Höhere Mathematik 1

Aufgabe 6)

Injektivität bedeutet, dass jedes Element der Zielmenge höchstens einmal als Funktionswert angenommen wird. Es werden also keine zwei verschiedenen Elemente der Definitionsmenge auf dasselbe Element der Zielmenge abgebildet.

f(x) ist injektiv, wenn:
$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Sujektivität bedeutet, dass jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert angenommen wird, also mindestens ein Urbild hat. Bild- und Zielmenge stimmen überein.

f(x) ist surjektiv, wenn:
$\forall y \in \Upsilon \; \exists \; x \in X : f(x) = y$

Bijektivität: Eine Funktion ist bijektiv, wenn von dieser verschiedene Elemente des Definitionsbereichs auf verschiedene Elemente der Zielmenge abgebildet wird (Injektivität), und zusätzlich jedes Element der Zielmenge als Funktionswert auftritt (Surjektivität).

$f(x)$ ist bijektiv, wenn $f(x)$ injektiv und surjektiv ist.

a)
Für $\forall x \in A$ existiert nur ein $y \in B \Rightarrow f(x)$ ist injektiv.

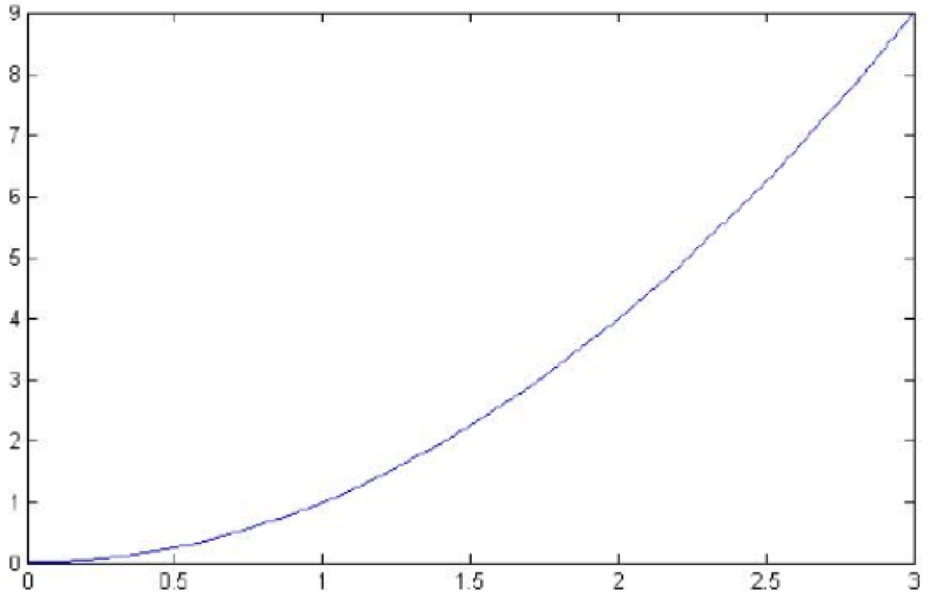


Abbildung 1

Für $\forall x \in A : f(x) \neq y \in B$ für $B := \{y \in \mathbb{R}| -9 \leq y < 0\} \Rightarrow f(x)$ ist nicht surjektiv.

b) Für $\forall x \in A$ existiert nur ein $y \in B \Rightarrow f(x)$ ist injektiv.

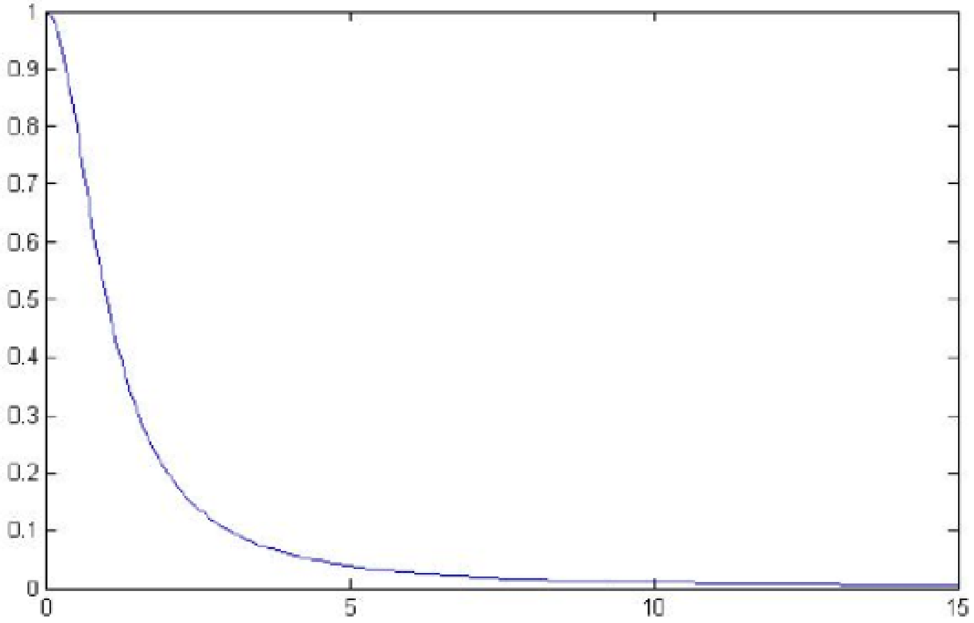
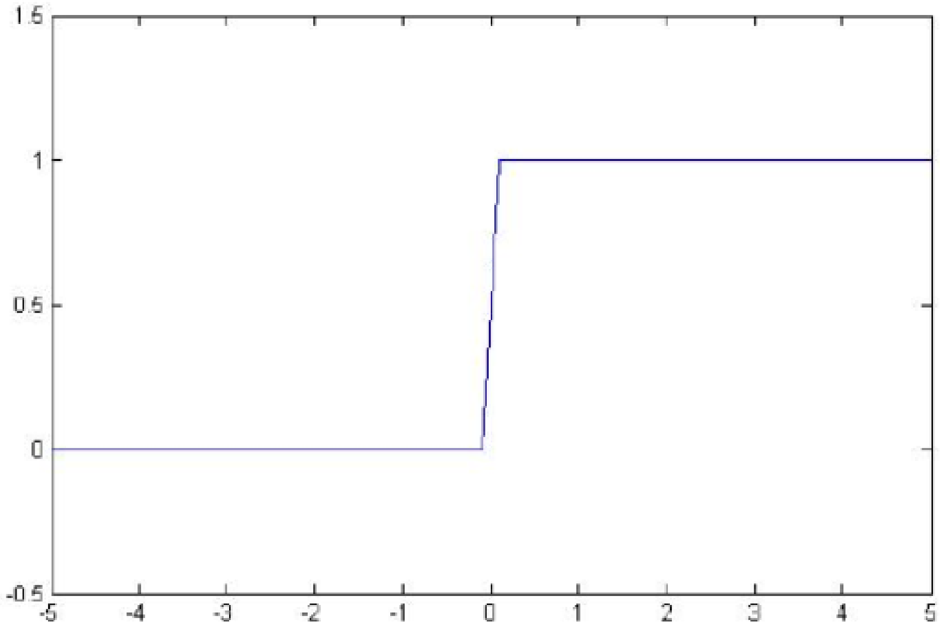


Abbildung 2

Für $\forall x \in A : f(x) = y \in B \Rightarrow f(x)$ ist surjektiv.

f(x) ist injektiv und surjektiv $\Rightarrow$ f(x) ist bijektiv.

c)



Für $\forall x \in A$ existieren mehr als ein $y \in B \Rightarrow f(x)$ ist nicht injektiv.

Für $\forall x \in A : f(x) \neq y \in B$ für $B := \{y \in \mathbb{N}_0 | y > 1\} \Rightarrow f(x)$ ist nicht surjektiv.

d) Für $\forall x \in A$ existieren mehr als ein $y \in B \Rightarrow f(x)$ ist nicht injektiv.

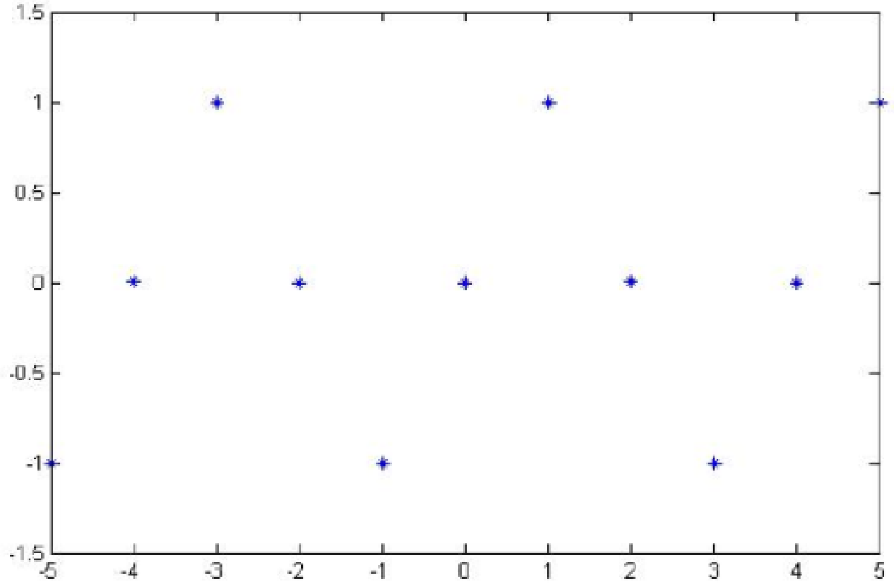


Abbildung 3

Für $\forall x \in A : f(x) = y \in B \Rightarrow f(x)$ ist surjektiv.

a) Gegeben ist die Funktion f durch

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow f(\mathbb{R}^+) =]0{,}2[; \qquad y = f(x) = 2e^{-x^2}$$

Gesucht ist die Umkehrfunktion von f $g :]0{,}2[\longrightarrow \mathbb{R}^+; \qquad g(y) = x$

$$\begin{aligned} y &= 2e^{-x^2} \\ \ln\left(\frac{y}{2}\right) &= -x^2 \\ -\ln\left(\frac{y}{2}\right) &= x^2 \\ \ln\left(\frac{2}{y}\right) &= x^2 \\ \sqrt{\ln\left(\frac{2}{y}\right)} &= x = g(y) \end{aligned}$$

b)

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+; \qquad y = f(x) = 2e^{-x^2}$$

Gesucht ist die Umkehrfunktion von f $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+; \qquad g(y) = x$

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \\ e^y &= \frac{1+x}{x} \\ xe^y - x &= 1 \\ x &= \frac{1}{e^y - 1} = g(y) \end{aligned}$$

Aufgabe Beweisverfahren

a)

Angenommen $2ab > a^2 + b^2$

$$\Rightarrow 0 > a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Dies ist ein Widerspruch, da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. q.e.d

Aufgabe Beweisverfahren

b)

$$\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt[3]{a^3+b^3}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2)^3 > (a^3+b^3)^2$$

$$\Leftrightarrow a^6+2a^4b^2+a^2b^4+a^4b^2+2a^2b^4+b^6 > a^6+2a^3b^3+b^6$$

$$\Leftrightarrow 3a^4b^2+3a^2b^4 > 2a^3b^3$$

$$\overset{a\neq 0, b\neq 0}{\Leftrightarrow} 3(a^2+b^2) > 2ab$$

nach Aufgabe a) gilt $a^2+b^2 > 2ab$, insbesondere also auch $3(a^2+b^2) > 2ab$. Hieraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 14

a)

Behauptung:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

Aufgabe 14

a)

Beweis per Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$

$$1^3 = 1 = 1^2$$

Induktionsvoraussetzung: Formel gelte für beliebiges, aber fest $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: $n \mapsto n + 1$
Es wird vorausgesetzt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{0.1}$$

Aufgabe 14

a)

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} +(n+1)^3 \overset{(IV)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 + (n+1)^3$$

$$\overset{(1)}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} - \frac{4n^3+12n^2+12n+4}{4}$$

$$= \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}$$

$$= \frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2$$

b)

Behauptung:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(2n^2+6n+4)}{6} = \frac{n(n^2+3n+2}{3}, \quad n \geq 1$$

Beweis per Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 \cdot 2 = \frac{1(2+6+4)}{6} = 2$$

Induktionsvoraussetzung: Formel gelte für beliebiges, aber fest $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) &= \sum_{i=1}^{n} i(i+1) + (n+1)(n+2) \\
&\overset{(IV)}{=} \frac{n((n^2+3n+2)+3(n+1)(n+2))}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+3)(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+5n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)2((n+1)^2+3(n+1)+2))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2(n+1)^2+6(n+1)+4))}{6}
\end{aligned}$$

c)

Behauptung:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Beweis per Induktion:

Induktionsanfang: $n = 0$

$$q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q}$$

Induktionsvoraussetzung: Formel gelte für beliebiges, aber fest $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} \overset{(IV)}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

d)

Behauptung:

$$n^3 - 6n^2 + 14 \text{ ist durch 3 teilbar}$$

Beweis per Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 - 6 + 14 = 9 \equiv 0 \mod 3$$

Induktionsvoraussetzung: Formel gelte für beliebiges, aber fest $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \mapsto n + 1$

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 14(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 6(n^2 + 2n + 1) + 14n + 14 \\ &= n^3 - 6n^2 + 14n - 3n^2 - 9n + 9 \\ &= \underbrace{n^3 - 6n^2 + 14n}_{\text{nach (IV)}} - \underbrace{3(n^2 - 3n + 3)}_{\text{wegen des Faktors 3}} \equiv 0 \mod 3\end{aligned}$$

Aufgabe 15)

$P(A) = \{U | U \subseteq A\}$

Behauptung: Die Anzahl der Elemente von $P(A)$ ist 2^n

Induktionsanfang: $n = 0 \Rightarrow P(\emptyset) = \{\emptyset\} = 2^0 = 1$

Induktionsvoraussetzung: Wenn die Menge A n Elemente hat, dann gilt $P(A) = 2^n$

Induktionsbehauptung: Wenn die Menge A (n+1) Elemente hat, dann gilt $P(A) = 2^{n+1}$

Beweis: Es sei A eine Menge mit n+1 Elementen und $x \in A$

$$P(A) = \{U|U \subseteq A\backslash\{x\}\} \cup \{U|U \subseteq A \cap x \in A\}$$

Laut Induktionsvoraussetzung hat die erste Menge 2^n Elemente. Für die zweite Menge gilt, dass man jedes Element der ersten Menge mit x vereinigen kann, wodurch dies ein Element der zweiten Menge wird. Somit hat die zweite Menge auch 2^n Elemente.

$$\Rightarrow P(A) = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

1b)

(i)

$$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x-1}=1, \qquad x \in D$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2x-4}-\sqrt{x-1}=1 && D=[2,\infty[\\
\Longleftrightarrow\quad & \sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x-1} && D=[2,\infty[\\
\Longleftrightarrow\quad & 2x-4=(1+\sqrt{x-1})^2 && D=[2,\infty[\\
\Longleftrightarrow\quad & 2x-4=1+2\sqrt{x-1}+x-1 && D=[2,\infty[\\
\Longleftrightarrow\quad & \underbrace{x-4}_{<0 \text{ für } x<4} = 2\sqrt{x-1} && D=[2,\infty[\\
\Longleftrightarrow\quad & x^2-8x+16=4x-4 && D=[4,\infty[\\
\Longleftrightarrow\quad & x^2-12x+20=4x- && D=[4,\infty[\\
\Longleftrightarrow\quad & x=10 \vee \underbrace{x=2}_{x\notin D} && D=[4,\infty[
\end{aligned}$$

2

Behauptung:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad a_k \in \mathbb{R}$$

Beweis durch vollständige Induktion nach n:

(IA)

$n = 1$ trivial

Da wir den Fall $n = 2$ in Induktionsschritt benutzen wollen, beweisen wir ihn:

$$\underbrace{|a_1 + a_2|}_{>0} \leq \underbrace{|a_1| + |a_2|}_{>0} \qquad |()^2 \qquad (0.2)$$

$$\iff \qquad a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \leq a_1^2 + 2|a_1a_2| + a_2^2 \qquad | - a_1^2 - a_2^2$$

$$\iff \qquad 2a_1a_2 \leq 2|a_1a_2| \checkmark$$

2

Behauptung:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad a_k \in \mathbb{R}$$

(IV)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad a_k \in \mathbb{R} \qquad \text{für} n \in \mathbb{N}$$

(IS) $n \to n+1$

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k \overset{(2)}{\leq}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{k+1}| \overset{(IV)}{\leq} \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

Aufgabe 16

a)

Fallunterscheidung..
Menge der Lösungen $= \{-\sqrt{3}-1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

b)

$$\sqrt{7x+7} = \sqrt{3x-1} + \sqrt{4x+8} \ \forall x \geq \tfrac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow 7x+7 = 3x-1+2\cdot\sqrt{4x+8}\cdot\sqrt{3x-1}+4x+8$$
$$\Leftrightarrow 0 = 2\cdot\sqrt{4x+8}\cdot\sqrt{3x-1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+8} = 0 \vee \sqrt{3x-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \tfrac{1}{3}$$

Aufgabe 18

a

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$
$$\Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \tag{0.3}$$

Analog

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|$$
$$\Rightarrow |y| - |x| \leq |x - y| \tag{0.4}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

b

Behauptung

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{(k+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n-k+k+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 22)

a)

$$\left|\frac{z+2}{z+1}\right| = 2$$

$$\left|\frac{x+yi+2}{x+yi+1}\right| = 2 \qquad \cdot\, |x+iy+1|$$

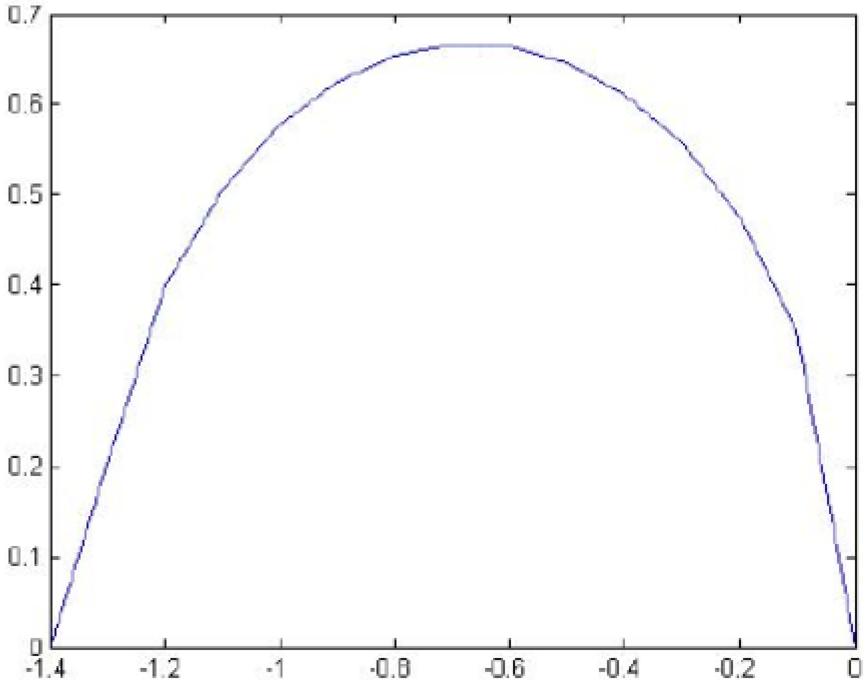
$$|x+yi+2| = 2\cdot|x+yi+1|$$

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 2\cdot\sqrt{(x+1)^2+y^2} \qquad ()^2$$

$$x^2+4x+4+y^2 = 4x^2+8x+4+4y^2$$

$$-3y^2 = 3x^2+4x$$

$$y = \sqrt{-x^2-\frac{4}{3}x}$$



b)

$$Im(\frac{x+yi+1}{2x+2yi}) \geq 0$$

$$Im(\frac{x+yi+1}{2x+2yi} \cdot \frac{2x-2yi}{2x-2yi}) \geq 0$$

$$Im(\frac{2x^2+2x+2y^2-2yi}{4x^2+4y^2}) \geq 0$$

$$\frac{-2y}{4x^2+4y^2} \geq 0$$

$$-2y \geq 0$$

$$y \leq 0$$

c)

$$z^5 = 32i$$

$$r = \sqrt{32^2} = 32$$

$$sin\varphi = \frac{Im(32i)}{r} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z_k = \sqrt[5]{32} \cdot e^{(\frac{\pi}{10}i + \frac{2\pi k}{5}i)} \qquad k = 0{,}1 \ldots 4$$

$$z_k = 2 \cdot e^{(\frac{\pi}{10}i + \frac{2\pi k}{5}i)} \qquad k = 0{,}1 \ldots 4$$

Aufgabe 24

a)

$z^7 - z = 0$
$\Leftrightarrow z \cdot (z^6 - 1) = 0$
$\Leftrightarrow z_1 = 0 \wedge (z^6 - 1) = 0$
$\Leftrightarrow z_1 = 0 \wedge z^6 = 1$
$\Leftrightarrow z_1 = 0 \wedge z_k = \sqrt[7]{|1|} \cdot (cos(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{7}) + i \cdot sin(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{7}))k = 0{,}1, \ldots ,5$

Aufgabe 24

a)

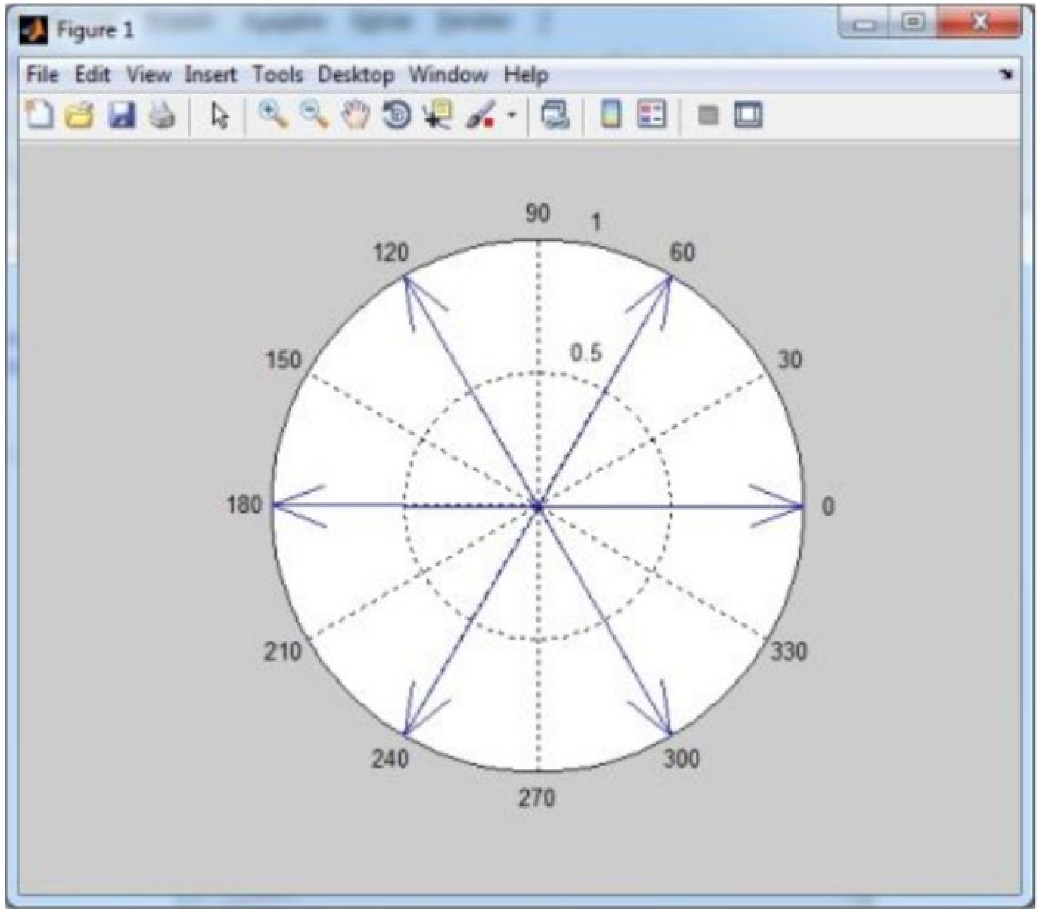


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
90
1
120
60
0.5
150
30
180
0
210
330
240
300
270

Aufgabe 26

a)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien zwei Nullfolgen. Dann gilt:

1. $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.
2. $(a_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist Nullfolge.
3. $(c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c \in \mathbb{R}$ ist Nullfolge.

Beweis:

1. Sei $\varepsilon > 0$.
   $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien zwei Nullfolgen.

$$\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > N : |a_n| < \sqrt{\varepsilon}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > N : |b_n| < \sqrt{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \qquad \exists N = \max\{N_1, N_2\} \quad \forall n > N : |a_n \cdot b_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

2. Sei $\varepsilon > 0$
   $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Nullfolge und $k \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \qquad \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : |a_n| < \sqrt[k]{\varepsilon}$$
$$\Rightarrow \qquad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n^k| = |a_n|^k < \sqrt[k]{\varepsilon}^k = \varepsilon$$

   Ein Beweis durch vollständige Induktion ist auch möglich, wobei im Induktionsschritt der Induktionsanfang, die Induktionsvorrausetzung und Teilaufgabe (26a 1.) benutzt werden.

3. Sei $|c|\varepsilon > 0$
   $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Nullfolge und $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : |a_n| < \varepsilon \\ \Rightarrow \quad & |c \cdot a_n| = |c| \cdot |a_n| < |c| \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Aufgabe 27)

a)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-5n+6}-n \qquad \cdot \frac{\sqrt{n^2-5n+6}+n}{\sqrt{n^2-5n+6}+n}$$

$$= \frac{n^2-5n+6-n^2}{\sqrt{n^2-5n+6}+n}$$

$$= \frac{-5n+6}{n\cdot\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}+n} \qquad : \frac{n}{n}$$

$$= \frac{\frac{-5n}{n}+\frac{6}{n}}{\frac{n}{n}\cdot\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}+\frac{n}{n}}$$

$$= -\frac{5}{2}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}n^3+4n^2-9}{2n^3+\frac{1}{4}n+11} \qquad : \frac{n^3}{n^3}$$

$$= \frac{\frac{1n^3}{3n^3}+\frac{4}{n}-\frac{9}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3}+\frac{1}{4n^2}+\frac{11}{n^3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\cdots\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}}{n}$$

$$= \frac{\frac{1-(-\frac{1}{3})^n}{1-(-\frac{1}{3})}}{n}$$

$$= \frac{3\cdot(1-(-\frac{1}{3})^n)}{4n} \qquad : \frac{n}{n}$$

$$= \frac{\frac{3}{n}\cdot(1-(-\frac{1}{3})^n)}{4} = 0$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+2}{n^2+1})^{4n^2+1}$$

$$= (\frac{n^2+1+1}{n^2+1})^{4n^2+1}$$

$$= (1+\frac{1}{n^2+1})^{(n^2+1)\cdot\frac{4n^2+1}{n^2+1}}$$

$$= e^4$$

Aufgabe 28

a)

Die Negation der Definition für Cauchy-Folgen lautet: $\exists\varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} : \exists m,n \geq N : |a_m - a_n| \geq \varepsilon$. **Behauptung:**

$$a_n := n2 + \cos(n) \text{ ist keine Cauchy-Folge}$$

Beweis: Sei $\varepsilon := 1$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Setze $n := N$ und $m = N + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |N2 + (N+1)2 + \cos(N) + cos(N+1)| \\ &= |\underbrace{N2}_{>1} + \underbrace{N2}_{>1} + \underbrace{2N}_{>2} + 1 + \underbrace{\cos(N)}_{\in[-1,1]} + \underbrace{\cos(N+1)}_{\in[-1,1]}| >> 3 \\ &> \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist nach a) a_n keine Cauchy-Folge.

Behauptung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \text{ konvergiert}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\text{Sei } a_n :&= \frac{2^n n!}{n^n} \\
\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} \\
&= \frac{2 \cdot 2^n((n+1)n!)n^n}{(n+1)(n+1)^n 2^n n!} \\
&= \frac{2n^n}{(n(1+\frac{1}{n}))^n} \\
&= \frac{2n^n}{n^n(1+\frac{1}{n})^n} \\
&= \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e} \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}$$

Da $\frac{2}{e} < 1$ folgt mit dem Quotientenkriterium die Behauptung.

d)

Behauptung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+7}{n2+2n+1} \text{ divergiert}$$

Beweis:

$$\frac{n+7}{n2+2n+1} = \frac{n+7}{(n+1)2} > \frac{n+1}{(n+1)2} = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+7}{n2+2n+1} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, folgt mit dem Minorantenkriterium die Behauptung.

Aufgabe 33

a)

Wir betrachten zuerst die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Nach Wurzelkriterium konvergiert diese Reihe. Da diese Reihe konvergiert, dürfen wir die Summanden folgendermaßen umordnen:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n &= \left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\ldots\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^1+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\ldots}_{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+(-1)^n}}\\ &> \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+(-1)^n}\end{aligned}$$

Nach Majorantenkriterium konvergiert also auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+(-1)^n}$.

d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

Wenn $a_n = \sqrt[n]{n}$ keine Nullfolge ist, dann divergiert die Reihe.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$\longrightarrow$ a_n ist keine Nullfolge.
$\longrightarrow$ Die Reihe divergiert.

Aufgabe 37)

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x2 \cdot e^x} \text{ L'Hospital}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x \cdot e^x + x2 \cdot e^x} \text{ L'Hostpital}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2 \cdot e^x + 4x \cdot e^x + x2 \cdot e^x} = -\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1-x2}{1+x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{x+2}\right)^{\frac{1-x2}{1+x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{-1}}\right)^{\frac{x+2}{-1} \cdot \frac{-1}{x+2} \cdot \frac{1-x2}{1+x}} = e1$$

c)

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

$$e^{\lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{x-1}}}$$

$$e^{\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \cdot \ln x}$$

$$e^{\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}} \text{ L'Hospital}$$

$$e^{\lim_{x\to 1} \frac{1}{x}} = e1$$

Aufgabe 47

a)

$f(x) = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x) = g \cdot h$

$f' = g'h + gh'$

$g' = (u(v))' = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ mit $u(v) = \sin(v)$ und $v(x) = \cos^2 x$

$\frac{\partial u}{\partial v} = cos(v)$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = -2\sin(x)\cos(x) = -\sin(2x)$

$h' = (u(v))' = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ mit $u(v) = \cos(v)$ und $v = \sin^2 x$

$\frac{\partial u}{\partial v} = -\sin(v)$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

$f'(x) = -\sin(2x)\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x) - \sin(2x)\sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x) = -\sin(2x)\cos(\cos(2x))$

b)

$$g(x) = \ln(\tan(\tfrac{x}{2} + \tfrac{\pi}{4}))$$
$$g(x) = u(v(w(x))) \text{ mit } u(v) = \ln(v),\ v(w) = tan(w) \text{ und } w(x) = \tfrac{x}{2} + \tfrac{\pi}{4}$$
$$g' = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{1}{v}$$
$$\frac{\partial v}{\partial w} = \frac{1}{\cos^2(w)}$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}$$
$$g' = \frac{1}{\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} \cdot \frac{1}{cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} \cdot \frac{1}{2}$$
$$g'(x) = \frac{1}{2cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(x)}$$

c)

$h(x) = \arccos(\frac{1}{\cosh(x)})$

$h = u(v(w(x)))$ mit $u(v) = \arccos(v)$, $v(w) = \frac{1}{w}$ und $w(x) = \cosh(x)$

$h' = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

$\frac{\partial v}{\partial w} = -\frac{1}{w^2}$

$\frac{\partial w}{\partial x} = \sinh(x)$

$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\cosh^2(x)}}} \cdot \frac{1}{\cosh^2(x)} \cdot \sinh(x) = \frac{\tanh(x)}{\sqrt{1-\frac{1}{\cosh^2(x)}} \cdot \cosh(x)}$

Aufgabe 53

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{x^2} \\
f^{(1)}(x) &= 2x \cdot e^{x^2} \\
f^{(2)}(x) &= 2e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2} = (4x^2 + 2) \cdot e^{x^2} \\
f^{(3)}(x) &= 8x \cdot e^{x^2} + 2x \cdot (4x^2 + 2) \cdot e^{x^2} = (8x^3 + 12x) \cdot e^{x^2} \\
f^{(4)}(x) &= (24x^2 + 12) \cdot e^{x^2} + 2x \cdot (8x^3 + 12x) \cdot e^{x^2} = (16x^4 + 48x^2 + 12) \cdot e^{x^2}
\end{aligned}
$$

Taylorreihe:

$$T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$$T_4(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot f^{(2)}(x_0) \cdot (x - x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{6} \cdot f^{(3)}(x_0) \cdot (x - x_0)^3 + \frac{1}{24} \cdot f^{(4)}(x_0) \cdot (x - x_0)^4$$

Das Taylorpolynom 4. Grades um den Entwicklungspunkt$x_0 = 0$:

$$T_4(x) = f(0) + f^{(1)}(0) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot f^{(2)}(0) \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot f^{(3)}(0) \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot f^{(4)}(0) \cdot x^4$$

$$= 1 + 0x + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 0 \cdot \frac{x^3}{6} + 12 \cdot \frac{x^4}{24}$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + x^2 + 1$$