

2. Berechnungsgrundlagen

Zugspannung:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} \leq \sigma_{zul} = \frac{k_a}{s_F} = \frac{R_{eH}}{s_F}$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \epsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

Biegespannung:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{M_b}{I_x} \cdot y_{\max} \leq \sigma_{b,zul}$$

W_b = Widerstandsmoment gegen Biegung

$$W_{b, \text{Kreis}} = \frac{\pi d^3}{32} ; W_{b, \text{Rechteck}} = \frac{b \cdot h^3}{6} \quad W_{b, \text{Kreissegment}} = \frac{\pi}{32} \left(\frac{D^4 - d^4}{D} \right)$$

Normalspannung = Biegespannung + Zug- / Druckspannung

$$\sigma_n = \sigma_b + \sigma_{zo}$$

Scherspannung (Q Querkraft)

$$\tau_s = \frac{Q}{A} \leq \tau_{s,zul}$$

$$\text{I-Profil: } \tau_s \approx \frac{Q}{t \cdot h_{\text{mittel}}} ; \text{Kastenquerschnitt: } \tau_s \approx \frac{Q}{2 \cdot \frac{t}{2} \cdot h}$$

Torsionsspannung

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r_{\max}$$

$$\text{mit } W_t = W_p = \frac{\pi d^3}{16} \text{ (Kreisquerschnitt)}$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = I_x + I_y = I_t \quad I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} , I_{\text{stiel}} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Verdrehwinkel

$$\varphi = \gamma \frac{l}{r}$$

$$\varphi = \frac{\tau_t}{G} \cdot \frac{l}{r_{\max}}$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{I_p \cdot G}$$

$$\text{mit } \tau_t = \frac{M_t}{I_p} \cdot r_{\max}$$

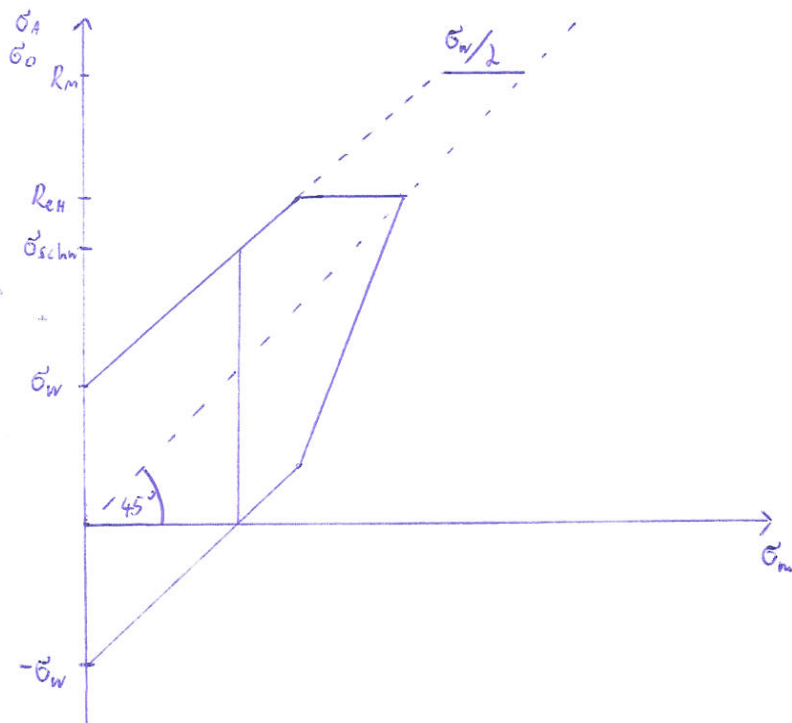
$E \cdot I$ = Biegesteifigkeit

$G \cdot I_p$ = Torsionssteifigkeit / Verdrehsteifigkeit

$E \cdot A$ = Zug- / Drucksteifigkeit (Dehnsteifigkeit)

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad \text{mit} \quad \sigma_n = \frac{F}{A_n} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{max} = \alpha_k \cdot \sigma_n = \alpha_k \cdot \frac{F}{A_n}$$

$$n_{pl} = \sqrt{n} = \sqrt{\frac{\epsilon_{gls}}{\epsilon_f}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{gls} \cdot E}{k_G}} \quad 1 \leq n_{pl} \leq \alpha_k$$



ruhend: $\sigma_m = \sigma_n$ $\sigma_a = 0$

wechselnd: $\sigma_m = 0$ $\sigma_a = \sigma$

schwellend: $\sigma_m = \frac{\sigma}{2}$ $\sigma_a = \frac{\sigma}{2}$

$$n_k = \frac{\alpha_k}{A_k}$$

Festigkeitsnachweis

I. Maximalspannungskonzept

a) Normalspannungshypothese (NH)

1. ruhender Anteil (Mittelspannung):

$$\sigma_{vkm} = \frac{1}{2} \alpha_{ks} \cdot \sigma_m \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_{ks} \cdot \sigma_m}{2}\right)^2 + (\alpha_{kt} \cdot \tilde{\tau}_m)^2} \leq \sigma_{vkm, zul} = \frac{n_{pl} \cdot K_G}{S_F}$$

2. schwingender Anteil (Ausschlagsspannung):

$$\sigma_{vka} = \frac{1}{2} \alpha_{ks} \cdot \sigma_a \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_{ks} \cdot \sigma_a}{2}\right)^2 + (\alpha_{kt} \cdot \tilde{\tau}_a)^2} \leq \sigma_{vka, zul} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot n_x \cdot \sigma_A}{S_0}$$

b) Schubspannungshypothese (SH)

1. ruhender Anteil (Mittelspannung)

$$\sigma_{vkm} = \sqrt{(\alpha_{ks} \cdot \sigma_m)^2 + 4 (\alpha_{kt} \cdot \tilde{\tau}_m)^2} \leq \sigma_{vkm, zul} = \frac{n_{pl} \cdot K_G}{S_F}$$

2. schwingender Anteil (Ausschlagsspannung)

$$\sigma_{vka} = \sqrt{(\alpha_{ks} \cdot \sigma_a)^2 + 4 (\alpha_{kt} \cdot \tilde{\tau}_a)^2} \leq \sigma_{vka, zul} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot n_x \cdot \sigma_A}{S_0}$$

c) Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)

1. ruhender Anteil:

$$\sigma_{vkm} = \sqrt{(\alpha_{ks} \cdot \sigma_m)^2 + 3 \cdot (\alpha_{kt} \cdot \tilde{\tau}_m)^2} \leq \sigma_{vkm, zul} = \frac{n_{pl} \cdot K_G}{S_F}$$

2. schwingender Anteil:

$$\sigma_{vka} = \sqrt{(\alpha_{ks} \cdot \sigma_a)^2 + 3 (\alpha_{kt} \cdot \tilde{\tau}_a)^2} \leq \sigma_{vka, zul} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot n_x \cdot \sigma_A}{S_0}$$

- normalerweise Maximalspannungskonzept anwenden

- NH bei Sprödbruch

II.

Nennspannungskonzept

a) Normalspannungshypothese:

1. ruhender Anteil:

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{2} \sigma_m \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + \tau_m^2} \leq \sigma_{vm, zul} = \frac{n_{pl} \cdot K_G}{\alpha_{KS} \cdot S_F}$$

2. schwingender Anteil:

$$\sigma_{va} = \frac{1}{2} \sigma_a \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{2}\right)^2 + \tau_a^2} \leq \sigma_{va, zul} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \sigma_A}{\beta_K \cdot S_D}$$

b) Schubspannungshypothese:

1. ruhender Anteil

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_m^2 + 4 \cdot \tau_m^2} \leq \sigma_{vm, zul} = \frac{n_{pl} \cdot K_G}{\alpha_{KS} \cdot S_F}$$

2. schwingender Anteil

$$\sigma_{va} = \sqrt{\sigma_a^2 + 4 \cdot \tau_a^2} \leq \sigma_{va, zul} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \sigma_A}{\beta_K \cdot S_D}$$

c) Gestaltänderungsenergiehypothese:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_m^2 + 3 \tau_m^2} \leq \sigma_{vm, zul} = \frac{n_{pl} \cdot K_G}{\alpha_{KS} \cdot S_F}$$

$$\sigma_{va} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3 \tau_a^2} \leq \sigma_{va, zul} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \sigma_A}{\beta_K \cdot S_D}$$

- Nennspannungskonzept nur dann, wenn α_K und α unbekannt sind und β_K durch Experimente ermittelt wurde.
- Bei Sprödbruchgefahr grundsätzlich Maximalspannungskonzept und Normalspannungshypo.

3. Werkstoffkennwerte

Zug - Druck: Festigkeit: $m \sim \frac{S}{\sigma_{20, zul}}$

Steißigkeit: $m \sim \frac{S}{E}$

Biegung: Festigkeit: $m \sim \frac{S}{\sqrt{\sigma_{20, zul}}}$

$m \sim \frac{S}{\sqrt[3]{E}}$

4. Nietverbindungen

1. Scherspannung im Niet

$$\tau_n = \frac{F}{\frac{\pi}{4} d_n^2 \cdot m \cdot n} \leq \tau_{n,zul}$$

m = Anzahl der Scherflächen
 n = Anzahl der Niete

2. Flächenpressung oder Lochlößung

$$p = \sigma_L = \frac{F}{A_{proj.}} = \frac{F}{d_n \cdot s \cdot n} \leq \sigma_{L,zul}$$

s = Minimalwert aus $s_1 + s_2$ (einschneittig)
bzw. aus $(s_1 + s_3) + s_2$ (mehrschneittig)

3. Biegespannung (nur einschneittige Verbindungen)

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{F \cdot s_2}{W_b} = \frac{F \cdot s_2}{\frac{\pi \cdot d_n^3 \cdot n}{32}} = \frac{F \cdot s \cdot 16}{\pi \cdot d_n^3 \cdot n} \leq \sigma_{b,zul}$$

4. Zugspannung (vermeiden)

$$\sigma_z = \frac{F}{A \cdot n}$$

5. Schwächung der Bauteile

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_n} = \frac{F}{(b - d \cdot n) \cdot s_{min}} \leq \sigma_{2,zul}$$

6. Doppellaschenverbindung

Blattquerschnitt: $\sigma_2 = \frac{F}{A_n} = \frac{F}{(b - d \cdot n) \cdot s} \leq \sigma_{2,zul}$

Laschenquerschnitt: $\sigma_3 = \frac{F_2}{A_n} = \frac{F_2}{(b - d \cdot n) \cdot s_L} \leq \sigma_{3,zul}$

bei gleichem Werkstoff: $s_L \approx (0,65 \dots 0,8) \cdot s$

7. vorhandene Teilung

$$t_v = \frac{\pi \cdot d}{n}$$

wenn $t_v > t_{zul} \Rightarrow \text{Ok} \checkmark$

geschlagener Niet = $d + 1 \text{ mm} = d_n$

5. Bolzen - und Stiftverbindungen

Gelenkbolzen (Querbolzen)

ME 050301 + 050303

1) Biegespannung im Bolzen

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{32 \cdot M_b}{\pi \cdot d^3} \leq \sigma_{b,zul} \quad \text{mit } M_b = M_{b,max}$$

Einbaufall 1: (beides Spielpassung)

$$M_{b,max} = \frac{1}{8} F (2 \cdot b_1 + b)$$

Einbaufall 2: (Gabel Presspassung, Stange Spielpassung)

$$M_{b,max} = \frac{1}{8} F \cdot b$$

Einbaufall 3: (Gabel Spielpassung, Stange Presspassung)

$$M_{b,max} = \frac{1}{4} F \cdot b_1$$

b_1 = links + rechts = Gabel
 b = mitte = Stange

2) Scherspannung τ_s am Bolzen

$$\tau_s = \frac{F_s}{A_s} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \leq \tau_{s,zul}$$

3) Lochleibung bzw. Flächenpressung

a) Gabel: $\sigma_c = p = \frac{F}{2 \cdot b_1 \cdot d} \leq \sigma_{c,zul} = p_{c,zul}$

b) Stange: $\sigma_c = p = \frac{F}{b \cdot d} \leq \sigma_{c,zul} = p_{c,zul}$

4) Zugspannung im Restquerschnitt

a) Gabel: $\sigma_z = \frac{F}{A_g} = \frac{F}{2 \cdot b_1 \cdot (D - d)} \leq \sigma_{z,zul}$

b) Stange: $\sigma_z = \frac{F}{A_{st}} = \frac{F}{(D - d_B) \cdot b} \leq \sigma_{z,zul}$

5) Schubspannung im Restquerschnitt

a) in der Gabel:
$$\tau_a = \frac{F}{A_{GS}} = \frac{F}{4 \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) b_n} \leq \tau_{a,zul}$$

b) in der Stange:
$$\tau_a = \frac{F}{A_{Sts}} = \frac{F}{2 \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) \cdot b} \leq \tau_{a,zul}$$

6) Minimaler Bolzendurchmesser

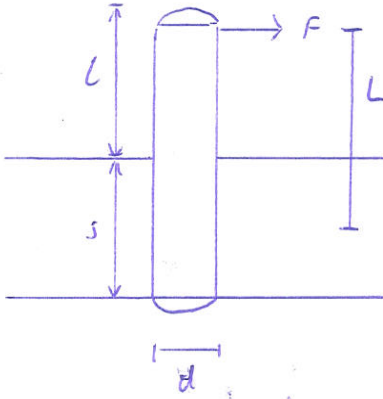
Biegebeanspruchung:
$$d_{min} = \sqrt[3]{\frac{3L \cdot M_{b,max}}{\pi \cdot \sigma_{b,zul}}}$$

Scherbeanspruchung:
$$d_{min} = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{\pi \cdot \tau_{a,zul}}}$$

Lochleibung (Gabel):
$$d_{min} = \frac{F}{2 \cdot b_n \cdot \sigma_{l,zul}}$$

Lochleibung (Stange):
$$d_{min} = \frac{F}{b \cdot \sigma_{l,zul}}$$

II Steckstift unter Biegekraft (Querkraft)



1) Flächenpressungen

a) Querkraftanteil: $p_1 = \frac{F}{d \cdot s}$

b) Biegemomentenanteil: $M_b = F \cdot L$

$$p_2 = \frac{M_b}{W_{by}} = \frac{F \cdot L \cdot 6}{d \cdot s^2}$$

gesamte Flächenpressung $p_G = p_1 + p_2 = \frac{F}{d \cdot s} \left(1 + \frac{6 \cdot L}{s} \right)$

2) Biegespannung an der Einspannstelle

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{F \cdot L \cdot 32}{\pi \cdot d^3}$$

3) Scherspannung an der Einspannstelle

$$\tau_s = \frac{F}{A_s} = \frac{F \cdot 4}{\pi \cdot d^2}$$

III Querstift (Radialstift) unter Drehmoment:

Drehmoment: $M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n}$

$n = \text{Drehzahl in } \frac{1}{s}$

$1 \text{ kW} = 1000 \text{ W} = 1000 \frac{\text{Nm}}{s}$

Umfangskraft: $F_u = \frac{2 \cdot M_t}{D_i}$

$$F_u' = \frac{M_t \cdot 4}{(D_a + D_i)}$$

$D_i = \text{Welle (Innendurchmesser)}$

$D_a = \text{Nabe (Außendurchmesser)}$

1. Flächenpressungen

a) Querkraftanteil (Nabe): $p_a = \frac{F_u'}{d(D_a^2 - D_i^2)} = \frac{4 \cdot M_t}{d(D_a^2 - D_i^2)} \leq p_{zul} \text{ (Nabe)}$

b) Biegemomentenanteil (Welle): $M_b = \left(\frac{F_u}{2} + \frac{F_u'}{2} \right) \frac{D_i}{2}$

$$p_i = \frac{M_b}{W_{bq}} = \frac{6 \cdot M_t}{d \cdot (D_i^3)} = \frac{3 \cdot F_u}{d \cdot D_i} \quad \text{mit } W_{bq} = \frac{d \cdot (D_i)^3}{6}$$

2. Scherspannung zwischen Welle und Nabe:

$$\tau_a = \frac{F_u}{2 \cdot A_s} = \frac{2 \cdot F_u}{\pi \cdot d^2}$$

IV Längsstift (Rundkeil) unter Drehmoment

Umfangskraft: $F_u = \frac{M_t \cdot 2}{D}$

1. Flächenpressung

$$p = p_i = p_a = \frac{F_u}{A} = \frac{4 \cdot M_t}{l \cdot d \cdot D} \leq p_{zul}$$

$D = \text{Durchmesser Welle}$

$d = \text{Durchmesser Längsstift}$

$l = \text{Länge des Stifts}$

$A = l \cdot d_s$

2. Scherspannung

$$\tau_a = \frac{F_u}{A_s} = \frac{F_u}{d \cdot l} \leq \tau_{a,zul}$$

IV Passfederverbindung:

1. Flächenpressung

$$p = \frac{F_n}{(h - t_n) \cdot l_1} \leq p_{zul} \text{ (Nabe)}$$

$$F_n = \frac{2 \cdot M_t}{d_n}$$

$$p = \frac{F_n}{(h - t_n) \cdot l_1} \leq p_{zul} \text{ (Welle)}$$

$$l_1 = \text{tragende Passfedervnge} ; \quad l = l_1 + 2 \cdot \frac{b}{2}$$

2. Scherspannung

$$\hat{\tau}_a = \frac{F_n}{b \cdot l_1} \leq \hat{\tau}_{a,zul}$$

$$\hat{\tau}_a = \frac{F_n}{b \cdot (l - b)}$$

3. wirksame Passfedervnge

$$l_1 \geq \frac{2 \cdot M_t}{d (h - t_n) \cdot p_{zul}}$$

7. Lot- und Klebverbindungen

Zugspannung: $\sigma_z = \frac{F_z}{A} = \frac{F_z}{b \cdot l} \leq \sigma_{z, \text{zul}}$

Scherspannung: $\tau_s = \frac{F_z}{A_s} = \frac{F_z}{b \cdot l} \leq \tau_{s, \text{zul}}$

Gleiche Festigkeit wie die Lasche:

a) Zugkraft F_z am Bauteil: $F_z = \sigma_{z, \text{zul}} \cdot b \cdot s_{\text{min}} = \frac{R_{eH}}{S_F} \cdot b \cdot s_{\text{min}}$

b) Bruchlast F_B der Verbindung: $F_B = \tau_{s, \text{zul}} \cdot b \cdot l = \frac{\tau_B}{S_B} \cdot b \cdot l$

$\Rightarrow$ optimale Überlappungslänge, wenn $F_z = F_B$

$$x_{\text{opt}} = s_{\text{min}} \cdot \frac{R_{eH}}{S_F} \cdot \frac{S_B}{\tau_B}$$

Bsp: Welle - Nabe - Verbindung

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{t, \text{zul}} \quad ; \quad M_t = F_n \cdot \frac{d}{2}$$

$$\tau_s = \frac{F_n}{A_s} = \frac{F_n}{\pi \cdot d \cdot b}$$

Gleiche Festigkeit wie die Welle

$$F_n = \frac{M_t \cdot 2}{d} = \frac{\tau_{t, \text{zul}} \cdot W_t \cdot 2}{d}$$

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$F_B = \tau_{s, \text{zul}} \cdot \pi \cdot d \cdot b = \frac{\tau_B}{S_B} \cdot \pi \cdot d \cdot b$$

$\Rightarrow$ optimale Nabenbreite, wenn $F_B = F_n$

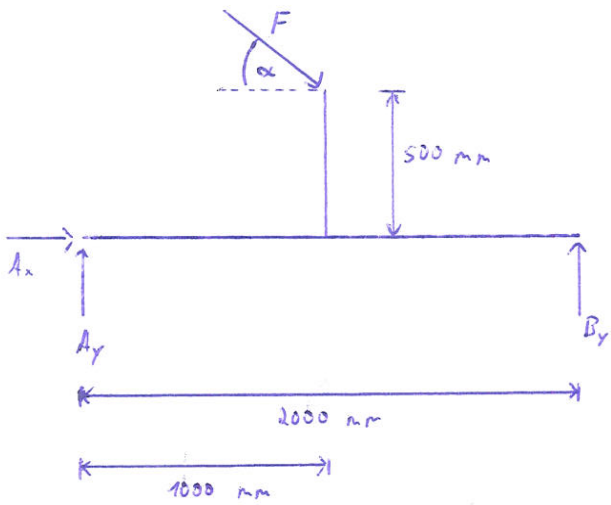
$$\Rightarrow b_{\text{opt}} = d \cdot \frac{1}{8} \cdot \tau_{t, \text{zul}} \cdot \frac{S_B}{\tau_B}$$

Alternativ:

1) $M_{t, \text{max}} = \tau_{t, \text{zul}} \cdot W_t = \tau_{t, \text{zul}} \cdot \frac{\pi d^3}{16} \quad ; \quad F_{n, \text{max}} = \frac{2 \cdot M_{t, \text{max}}}{d}$

2) $b_{\text{opt}} = \frac{F_{n, \text{max}} \cdot S_B}{\tau_B \cdot \pi \cdot d}$

6. Achsen und Wellen

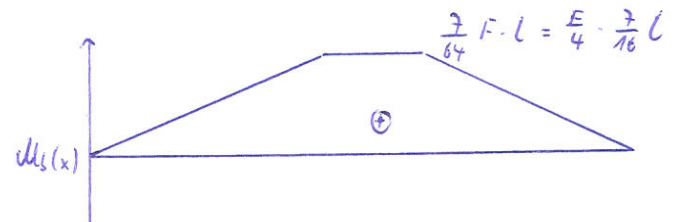
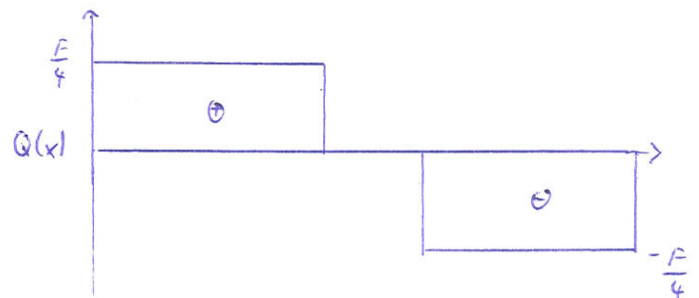
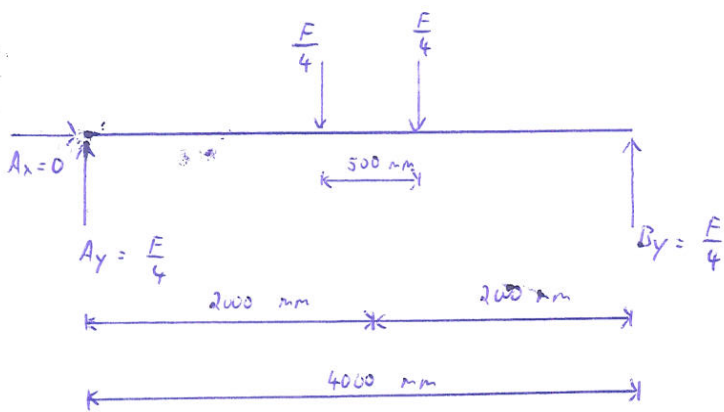
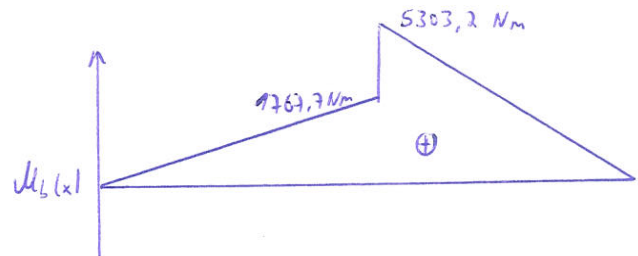
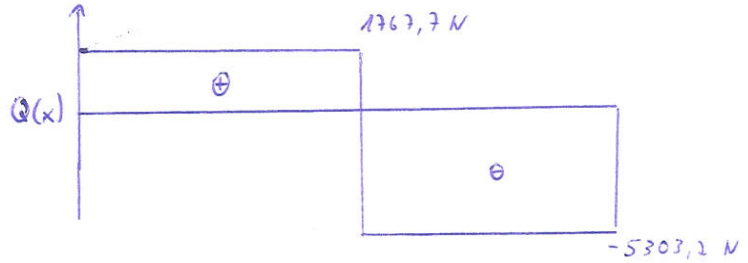
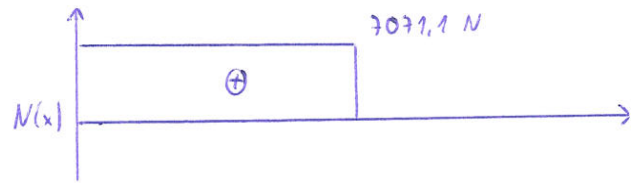


$$F = 10000 \text{ N}$$

$$A_x = -F \cos 45^\circ = -7071,1 \text{ N}$$

$$B_y = 5303,2 \text{ N}$$

$$A_y = 1767,73 \text{ N}$$



Rundstab + Flachstab (z.B. Türklinke)

