oder **ungerade** Ableitung handelt:

- n **gerade**: Extremwert bei $f^n(x_0) > 0$ (Minimum) und $f^n(x_0) < 0$ (Maximum)
- n **ungerade:** Horizontalwendepunkt bei x_0 .

(2) Nicht differenzierbare Punkte, z.B. Randpunkte müssen extra betrachtet werden und z.B. der Größe nach verglichen werden.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $f(x) = x^3 - 3x - 12$. Untersuche die Funktion im Intervall $[-3, 3]$ auf Extremwerte.

Extremwerte möglich bei

(1)

$$x_1 = 1, \; x_2 = -1$$

(2) Randpunkte: $x_3 = -3, x_4 = 3$ $\rightarrow$ Intervall betrachten

Prüfen

(a) ohne höhere Ableitung:

$x_1 = 1:$

$\rightarrow$ Vorzeichenwechsel von - nach +: **Minimum**

$x_2 = -1:$

$\rightarrow$ Vorzeichenwechsel von + nach -: **Maximum**

(b) mit höherer Ableitung

$x_1 = 1:$

Minimum

$x_2 = -1:$

Maximum

(2) Globales Maximum und Minimum

MERKE

Satz von Weierstraß: Jede auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ **stetige** Funktion hat dort ein globales Maximum und ein globales Minimum.

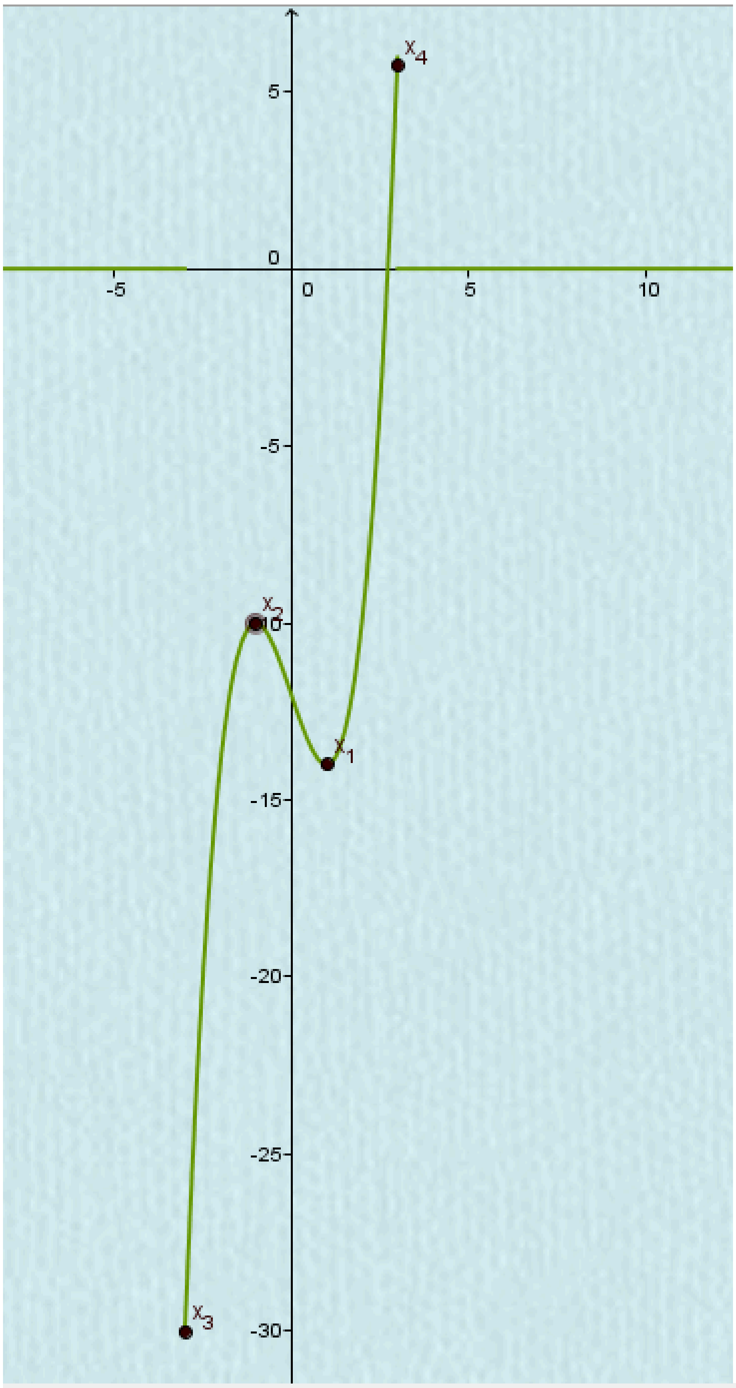
Da $f(x)$ auf dem kompakten Intervall $[-3, 3]$ stetig ist, wird nach Weierstraß angenommen, dass ein globales (absolutes) Maximum und ein globales (absolutes) Minimum existiert.

Es werden zum einen die bereits ermittelten Extremwerte x_1 und x_2 herangezogen und zudem noch die möglichen Extremwerte an den Randpunkten x_3 und x_4. Durch einsetzen dieser in die Funktion und Vergleich der Funktionswerte sieht man dann, ob die Randpunkte globale Maxima und Minima darstellen:

$$f(-1) = -10, \quad f(1) = -14, \quad f(-3) = -30, \quad f(3) = 6$$

Die Randpunkte stellen globale Extrempunkte dar. Bei $x = -3$ liegt ein **globales Minimum** vor (kleinster Funktionswert), bei $x = 3$ liegt ein **globales Maximum** vor (größter Funktionswert).

Die folgende Grafik zeigt die Funktion $f(x) = x^3 - 3x - 12$ im Intervall $[-3, 3]$ und ihre Extremstellen:



Extremstellen

1.4 Ableitungsregeln

Elementare Funktionen sind an allen Stellen an denen sie definiert sind auch differenzierbar. Hierbei geht man selten auf die Definitionen zurück. Stattdessen benutzt man **Ableitungsregeln**, um auch aufwendige Funktionen differenzieren zu können.

Im Folgenden eine Übersicht der **Ableitungsregeln**:

Summenregel

- $(u + v)$

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 5x^2 + 3x$

$(u + v)$

u

- (ru) [konstanter Faktor $r \in \mathbb{R}$]

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 10x^2$

(ru)

ru

Produktregel

$(u \cdot v)$

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $5x^3 \cdot 4x^2$

$(u \cdot v)$

u

Quotientenregel

$(\frac{u}{v})$

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $\frac{x^3}{5x^4}$

$(\frac{u}{v})$

$$= \frac{15x^6 - 20x^6}{25x^8} = \frac{-5x^6}{25x^8} = -\frac{1}{5x^2}$$

Kettenregel

Ist eine Funktion f mit $f(x) = u(v(x))$ eine aus $u(v)$ und $v(x)$ zusammengesetzte Funktion und sind diese an einer Stelle a differenzierbar, ist auch die zusammengesetzte Funktion differenzierbar.

f

BEISPIEL

Differenziere $y = (t^4 - 2)^2$ mittels Kettenregel

Nach dem Prinzip von äußerer Ableitung multipliziert mit innerer Ableitung, erhält man schließlich

$$\frac{dy}{dt} = 2(t^4 - 2) \cdot 4t^3 \cdot$$

BEISPIEL

Differenziere $y = \sqrt{t^4 - 2}$ mittels Kettenregel

Auch hier kann die Kettenregel angewandt werden. Die Funktion kann auch geschrieben werden zu:

$$y = (t^4 - 2)^{\frac{1}{2}}$$

Äußere mal innere Ableitung ergibt dann:

Äußere Ableitung: $\frac{1}{2}(t^4-2)^{-\frac{1}{2}}$

Wichtig: Das $\frac{1}{2}$ über der Klammer wird negativ da: $\frac{1}{2}-1$

Innere Ableitung: $4t^3$

Zusammen:

y

Das kann wieder als Wurzel geschrieben werden. Da nun aber ein $-\frac{1}{2}$ resultiert, muss die Wurzel unter den Bruchstrich:

y

y

1.5 Ableitung der Elementaren Funktionen

Wurzelfunktion

-

Anders:

Logarithmus- und Exponentialfunktion:

Die Exponentialfunktion e^x und der natürliche Logarithmus $\ln|x|$ sind differenzierbar und es gilt:

-
-

Allgemeine Exponentialfunktion

-

Beweis: $f(x)=a^x$ lässt sich schreiben als: $f(x)=e^{x\cdot\ln(a)}$

Anwendung der Kettenregel:

Äußere Ableitung

Innere Ableitung

$ln(a)$ ist eine konstante Zahl, die Ableitung von x ist 1.

Die Exponentialfunktion kann wieder in ihre ursprüngliche Form gebracht werden:

Allgemeine Logarithmusfunktion

-

Beweis: Die allgemeine Logarithmusfunktion $f(x) = log_a(x)$ lässt sich schreiben:

$$f(x) = \frac{ln|x|}{ln(a)}$$

$ln(a)$ ist ein konstanter Wert, Ableitung von

Potenzfunktion

-

Beweis: Die allgemeine Potenzfunktion $f(x) = x^a$ lässt sich auch schreiben:

$$f(x) = e^{a \cdot \ln(x)}$$

Anwendung der Kettenregel:

Trigonometrische Funktionen

- Sinus:
- Cosinus:
- Tangens:

- Cotangens:

1.6 Mittelwertsätze

MERKE

Der Mittelwertsatz besagt geometrisch: Eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \in \mathbb{R}$ besitzt eine Tangente durch einen Punkt des Funktionsgraphen mit derselben Steigung wie die Sekante welche durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ des Funktionsgraphen geht.

Genauer gilt:

Ist die Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar, dann gibt es (wenigstens) einen inneren Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit

.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x^2$ mit $f : [a, b] \in \mathbb{R}$. Und die Punkte $S_1(-1, 2)$, und $S_2(3, 18)$.

Zunächst wird die Sekante bestimmt, welchen durch die beiden Punkten verläuft, die auf dem Funktionsgraphen liegen:

Sekantengleichung:

$$s(x) = mx + b$$

m bestimmen:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$m = \frac{18 - 2}{3 + 1} = 4$$

$$s(x) = 4x + b$$

b bestimmen mit Punkt S_1 oder Punkt S_2:

Punkt S_2:

$$18 = 4 \cdot 3 + b$$

$$b = 6$$

$$s(x) = 4x + 6$$

Bestimmung der Tangente, welchen durch den Punkt x_0 auf dem Funktionsgraphen verläuft und dieselbe Steigung wie die Senkante aufweist:

Zunächst wird der Punkt x_0 bestimmt, durch welchen die Tangente verläuft. Hierzu wird die Steigung der Funktion mit der ersten Ableitung ermittelt:

.

Es kann nun mittels der folgenden Gleichung der Punkt x_0 ermittelt werden, durch welchen die Tangente verläuft:

$$x_0 = 1$$

Der Punkt $x_0 = 1$ mit dem Funktionswert $f(1) = 2$ liegt auf dem Funktionsgraphen. Durch diesen Punkt verläuft die Tangente, welche dieselbe Steigung wie die Sekante aufweist.

Der nächste Schritt ist dann die Tangentenbestimmung:

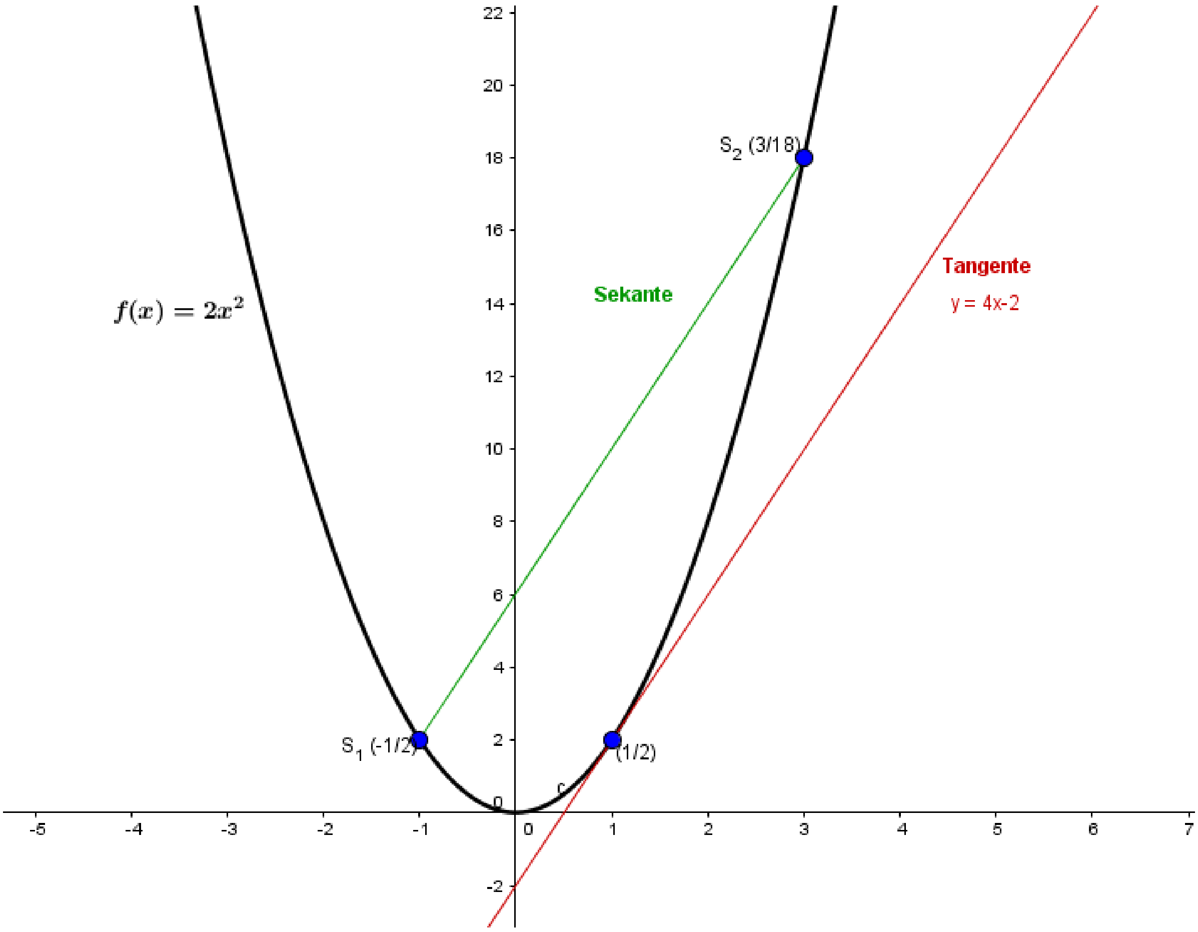
Ist $f(x)$ in x_0 differenzierbar, dann lautet die Tangente, die den Graph $f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ schneidet:

.

Die Tangente die durch den oben ermittelte Punkt $(x_0, f(x_0)) = (1, 2)$ geht lautet:

METHODE

$$y = 4x - 2$$



Anwendungsbeispiel zu Mittelwertsätze

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $f(x) = -x^2 + 12$. Berechne die Sekante, welche durch die Punkte $S_1(-1, 11)$ und $S_2(3, 3)$ geht. Berechne außerdem die Tangente, welche die gleiche Steigung wie die Sekante hat und den Schnittpunkt der Tangente mit $f(x)$.

Sekantengleichung

$$s(x) = mx + b$$

m bestimmen:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{3 - 11}{3 + 1} = -2$$

$$s(x) = -2x + b$$

b bestimmen mit Punkt S_1 oder Punkt S_2 :

Punkt S_1 :

$$11 = -2 \cdot -1 + b$$

$$b = 9$$

$$s(x) = -2x + 9$$

Schnittpunkt Tangente und Funktionsgraph

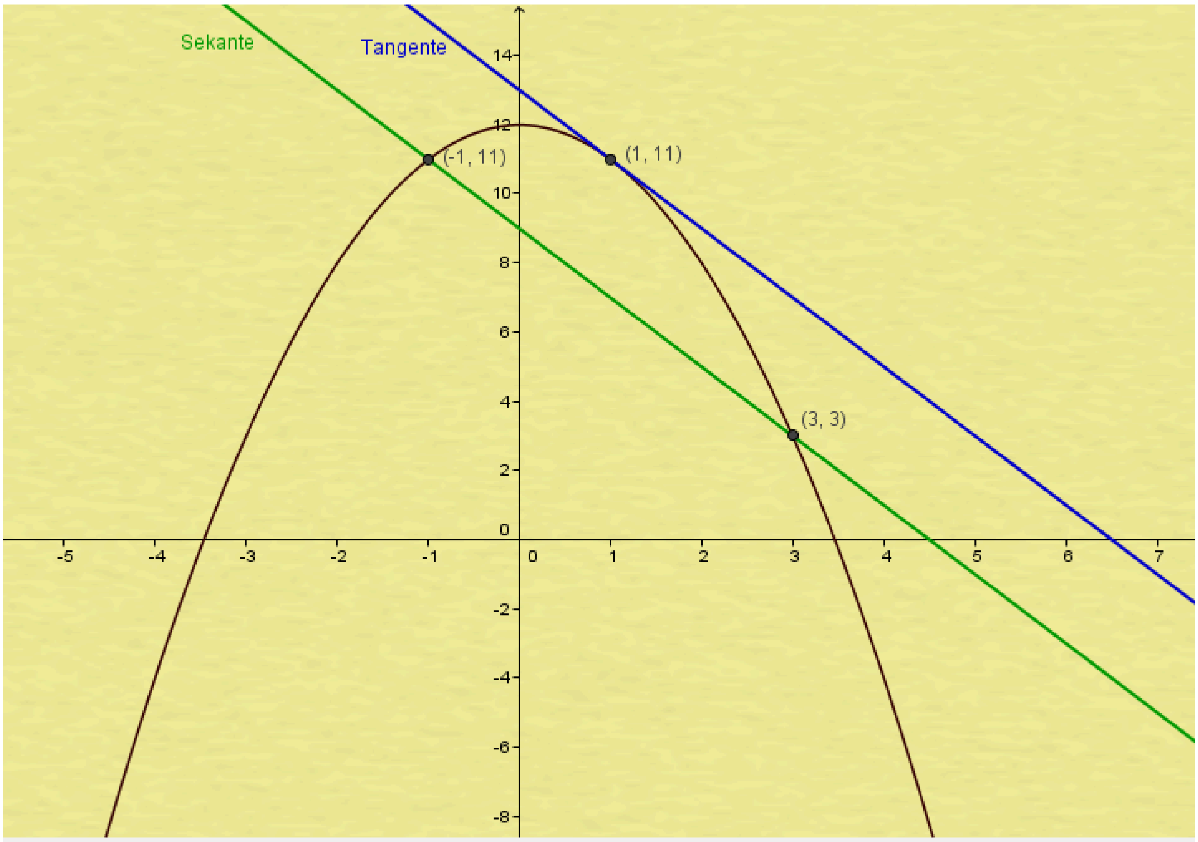
Die Steigung der Funktion ist . Zu ermitteln ist nun der Punkt $x_0 \in (a, b)$, welcher die gleiche Steigung aufweist, wie die Sekante, die durch die Punkte S_1 und S_2 geht:

$$-2x_0 = \frac{3 - 11}{3 + 1}$$

$$x_0 = 1$$

Der Punkt $x_0 = 1$ mit dem Funktionswert $f(1) = 11$ hat die selbe Steigung wie die Sekante, welche durch die Punkte S_1 und S_2 geht.

Tangentengleichung



Mittelwertsatz

In der obigen Grafik ist deutlich zu erkennen, dass die Tangente (rechts in der Grafik) genau die gleiche Steigung aufweits, wie die Sekante (links in der Grafik).

MERKE

Eine **Sekante** hat zwei Schnittpunkte mit den Funktionsgraphen, eine **Tangente** hat einen Schnittpunkt mit dem Funktionsgraphen.

1.7 Monotone Funktionen

Monotonie

Monotonie beschreibt das gleichförmige Verhalten einer Funktion oder Folge. Hierbei wird untersucht ob eine **Funktion/Folge** wächst oder fällt.

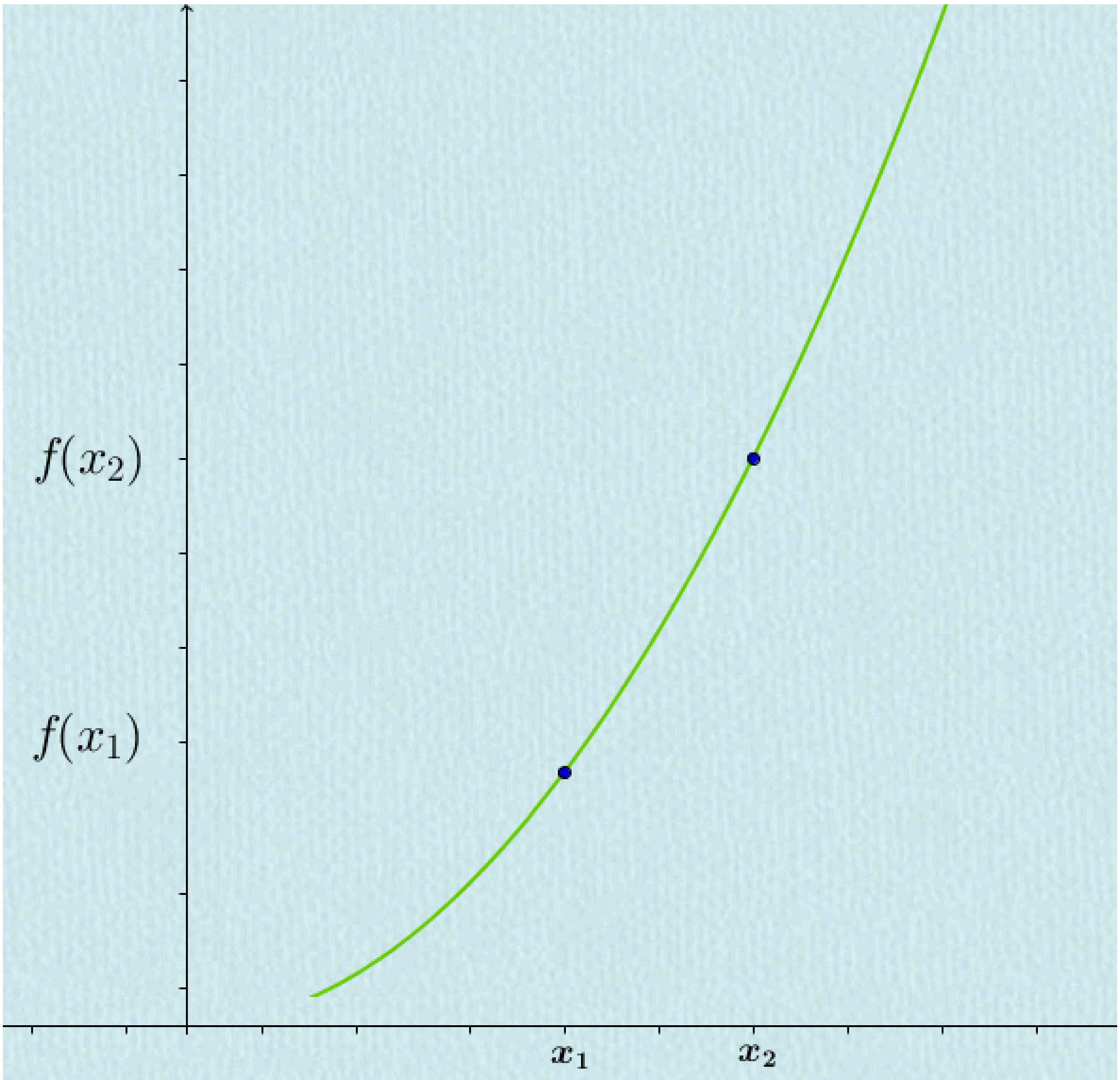
Monoton wachsend

In Funktionen spricht man von **monoton wachsend** wenn gilt:

Für alle .

und von **streng monoton wachsend**, wenn gilt:

Für alle .



streng monoton wachsend

In der obigen Grafik ist die Funktion streng monoton steigend. Dies ist der Fall, wenn der Funktionsgraph für alle $x \in I$ eine positive Steigung besitzt:

Außerdem gilt: $x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

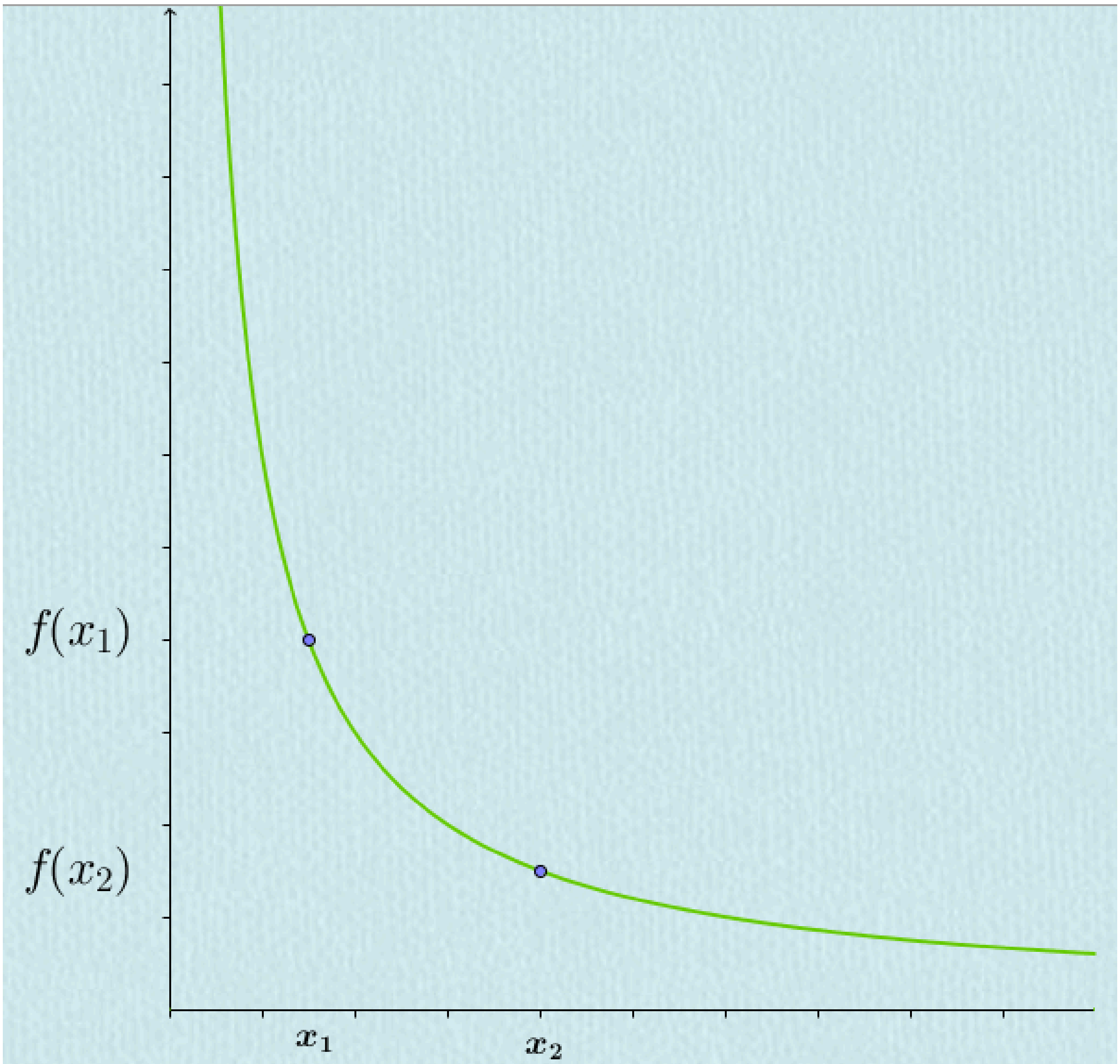
Monoton fallend

In Funktionen spricht man von **monoton fallend** wenn gilt:

Für alle .

und von **streng monoton fallend**, wenn gilt:

Für alle .



streng monoton fallend

In der obigen Grafik ist die Funktion streng monoton fallend. Dies ist der Fall, wenn der Funktionsgraph für alle $x \in I$ eine negative Steigung besitzt:

Außerdem gilt: $x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

MERKE

Exponentialfunktionen sind gänzlich streng monoton fallend oder steigend, je nach Vorzeichen des Exponenten.

Kosinusfunktionen hingegen sind in Abschnitten monoton, da sie abwechselnd steigen und fallen.

Bestimmung des Monotonieverhaltens

Besonders in der **Differentialrechnung** sind Aussagen bezüglich des Monotonieverhaltens wichtig:

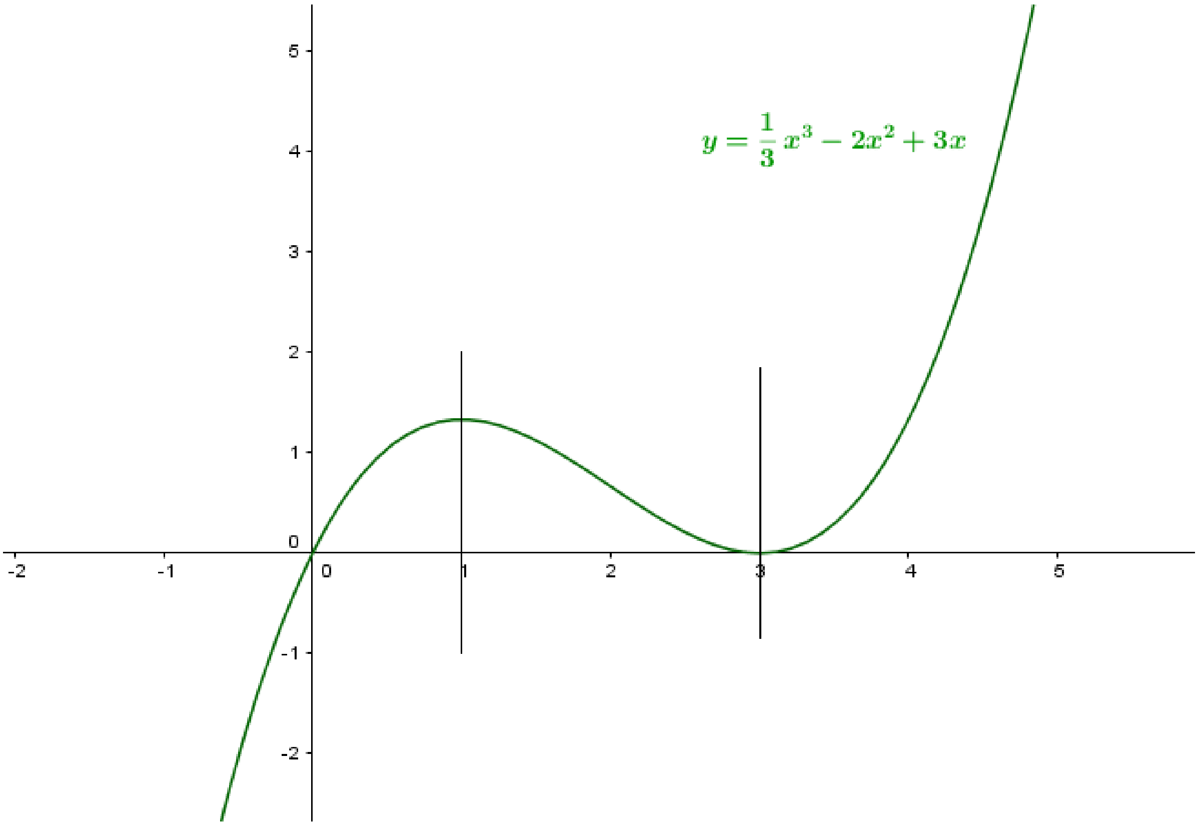
Eine auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktion ist genau dann **streng** monoton wachsend (bzw. **streng** monoton fallend), wenn die 1. Ableitung:

- nirgendwo negative Werte (bzw. positive Werte) aufweist

- auf keinem echten Teilintervall gleich Null ist.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.



Aus Funktionsgraphen, wie in der obigen Abbildung lassen sich häufig die Monotoniebereiche direkt ablesen:

So ist

$f(x)$ streng monoton wachsend für $I_1 = -\infty < x < 1, x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ streng monoton fallend für $I_2 = 1 < x < 3, x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ streng monoton wachsend für $I_3 = 3 < x < \infty, x \in \mathbb{R}$

METHODE

Rechnerisch:

Für $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \rightarrow f$

1. Bestimme die Nullstellen f

2. Die Nullstellen werden nun die 1. Ableitung eingesetzt und geschaut, ob diese >0 oder < 0 wird.

3. Erzeuge eine Vorzeichentabelle

Bereich	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
f'(x)	+	-	+
$f(x)$ ist streng monoton	wachsend	fallend	wachsend

1.8 Konkave und konvexe Funktionen

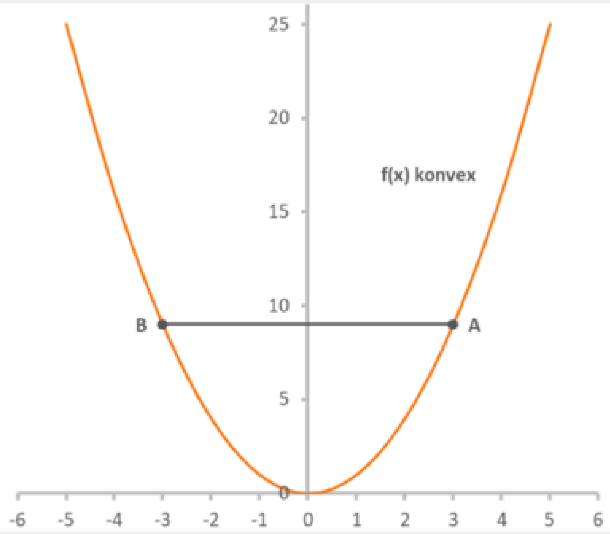
Eine reellwertige Funktion heißt **konvex**, wenn ihr Graph **unterhalb** jeder Verbindungsstrecke zweier seiner Punkte liegt. Dies ist gleichbedeutend dazu, dass die Menge der Punkte oberhalb des Graphen, eine konvexe Menge ist.

Eine reellwertige Funktion heißt **konkav**, wenn ihr Graph **oberhalb** jeder Verbindungsstrecke zweier seiner Punkte liegt. Dies ist gleichbedeutend dazu, dass die Menge der Punkte unterhalb des Graphen, eine konvexe Menge ist.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $f(x) = x^2$

Konvexität

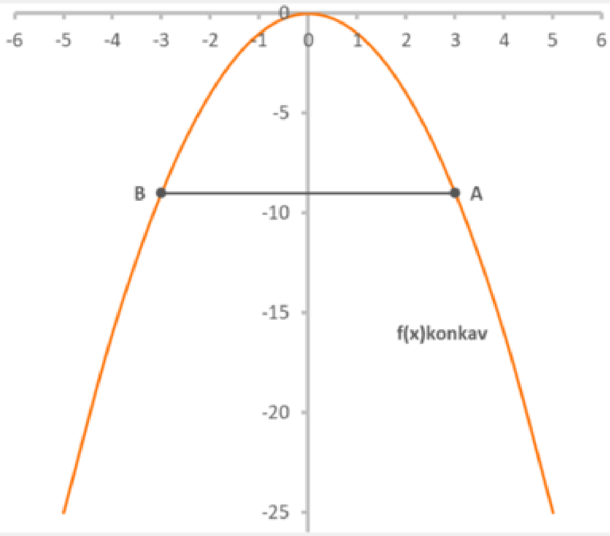


In der obigen Grafik ist deutlich zu erkennen, dass die Sekante durch die beiden Punkte oberhalb des Funktionsgraphen liegt. Dies ist bei dieser Funktion immer der Fall, weshalb diese **streng konvex** ist.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2$

Konkavität



In der obigen Grafik ist deutlich zu erkennen, dass die Sekante durch die beiden Punkten unterhalb des Funktonsgraphen liegt. Dies ist bei dieser Funktion immer der Fall, weshalb diese **streng konkav** ist.

MERKE

Merksatz: Eine Funktion ist konkav wie der Rücken vom Schaf.

Definitionen konvexe und konkave Funktion

Eine über einer konvexen Menge C definierte Funktion F heißt **konvex**, wenn für alle x , y aus C sowie $\lambda \in [0, 1]$ gilt, dass

METHODE

$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$ **quasikonvexe Funktion**

Eine Funktion heißt streng konvex, wenn gilt:

METHODE

$F(\lambda x + (1-\lambda)y)$ streng konvexe Funktion

Eine über einer konkave Menge C definierte Funktion F heißt **konkav**, wenn für alle x , y aus C sowie $\lambda \in [0, 1]$ gilt, dass

METHODE

$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$ **quasikonkave Funktion**

Eine Funktion heißt streng konkav, wenn gilt:

METHODE

$F(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$ **streng konkave**

Funktion

1.8.1 Nachweis Konkavität und Konvexität auf direktem Weg

BEISPIEL

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$F(x) = 10x - 4x^2$$

Handelt es sich hierbei um eine konkave oder konvexe Funktion bzw. liegt keines von beiden vor?

Die Funktion wird nun wie folgt aufgestellt:

Einsetzen für x ergibt dann:

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) = 10(\lambda x + (1-\lambda)y) - 4(\lambda x + (1-\lambda)y)^2$$

Es werden nun nach und nach die Klammern auf der rechten Seite aufgelöst und die Variablen zusammengefasst. Die Klammern mit $(1-\lambda)$ lässt man stehen. Ziel ist es die rechte Seite auf die folgende Form zu bringen um den Vergleich anstellen zu können, ob die obige Funktion größer oder kleiner ist als die folgende Funktion:

METHODE

$$\lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$$

Für die obige Funktion bedeutet dies mit $F(x) = 10x - 4x^2$ und :

METHODE

Es wird nun mit der Transformation der rechten Seite auf die obige Form begonnen. ACHTUNG: Der letzte Klammerausdruck stellt eine binomische Formel dar:

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) = 10(\lambda x + (1-\lambda)y) - 4(\lambda x + (1-\lambda)y)^2$$

Auflösen der Klammern, wobei $(1-\lambda)$ stehen bleibt:

λ und $(\lambda - 1)$ zunächst so ausklammern, dass die obige Form gegeben ist:

$$= \lambda(10 \cdot x - 4x^2) + (1-\lambda)(10 \cdot y - 4 \cdot y^2) + ...$$

Danach muss geschaut werden, welche Summanden wegfallen und welche teilweise bzw. vollständig mit berücksichtigt werden müssen:

Der **erste und zweite** Summand fallen dann vollständig weg:

(1) $10 \cdot \lambda \cdot x$

(2)

Der **dritte** Summand

(3) $-4 \cdot \lambda^2 \cdot x^2$

geht zum Teil ein:

(3*) $\lambda \cdot -4 \cdot x^2$

es verbleibt demnach noch ein Rest, welcher berücksichtigt werden muss.

Es wird der gesamte **vorherige** Summand (3) verwendet und der eingehende Summand (3*) davon abgezogen:

$$-4 \cdot \lambda^2 \cdot x^2 + \lambda \cdot 4 \cdot x^2$$

Zusammenfassen:

METHODE

$$-4\lambda x^2(\lambda - 1)$$

Der **vierte** Summand bleibt bestehen:

METHODE

$$-8 \cdot \lambda x \cdot (1 - \lambda) \cdot y$$

Der **fünfte** Summand

(5) $-4(1 - \lambda)^2 \cdot y^2$

geht wieder zum Teil ein:

(5*) $(1 - \lambda) \cdot -4y^2$

Es muss demnach berücksichtigt werden:

$$-4 \cdot y^2 + 8\lambda \cdot y^2 - 4\lambda^2 \cdot y^2 + 4 \cdot y^2 - 4\lambda \cdot y^2$$

$$4\lambda \cdot y^2 - 4\lambda^2 \cdot y^2$$

Zusammenfassen:

METHODE

$$4\lambda \cdot y^2(1 - \lambda)$$

Es ergibt sich demnach insgesamt (Berücksichtigung der Summand in den Boxen):

4 \lambda \cdot y^2 (1 - \lambda) Unbalanced Eqn

Es wird nun eingesetzt und :

Den 3. Summanden mit (-1) multiplizieren:

Die letzten drei Summanden zusammenfassen:

$$= \lambda \cdot F(x) + (1-\lambda) \cdot F(y) + 4\lambda(1-\lambda)(x-y)^2$$

Es gilt also:

METHODE

Es wird nun geschaut ob die obige Funktion $F(\lambda x + (1-\lambda)y)$ größer oder kleiner $\lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$ ist:

Die linke Seite ist größer als die rechte Seite. Grund dafür ist der letzte Term der linken Seite. Dieser wird in jedem Fall positiv, da $0 < \lambda < 1$. Der Ausdruck $(x-y)^2$ wird immer positiv.

Es liegt eine **streng konkave** Funktion vor.

1.8.2 Nachweis Konkavität und Konvexität durch Differentation

Aufgrund des hohen Rechenaufwandes beim direkten Nachweis über Konkavität bzw. Konvexität wird in diesem Abschnitt aufgezeigt, wie man mittels Differentation den Nachweis erbringen kann, ob eine Funktion konkav oder konvex ist.

Konkave Funktion

Eine zweimal stetig differenziebare Funktion ist **konkav**, wenn für alle $x \in X = \mathbb{R}$ gilt: F .

Das bedeutet also, dass die Funktion konkav ist, wenn die zweite Ableitung der Funktion nach x kleiner gleich null ist.

Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist **streng konkav**, wenn für alle $x \in X = \mathbb{R}$ gilt: F
.

Das bedeutet also, dass die Funktion streng konkav ist, wenn die zweite Ableitung der Funktion nach x kleiner null ist.

Konvexe Funktion

Eine zweimal stetig differenziebare Funktion ist **konvex**, wenn für alle $x \in X = \mathbb{R}$ gilt: F .

Das bedeutet also, dass die Funktion konvex ist, wenn die zweite Ableitung der Funktion nach x größer gleich null ist.

Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist **streng konvex**, wenn für alle $x \in X = \mathbb{R}$ gilt: F
.

Das bedeutet also, dass die Funktion streng konvex ist, wenn die zweite Ableitung der Funktion nach x größer null ist.

Konvexität und Konkavität im Intervall

Eine Funktion kann auch weder konvex noch konkav sein. Dies liegt vor, wenn die 2. Ableitung sowohl negative als auch positive Werte annehmen kann für $x \in X = \mathbb{R}$. Die Funktion kann dann aber innerhalb eines bestimmten Intervalls streng konkav oder streng konvex sein:

Eine Funktion heißt konkav (konvex) auf einem Intervall I , wenn die Sekante durch je zwei Punkte $P1$ und $P2$ des Graphen unterhalb (oberhalb) des Graphen liegt.

Die Funktion $F(x)$ sei zweimal stetig differenzierbar auf dem Intervall I . Dann gilt:

1. $F(x)$ ist genau dann konkav auf I , wenn F für alle $x \in I$
2. $F(x)$ ist genau dann konvex auf I , wenn F für alle $x \in I$

n-dimensionaler Fall

Eine zweimal stetig differenziebare Funktion ist **konkav**, wenn für alle $x \in X$ gilt: Die Hesse-Matrix $H(x)$ ist negativ semidefinit. Sie ist streng konkav, wenn $H(x)$ negativ definit ist.

Eine zweimal stetig differenziebare Funktion ist **konvex**, wenn für alle $x \in X$ gilt: Die Hesse-Matrix $H(x)$ ist positiv semidefinit. Sie ist streng konvex, wenn $H(x)$ positiv definit ist.

Hesse Matrix

METHODE

Vorgehensweise zum Nachweis der Konkavität und Konvexität

1. Bildung der 2. Ableitung. Ist diese < 0, so ist die Funktion streng konkav, sonst streng konvex.
2. Ist die 2. Ableitung noch abhängig von x, so die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen.
3. Bereiche angegeben und durch Einsetzen kleinerer und größerer Werte in die 2. Ableitung die Konkavität bzw. Konvexität bestimmen.

Anwendungsbeispiele: Nachweis über Konkavität bzw. Konvexität

BEISPIEL

$$F(x) = 10x - 4x^2$$

F

F

$\rightarrow$ streng konkav!

BEISPIEL

$$F(x) = 8x^3 - 2x^4$$

F

F

x ausklammern:

F

Die 2. Ableitung ist noch abhängig von x. Es werden die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmt:

F

$x_1 = 0$

$48 - 24x = 0$

$x_2 = 2$

Es gelten also die folgenden Bereiche:

$x < 0$

$0 < x < 2$

$x > 2$

Bereich $x < 0$:

Es werden nun Werte kleiner Null in die 2. Ableitung eingesetzt. In diesem Fall wird der Wert $x = -1$ gewählt:

F

Die Funktion ist für den Bereich $x < 0$ streng konkav.

Bereich: $0 < x < 2$:

Es werden nun Werte zwischen Null und Zwei in die 2. Ableitung eingesetzt. In diesem Fall der Wert $x = 1$:

F

Die Funktion ist für den Bereich $0 < x < 2$ streng konvex.

Bereich: $x > 2$:

Es werden nun Werte größer Zwei in die 2. Ableitung eingesetzt. In diesem Fall der Wert $x = 3$:

F

Die Funktion ist für den Bereich $x > 2$ streng konkav.

BEISPIEL

$$F(x,y) = xy - x^2 - y^2$$

Für den n-dimensionalen Fall (hier 2 dimensional) bedient man sich der Hesse-Matrix.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - 2x$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = -2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - 2x$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x - 2y$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x - 2y$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = -2$$

Die Eigenwerte (siehe Kapitel: Lineare Algebra) müssen bestimmt werden:

Berechnung:

$$H(\lambda) = (-2 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda) - 1 \cdot 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3$$

p/q -Formel anwenden:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{(\frac{4}{2})^2 - 3}$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -3$$

Beide Eigenwerte der Hessematrix sind negativ, demnach ist die Hessematrix negativ definit. Die Funktion $F(x, y)$ ist demnach streng konkav.

1.9 Regel von de l' Hospital

Guillaume François Antoine de l'Hospital führte im 17. Jahrhundert die Differential– und Integralrechnung in Frankreich ein.

Mithilfe der Regel von de l'Hospital lassen sich Grenzwerte von Quotienten bestimmen. Die Regel kann angewendet werden, wenn Nenner und Zähler entweder beide gegen Null $[\frac{0}{0}]$ oder beide gegen Unendlich $[\frac{\infty}{\infty}]$ streben.

METHODE

Regel 1: Die Funktionen $f(x), g(x)$ gelten an der Stelle x_0 differenzierbar und es gelte

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, sowie .

Dann gilt:

Die obigen Regel besagt einfach, dass wenn sowohl Nenner als auch Zähler einer Funktion gegen Null laufen, wenn x gegen einen bestimmten Wert x_0 läuft und die erste Ableitung des Nenners für x_0 ungleich Null ist, dann:

Bilde die erste Ableitung von Zähler und Nenner und lasse diese gegen x_0 laufen.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $\frac{3x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 5x}$. Berechne

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 5x}.$$

Laufen Zähler und Nenner gegen Null für $x \to 0$?

und $g(0) = 0^2 + 5 \cdot 0 = 0$:

$\to \#$ es gilt $f(0) = g(0) = 0$

Ist die erste Ableitung für $x_0 = 0$ ungleich Null?

.

Anwendung der Regel von de l'Hospital indem die Ableitung des Zähler und Nenners gebildet wird und diese gegen $x \to 0$ konvergieren:

.

Für $x \to 0$ geht die Funktion gegen $\frac{1}{5}$.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $\frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 7x - 6}$. Berechne

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 7x - 6}.$$

Laufen Zähler und Nenner gegen Null für $x \to 3$?

$f(3) = 0, g(3) = 0$

Ist die erste Ableitung für $x_0 = 3$ ungleich Null?

1.Ableitung Nenner: g

Einsetzen von $x_0 = 3$:

Anwendung der Regel von de l'Hospital indem die Ableitung des Zähler und Nenners gebildet wird und diese gegen $x \to 3$ konvergieren:

1.Ableitung Zähler: f

Einsetzen von $x_0 = 3$:

f

Für $x \to 3$ geht die Funktion gegen $\frac{16}{11}$.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $\frac{1 - cosx}{sinx}$. Berechne $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{sinx}$

Laufen Zähler und Nenner gegen Null für $x \to 0$?

$f(0) = 0, g(0) = 0$

Ist die erste Ableitung für $x_0 = 0$ ungleich Null?

Anwendung der Regel von de l'Hospital indem die Ableitung des Zähler und Nenners gebildet wird und diese gegen $x \to 0$ konvergieren:

Für $x \to 0$ geht die Funktion gegen 0 .

Zähler und Nenner laufen gegen Unendlich

METHODE

Regel 2: Die Funktionen $f(x), g(x)$ gelten an der Stelle x_0 differenzierbar und es gelte $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$, sowie .

Dann gilt:

Die obigen Regel besagt einfach, dass wenn sowohl Nenner als auch Zähler einer Funktion gegen Unendlich laufen, wenn x gegen einen bestimmten Wert x_0 läuft und die erste Ableitung des Nenners für x_0 ungleich Null ist, dann:

Bilde die erste Ableitung von Zähler und Nenner und lasse diese gegen x_0 laufen.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $\frac{e^{2x}}{x^2}$. Berechne .

Laufen Zähler und Nenner gegen Unendlich für $x \to \infty$?

Eigenschaft der e-Funktion: $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty^2 = \infty$$

Es gilt also: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

Ist die erste Ableitung für $x_0 = \infty$ ungleich Null?

Anwendung der Regel von de l'Hospital:

Nochmaliges Ableiten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}}{2} = \infty$$

Für $x \to \infty$ geht die Funktion gegen ∞ .

1.10 Näherungsverfahren zur Nullstellenberechnung nach Newton

Das Näherungsverfahren zur Nullstellenberechnung von Newton dient dazu, zu einer gegebenen stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Näherungswerte zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ (also Nullstellen der Funktion) zu finden. Das Näherungsverfahren wird angewandt, weil direkte Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen nicht oder nur mit sehr großem Aufwand anwendbar sind.

Die grundlegende Idee des Newtonverfahrens besteht darin, eine Tangente zu bestimmen, welche in der Nähe der Nullstelle liegt. Die Nullstelle der Tangente dient dann als neue Approximation der Nullstelle der Funktion. Die erhaltene Näherung dient als Ausgangspunkt für einen weiteren Verbesserungsschritt.

Allgemein

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, von der eine Stelle $x_n \in D$ mit "kleinem" Funktionswert $f(x_n)$ bekannt ist. Es soll ein Punkt x_{n+1} nahe dem Punkt x_n gefunden werden, welcher eine verbesserte Näherung der Nullstelle darstellt. Dies wird erreicht, indem die Funktion f im Punkt $(x_n, f(x_n))$ durch eine Tangente linearisiert wird. Die Tangente hat die Gleichung:

Beginnend bei $n = 0$ berechne man folgende Nullstelle der Tangente:

Unterscheiden sich x_n und x_{n+1} hinreichend wenig, so ist x_{n+1} eine Näherung der gesuchten Nullstelle, ansonsten wiederhole man die Berechnung der Nullstelle der Tangente für das nächste n .

Anwendung

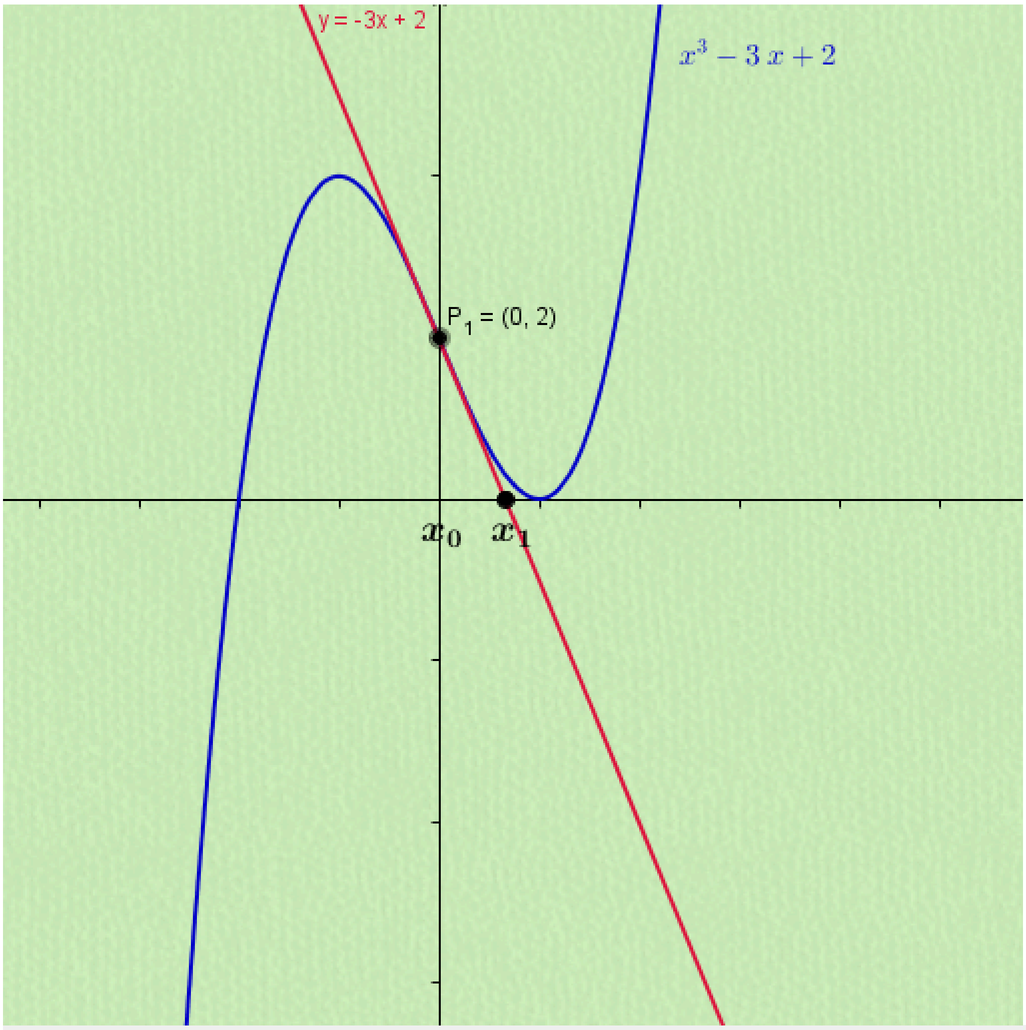
BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Ein $x_n \in D$ mit $n = 0, 1, ..., N$ mit kleinem Funktionswert suchen: Anbieten würde sich hier der Wert $x_0 = 0$, denn es resultiert hier der Funktionswert $f(x_0) = 2$.

2. Die $Tangente$, welche durch diesen Punkt $P_1(0,2)$ geht, ist:

3. Die Nullstelle der Tangente ist:



Näherungsverfahren zur Nullstellenberechnung nach Newton

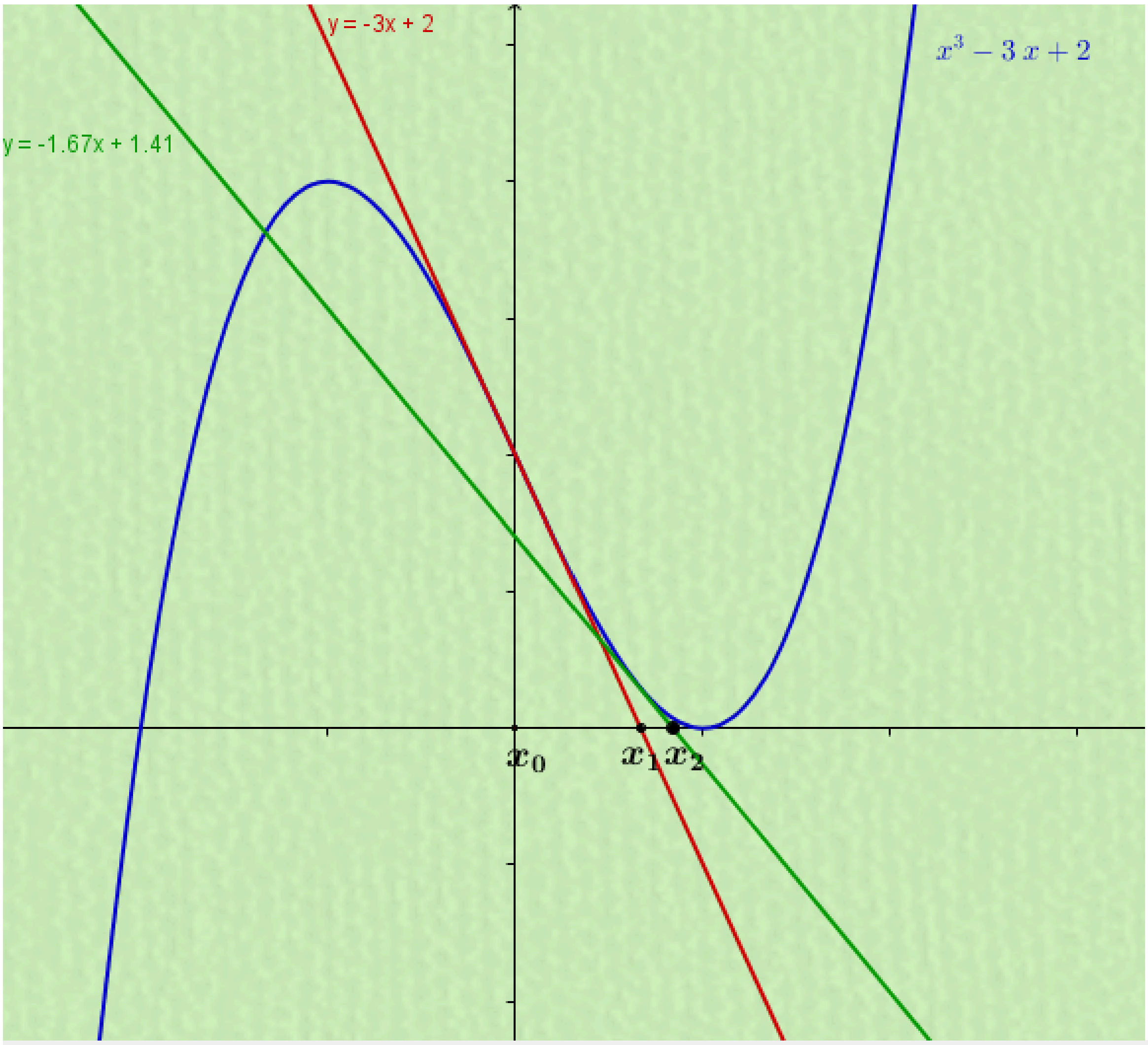
In der obigen Grafik ist deutlich zu erkennen, wie das Näherungsverfahren funktioniert. Als erstes wird ein vorher festgelegten Punkt der Funktion mit kleinem Funktionswert bestimmt (hier: $P_1(0,2)$. Dann wird die Tangente gesucht, die durch diesen Punkt geht. Die Tangente ist in rot eingezeichnet. Da die Tangente durch die x -Achse geht, wird die Schnittstelle x_1 der Tangente mit der x -Achse bestimmt ($\longrightarrow$ Nullstelle). Man sieht nun deutlich, dass x_1 deutlich näher an der Nullstelle der Funktion liegt, als x_0 . Um nun herauszufinden, ob x_1 nun aber die Nullstelle der Funktion ist oder noch zu weit weg liegt, werden x_0 und x_1 voneinander abgezogen. Ist die Differenz noch zu groß, müssen weitere Schritte durchgeführt werden. Dies geschieht so lange, bis die Differenz hinreichend klein ist. Im nächsten Schritt wird also für x_1 der Punkt gesucht, welcher auf der Funktion liegt und die Tangente die durch diesen Punkt geht bestimmt. Danach wird wieder der Schnittpunkt x_2 der neuen Tangente mit der x -Achse bestimmt und geschaut ob die Differenz zwischen x_2 und x_1 hinreichend klein ist.

x_0 und x_1 unterscheiden sich noch nicht hinreichend wenig, weshalb ein weiterer Schritt durchgeführt wird:

2. Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x_1 = \frac{2}{3}$ den Funktionswert $f(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27}$. Die Tangente die durch diesen Punkt geht lautet:

3. Die Nullstelle der $Tangente$ ist:

$$x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\frac{8}{27}}{-\frac{5}{3}} = \frac{38}{45} = 0,8\overline{4}$$



Näherungsverfahren zur Nullstellenberechnung nach Newton

Es sind weitere Schritte notwendig, da die Differenz zwischen x_2 und x_1 nicht hinreichend klein ist:

2. Die Nullstelle der Tangente, welche durch den Punkt $(x_2, f(x_2))$ geht ist (es wird aus Vereinfachungsgründen weiter gerechnet mit 0,8444):

$x_6 \approx 0,9938$

$x_7 \approx 0,9965$

...

Hier stimmen die Zahlen bis auf 2 Nachkommastellen überein. Dies soll an dieser Stelle reichen, um das Verfahren zu verstehen.

Abschließende Erläuterung

In diesem Beispiel wurde immer auf 4 Nachkommastellen gerundet. Wie zu sehen ist, nähert sich x immer weiter an die Nullstelle der Funktion an. Die Nullstelle an die wir uns momentan annähern ist übrigens $x_{1,2} = 1$ (doppelte Nullstelle). Eine weitere Nullstelle der Funktion ist $x_3 = -2$. Für diese Nullstelle kann man z.B. mit $x_0 = -1,5$ beginnen. Für das Näherungsverfahren von Newton sollte man die ungefähre Lage einer Nullstelle kennen. Es empfiehlt sich demnach zunächst eine Kurvendiskussion durchzuführen (Extrempunkte, Wendepunkt etc. bestimmen), um die Lage der Nullstellen in etwa abschätzen zu können.

Beispiel: In diesem Beispiel hat die Funktion bei $x = -1$ ein Maximum (siehe Kapitel: Extremwerte). In den vorherigen Kapiteln wurde gezeigt, dass vor einem *Maximum* die Funktion *monoton steigt*. Da das Maximum einen Funktionswert von $f(-1) = 4$ besitzt und damit *oberhalb* der x-Achse liegt und die Funktion vor diesem Punkt für $(\infty, -1)$ monoton steigt, muss sie durch die x-Achse laufen. Das bedeutet also, dass dort in der Nähe eine Nullstelle liegen muss (siehe obige Grafik). Mit diesem Wissen kann nun das Verfahren von Newton angewandt werden um Näherungsweise die erste Nullstelle zu bestimmen. Analog verfährt man um die weiteren Nullstellen zu bestimmen.

Analysis und Lineare Algebra

Integralrechnung

Autor:
Deleted User

ingenieurkurse.de
DIGITALE PRÜFUNGSVORBEREITUNG

INHALTSVERZEICHNIS

1 Integralrechnung

1.1 Unbestimmte Integrale

Die Integralrechnung ist die Umkehrrechenart der Differentialrechnung, so wie beispielsweise das Subtrahieren die des Addierens ist.

Die Kennzeichnung für das Integrieren ist das Integralzeichen $\int$.

Hierbei sucht man zu einer gegebenen Ableitungsfunktion y deren Stammfunktion $y = F(x)$, so dass $\frac{\triangle F(x)}{\triangle x} = f(x)$ ist.

Eine Integration wird allgemein wie folgt durchgeführt:

METHODE

$$F(x) = \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Das dx steht für die Integration nach x . Darauf muss bei der Integration immer geachtet werden. C ist die Integrationskonstante (siehe unten).

BEISPIEL

Integriere die Ableitung $f(x) = 2$

Da in dieser Funktion kein x vorhanden ist, kann man stattdessen $x^0 = 1$ schreiben. Es ist also $n = 0$:

Dabei ist $n = 0$:

$$F(x) = 2 \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Einsetzen von $n = 0$:

$$F(x) = 2\frac{1}{0+1}x^{0+1} + C$$

$$F(x) = 2\frac{1}{1}x^{1} + C$$

$$F(x) = 2x + C$$

BEISPIEL

Integiere die Ableitung $f(x) = x^2$.

$$\int x^2 \, dx$$

Dabei ist $n = 2$:

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Einsetzen von $n = 2$:

$$F(x) = \frac{1}{2+1}x^{2+1} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^{3} + C$$

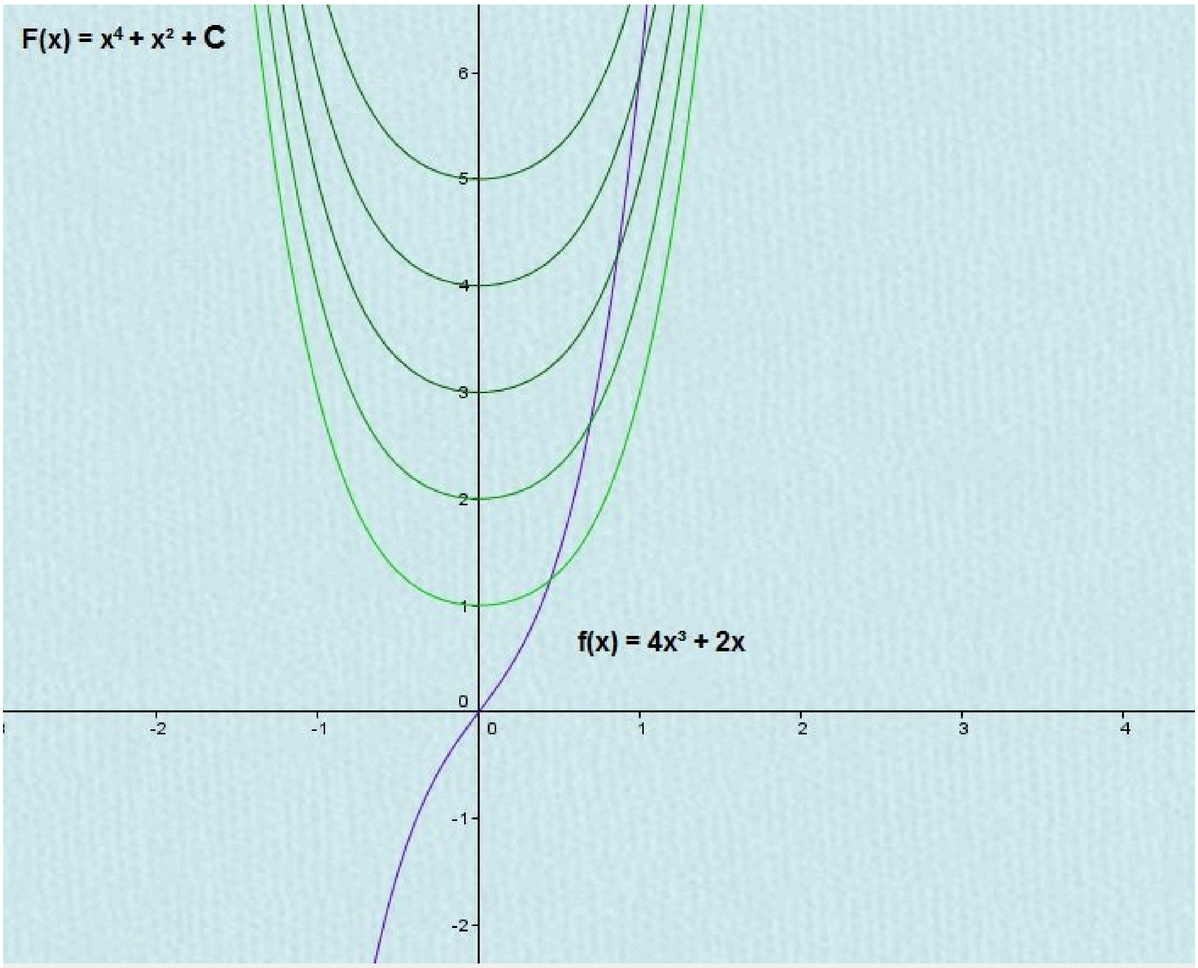
BEISPIEL

Integriere die Ableitung $f(x) = 4x^3 + 2x$

Bei mehreren Termen, muss jeder für sich betrachtet werden:

Integrationskonstante C

Problematisch hierbei ist, dass die durch eine Integration entstehende additive **Konstante C**, die **Integrationskonstante**, jeden beliebigen konstanten Betrag besitzen kann, welcher den Funktionsgraph der Stammfunktion nach oben oder unten verschiebt, wodurch es unendlich viele Lösungen, bzw. Stammfunktionen für dieses Problem gibt [siehe Grafik].



Unbestimmtes Integral

Die Funktion könnte also z.B. so aussehen:

$x^4 + x^2 + 3$ die Ableitung ist: $4x^3 + 2x$

oder

$x^4 + x^2 + 15$ die Ableitung ist: $4x^3 + 2x$

...

Da in diesem Fall die Wahl der Konstanten beliebig ist, spricht man auch von einem **unbestimmten Integral**. Es ist nur möglich ein Integral zu lösen, wenn man bereits die Stammfunktion $F(x)$ der Ableitung $f(x)$ kennt. Ist dies nicht der Fall muss man sich auf gezieltes "Raten" verlassen und anschließend überprüfen, ob tatsächlich $\frac{\triangle F(x)}{\triangle x} = f(x)$ ist.

MERKE

Die Menge aller Stammfunktionen einer Ableitung wird unbestimmtes Integral von f genannt:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

1.1.1 Rechenregeln für unbestimmte Integrale

Zur Lösung eines unbestimmten Integrals kann man sich bei der Umformung an den folgenden Regeln orientieren:

Vorziehen eines konstanten Faktors

Beim Vorziehen eines konstanten Faktors geht man so vor, dass der Faktor, welcher eine Konstante darstellt vor das Integral gezogen werden kann. Faktoren zeichnen sich durch ein Multiplikations- bzw. Divisionzeichen aus. Konstant bedeutet, dass dieser Faktor nicht von x abhängig ist.

METHODE

$$\int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx$$

BEISPIEL

Integriere das folgende Integral $\int (3\ \sin x - \frac{5}{x} + \frac{2}{1+x^2})\ dx$.

Es existieren hier 3 Terme. Alle drei Terme besitzen konstante Faktoren. Der erste Term besitzt den konstanten nicht von x abhängigen Faktor 3. Der zweite Term den Faktor 5 und der dritte Term den Faktor 2.

Man rechnet:

$$\int (3\ \sin x - \frac{5}{x} + \frac{2}{1+x^2})\ dx$$

= $3 \int \sin x\ dx - 5 \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx$

= $-3\ \cos x - 5\ \ln|x| + 2\ \arctan x + C$

Integral der Summe gleich Summe der Integrale

METHODE

$$\int (f(x) + g(x) - h(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx - \int h(x)\ dx$$

BEISPIEL

Integriere das folgende Integral $\int (x^2+1)^3\ dx$.

Man rechnet:

$$\int (x^2+1)^3\ dx$$

= $\int (x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1)\ dx$

= $\int x^6\ dx + \int 3x^4\ dx + \int 3x^2\ dx + \int 1\ dx$

= $\frac{x^7}{7} + \frac{3x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} + x + C$

MERKE

Merke: Für $\int ax^n$ gilt: $a\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

$$\int \frac{1}{3}x^2 \ \rightarrow\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3 \rightarrow \frac{1}{9}x^3 + C$$

$$\int x^4 + 3x^5 \ \rightarrow\ \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + C$$

Im Folgenden werden zwei entscheidende Möglichkeiten zur Lösung eines Integrals vorgestellt:

- Integration durch Substitution und
- partielle Integration.

1.1.2 Integration durch Substitution bei unbestimmten Integralen

Kann eine Funktion nicht direkt integriert werden, so ist es oft möglich diese durch Substitution dennoch zu Lösen. Unter Substitution ist das Ersetzen eines Terms durch einen anderen Term als sog. Stellvertreter zu verstehen. Meist wird der Vereinfachung halber, nur ein neues Symbol für einen ganzen Term eingesetzt. Man gewinnt mehr Übersicht und die Eigenschaften von Integralen oder Funktionen werden erkennbarer.

MERKE

Hierzu wird z.B. eine Wurzel, eine Funktion in einer Klammer etc. durch ein t substituiert. Dieses t muss außerdem noch nach x abgeleitet werden, so dass man $\frac{dt}{dx}$ erhält. Umstellen nach dx ersetzt dann das dx der Integration durch dz.

Wie die Integration mittels Substitution angewandt wird, soll als nächstes gezeigt werden.

BEISPIEL

Integriere $\int (2-4x)^4 \; dx$.

1. **Zuerst substituiert man die Klammer:**

METHODE

$$t = 2 - 4x$$

Danach wird t nach x abgeleitet:

METHODE

$$\frac{dt}{dx} = -4$$

Es kann als nächstes ganz einfach nach dx aufgelöst werden:

METHODE

$$dx = \frac{dt}{-4} = -\frac{1}{4}dt$$

2. **Anschließend ersetzen von** $(2-4x)$ **durch** t **und** dx **durch** $-\frac{1}{4}dt$

$$\int (2-4x)^4 \; dx \;= [\int t^4 (-\frac{1}{4}) \; dt] \,.$$

3. **Konstante Terme vor das Integral ziehen**:

$$\int (2-4x)^4 \; dx \;= [\int t^4 (-\frac{1}{4}) \; dt]$$

$$\int (2-4x)^4 \; dx \;= [-\frac{1}{4} \int t^4 \; dt]$$

4. **Integrieren**:

5. **Rücksubstitution**: $t = 2-4x$

$$\int (2-4x)^4 \; dx \;= -\frac{1}{20}t^5 + C \;=\; -\frac{1}{20}(2-4x)^5 + C$$

Die obigen Rechenschritte sind im Ablauf immer identisch und lassen sich mit ein wenig Übung auf jedes andere unbestimmte Integral übertragen.

BEISPIEL

Integriere $\int 3x^2 \; e^{x^3} dx$.

1. **Substituieren**:

METHODE

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2$$

$$dx = \frac{1}{3x^2} dt$$

2. **Einsetzen**:

Kürzen von $3x^2$

$$\int 3x^2 \; e^{x^3} dx = [\int e^t dt]$$

3. Entfällt: Keine konstanten Terme vorhanden.

4. **Integrieren**:

$$\int 3x^2 \; e^{x^3} dx = [\int e^t \; dt] = [e^t + C]$$

5. **Rücksubstitution**:

BEISPIEL

Integriere $\int \frac{e^t}{e^{2t}+1} dt$

Hier ist die Abhängigkeit von t gegeben, das bedeutet die Subsitution erfolgt nun über x :

METHODE

$$x = e^t$$

Die Ableitung von x nach t ergibt dann:

$$\frac{dx}{dt} = e^t$$

Oben wurde definiert: $e^t =$ x:

$$\frac{dx}{dt} = x$$

Auflösen nach dt :

METHODE

$$dt = \frac{1}{x} dx$$

Es gilt außerdem:

$x = e^t$ und damit $x^2 = e^{2t}$

Einsetzen:

Es folgt die Rücksubstitution: $x = e^t$

Bei der hier vorgestellen Substitutionsregel wird die auf Leibniz zurückgehende Schreibweise angewandt. Bei dieser ist häufig auch die partielle Integration zu berücksichtigen. Bei dem Integral

$\int \sin(\sqrt{x})$ zum Beispiel muss nach der Substitution zunächst die partielle Integration angewandt werden, bevor die Rücksubstitution erfolgen kann. Die partielle Integration wird im nachfolgenden Abschnitt behandelt und es wird gezeigt, wie das Integral gelöst werden kann.

1.1.3 Partielle Integration bei unbestimmten Integralen

Eine andere Möglichkeit zur Lösung eines unbestimmten Integrals ist die Durchführung einer partiellen Integration. Diese verwendet man vorzugsweise bei Integralen die ein Produkt beinhalten.

MERKE

Die Partielle Integration ist analog zur Produktregel des Differenzierens.

METHODE

Partielle Integration:

$$\int u \cdot$$

Wie bereits an der Formel ersichtlich, wird ein Faktor integriert und der andere differenziert. Daher sollte man sich vorher überlegen, welcher der Faktoren einfacher zu integrieren und welcher einfacher zu differenzieren ist.

BEISPIEL

Integriere $\int 6x^2 \cdot \ln|x| dx$.

Unter Verwendung der partiellen Integration erhält man:

$$\int 6x^2 \cdot \ln|x| dx = 2x^3 \cdot \ln|x| - \int 2x^3 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= 2x^3 \ln|x| - \frac{2}{3}x^3 + C$$

MERKE

Man sollte immer bedenken, dass die partielle Integration keine Garantie für eine Vereinfachung des Integrals ist und folglich nicht immer zur Auflösung des Integrals führt.

BEISPIEL

Bestimme das Integral: $\int \sin(\sqrt{x})dx$

Für diese Variante wird zunächst die Substitution und dann die partielle Integration angewandt:

1. **Substituieren**:

METHODE

$$t = \sqrt{x}$$

Andere Schreibweise:

$$t = x^{\frac{1}{2}}$$

Ableitung nach x :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

METHODE

$$dx = 2\sqrt{x}\ dt$$

Das dx soll ersetzt werden. Innerhalb der Formel ist aber noch ein x enthalten ($\sqrt{x}$), welches eliminiert werden muss. Es gilt:

$$t = \sqrt{x}$$

und deswegen:

$$dx = 2t \; dt$$

2. **Einsetzen**:

Es handelt es sich hierbei um 2 Faktoren, welche beide von t abhängig sind. Es wird als nächstes die partielle Integration angewandt.

METHODE

$$\int u$$

$$u$$

$$u(t) = -\cos(t)$$

$$v(t) = 2t$$

$$v$$

METHODE

(1) $\int \sin(\sqrt{x}) dx = [-\cos(t) \cdot 2t + \int 2\cos(t) \; dt]$

Integration: ($\int \cos(t) dt = \sin(t) + C$):

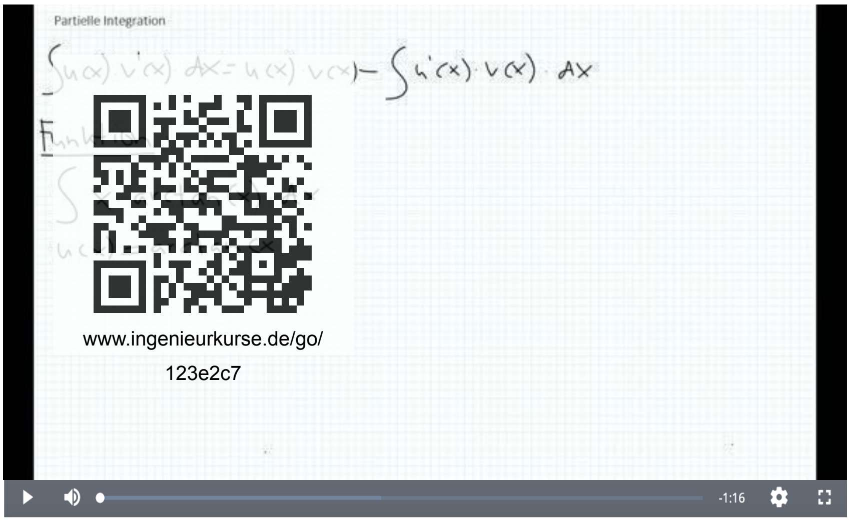
$$\int \sin(\sqrt{x}) dx = [-\cos(t) \cdot 2t + 2\sin(t) + C]$$

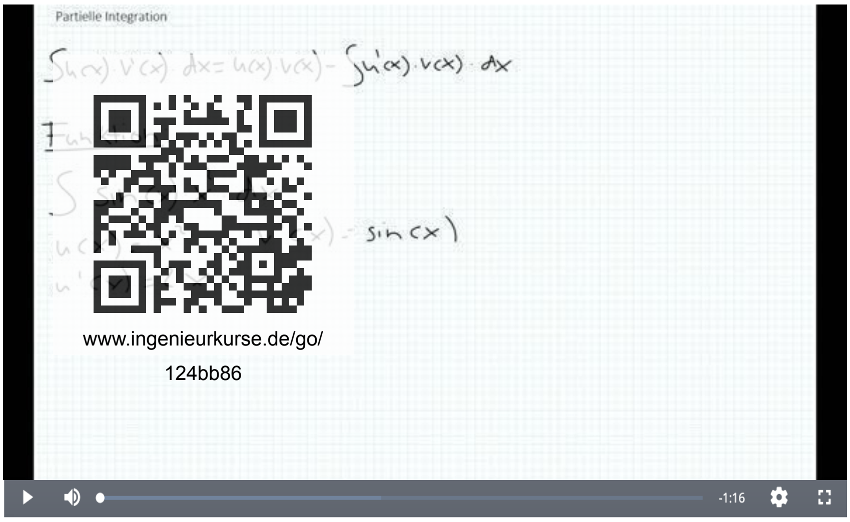
Rücksubstiution mit $t = \sqrt{x}$:

$$\int \sin(\sqrt{x}) dx = -\cos(\sqrt{x}) \cdot 2\sqrt{x} + 2\sin(\sqrt{x}) + C$$


Partielle Integration
$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$
www.ingenieurkurse.de/go/
1226a25
-1:16


Partielle Integration
$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$
www.ingenieurkurse.de/go/
12349eb
-1:16


Partielle Integration
$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$
www.ingenieurkurse.de/go/
123e2c7
-1:16



1.1.4 Partialbruchzerlegung (rationale Zahlen) bei unbestimmten Integralen

Um gebrochen-rationale Funktionen zu integrieren, bedarf es der Zerlegung in eine Summe von Partialbrüchen. Man versucht durch die Zerlegung eine Reihe einfacher Brüche zu erhalten, deren Integration bekannt und einfach durchführbar ist.

METHODE

Auch hierbei kann man sich an eine vorgegebene **Reihenfolge** halten:

I. Durchdividieren
II. Nullstellen des Nenners bestimmen
III. Ansatz der Partialbrüche
IV. Bestimmung der Koeffizienten
V. Integration

BEISPIEL

Integriere $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} dx$

I. Durchdividieren

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} dx = x - 2 + \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$$

Für $x - 2$ besteht keine Schwierigkeit, allerdings kann der Bruch $\frac{2x+3}{x^2-1}$ vereinfacht dargestellt werden:

II. Nullstellen des Nenners bestimmen

$$x^2 - 1 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$$

III. Ansatz der Partialbrüche

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \, .$$

IV. Bestimmung der Koeffizienten

Hierbei muss man die neuen Zähler A und B bestimmen. Es empfiehlt sich die "**Zuhaltemethode**".

Für A: Multipliziere beide Seiten der Gleichung in III. mit $x - 1$ und kürze.

$$\frac{2x+3}{x+1} = A + \frac{B(x-1)}{x+1} \, .$$

Setzt man nun $x = 1$ [Nullstelle von $x - 1$] so erhält man:

$$\frac{2+3}{2} = A + \frac{B \cdot 0}{1+1} \rightarrow A = \frac{5}{2}$$

Für B: Multipliziere beide Seiten der Gleichung in III. mit $x + 1$ und setze $x = -1$ ein. Man erhält:

$$\frac{-2+3}{-2} = B \rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Es ergibt sich:

V. Integration

$$= \int (x-2)dx + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1}$$

= $\dfrac{x^2}{2} - 2x \ + \dfrac{5}{2}\ln|x-1| - \dfrac{1}{2}\ln|x+1| + C$

1.1.5 Integration nicht-rationaler Zahlen bei unbestimmten Integralen

Im Gegensatz zu den bisherigen **rationalen Funktionen**, existiert für **nicht-rationale Funktionen** kein allgemeines Rechenverfahren um die unbestimmten Integrale zu berechnen. Zur Lösung diese Problems greift man auf bisher erlernte "Werkzeuge" zurück.
Durch **Substituieren** lässt sich der **Integrand** rationalisieren und nach Bedarf anschließend mittels **Partialbruchzerlegung** integrieren.

Ein derartiger Fall wird im Folgenden anhand einer Wurzelfunktion exemplarisch vorgerechnet.

BEISPIEL

Gegeben sei $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$.

Um diese Wurzelfunktion zu integrieren bedarf es der **Substitution**:

I. Man substituiert: $\sqrt[3]{x} = t$ und löst diese anschließend nach x auf.

$$\sqrt[3]{x} = t \rightarrow x = t^3$$

II. Danach leitet man $x = t^3$ nach t ab und erhält

.

III. Die ermittelten Substitute setzt man ein und kürzt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)} \rightarrow \int \frac{3t^2\ dt}{t(t+1)} = 3\int \frac{t\ dt}{t+1}$$

IV. Als nächstes erweitert man den Zähler mit $(+1-1)$ und zerlegt das Integral:

$$3\int \frac{t\ dt}{t+1} = 3\int \frac{t+1-1}{t+1}dt \rightarrow 3\int \frac{t+1}{t+1}dt + 3\int \frac{-1}{t+1}dt$$

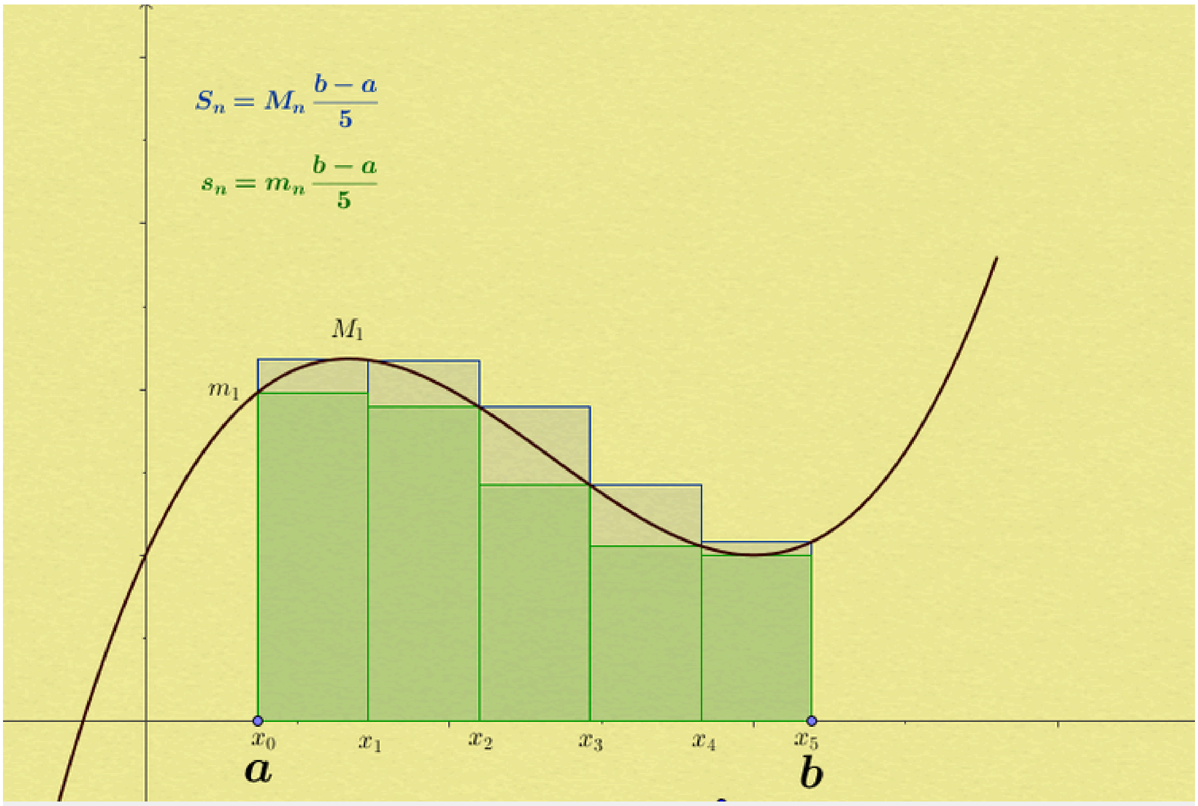
V. Im letzten Schritt kann man die Integrale auflösen und die Funktion rücksubstituieren:

$$3\int dt - 3\int \frac{dt}{t+1} = 3t - 3\ln|t+1| + C \rightarrow 3\sqrt[3]{x} - 3\ln|\sqrt[3]{x}+1| + C$$

Im obigen Beispiel war eine **Partialbruchzerlegung** nicht erforderlich, wird aber nach Bedarf wie bisher erlernt angewandt.

1.2 Bestimmte Integrale

Die geometrische Interpretation eines bestimmten Integrals ist die Fläche unter einem Funktionsgraphen $f(x)$. Das Intervall $[a, b]$ wird dafür in mehrere Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ zerlegt, um den Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen im Intervall $[a, b]$ zu ermitteln.



Bestimmtes Integral

METHODE

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion. Wird das Intervall $[a, b]$ in n gleiche Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ der Länge zerlegt, so existiert für $f(x)$ in jedem Teilintervall sowohl ein **Maximum** M_i als auch ein **Minimum** m_i.

In den Teilintervallen $[x_i, x_{i+1}]$ gilt also stets: $m_i \leq f(x) \leq M_i$

Obersumme und Untersumme

Die $Obersumme$ berechnet sich wie folgt:

Die Obersumme ist die komplette Fläche des Rechtecks. D.h. sowohl der in der obigen Grafik grün gekennzeichnet Bereich, als auch der in der Grafik blau gekennzeichnete Bereich. Die Fläche dieses Rechtecks berechnet sich nach der obigen Formel. Die Summe aus allen Rechtecken ergibt dann die gesamte Obersumme. Allerdings entsteht hier ein kleiner Fehler: Die Obersumme berechnet zu viel (Fläche über dem Graphen).

Die $Untersumme$ berechnet sich:

Die Untersumme hingegen ist nur der mit grün gekennzeichnete Bereich. Die Fläche dieses Rechtecks berechnet sich nach der obigen Formel. Die Summe aus allen Rechtecken ergibt dann die gesamte Untersumme. Allerdings entsteht hier ein ebenfalls ein kleiner Fehler: Die Untersumme berechnet zu wenig. Es fehlt also ein Teil der Fläche.

Fehler beheben

Diese Fehler kann man beheben, indem man unendliche viele Teilintervalle verwendet. Je mehr Rechtecke unter dem Graphen, desto kleiner wird der Fehler.

Das bedeutet also: Lässt man $n \rightarrow \infty$ streben, gehen die Längen der Teilintervalle gegen Null. Ist die Funktion $f(x)$ stetig, so besitzen die Ober- und Untersumme einen gemeinsamen Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} s_n = I$$

Dieser gemeinsame Grenzwert I heißt:

Das **Bestimmte Integral** von a bis b der Funktion

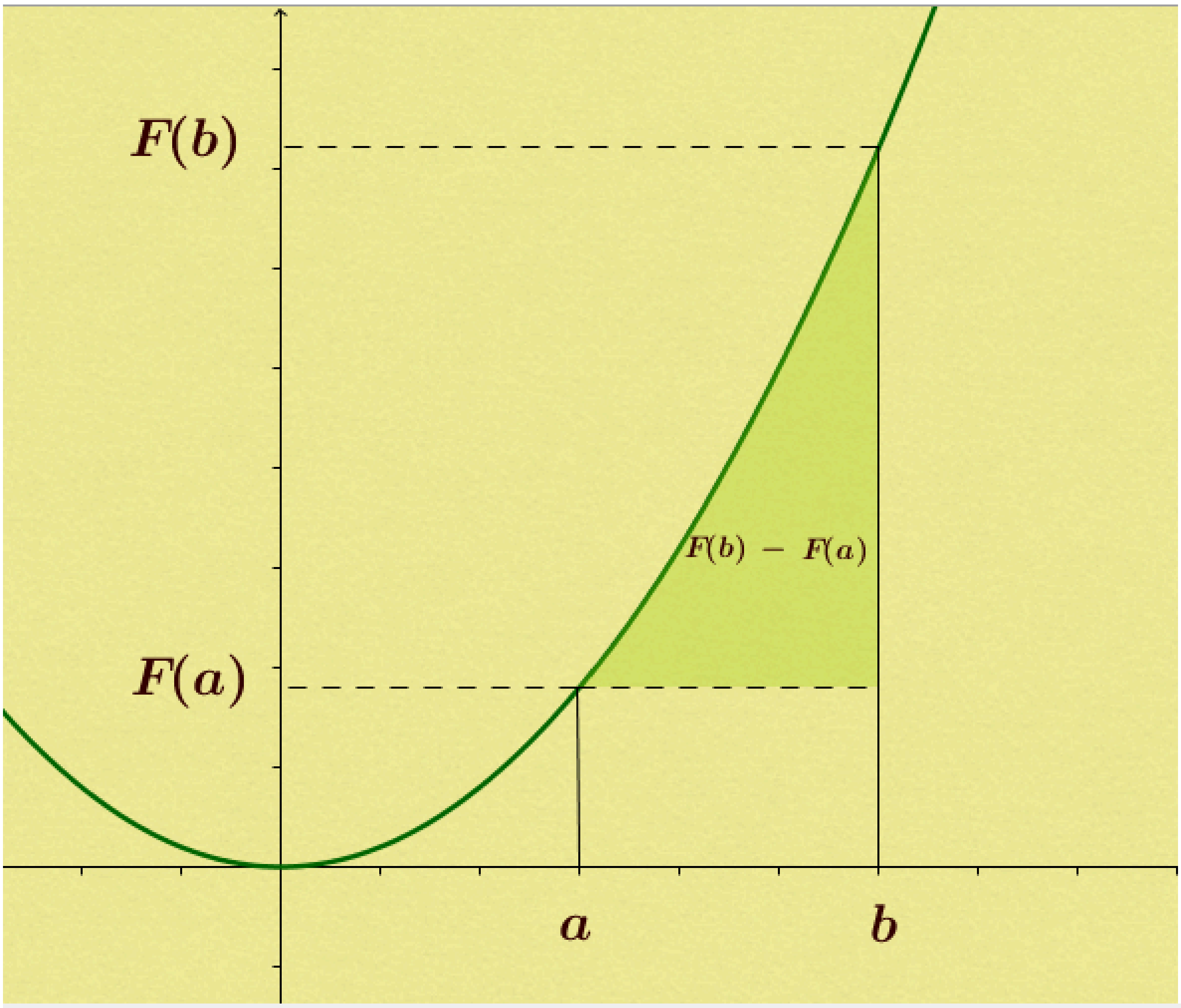
1.2.1 Hauptsatz der Differential - und Integralrechnung

Man greift selten auf die Definition mit dem Grenzwert zurück um ein bestimmtes Integral zu berechnen. Stattdessen verwendet man für die Berechnung bestimmter Integrale einen Satz, welcher auf die Berechnung unbestimmter Integrale zurückzuführen ist:

METHODE

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

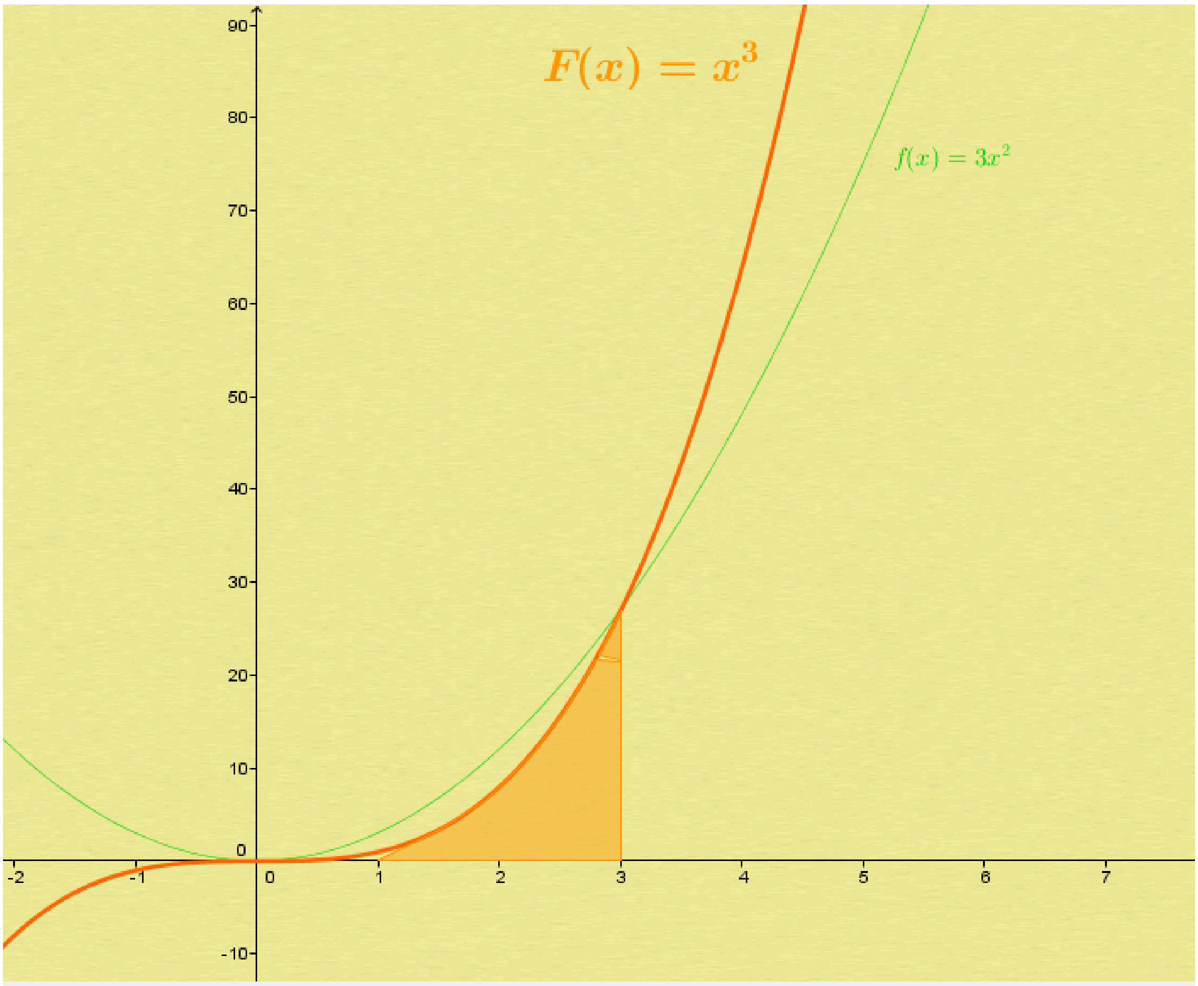
Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, also F so gilt:



Flächenberechnung

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3x^2$. Bestimme das bestimmte Integral im Intervall $[1, 3]$.



Beispiel: Bestimmtes Integral

In der obigen Grafik ist der orange markierte Bereich die Fläche der Funktion im Intervall $[1, 3]$. Diese Fläche liegt bei 26.

BEISPIEL

Gegeben sei die die Funktion: $f(x) = e^x$. Bestimme das bestimmte Integral im Intervall $[0, 1]$.

$$\int_0^1 e^x = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Rechenregeln

Summenregel:

$$\int_a^b f(x)dx \pm g(x)sx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Faktorregel:

Intervalladditivität:

Vertauschen der Integrationsgrenzen:

1.2.2 Integration durch Substitution bei bestimmten Integralen

Bei bestimmten Integralen ist eine Auflösung durch Substitution auf zwei Arten möglich. Das folgende Beispiel soll dies näher verdeutlichen.

Gegeben sei ein bestimmtes Integral $\int_0^2 2x\ e^{x^2}\ dx$, welches integriert werden soll.

1. Mitsubstituieren der Grenzen des bestimmten Integrals

$$\int_0^2 2x\ e^{x^2}\ dx$$

Zuerst substituiert man mit

$$\to\ dx = \frac{dt}{2x}\ .$$

Man erhält:

$$\int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(2)} 2x\ e^t \frac{dt}{2x} = \int_0^4 e^t\ dt = [e^t]_0^4 = e^4 - 1$$

Da x zwischen 0 und 2 läuft, läuft $t = x^2$ zwischen 0 und 4 . Durch das Mitsubstituieren der Grenzen, erspart man sich das Rücksubstituieren von t .

2. Lösen als unbestimmtes Integral und anschließendes Einsetzen der Grenzen

Rücksubstituieren und einsetzen der Grenzen:

Beide Vorgehensweisen liefern ein identisches Ergebnis.

1.2.3 Partielle Integration bei bestimmten Integralen

Die partielle Integration bietet sich an, wenn die Stammfunktion zu u bekannt oder leicht zu berechnen ist und der Integralausdruck auf der rechten Seite einfacher zu berechnen ist.

METHODE

Sei $[a.b]$ ein Intervall und $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt:

BEISPIEL

Gegeben sei das bestimmte Integral: $\int_0^1 e^x \ x \ dx$.

Es gilt:

BEISPIEL

Gegeben sei das bestimmte Integral: .

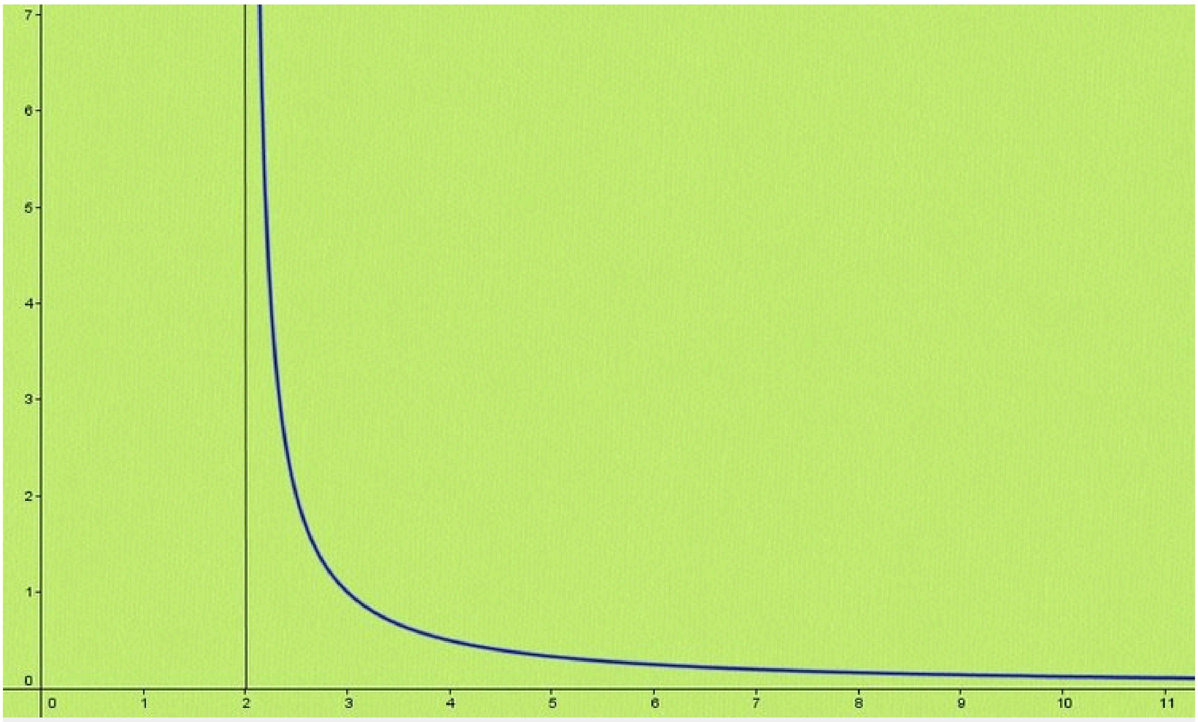
Es gilt:

$$= 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 x\ dx = 0 - \frac{1}{4}[x^2]_0^1 = -\frac{1}{4}$$

1.3 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale unterscheiden sich von anderen Integralen dadurch, dass der Integrand $f(x)$ nur teilweise stetig und folglich beschränkt ist.

Sie werden als **Grenzwerte** von **bestimmten Integralen** definiert und auf gleiche Weise zur Flächenberechnung benutzt. Jedoch erstrecken sich diese Flächen ins Unendliche und besitzen demnach auch keinen endlichen Flächeninhalt.



Uneigentliche Integrale

Wie man in der obigen Grafik erkennt, nähert sich die $Kurve$ der Geraden, die parallel zu y-Achse verläuft, an, berührt sie aber nicht. Dh. es existiert kein Grenzwert und dementsprechend auch kein endlicher Flächeninhalt. Soll jetzt die Fläche im Intervall $[0, 1]$ berechnet werden, kann man nicht einfach das Integral der Funktion $\int_0^1 f(x)$ verwenden, weil $f(x)$ nicht im ganzen Intervall $[0, 1]$ definiert ist.

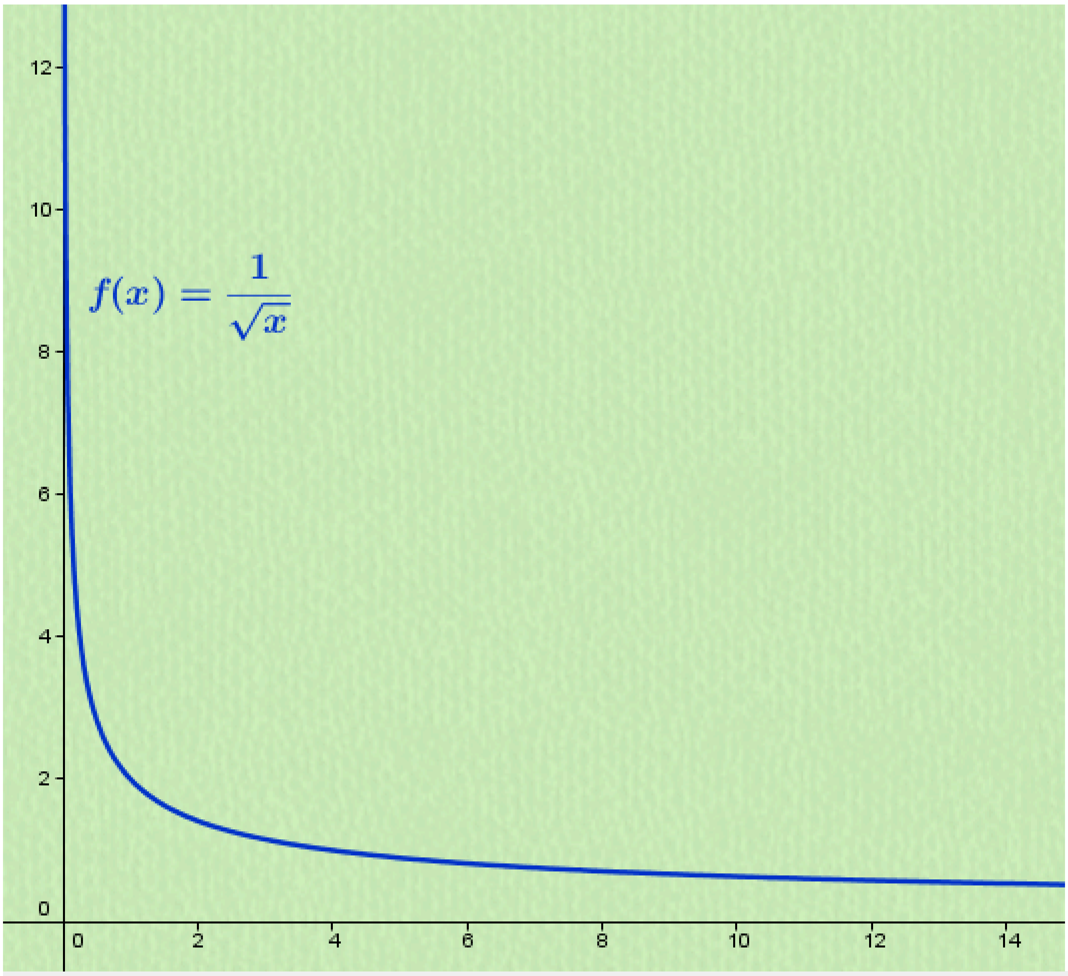
Stattdessen kann man **folgenden Ausdruck** verwenden

$\int\limits_a^1 f(x)$ mit $0 < a < 1$ und den Grenzwert bestimmen $\lim\limits_{a \to 0} \int\limits_a^1 f(x)$.

Existiert ein entsprechender Grenzwert, so nennt man das uneigentliche Integral konvergent, existiert kein Grenzwert spricht man von divergent.

BEISPIEL

Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.



Uneigentliches Integral

Als erstes wird der Flächeninhalt im Intervall $[0, 1]$ bestimmt:

Der Flächeninhalt der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ im Intervall $[0, 1]$ beträgt 2.

Man unterscheidet 2 Typen von uneigentlichen Integralen:

Typ I Integrale mit unbeschränkten Integrationsintervallen

Typ II Integrale mit unbeschränkten Integranden

1.3.1 Uneigentliche Integrale Typ 1

Typ I Integrale mit unbeschränkten Integrationsintervallen

$[a, \infty)$ z.B. $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$

Wie in der obigen Funktion besitzt das Integral vom Typ I immer mindestens eine Integrationsgrenze, die den Wert unendlich hat.
Da das uneigentliche Integral als Grenzwert von bestimmten Integralen definiert ist, besitzt es folgenden Ausdruck:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{r \to \infty} \int_a^r f(x)dx \,.$$

Vorgehensweise

Zuerst ist das Integral $\int_a^r f(x)dx$ in Abhängigkeit von r zu berechnen und von diesem Ergebnis anschließend der Grenzwert für $r \to \infty$ zu bestimmen. Diese Möglichkeit ist jedoch nur gegeben, wenn überhaupt ein Grenzwert existiert.

BEISPIEL

Bestimmte den Grenzwert für das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

1. Entfernung der Wurzel durch Umformung

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^\infty x^{\frac{-1}{2}} dx \,.$$

2. Untersuchung des Grenzwertes

$$\lim_{r\to\infty} \int_1^r x^{\frac{-1}{2}}\, dx \,.$$

3. Berechnung des bestimmten Integral in Abhängigkeit von r

$$\int_1^r x^{\frac{-1}{2}}\, dx = [2x^{\frac{1}{2}}]_1^r = 2\sqrt{r} - 2$$

4. Berechnung des Grenzwertes

daraus ergibt sich, dass das uneigentliche Integral nicht existiert.

Ist hingegen das Intervall auf beiden Seiten unbeschränkt, so zerlegt man dieses an einem gewählten Teilpunkt in zwei Teilintervalle und betrachtet diese anschließend getrennt voneinander. Liefert das Ergebnis, dass beide Teilintegrale einen endlichen Wert besitzen, so existiert auch das Gesamtintervall.

1.3.2 Uneigentliche Integrale Typ 2

Typ II Integrale mit unbeschränkten Integranden

Hierbei handelt es sich um Integrale, deren Integrand $f(x)$ am Rand oder im Innern des Integrationsintervalls $[a, b]$ an mindestens einer Stelle unbeschränkt ist [eine Polstelle besitzt].

Befindet sich die **Polstelle** p **am Rand** b , so ist die Funktion wie folgt :

$\int\limits_a^p f(x)dx$, p ist hier die Polstelle der Funktion $f(x)$.

Als einseitiger Grenzwert von bestimmten Integralen ist das uneigentliche Integral wie folgt definiert:

METHODE

$$\lim_{r\to p, r<p} \int\limits_a^r f(x)dx$$

r nähert sich in diesem Fall ausschließlich von links der "kritischen Stelle" p .

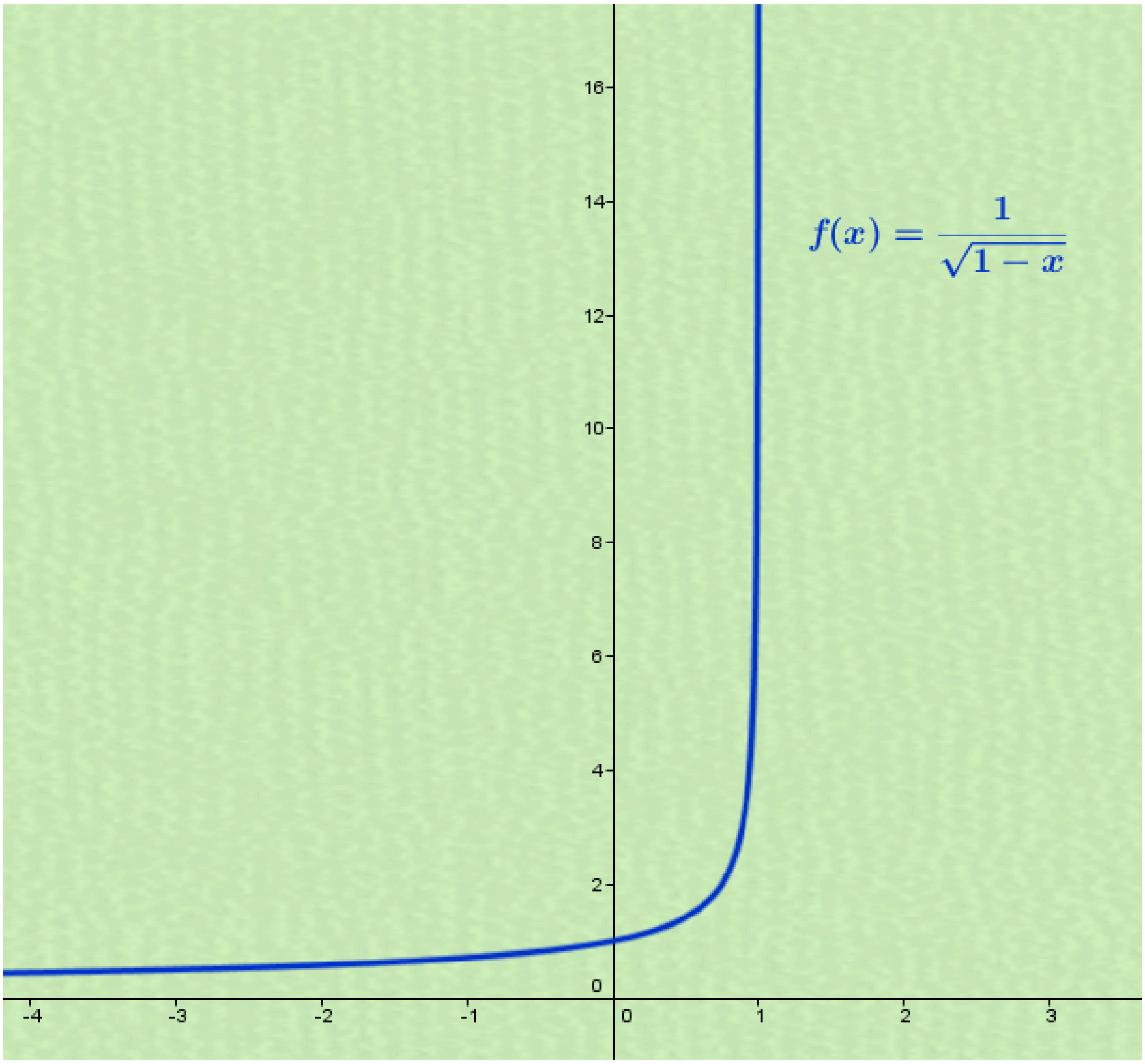
Wäre die untere Integrationsgrenze die Polstelle $p = a$, so würde man sich dem Grenzwert von rechts nähern:

METHODE

$$\lim_{r \to p, r > p} \int_r^b f(x)dx$$

BEISPIEL

Betrachte das Integral: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$.



$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

Es ist direkt ersichtlich, dass $x = 1$ eine kritische Stelle darstellt, da die Wurzel aus Null nicht möglich ist: D.h. die Funktion ist an der Stelle $x = 1$ nicht definiert $\rightarrow$ Polstelle.

1. Umformung der Wurzel

$$\int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx \; .$$

2. Betrachte den einseitigen Grenzwert

3. Berechne das bestimmte Integral

4. Bestimme den Grenzwert

Der Flächeninhalt der Funktion im Intervall $[0, 1]$ beträgt 2 .

Besitzt der Integrand $f(x)$ im Inneren des Integrationsintervalls eine Polstelle p , so muss das Integral an dieser Polstelle $x = p$ erneut in 2 uneigentliche Integrale aufgespalten werden. Hierbei ist $x = p$ für das eine Integral die obere und für das andere Integral die untere Grenze. Auch hier gilt: Liefert das Ergebnis, dass beide uneigentlichen Teilintegrale einen endlichen Wert besitzen, so existiert auch das Gesamtintervall.

Analysis und Lineare Algebra

Formelsammlung

Autor:
Deleted User

ingenieurkurse.de
DIGITALE PRÜFUNGSVORBEREITUNG

INHALTSVERZEICHNIS

1 Formelsammlung

In diesem Kurstext findest du die Formelsammlung zu unserem Online-Kurs ***Höheren Mathematik 1.***

1. Mengenlehre

Zahlenmengen

Bezeichnung	Zeichen	Beispiel
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
Positive ganze Zahlen	$\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, , ...\}$
Negative ganze Zahlen	$\mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \vert p, q \in \mathbb{Z}\}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$ + irrationale Zahlen z.B. π , $\sqrt{2}$ ...

Unterscheidung von Mengen

Bezeichnung	Beispiel	Lösung
leere Menge	$A = \{x \in \mathbb{R} \vert x^2 + 5 = 0\}$	$A = \{\emptyset\}$
nicht leere Menge	$A = \{x \in \mathbb{R} \vert x^2 - 16 = 0\}$	
endliche Menge		$A = \{1, 2, ..., 6\}$
unendliche Menge	$A = \{x \in \mathbb{N} \vert x + 3 > 10\}$	$A = \{8, 9, 10, ..., \infty\}$
abzählbare unendliche Menge	$A = \{x \in \mathbb{N} \vert x + 3 > 3\}$	$A = \{4, 5, 6, ..., \infty\}$
überabzählbare unendliche Menge	$A = \{x \in \mathbb{R} \vert 0 \leq x \leq 1\}$	alle reellen Zahlen zw. 0 und 1
Disjunkte Mengen	$A = \{5, 6, 7\}$ und $B = \{8, 9, 10\}$	keine gemeinsamen Elemente
Äquivalente Mengen	$A = \{5, 6, 7\}$ und $B = \{5, 6, 7\}$	Identische Elemente
Teilmenge	$A = \{5, 6, 7\}$ und $B = \{5, 6, 7\}$	$A \subseteq B$
echte Teilmenge	$A = \{5, 6, 7\}$ und $B = \{5, 6, 7, 8\}$	$A \subset B$

Mengenoperationen

Als Beispiel werden die Mengen , aufgeführt und die Obermenge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Bezeichnung	**Lösung**	**Verbal**
Vereinigung $\cup$	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	Zusammenfassung aller Elemente die in A oder in B oder in beiden vorkommen.
Durchschnitt $\cap$	$A \cap B = \{2, 3\}$	Zusammenfassung aller Elemente die in A **UND** B vorkommen.
Differenz $\setminus$	$A \setminus B = \{1, 5\}$	Zusammenfassung aller Elemente die in A aber nicht in B vorkommen.
	$B \setminus A = \{4, 6, 7\}$	Zusammenfassung aller Elemente die in B aber nicht in A vorkommen.
Komplementärmenge	$\overline{A} = \{0, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$.	Zusammenfassung aller Elemente aus einer gegebenen Grundmenge M , die nicht zur Menge A gehören.
	$\overline{B} = \{0, 1, 5, 8, 9, 10\}$	Zusammenfassung aller Elemente aus einer gegebenen Grundmenge M , die nicht zur Menge B gehören.

Rechenregeln für Mengen

Bezeichnung	Formal	Verbal
Kommutativgesetz	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Argumente einer Operation können vertauscht werden, ohne dass sich am Ergebnis etwas ändert. Gültig für: Vereinigung und Durchschnitt
Assoziativgesetz	$(A \cap B) \cap C = (B \cap C) \cap A = \ldots$ $(A \cup B) \cup C = (B \cup C) \cup A = \ldots$	Verkettung von mathematischen Operationen können in jeder beliebigen Reihenfolge durchgeführt werden, ohne dass sich am Ergebnis etwas ändert. Gültig für: Vereinigung und Durchschnitt
Distributivgesetz	$A \cap (B \cup C) \leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) \leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \backslash C) \leftrightarrow (A \cap B) \backslash (A \cap C)$	Vereinfachte Darstellung bei der Verkettung von Operationen, ohne dass sich am Ergebnis etwas ändert. Gültig für: Vereinigung, Durchschnitt und Differenz
Regeln von de Morgan	$\overline{(A \cup B)} \leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} \leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B}$	Regel die angewandt werden kann um auch hier eine vereinfachte Darstellung zu erhalten.

2. Reelle Zahlen

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ umfassen sowohl die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (als Bruch darstellbar; endlich oder periodisch) , sowie die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (nicht als Bruch darstellbar; unendlich viele, nicht periodische Nachkommastellen).

BEISPIEL

Bekannte Beispiele für **irrationale Zahlen** sind $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ und die Kreiszahl $\pi = 3,1415\ldots$ denn diese sind nicht als Bruch darstellbar und haben unendlich viele, nicht periodische Nachkommastellen. Hingegen ist $\frac{1}{3}$ als Bruch darstellbar und periodisch und gehört deswegen den **rationalen Zahlen** an.

Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$ = { x | x ist eine rationale oder irrationale Zahl}
Reelle Zahlen ohne Null	$\mathbb{R}^*$ = { x | x $\neq$ 0 und x $\in$ $\mathbb{R}$ }
Nicht negative reelle Zahlen	$\mathbb{R}_+$ = { x | x $\geq$ 0 und x $\in$ $\mathbb{R}$ }
Positive reelle Zahlen	$\mathbb{R}_+^*$ = { x | x > 0 und x $\in$ $\mathbb{R}$ }
Nicht positive reelle Zahlen	$\mathbb{R}_-$ = { x | $\leq$ 0 und x $\in$ $\mathbb{R}$ }
Negative reelle Zahlen	$\mathbb{R}_-^*$ = { x | x < 0 und x $\in$ $\mathbb{R}$ }

Ungleichungen

strikte Ungleichung	$x < y\ ,\ x ><$
nicht strikte Ungleichung	$x \leq y\ ,\ x \geq y$

MERKE

WICHTIG: Bei der Multiplikation bzw. Division einer Ungleichung mit einer negativen Größe, kehrt sich das Ungleichzeichen um.

Einfache Ungleichungen

$-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x \leq -\frac{4}{3}$: Wie bei Gleichungen nach x auflösen. Bei Multiplikation mit negativer Größe das Ungleichzeichen umdrehen. Ergebnis: $x \geq \frac{8}{5}$. Angabe der Lösungsmenge: $\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{8}{5}\}$.

Bruchungleichungen

$$\frac{3x+1}{x-2} < 2$$

1. Zunächst wird der Nenner betrachtet. Da hier bei $x = 2$ dieser Null wird und durch Null nicht geteilt werden darf, muss hier $x = 2$ als Lösung ausgeschlossen werden: $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$

2. Es wird dann als nächstes alles auf eine Seite gebracht:

$$\frac{3x+1}{x-2} - 2 < 0$$

$$\frac{3x+1}{x-2} - \frac{2}{1} < 0$$

3. Und alles auf einen Nenner gebracht:

$$\frac{(3x+1) \cdot 1}{(x-2) \cdot 1} - \frac{2(x-2)}{1 \cdot (x-2)} < 0$$

$$\frac{3x+1-2(x-2)}{(x-2)} < 0$$

$$\frac{3x+1-2x+4}{(x-2)} < 0$$

$$\frac{x+5}{(x-2)} < 0$$

4. Fallunterscheidung vornehmen:

Da $x \neq 2$ muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden. Zum einen für $x < 2$ und zum anderen für $x > 2$.

Für den Fall, dass $x > 2$ in den Nenner eingesetzt wird, wird der Nenner positiv.

Für den Fall, dass $x < 2$ in den Nenner eingesetzt wird, wird der Nenner negativ.

Es wird nun die obige Gleichung mit dem Nenner auf beiden Seiten multipliziert:

$$\frac{x+5}{(x-2} < 0 \qquad | \cdot (x-2)$$

4a) Es wird nun zunächst die Lösungsmenge für $x > 2$ geprüft. Dort wurde der Nenner positiv. Hier wird wie bei den obigen Ungleichungen vorgegangen. Da mit einem positiven Wert multipliziert wird, bleibt die Ungleichung bestehen:

$$x + 5 < 0$$

$$x < -5$$

Diese Ungleichung ist für $x > 2$ nicht erfüllbar. Werden Werte größer als 2 eingesetzt, so resultiert niemals ein Wert kleiner als -5. Diese Lösungsmenge ist leer.

4b) Als nächstes wird die Lösungsmenge für $x < 2$ geprüft. Hier wird der Nenner negativ. Es wird also mit einem negativen Wert multipliziert und demnach muss das Ungleichzeichen umgedreht werden:

$$x + 5 > 0$$

$$x > -5$$

Für $x < 2$ kann die Ungleichung erfüllt werden:

$$\{x \in \mathbb{R} | -5 < x < 2\}$$

Betragsungleichungen

$$4|3 - x| - |x + 5| \leq 3$$

1. Der Betragsterm $|3 - x|$ wechselt bei (auflösen nach x) $x = 3$ sein Vorzeichen. Das bedeutet also bei $x > 3$ wird der Betragsterm negativ, wohingen bei $x < 3$ der Betragsterm positiv wird.

2. Der Betragsterm $|x + 5|$ wechselt bei $x = -5$ sein Vorzeichen. Das bedeutet, dass bei $x > -5$ der Betragsterm positiv wird und bei $x < -5$ negativ.

3. Es werden nun die folgenden Fälle betrachtet:

1. Fall: $x < -5$, 2. Fall: $-5 \leq x < 3$, 3. Fall: $x \geq 3$

4. Fallunterscheidung vornehmen:

4a) 1.Fall: $x < -5$

$$4(3 - x) - (-(x + 5)) \leq 3$$

Bei $x < -5$ wird der 1 Betragsterm positiv und der 2. Betragsterm negativ. (Ungleichheitszeichen muss bei der Umformung umgedreht werden).

$$x \geq \frac{14}{3}$$

Da für $x < -5$ die Ungleichung nicht erfüllt werden kann, ist die Lösungsmenge leer.

4b) 2. Fall: $-5 \leq x < 3$

$$4(3-x)-(x+5) \leq 3$$

Bei $-5 \leq x < 3$ wird der 1 Betragsterm positiv und der 2. Betragsterm positiv. (Ungleichheitszeichen muss bei der Umformung umgedreht werden).

$$x \geq \frac{4}{5} = 0,8$$

Unter der Voraussetzung $-5 \leq x < 3$ erhält man als Teillösung:

$$\{x \in \mathbb{R} | 0,8 \leq x < 3\}$$

4c) 3. Fall: $x \geq 3$

$$4(-(3-x))-(x+5) \leq 3$$

Bei $x \geq 3$ wird der 1 Betragsterm negativ und der 2. Betragsterm positiv. (Ungleichheitszeichen wird bei der Umformung nicht umgedreht).

$$x \leq \frac{20}{3}$$

Es existiert auch hier eine Lösung, da $x \geq 3$ und $x \leq \frac{20}{3} = 6,67$ eine Lösung angeben:

$$\{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x \leq 6,67\}$$

Intervalle

Bezeichnung	Beispiel	Beschreibung
Offenes Intervall	$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \| a < x < b\}$	Beinhaltet die Randpunkte a und b nicht.
Geschlossenes Intervall	$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \| a \leq x \leq b\}$	Beinhaltet die Randpunkt a und b
Halboffenes Intervall	$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \| a < x \leq b\}$	Beinhaltet den Randpunkt a nicht, aber den Randpunkt b.
	$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \| a \leq x < b\}$	Beinhaltet den Randpunkt a aber nicht den Randpunkt b.
Unendliches Intervall	$(-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \| x \leq a\}$	Geschlossene rechte Grenze und eine linke unendliche Grenze.
	Analog dazu $(-\infty,b)$ und (a,∞).	Geschlossene linke Grenze und eine rechte unendliche Grenze.

Supremum, Infimum, Maximimum, Minimum

Supremum ist die obere Schranke eines Intervalls. Es ist auch gleichzeitig das Maximum, wenn es sich um eine geschlossene rechte Grenze des Intervalls handelt.

Infimum ist die untere Schranke eines Intervalls. Es stellt auch glechzeitig ein Minimum dar, wenn es sich um eine geschlossene lonke Grenze des Intervalls handelt.

Intervall	
$[4, 8]$	4 Infimum, Minimum 8 Supremum, Maximum
$(4, 8)$	4 Infimum 8 Supremum
$(4, 8]$	4 Infimum 8 Supremum, Maximum

4Infimum, Minimum < /p >< p > 8 - |a| \le a \le |a| |-a| = |a| |ab| = |a||b| |\frac {a}
{b}| = \frac {|a|} {|b|} falls b \not\in 0 |a| \le b \leftrightarrow -b \le a \le b A(1) n=1

< br >< br > 2.Induktionsschritt : A(n+1) n > 1 folgtaus A(n) dieAussage
A(n+1) 1 + 2 + 3.... + n = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i = 1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}

< br >< br >< /p >< p >< strong > 1.Induktionsschritt :< /strong >
/p >< p >

i = 1 , n = 1 . < /p >< p > (linkeSeite) : \sum_{i = 1}^1 i = 1

< /p >< p > (rechteSeite) : \frac{1(1+1)}{2} = 1 i = 2: \sum_{i = 1}^2 1+2 = 3 und
\frac{2(2+1)}{2} = 3 [Aussagestimmt] < /p >< p > i = 3: \sum_{i = 1}^3
1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6 i = 2,3,4,... stattdessen i = n + 1 i = n + 1 :< /p >< p >
\sum_{i = 1}^{n+1} i

< /p >< p >< br > Dieskannmanauchschreibenzu :< /p >< p > = \sum_{i =
1}^n i + (n + 1) < /p >< p > Eswirddemnachvon i = 1, ..., n n+1
hintendraufaddiert. < br >< br >< /p >< p > Einsetzenvon : \sum_{i = 1}^n
i = \frac{n(n+1)}{2} :< /p >< p > = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) < /p >< p >
= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n + 1)}{2} < /p >< p > = \frac{n(n+1) + 2(n + 1)}{2}
< /p >< p > = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} n = n+1 eingesetzt :< /p >< p > \frac{(n + 1) (n
+ 1 + 1)}{2} < /p >< p > = \frac{(n + 1) (n + 2)}{2} < /p >< p > = \frac{(n^2 + 2n + n + 2}{2}

[4, 8)

< /p >< p > = \frac{(n^2 + 3n + 2}{2} \begin{equation} n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n < 2 \\
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n & \text{für } n \ge 2 \end{cases} \end{equation}
< /p >< p > Beispiele :< /p >< p > 0! = 1 < /p >< p > 1! = 1 < /p >< p >
2! = 2 \cdot 1 = 2 < /p >< p > 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6

< /p >< h3 > Binominalkoeffizient < /h3 >< p > {n \choose k} := \frac{n!}{k!(n-
k)!} < /p >< p > Esgilt :< /p >< p > (1) {n \choose 0} = 1 , {n \choose n} = 1
. < /p >< p > (2) {n \choose k} + {n \choose k-1} = {n+1 \choose k} {n \choose k} n
Elementengenau k {49 \choose 6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49!}{6!43!} < /p >< p >
=\frac{\not1*\not2*\not3*...*\not43*44*45*46*47*48*49}{(1*2*3*...*5*6)(\not1*\not2*\not3*...*\not43)} =
\frac{44*45*46*47*48*49}{1*2*3*...*5*6} = 13.983.816 (0,0)
undzeigenaufeinenbestimmtenPunkt.Z.B.beginntderVektor \vec{a} = (4,3)
imUrsprungundzeigtaufdenPunkt A(4,3)
. < /p >< tableborder = "0" >< tbody >< trstyle = "height :
48px;" >< tdstyle = "text − align : center; height : 48px;" >< p >
AdditionvonVektoren < /p >< /td >< tdstyle = "text−align : center; height
48px;" >< p >
\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 -
b_3)
< /p >< /td >< /tr >< trstyle = "height : 107.625px;" >< tdstyle =
"text−align : center; height : 107.625px;" >< p >< br >< br > SkaliereneinesVektor

\vec{a}

< /p >< /td >< tdstyle = "text−align : center; height : 107.625px;" >< p >

s \cdot \vec{a} < /p >< p > s > 0 0 < s < 1 Vektorwirdkleiner < /p >< p > s< 0 \vec{a}

< /p >< /td >< tdstyle = "text − align : center; height : 48px;" >< p >

|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}

< /p >< /td >< /tr >< trstyle = "height : 85px;" >< tdstyle = "text−align : center; height : 85px;" >< p > BerechnungdesEinheitsvektors < /p >< p > zueinemVektor

\vec{a}

< /p >< /td >< tdstyle = "text − align : center; height : 85px;" >< p >< br >

\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} A und B

. < /p >< /td >< tdstyle = "text − align : center; height : 122px;" >< p > DieOrtsvektorenzudenPunkten

A und B sind :< /p >< p > \vec{a} und \vec{b} . < /p >< p > \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} < /p >< p > \vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}

< /p >< /td >< /tr >< trstyle = "height : 35px;" >< tdstyle = "text − align : center; height : 35px;" >< p > Dreiecksungleichung < /p >< /td >< tdstyle = "text − align : center; height : 35px;" >< p >

|\vec{a}| + |\vec{b}| \ge |\vec{a} + \vec{b}|

< /p >< /td >< /tr >< trstyle = "height : 135px;" >< tdstyle = "text−align : center; height : 135px;" >< p >< br >< br > Skalarprodukt < /p >< /td >< tdstyle = "text − align : center; height : 135px;" >< p >

\vec{a} \cdot \vec{b} \begin{cases}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos (\varphi) & \text{für} \; \; \vec{a}, \vec{b} \neq 0 \\ \; 0 & \text{für} \; \; \vec{a} = \vec{0 } \; \text{oder} \; \vec{b} = \vec{0} \end{cases}

< /p >< p > bzw. < br >< br >< /p >< p > \vec{a} \cdot \vec{b} =|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos (\varphi) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3

< /p >< /td >< /tr >< trstyle = "height : 87px;" >< tdstyle = "text−align : center; height : 87px;" >< p >< br > WinkelberechnungzwischenzweiVektoren < br >< br >< /p >< /td >< tdstyle = "text − align : center; height : 87px;" >< p >< br >

\cos (\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}

< /p >< /td >< /tr >< trstyle = "height : 96px;" >< tdstyle = "text − align : center; height : 96px;" >< p > OrthogonaleZerlegungvon

\vec{a} \vec{b}

< /p >< /td >< tdstyle = "text − align : center; height : 96px;" >< p >

\vec{x} = \vec{a} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b}

< /p >< p > mit < /p >< p > s = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}$

Vektorprodukt	xx
Spatprodukt	xx

HINWEIS

Hier endet die Formelsammlung und auch der Kurs Höhere Mathematik 1.

Ich wünsche dir viel Erfolg für deine Prüfung und dein Studium.

Jessica