Intensivkurs Statik – Teil 2

Themen:

Fachwerke

Einführung

Statische Bestimmtheit

Bildungsgesetze (1., 2. und 3. Bildungsgesetz)

Bestimmung von Nullstäben

Ritterschnittverfahren

Reibung und Haftung

Haftreibung und Gleitreibung

Seilreibung

Fachwerke

Es werden folgende idealisierte Annahmen getroffen, damit die auftretenden Kräfte berechnet werden können:

- Die Stäbe sind an ihren Endpunkten (Knoten) gelenkig und reibungsfrei miteinander verbunden.
- Eingeprägte Lasten bzw. Auflagerreaktionen greifen nur in den Knoten an.
- Die Stäbe können nur auf Druck oder Zug beansprucht werden (d.h. keine Momente und Querkräfte)

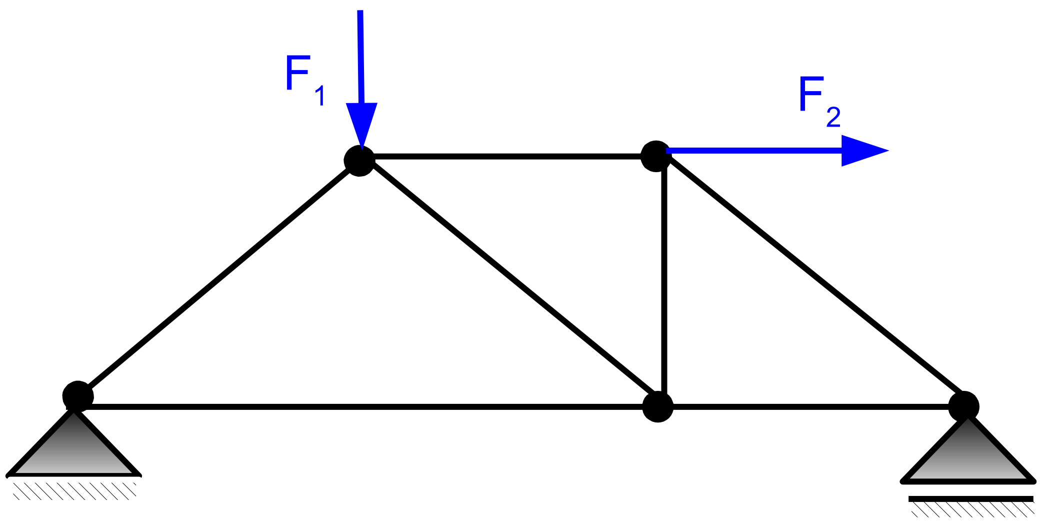
Es handelt sich hierbei um idealisierte Fachwerke. In der Wirklichkeit sind diese Annahmen nur annähernd erfüllt. Im Weiteren werden ebene Fachwerke betrachtet, welche die oben genannten Annahmen erfüllen.

Statische Bestimmtheit

$$2k = r + s$$

r Auflagerreaktionen
s Anzahl der Stäbe im Fachwerk
k Anzahl der Knoten

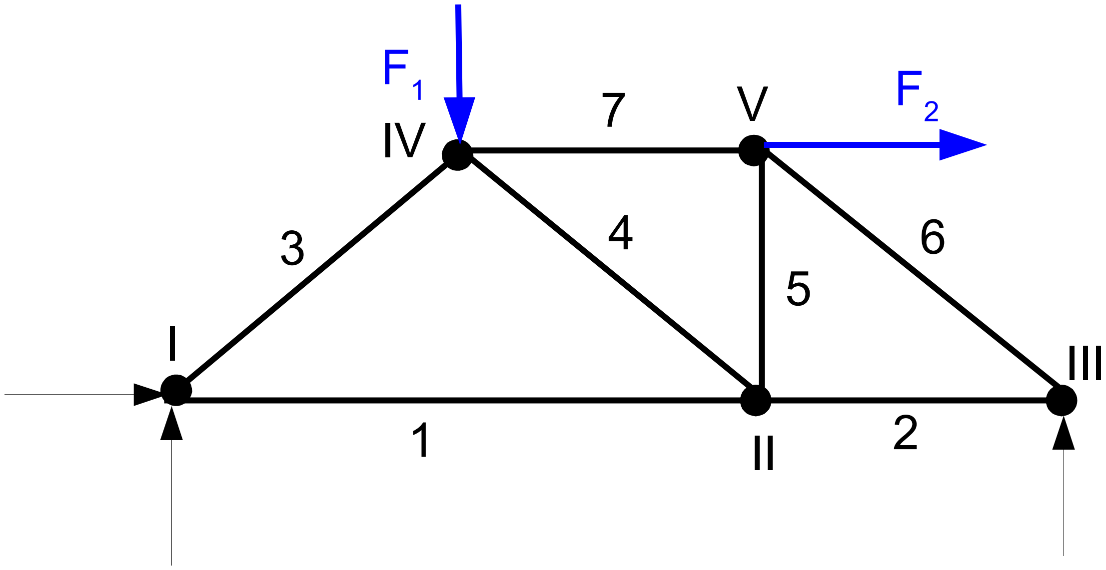
Aufgabe



Prüfe das Fachwerk auf statische Bestimmtheit!

Lösung der Aufgabe:

Freischnitt



Das Fachwerk besteht aus:

s = 7 Stäben
k = 5 Knoten
r = 3 Lagerreaktionen

Insgesamt ergibt sich also:

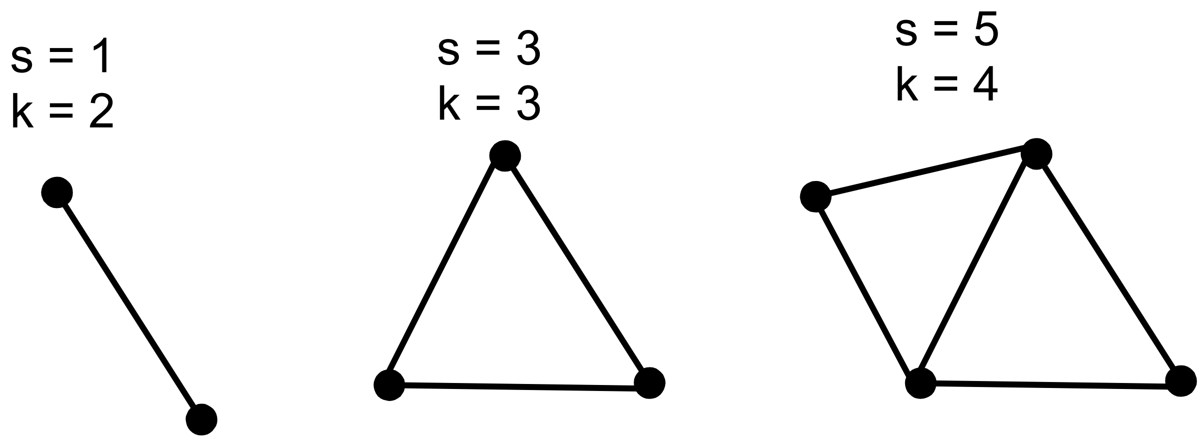
$$2k = r + s$$

$$2 \cdot 5 = 3 + 7$$

$$10 = 10$$ Das Fachwerk ist statisch bestimmt.

Bildungsgesetze

1. Bildungsgesetz:



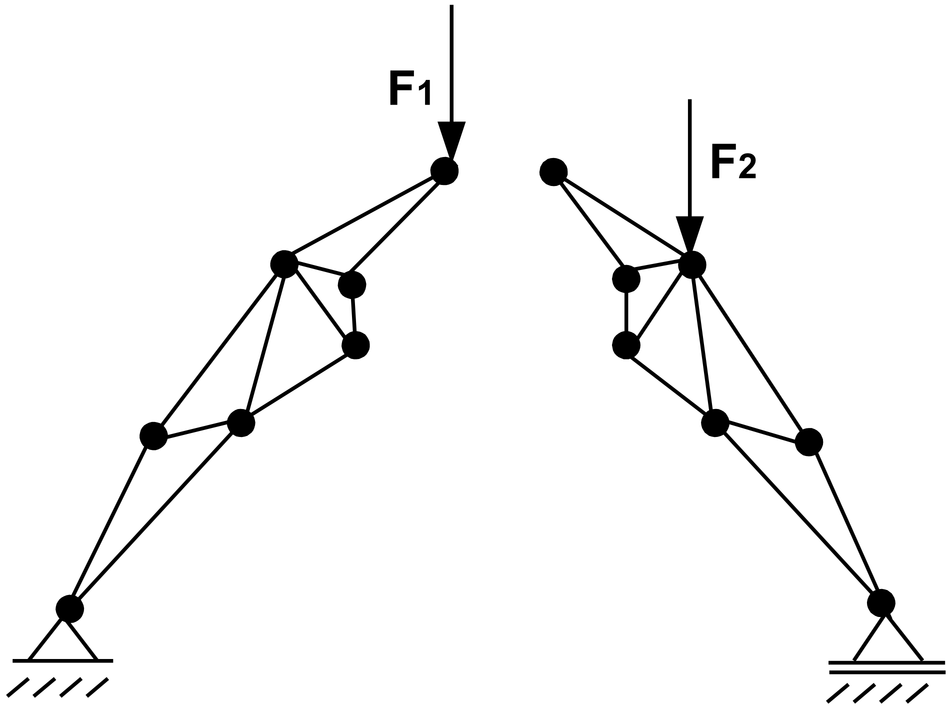
Es werden an einem Stab zwei weitere Stäbe angefügt, sodass ein Dreieck entsteht. Dieses Dreieck besitzt drei Knoten und drei Stäbe. Man schließt nun je zwei weitere Stäbe an je zwei beliebige Knoten des Dreiecks an und verbindet diese Stäbe miteinander. Es dürfen jedoch zwei Stäbe eines jeweiligen Dreiecks nicht auf einer Geraden liegen.

Diese Vorgehensweise lässt sich beliebig oft wiederholen. Ein Fachwerk, welches nach diesem Muster aufgebaut ist, heißt einfaches Fachwerk. Hier gilt die bereits bekannt Beziehung:

$$2k = r + s$$

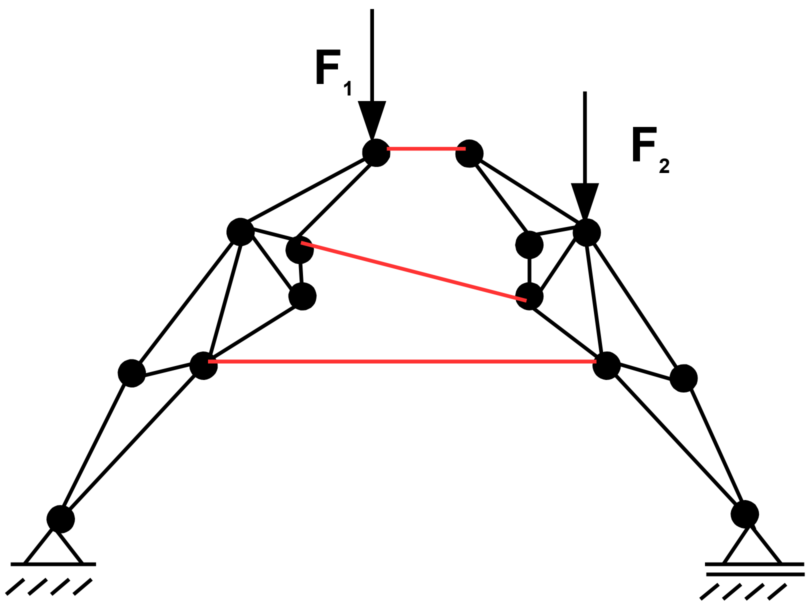
Fügt man in den weiteren Schritten jeweils **zwei** Stäbe (s) zu einem vorhandenen Dreieck hinzu, so erhöht sich die Anzahl der Knoten (k) um eins. Die obige Beziehung bleibt also bestehen. Es treten bei einem solchen einfachen Fachwerk, welches **statisch bestimmt** ist, immer drei Lagerreaktionen auf (r = 3).

2. Bildungsgesetz:

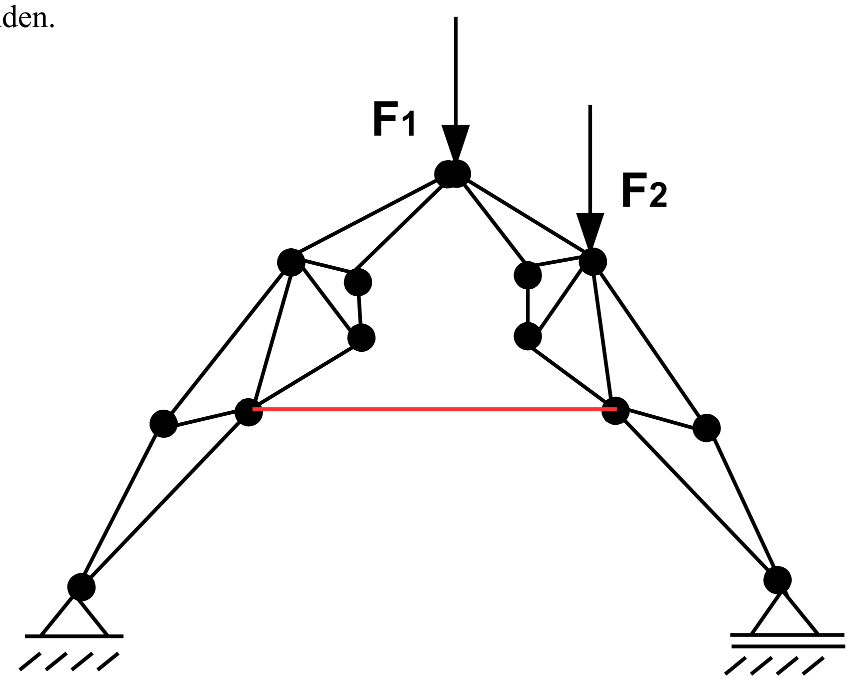


Bei diesem Bildungsgesetz werden zwei nach dem 1. Bildungsgesetz gebildete Fachwerke durch

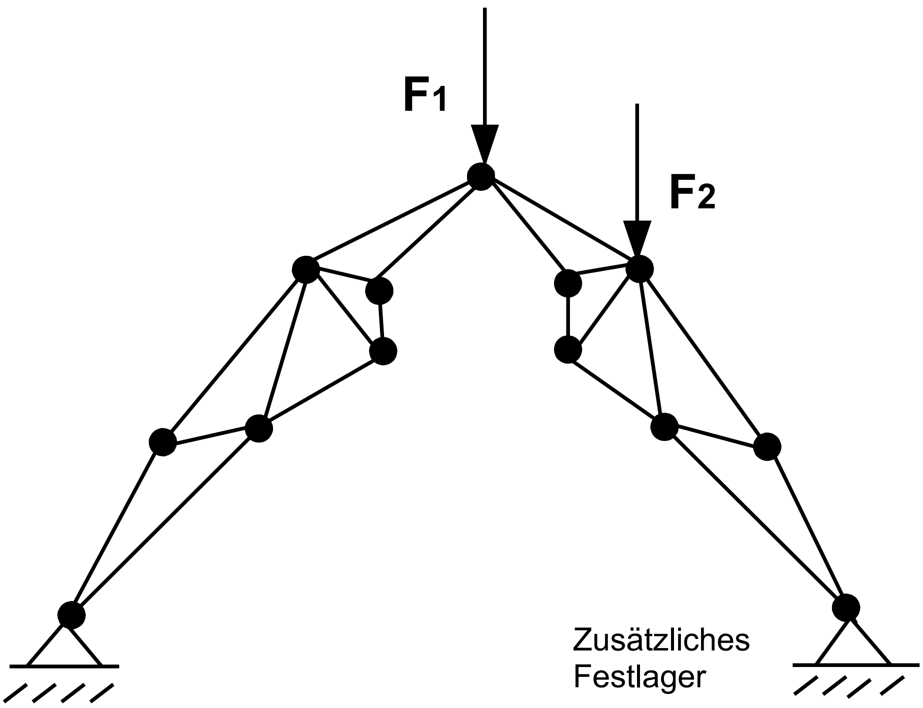
- drei Stäbe miteinander verbunden, welche *nicht alle parallel* zueinander sind und sich in keinem Punkt schneiden



- einen gemeinsamen Knoten der beiden Teilfachwerke und einen Stab miteinander verbunden.

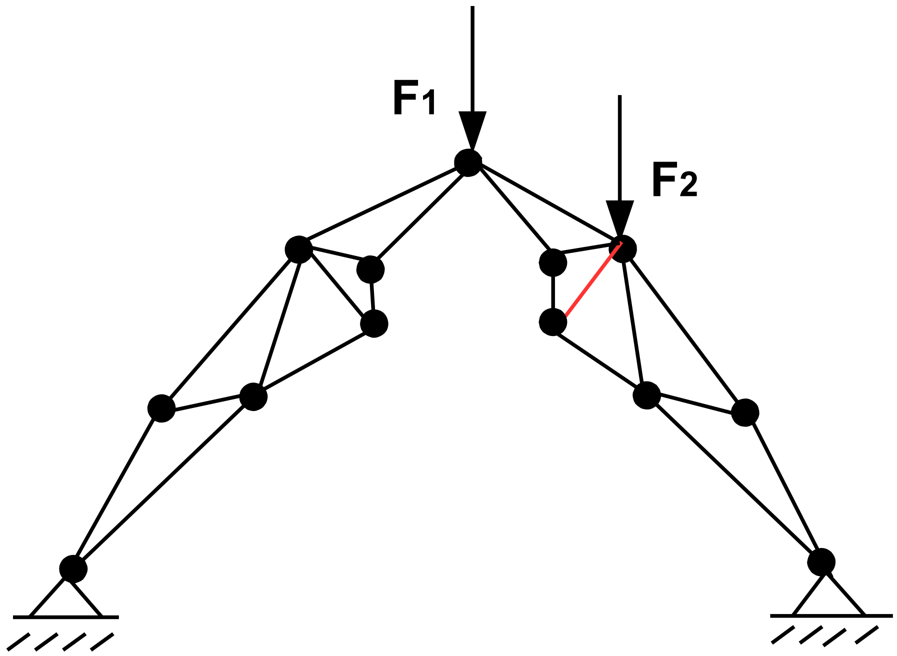


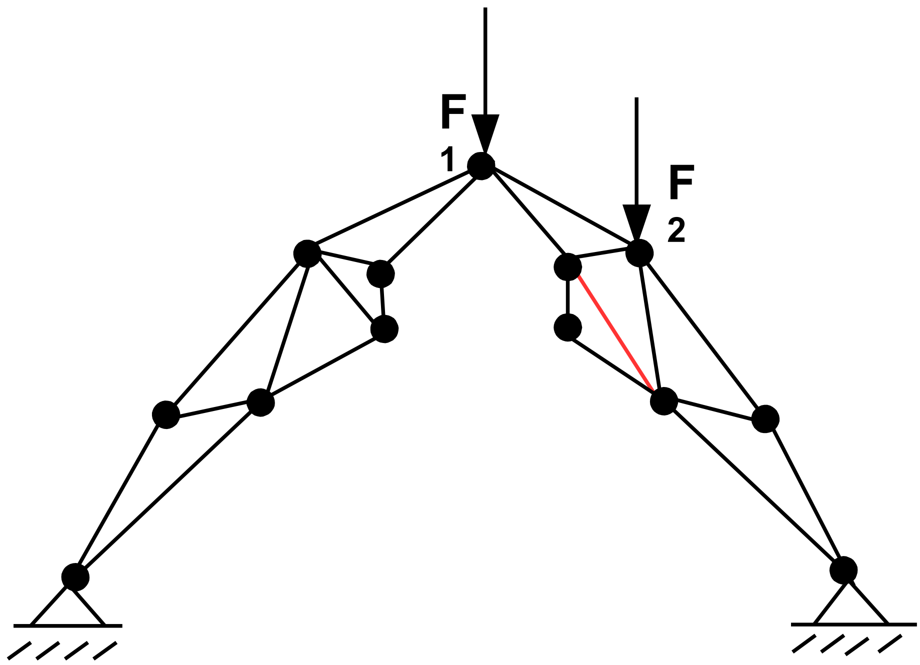
- einen gemeinsamen Knoten der beiden Teilfachwerke und Anbringung eines zusätzlichen Festlagers miteinander verbunden.



3. Bildungsgesetz:

Wird aus einem Fachwerk, welches nach dem 1. oder 2. Bildungsgesetz aufgebaut ist, ein Stab so entfernt, dass das Fachwerk beweglich wird, dann muss an einer anderen Stelle der Stab so eingefügt werden, dass das Fachwerk wieder starr wird (Beachtung des 1. Bildungsgesetzes).



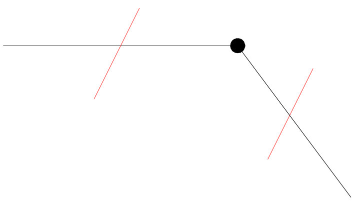


Bestimmung von Nullstäben

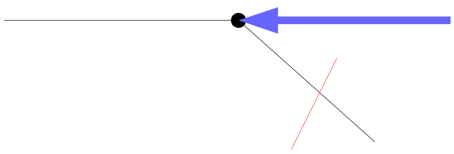
Es ist ratsam vor der eigentlichen Berechnung das Fachwerk auf Nullstäbe hin zu untersuchen. Nullstäbe sind Stäbe, die weder Zug- noch Druckkräfte enthalten.

Zur Erkennung von Nullstäben helfen folgende Regeln:

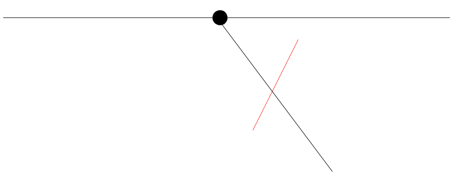
Regel 1: An einem *unbelasteten* Knoten sind nur **zwei** Stäbe angeschlossen, die nicht in die gleiche Richtung zeigen. -> Beide Stäbe sind Nullstäbe.



Regel 2: An einem *belasteten* Knoten sind nur **zwei** Stäbe angeschlossen und die äußere resultierende Kraft greift in Richtung des einen Stabes an, so ist der andere Stab ein Nullstab.



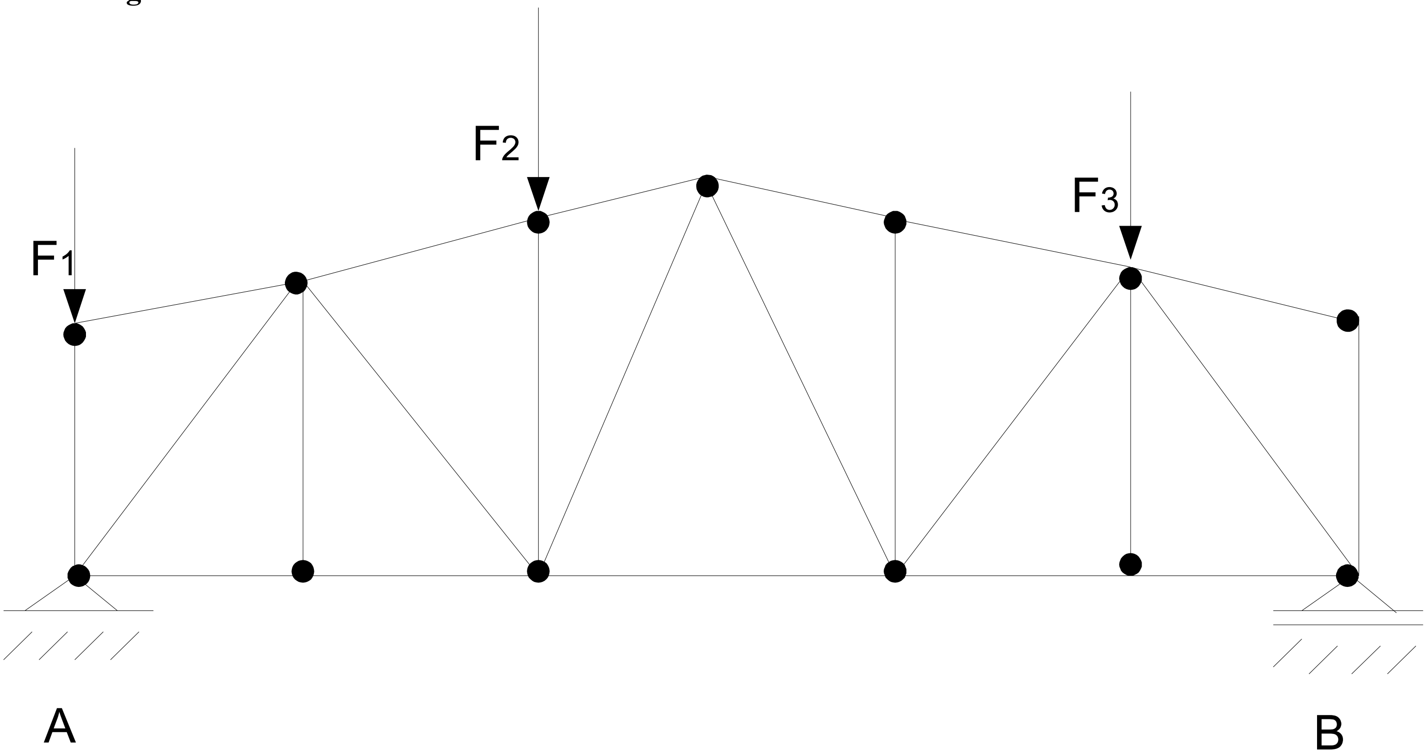
Regel 3: An einem unbelasteten Knoten sind drei Stäbe angeschlossen, von denen zwei in gleicher Richtung liegen, so ist der dritte Stab ein Nullstab.



Sobald ein Nullstab ermittelt wurde, wird dieser aus dem Fachwerk entfernt und nicht weiter berücksichtigt (auch nicht bei der Bestimmung weiterer Nullstäbe).

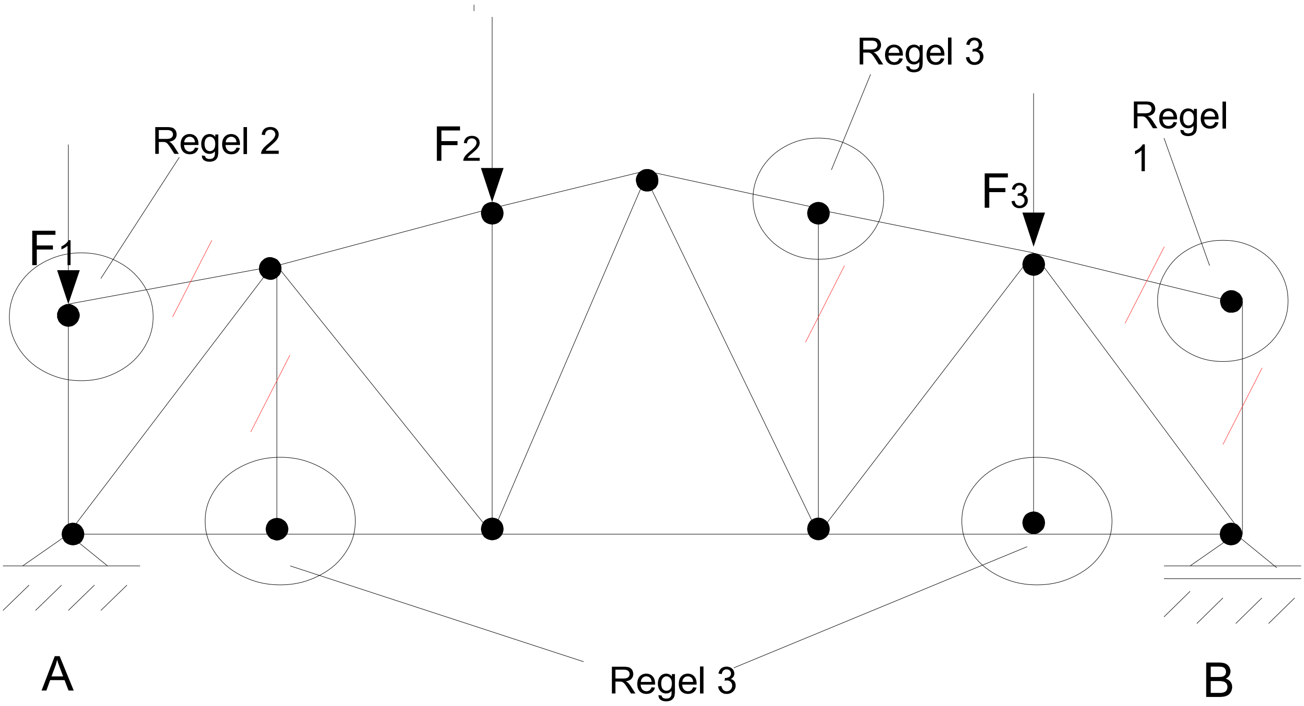
Die Entfernung der Nullstäbe dient nur der Vereinfachung der nachfolgenden Berechnungen. Alternativ kann man diese auch im Fachwerk bestehen lassen und mit "0" bezeichnen. Aus der tatsächlichen Konstruktion dürfen diese Stäbe **nicht** entfernt werden, weil sie der Versteifung des Fachwerks dienen. Nachdem Nullstäbe für die Berechnung entfernt worden sind (oder mit "0" gekennzeichnet wurden) kann das Fachwerk erneut auf Nullstäbe untersucht werden. Dies geschieht solange, bis keine Nullstäbe mehr gefunden werden.

Aufgabe:



Gegeben sei das obige Fachwerk, welches durch die drei Kräfte F1, F2 und F3 belastet wird.
Bestimme die Nullstäbe!

Lösung der Aufgabe:



Ritterschnittverfahren

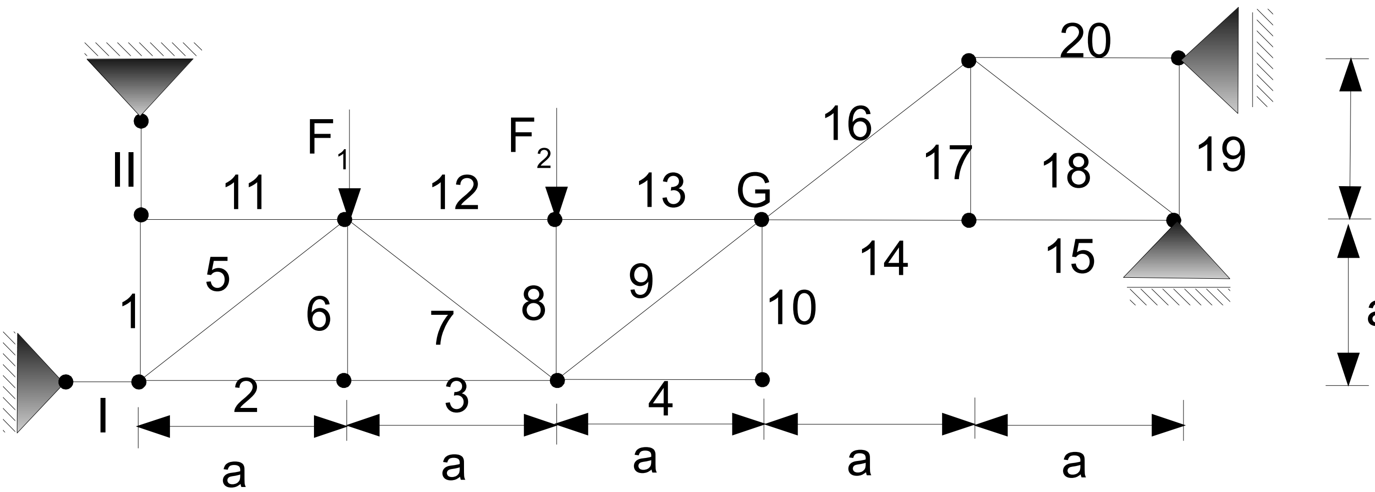
Die Idee des Ritterschnittverfahrens ist es, das Fachwerk in zwei Teile zu schneiden und mithilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$ und $\sum M_i = 0$ die Stabkräfte zu berechnen.

Der Schnitt muss das Fachwerk in zwei Teile zerlegen. Der Schnitt ist möglich:

- durch drei Stäbe, die nicht *alle* an einem Knoten liegen oder
- durch einen Stab und ein Gelenk

Nachdem das Fachwerk in zwei Teile zerlegt wurde, können die Stabkräfte mittels der drei Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden.

Aufgabe:



a) Prüfe das Fachwerk auf statische Bestimmtheit!

b) Berechne die Gelenkkräfte im Gelenk G.

c) Bestimme alle Nullstäbe.

Für den Aufgabenteil c) sind die Stabkräfte S_I und S_{II} gegeben. Die Stäbe sollen als Zugstäbe angesetzt werden.

d) Bestimme die Stabkräfte in den Stäbe 3, 7 und 12.

<u>Gegeben:</u> $F_1 = F$, $F_2 = 2F$, a und im Aufgabenteil c) S_I und S_{II}

Lösung der Aufgabe:

a) Statische Bestimmtheit

Es gilt:

$r = 4$
$s = 20$
$k = 12$

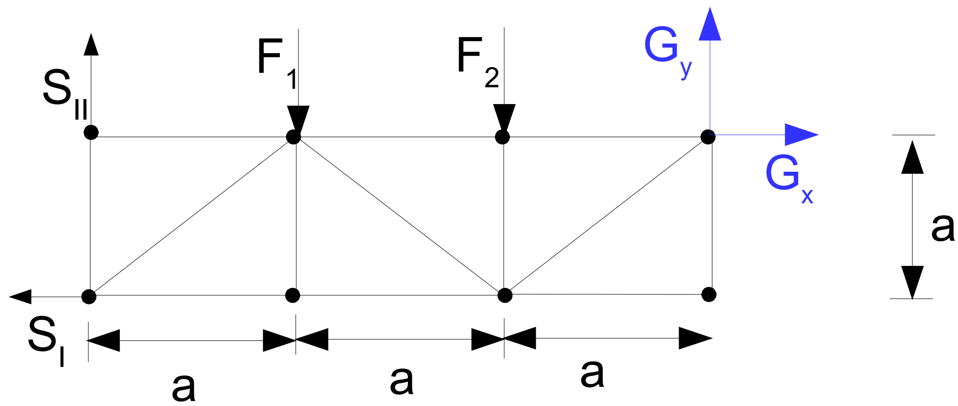
$2\,k = r + s$ Ist diese Bedingung erfüllt, so ist das Fachwerk statisch bestimmt.

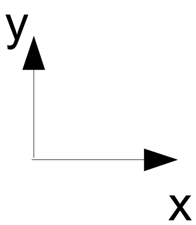
$2 * 12 = 4 + 20$
$24 = 24$

Das System ist statisch bestimmt. **Wichtig:** Die beiden Festlager können nur Kräfte entlang des Pendelstabes übertragen, an welchem sie angeschlossen sind. Ein Pendelstab welcher das System mit einem Lager verbindet nennt sich **Pendelstütze**. Die Kräfte sind nur entlang der Stabachse übertragbar. Demnach ist für die beiden Lagerkräfte nur jeweils eine Kraft entlang der Stabachse anzusetzen.

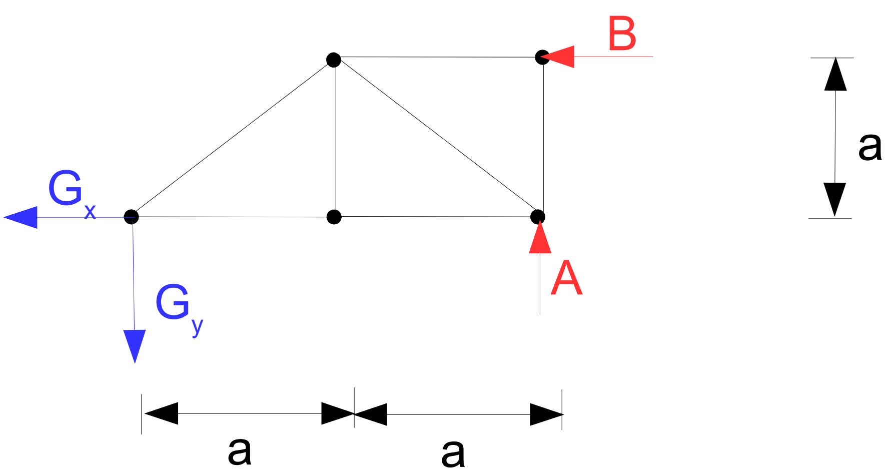
<u>Freikörperbild:</u>

1. Teilsystem





2. Teilsystem



b) Bestimmung der Gelenkkräfte mittels Gleichgewichtsbedingungen:

Zur Bestimmung der Gelenkkräfte können wir zum einen die Auflagerkräfte berechnen und dann die Gelenkkräfte. Da in der Aufgabenstellung aber die Bestimmung der Auflagerkräfte **nicht** gefordert wird, können wir uns diesen Schritt sparen (Zeit sparen). Da S_I und S_{II} des 1. Teilsystems und A und B des 2. Teilsystems unbekannt sind, können wir die Gelenkkräfte bestimmen, indem wir die Momentengleichgewichtsbedingung anwenden und den Bezugspunkt in den Knoten legen, in welchen die Stabkraft S_I angreift (S_{II} fällt auch aus der Berechnung heraus, weil die Wirkungslinie den Knoten schneidet) und in den Knoten in welchen die Lagerkraft B angreift (A fällt dann ebenfalls aus der Berechnung heraus):

$$\sum M_I = 0: -F_1 \cdot a - F_2 \cdot 2a - G_x \cdot a + G_y \cdot 3a = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_B = 0: -G_x \cdot a + G_y \cdot 2a = 0 \qquad (2)$$

Beide nach der gleichen Gelenkkraft auflösen und gleichsetzen:

$$G_x = G_y \cdot 3 - F_1 - F_2 \cdot 2 \qquad (1a)$$

Einsetzen von F1 = F und F2 = 2F:

$$G_x = 3\,G_y - 5F \qquad (1a)$$

$$G_x = 2\,G_y \qquad (2a)$$

$$2\,G_y = 3\,G_y - 5F \qquad (1a) = (2a)$$

Auflösen nach G_y:

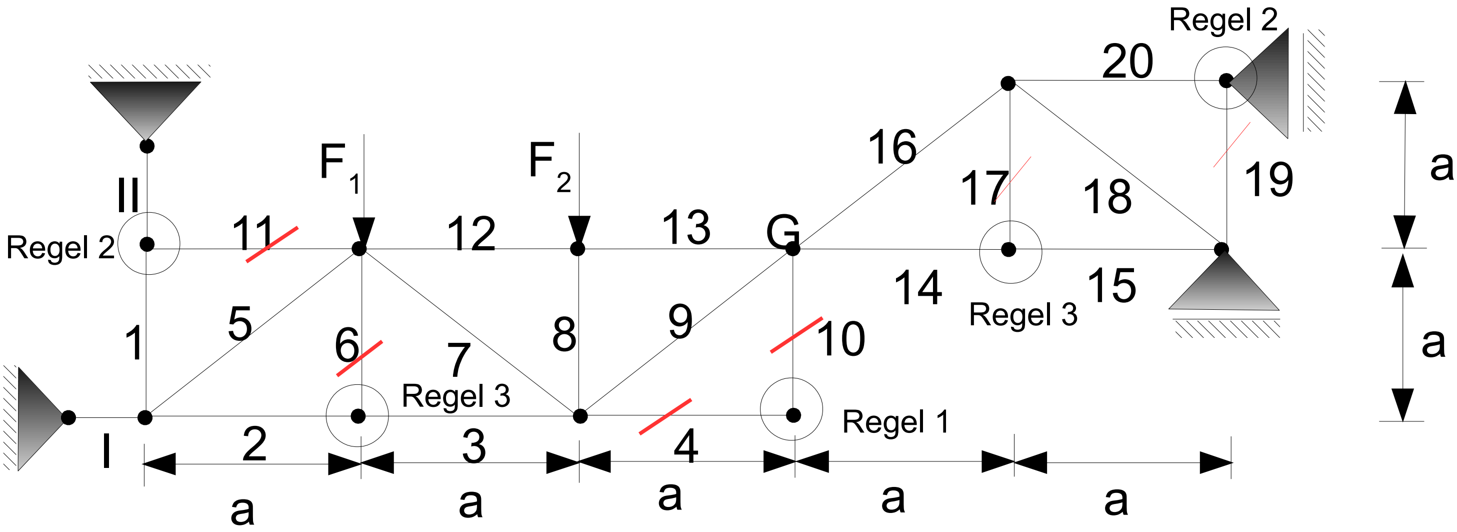
$$2\,G_y - 3\,G_y = -5\,F$$

$$G_y = 5\,F$$

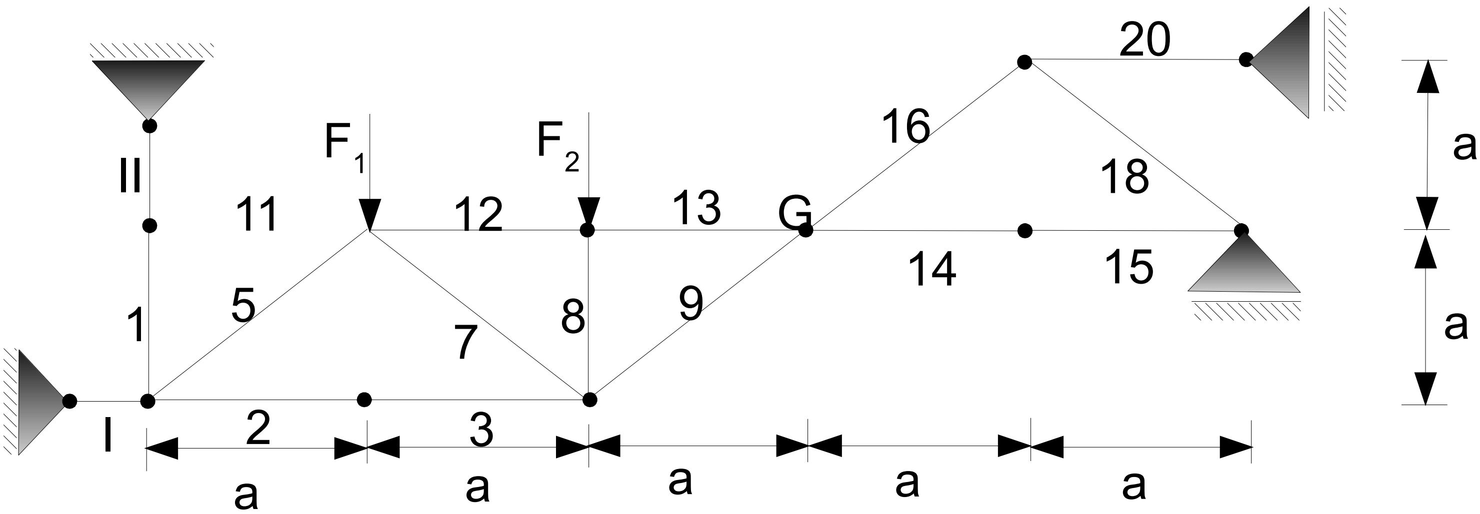
Einsetzen in (2a):

$$G_x = 10\,F$$

c) Bestimmung der Nullstäbe



Entfernung der Nullstäbe:



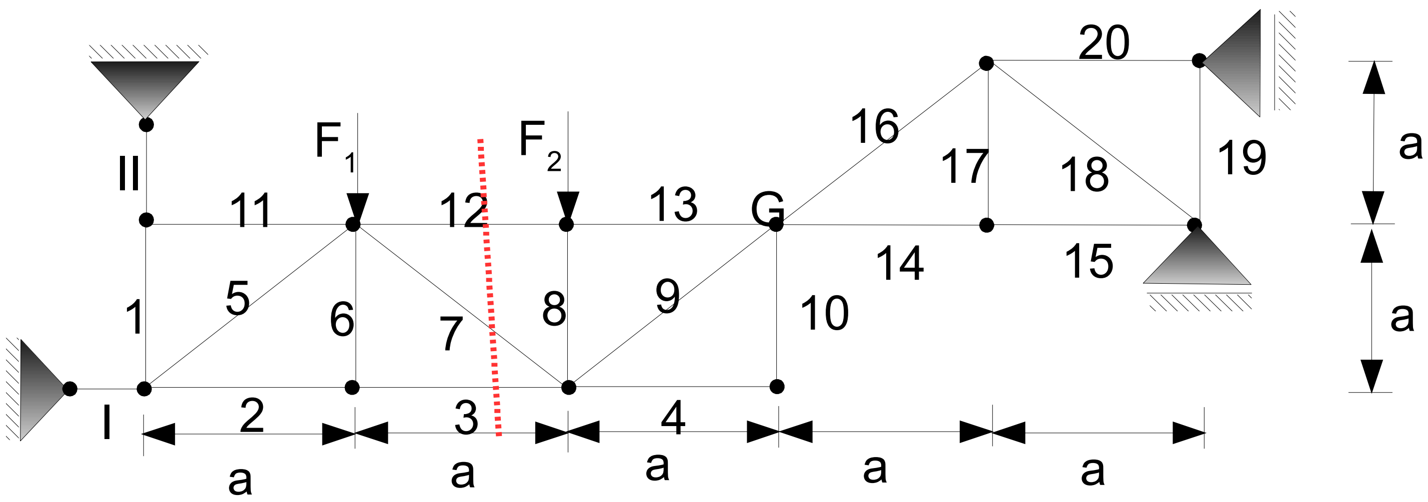
Prüfung auf weitere Nullstäbe! Keine weiteren Nullstäbe vorhanden.

Nullstäbe sind:

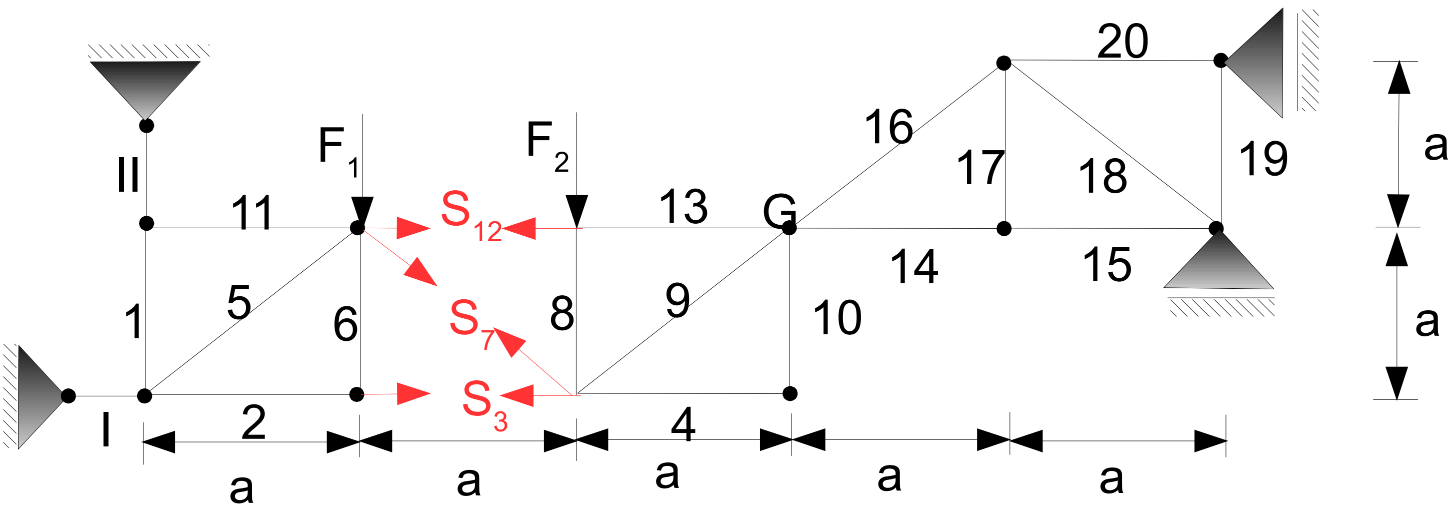
S_4, S_6, S_{10}, S_{11}, S_{17}, S_{19}

d) Bestimme die Stabkräfte in den Stäbe 3, 7 und 12.

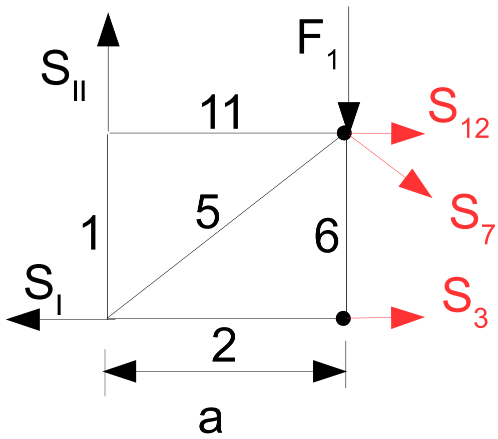
Die zu bestimmenden Stäbe müssen freiliegen. Wir müssen demnach durch diese Stäbe einen Schnit durchführen:



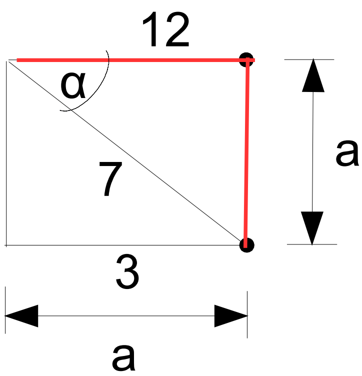
Das Fachwerk liegt dann in 2 Teilen vor:



Laut Aufgabenstellung sollen die Stabkräfte SI und SII gegeben sein, wir betrachten also den linken Teil und schneiden die Pendelstäbe frei:



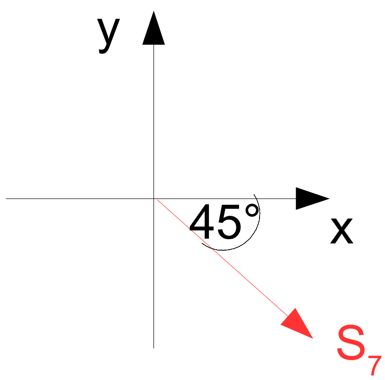
Bevor wir die Gleichgewichtsbedingungen anwenden können, müssen wir zunächst schauen, ob alle Kräfte in x- und y- Richtung zeigen. Ist dies nicht der Fall, so muss zunächst die Kräftezerlegung für diese Kräfte vorgenommen werden. Die Stabkraft S7 muss in x- und y-Richtung zerlegt werden. Dazu benötigen wir zunächst den Winkel der Stabkraft S7 zur Horizontalen. Mittels Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck können wir den Winkel berechnen:



$$\tan(\alpha) = \frac{a}{a}$$

$$\alpha = \arctan\frac{a}{a} = \arctan 1 = 45°$$

Als nächstes kann die Kräftezerlegung durchgeführt werden:



Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen um die unbekannten Stabkräfte zu bestimmen:

$$\rightarrow: -S_I + S_3 + S_{12} + S_7 \cos(45°) = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: S_{II} - F_1 - S_7 \sin(45°) = 0 \qquad (2)$$

$$\text{Moment um F1}: \; -S_I \cdot a - S_{II} \cdot a + S_3 \cdot a = 0 \qquad (3)$$

Aus (2):

$$\boxed{S_7 = \frac{S_{II} - F_1}{\sin(45°)} = (S_{II} - F)\sqrt{2}}$$

Zusammenhang: $\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Aus (3):

$$\boxed{S_3 = S_I + S_{II}}$$

Aus (1):

$$S_{12} = S_I - S_3 - S_7 \cos(45°)$$

$$S_{12} = S_I - (S_I + S_{II}) - (S_{II} - F)\sqrt{2} \cdot \cos(45°)$$

Es gilt auch hier:

$$\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Einsetzen:

$$S_{12} = S_I - (S_I + S_{II}) - (S_{II} - F)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

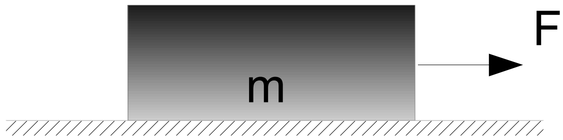
$$S_{12} = S_I - S_I - S_{II} - S_{II} + F$$

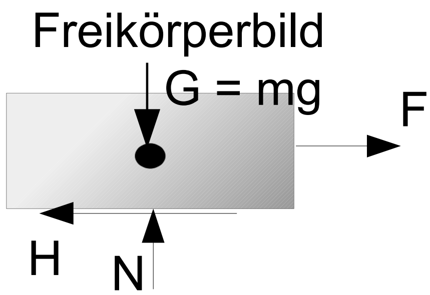
$$\boxed{S_{12} = -2S_{II} + F}$$

Reibung und Haftung

Haftreibung: Die Haftreibung **H** (auch Ruhereibung) verhindert das Bewegen bzw. Gleiten sich berührender Körper.

Gäbe es Haftreibung nicht, wäre es für einen Menschen nicht möglich sich auf einer Oberfläche zu bewegen. Ein Fall, in dem die Haftreibung minimal wird, ist beispielsweise gefrierende Nässe auf dem Fußweg. Zur erneuten Erhöhung der Haftreibung ist dann das Streuen von Sand oder Schotter notwendig.





Die Haftung gilt, solange sich F unterhalb eines bestimmten Grenzwertes F_0 befindet. Bei dem Grenzwert F_0 nimmt H den maximalen Wert H_0 an. Dieser Grenzwert ist proportional abhängig von der Normalkraft N.

Dieser Zusammenhang wird durch das **Coulombsche Haftungsgesetz** beschrieben:

$$H_0 = \mu_0 \cdot N$$

mit

H_0 : Grenzhaftung
μ_0 : Haftungskoeffizient (dimensionslos)
N : Normalkraft

Fallunterscheidung

$H_0 < \mu_0 \cdot N$ **Haftung:** Der Körper befindet sich in Ruhe

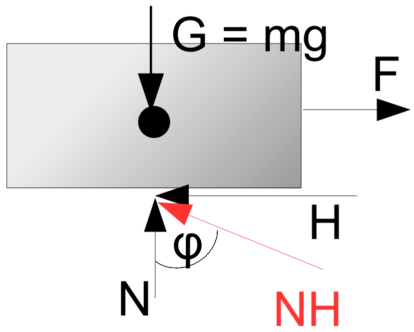
$H_0 = \mu_0 \cdot N$ **Grenzhaftung**: Der Körper befindet sich in Ruhe. Wird dieser jedoch angestoßen, so bewegt er sich.

$R = \mu \cdot N$ **Gleitreibung:** Der Körper bewegt sich und die Gleitreibung R tritt anstelle der Haftreibung H. Es wird nun auch der Haftungskoeffizient μ_0 durch dein Gleitreibungskoeffizienten μ ersetzt. Der Gleitreibungskoeffizient ist kleiner als der Reibungskoeffizient.

Die Haftreibung ist eine Reaktionskraft und kann bei statisch bestimmten Systemen aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden.

Resultierende

Es ist möglich die Normalkraft N und die Haftreibung H zu einer Resultierenden NH zusammenzufassen.



Die Richtung der Resultierenden wird mit dem Winkel φ angegeben und berechnet sich durch:

$$\tan(\varphi)=\frac{H}{N}$$

Im Grenzfall für H_0 wird der Grenzwinkel zu ρ_0 (Haftungswinkel) mit:

$$\tan(\rho_0)=\frac{H_0}{N}$$

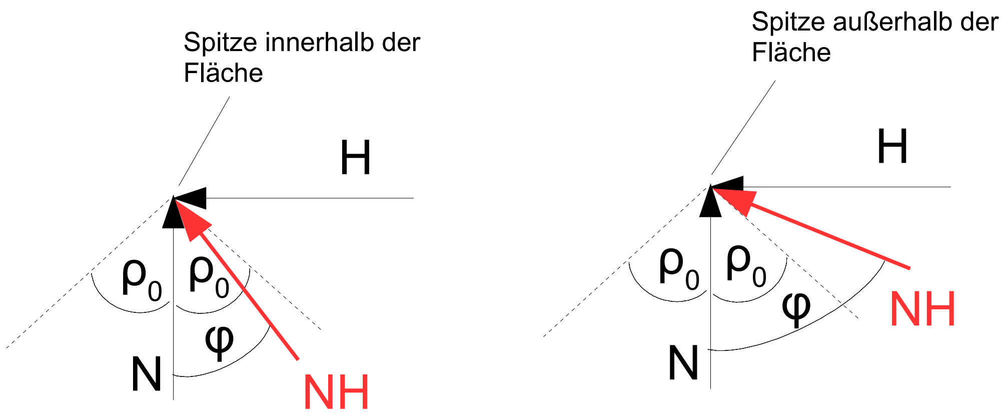
mit

$$H_0=\mu_0\cdot N$$

Ergibt sich:

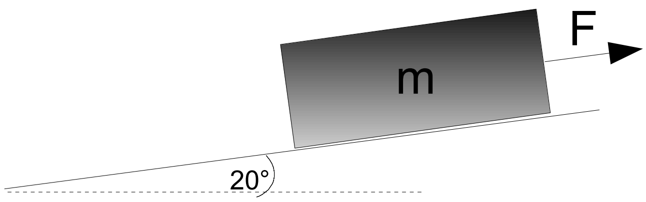
$$\tan(\rho_0)=\frac{\mu_0\cdot N}{N}=\mu_0$$

Man kann **graphisch** feststellen, ob sich ein Körper in Ruhe befindet, indem man den Haftungswinkel ρ_0 links und rechts von der Normalkraft N ausgehend abträgt. Befindet sich die Resultierende NH innerhalb diese Winkels, so befindet sich der Körper in Ruhe:



In der obigen Grafik wurde der Haftungswinkel ρ_0 links und rechts von der Normalkraft N abgetragen. Solange die Spitze der Resultierenden NH innerhalb der gestrichelten Linien liegt, befindet sich der Körper in Ruhe $H < H_0$, ansonsten in Bewegung $H > H_0$.

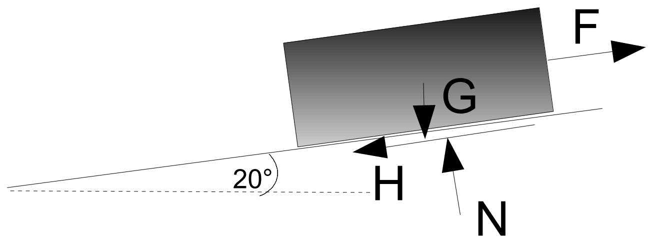
Aufgabe:



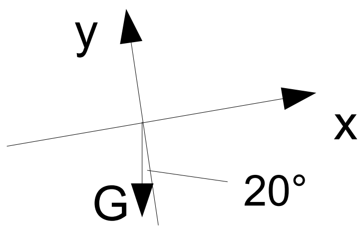
Gegeben sei der obige rechteckige Körper aus Stahl, welcher sich auf einer schiefen Ebene aus Teflon befindet. Der Neigungswinkel beträgt $\boldsymbol{\alpha=20°}$ und der Haftungskoeffizient sei $\boldsymbol{\mu_0=0,04}$. Der Körper hat das Gewicht **G=10N** mit einer angreifenden Kraft **F**. Innerhalb welcher Grenzen befindet sich **F**, wenn der Körper sich in Ruhe befindet?

Lösung der Aufgabe:

Wir betrachten zunächst die **Bewegnung nach oben**, also welche Größe F maximal annehmen darf, so dass der Körper sich nicht nach oben bewegt. Dazu müssen wir davon ausgehen, dass F sehr groß ist. Da sich der Klotz bei großem F ohne Haftung nach oben bewegen würde, muss die Haftung **nach unten** zeigen (entgegen der Bewegung) und hält somit den Körper im Ruhezustand. Die Haftung H wird parallel zur schiefen Ebene eingezeichnet. Die Gewichtskraft G wirkt immer vertikal nach unten. Die Normalkraft N ersetzt die schiefe Ebene und wird im 90°-Winkel zur schiefen Ebene eingezeichnet. Das Freikörperbild sieht wie folgt aus:



Mittels der Gleichgewichtsbedingungen können wir die unbekannten Größen N und H bestimmen. Wir legen die x-Achse in Richtung der schiefen Ebene, die y-Achse senkrecht dazu in Richtung der Normalkraft und wenden die Kräftezerlegung für G an (zeigt nicht in Richtung der x- oder y-Achse):



Die Ankathete ist dann G_y und die Gegenkathete G_x, damit ergibt sich:

$G_y = G \cdot \cos(20°)$ zeigt in negative y-Richtung

$G_x = G \cdot \sin(20°)$ zeigt in negative x-Richtung

Gleichgewichtsbedingungen in x- und y-Richtung:

$$\rightarrow : -H - G \cdot \sin(20°) + F = 0$$

$$H = F - G \cdot \sin(20°)$$

$$\uparrow : N - G \cdot \cos(20°) = 0$$

$$N = G \cdot \cos(20°)$$

Ein Körper befindet sich solange in Ruhe wie $H \leq H_0$ gilt:

$$H = F - G \cdot \sin(20°)$$

$$H_0 = \mu_0 \cdot N$$

Und demnach:

$$F - G \cdot \sin(20°) \leq \mu_0 \cdot N$$

mit N = G cos(20°):

$$F - G \cdot \sin(20°) \leq \mu_0 \cdot G \cdot \cos(20°)$$

$$F \leq G \cdot \sin(20°) + \mu_0 \cdot G \cdot \cos(20°)$$

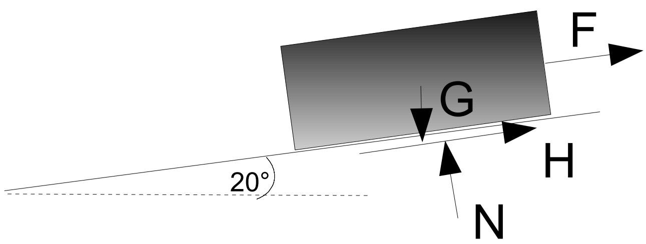
Einsetzen der Werte:

G = 10 N, μ0 = 0,04

$$F \leq 3{,}8\,N$$

Die obere Grenze für F ist 3,8 N. Nimmt F also Werte größer 3,8 N an, so bewegt sich der Körper nach oben und die Gleitreibung R tritt anstelle der Haftreibung H ein.

Für die untere Grenze müssen wir uns die **Bewegung nach unten** ansehen. Wir müssen also annehmen, dass F sehr klein wird und damit der Körper nach unten rutschen kann. Die Haftung wird also entgegen der Bewegung nach oben eingzeichnet:



Gleichgewichtsbedingungen in x- und y-Richtung:

$$\rightarrow: H - G \cdot \sin(20°) + F = 0$$

$$H = G \cdot \sin(20°) - F$$

$$\uparrow: N - G \cdot \cos(20°) = 0$$

$$N = G \cdot \cos(20°)$$

Ein Körper befindet sich solange in Ruhe wie $H \leq H_0$ gilt:

$$H = G \cdot \sin(20°) - F$$

$$H_0 = \mu_0 \cdot N$$
$$G \cdot \sin(20°) - F \leq \mu_0 \cdot N$$

mit N = G cos(20°):

$$G \cdot \sin(20°) - F \leq \mu_0 \cdot G \cdot \cos(20°)$$

$$G \cdot \sin(20°) - \mu_0 \cdot G \cdot \cos(20°) \leq F$$

Einsetzen der Werte:α

G = 10 N, μ0 = 0,04

$$3{,}04\,\mathrm{N} \leq F$$

Die untere Grenze für F ist 3,04 N. Nimmt F also Werte kleiner 3,04 N an, so bewegt sich der Körper nach unten und die Gleitreibung R tritt anstelle der Haftreibung H ein.

Seilreibung

Eulersche bzw. Eytelweinsche Seilhaftungsgesetz:

$$\ln\frac{S_2}{S_1} = \mu_0 \alpha \quad \text{für } S_2 > S_1$$

$$\ln\frac{S_1}{S_2} = \mu_0 \alpha \quad \text{für } S_1 > S_2$$

Haftbedingungen (maximale Seilkräfte):

$$S_{max;\,2} = S_1 e^{\mu_0 \cdot \alpha} \quad \text{für } S_2 > S_1$$

$$S_{max;\,1} = S_2 e^{\mu_0 \cdot \alpha} \quad \text{für } S_1 > S_2$$

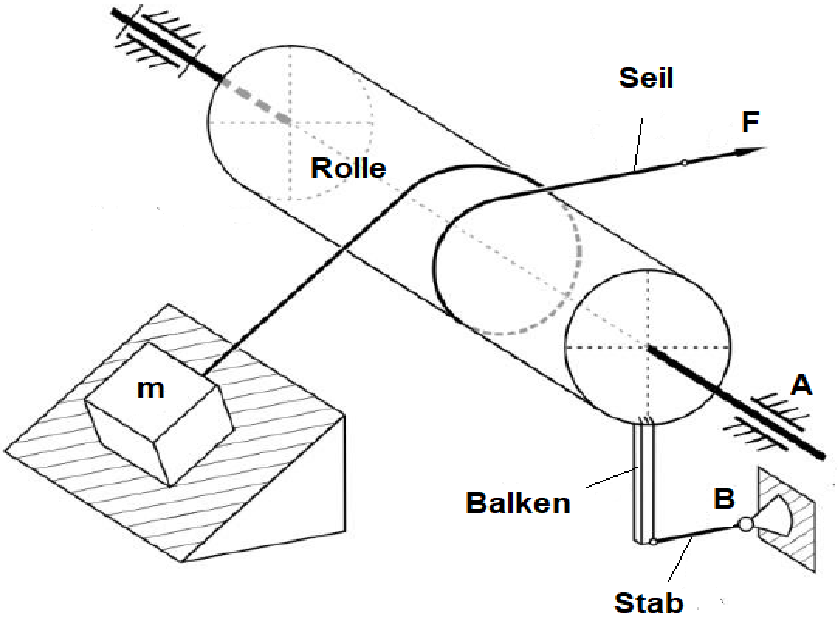
Bemerkungen:

- Der Winkel α (Umschlinkwinkel des Seils) muss in Bogenmaß (z.B. π für 180°) angegeben werden.
- Beim Überschreiten der maximalen Haltekraft, setzt sich das Seil in Richtung der Seite mit der größeren Kraft in Bewegung.
- Bleibt die Seilkraft unterhalb der obigen Haftungsbedingungen, so befindet sich das Seil in Ruhe.

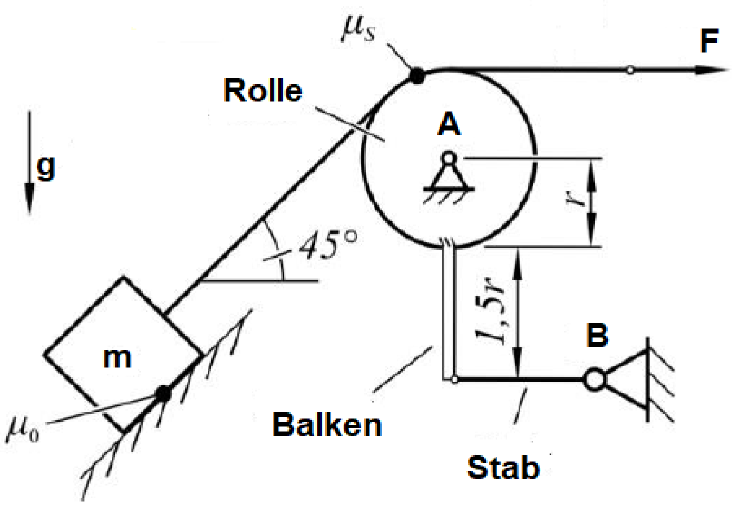
Aufgabe

Das in Bild 1 dargestelle räumliche System kann als ein ebenes System aufgefasst werden (siehe Bild 2). Die Masse m liegt auf einer schiefen Ebene und wird durch ein Seil gehalten, welches um eine Rolle gewickelt ist und an dessen Ende eine Kraft F zieht. Die Rolle mit dem Radius r ist in A frei drehbar gelagert. Durch einen angescheißten Balken der Länge 1,5 r und einen damit verbundenen Stab, der in B befestigt ist, wird ein Verdrehen der Rolle verhindert. Im Kontakt zwischen Rolle und Seil liegt der Haftkoeffizient μ_s vor. Zwischen Masse m und der schiefen Ebene herrscht Reibung mit dem Haftungskoeffizienten μ_0.

1. Bild



2. Bild



a) Bestimme den Umlenkwinkel α.

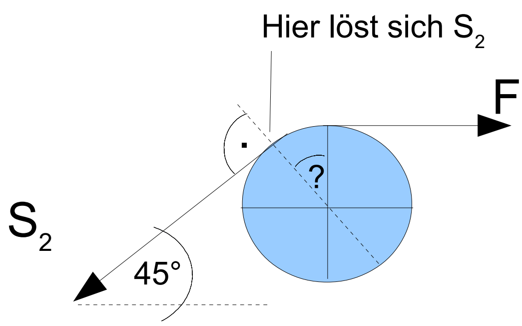
b) In welchem Intervall liegt F, so dass die Masse m ruht.

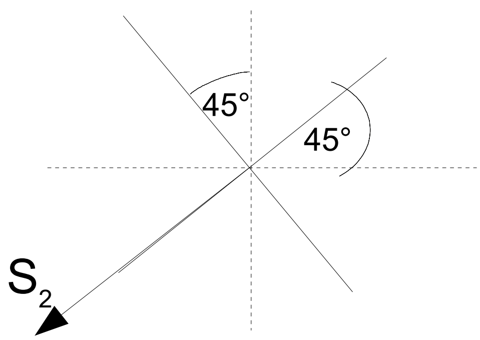
c) Berechne die Stabkraft S, die nötig ist, damit das System im Gleichgewicht bleibt. Gehe davon aus, dass die Kraft F ihren minimalen Wert annimmt, so dass die Masse gerade nicht die schiefe Ebene hinunterrutscht (Aufgabenteil b).

Gegeben: m, g, r, μ_s, μ_0

Lösung der Aufgabe:

a) Umschlingwinkel bestimmen:

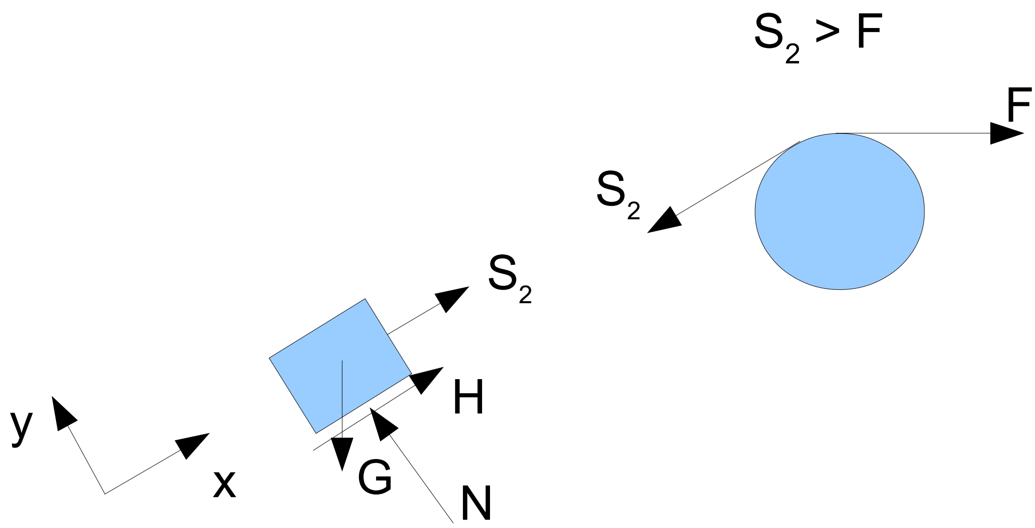




b) Intervall von F bestimmen:

Wie groß darf F werden, so dass die Masse die schiefe Ebene nicht hinuterrutscht???

Freischnitt Masse:



Der Klotz soll nicht die schiefe Ebene herunterrutschen. Demnach muss die Haltekraft genau entgegengesetzt eingezeichnet werden.

Wir wenden die Gleichgewichtsbedingungen an:

$$\sum F_{ix} = 0: \; S_2 + H - G \cdot \sin(45°) = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0: \; N - G \cdot \cos(45°) = 0 \qquad (2)$$

Aus (2):

$$N = G \cdot \cos(45°)$$

Aus (1):

$$H = G \cdot \sin(45°) - S_2$$

Für die Haftreibung gilt (bei welcher der Klotz gerade noch ruht):

$$H \leq H_0$$

mit:

$$H = G \cdot \sin(45°) - S_2$$

$$H_0 = \mu_0 \cdot N = \mu_0 \cdot G \cdot \cos(45°)$$

Einsetzen in die Formel für die Haftreibung:

$$G \cdot \sin(45°) - S_2 \leq \mu_0 \cdot G \cdot \cos(45°)$$

Auflösen nach S_2:

$$G \cdot \sin(45°) - \mu_0 \cdot G \cdot \cos(45°) \leq S_2$$

Es gilt:

$$\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Einsetzen:

$$G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \mu_0 \cdot G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \leq S_2$$

$$\boxed{G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \mu_0) \leq S_2} \qquad \textbf{(3)}$$

Wir müssen als nächstes S_2 bestimmen. Die Seilkraft S_2 darf höchstens ihren maximalen Wert annehmen, damit das Seil sich in Ruhe befindet. Die Haftbedingungen sind gegeben zu:

$$S_2 = F e^{\mu_s \cdot \alpha} \quad S_2 > F$$

Wir müssen diese Formel heranziehen, weil wir zunächst davon ausgehen, dass der Klotz die schiefe Ebene hinunterrutscht und damit S_2 größer als F ist.

Einsetzen des in Aufgabenteil a) ermittelten Umschlinkwinkels:

$$S_2 = F e^{\mu_s \cdot \frac{9}{4}\pi}$$

S_2 darf also maximal diesen Wert annehmen, damit sich das Seil in Ruhe befindet. Einsetzen in die obige Gleichung **(3)** ergibt:

$$G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mu_0) \leq F e^{\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi}$$

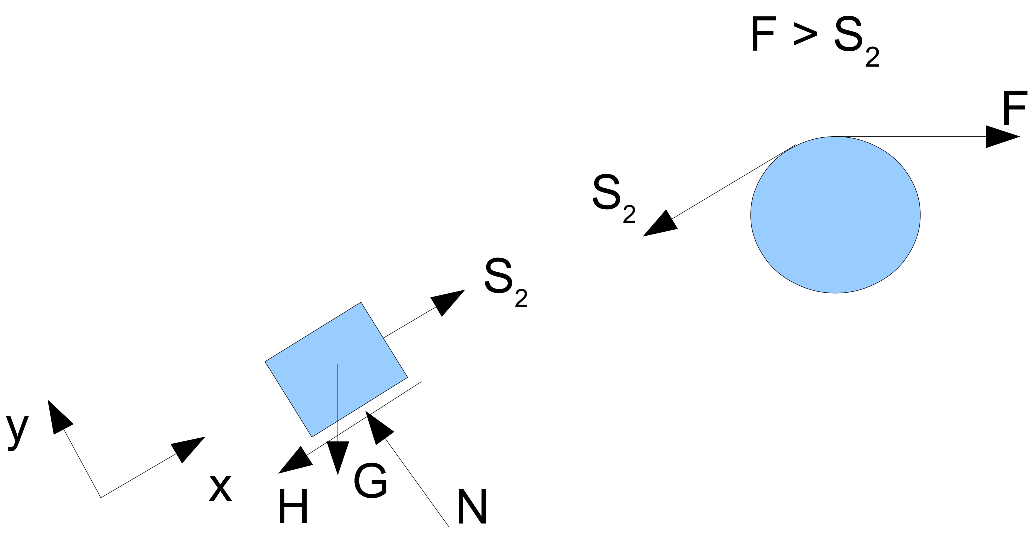
Auflösen nach F:

$$\frac{G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mu_0)}{e^{\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi}} \leq F$$

$$\boxed{G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mu_0) \cdot e^{-\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi} \leq F}$$

F muss größer sein als die linke Seite, damit der Klotz nicht die schiefe Ebene hinunterrutscht.

Wie klein darf F werden, so dass der Klotz die schiefe Ebene nicht hinauf gezogen wird???



Wir gehen nun von einer Bewegung in positive x-Richtung aus. Wir wollen verhindern, dass der Klotz nach oben gezogen wird. Demnach muss die Haltekraft genau entgegengesetzt eingezeichnet werden und F ist größer als S_2.

Wir wenden die Gleichgewichtsbedingungen an:

$$\sum F_{ix} = 0: \; S_2 - H - G \cdot \sin(45°) = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0: \; N - G \cdot \cos(45°) = 0 \qquad (2)$$

Aus (2):

$$N = G \cdot \cos(45°)$$

Aus (1):

$$H = S_2 - G \cdot \sin(45°)$$

Für die Haftreibung gilt (bei welcher der Klotz gerade noch ruht):

$$H \leq H_0$$

mit:

$$H = S_2 - G \cdot \sin(45°)$$

$$H_0 = \mu_0 \cdot N = \mu_0 \cdot G \cdot \cos(45°)$$

Einsetzen in die Formel für die Haftreibung:

$$S_2 - G \cdot \sin(45°) \leq \mu_0 \cdot G \cdot \cos(45°)$$

Auflösen nach S_2:

$$S_2 \leq \mu_0 \cdot G \cdot \cos(45°) + G \cdot \sin(45°)$$

Es gilt:

$$\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Einsetzen:

$$S_2 \leq \mu_0 \cdot G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{S_2 \leq G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\mu_0 + 1)} \qquad (3)$$

Wir müssen als nächstes S_2 bestimmen. Weil nun aber S2 < F ist, benötigen wir die Formel:

$$F = S_2 e^{\mu_S \cdot \alpha} \quad F > S_2$$

Einsetzen des in Aufgabenteil a) ermittelten Umschlingwinkels:

$$F = S_2 e^{\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi}$$

F darf also maximal diesen Wert annehmen, damit sich das Seil in Ruhe befindet. Einsetzen in die obige Gleichung (3) ergibt. Auflösen nach S2:

$$S_2 = \frac{F}{e^{\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi}}$$

Einsetzen in (3):

$$\frac{F}{e^{\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi}} \leq G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_0 + 1)$$

Auflösen nach F:

$$F \leq G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_0 + 1) \cdot e^{\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi}$$

F muss kleiner sein als die rechte Seite, damit der Klotz nicht die schiefe Ebene hinaufgezogen wird.

Damit ergibt sich:

$$G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \mu_0) \cdot e^{-\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi} \leq F \leq G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_0 + 1) \cdot e^{\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi}$$

Beispiel:

m = 10kg, μ_0 = 0,04, μ_S = 0,2

Einsetzen:

$$98{,}1\,N \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 0{,}04) \cdot e^{-0{,}2 \cdot \frac{9}{4}\pi} \leq F \leq 98{,}1\,N \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0{,}04 + 1) \cdot e^{0{,}2 \cdot \frac{9}{4}\pi}$$

$$16{,}2 \leq F \leq 296{,}6$$

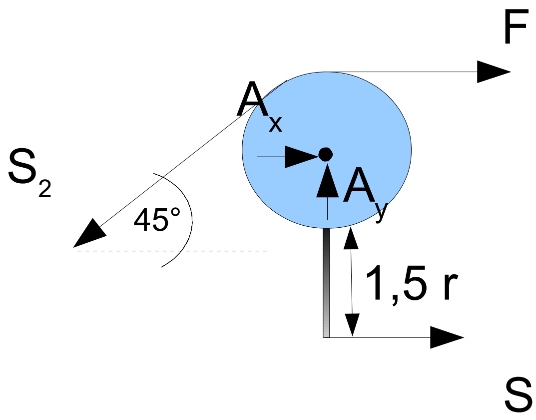
c) Bestimmung der Stabkraft S:

Wir gehen davon aus, dass F ihren minimalen Wert annimmt, so dass der Klotz die schiefe eben gerade nicht hinunterrutscht. Aus Aufgabenstellung b) demnach:

$$F = G \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mu_0) \cdot e^{-\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi}$$

$$S_2 = F\, e^{\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi}$$

Freischnitt:



Da A unbekannt ist, wenden wir die Momentengleichgewichtsbedingung um A an:

$$\sum M_i^A = 0: \; S_2 \cdot r - F \cdot r + S \cdot (r + 1{,}5\, r) = 0$$

$$S = \frac{-S_2 \cdot r + F \cdot r}{(r + 1{,}5\, r)}$$

$$S = \frac{2}{5}(F - S_2)$$

Einsetzen von S2 aus Aufgabenteil b):

$$S = \frac{2}{5}\left(F - F\, e^{\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi}\right)$$

$$S = \frac{2}{5} F \left(1 - e^{\mu_S \cdot \frac{9}{4}\pi}\right)$$

Einsetzen von F aus Aufgabenteil b):

$$S=\frac{2}{5}G\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mu_0)\cdot e^{-\mu_S\cdot\frac{9}{4}\pi}(1-e^{\mu_S\cdot\frac{9}{4}\pi})$$

es gilt:

$$e^{x}\cdot e^{-x}=1$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

und damit:

$$\boxed{S=\frac{\sqrt{2}}{5}G\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mu_0)\cdot[e^{-\mu_S\cdot\frac{9}{4}\pi}-1]}$$