Maschinenelemente 2A - Wellen und Achsen

Wellen und Achsen

Insgesamt lassen sich drei Hauptaufgaben von Wellen und Achsen nennen:

1. Bewegung übertragen
2. Energie leiten
3. Kraftgrößen leiten $\rightarrow$ Normalkräfte, Querkräfte, Biegemomente, Torsionsmoment

Die **Wellen** und die **Achsen** lassen dabei besonders in Bezug auf ihre **Hauptfunktion** unterscheiden.

Achsen

MERKE

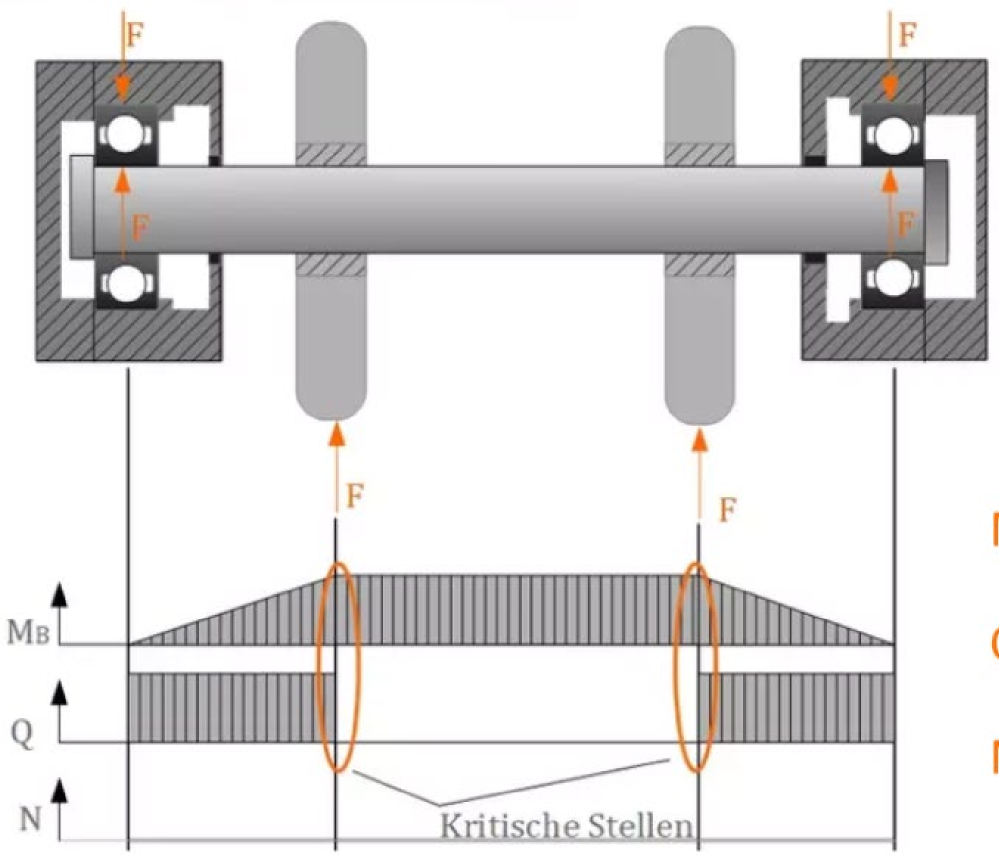
Achsen stützen Kräfte und Biegemoment ab, übertragen jedoch **keine** Nutzdrehmomente $\longrightarrow$ keine Torsionsübertragung.

Ferner unterscheiden sich Achsen nach ihrer Einbauart:

- feststehende Achsen $\longrightarrow$ Achse, Bolzen
- umlaufende Achsen $\longrightarrow$ Achse

Dabei sind beide entsprechend ihrer Funktion durch Querkräfte oder Biegemomente statisch oder dynamisch beansprucht.

Achsen



M_B □ Biegemomentenverlauf

Q □ Querkraftverlauf

N □ Normalkraftverlauf

Wellen

MERKE

Wellen dienen zur Drehmomentübertragung, müssen aber zusätzlich auch die gleichen Anforderungen erfüllen, die an Achsen gestellt werden.

Neben diesen Aufgaben übernehmen Wellen Abstützungsaufgaben inklusive der Leitung von Querkräften und Biegemomenten sowie Normalkräften. Zudem sind Wellen immer drehbeweglich konstruiert und unterliegen Torsionsbelastungen sowie Biegungen. Die Belastung durch Quer- und Längskräfte ist zwar vorhanden, aber vernachlässigbar klein.

Tragfähigkeitsnachweis

Bevor es jedoch losgeht, gehen wir kurz auf vorausgehende Überlegungen ein, die es beim Tragfähigkeitsnachweis zu beachten gilt:

- Die **Hauptabmessungen** lassen sich häufig nicht frei wählen, da sie durch konstruktive Gegebenheiten wie Lager, Welle-Nabe-Verbindungen oder Verzahnungsabmessungen beeinflusst werden.
- In der **Vordimensionierung** werden nicht alle Belastungen erfasst bzw. berücksichtigt, sondern lediglich die Belastung, die am meisten ins Gewicht fällt. Fast immer handelt es sich dabei um Belastungen durch Torsion oder durch Biegung.

Tragfähigkeitsnachweis

Der **Tragfähigkeitsnachweis** (bzw. Festigkeitsrechnung) von Wellen und Achsen muss die nachfolgenden spezifischen Probleme berücksichtigen:

MERKE

Trennung von **statischen** und **dynamischen Lasten** $\rightarrow \sigma_V$ für beide bestimmen $\rightarrow$ Smith-Diagramm.

Tragfähigkeitsnachweis

Wellen und Naben sind durch Spannungen aus unterschiedlichen Lastgrößen beansprucht, welche wiederum unterschiedliche Lastfälle beinhalten. Zur Berechnung treffen wir jedoch vereinfachte Annahmen bei der Torsion, der Querkraft, der Biegung und der Normalkraft. **Dennoch solltest du immer auf eine Vernachlässigung hinweisen und diese nicht einfach unkommentiert lassen.**

Tragfähigkeitsnachweis - Berechnungsformeln

METHODE

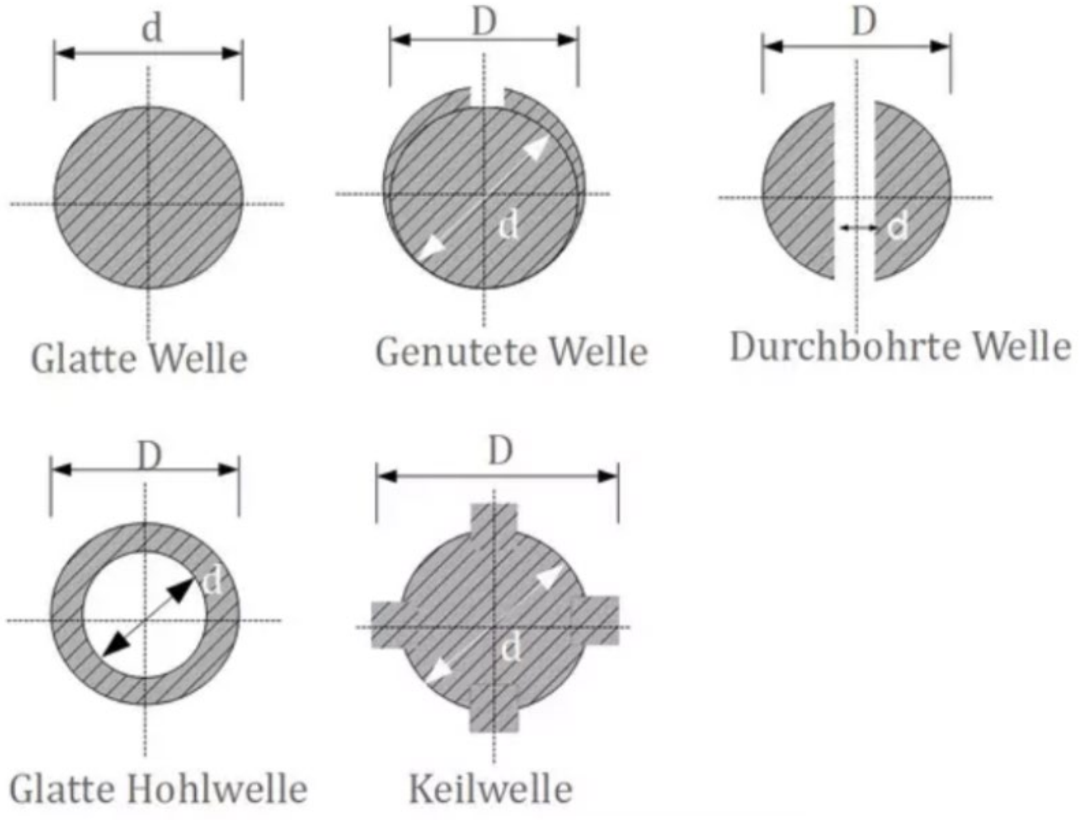
Biegung: $\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$

Normalkraft: $\sigma_n = \frac{F}{A}$

Torsion: $\tau_t = \frac{T}{W_t}$

Querkraft: $\tau_s = \frac{Q}{A}$

Tragfähigkeitsnachweis - Wellenprofile



Tragfähigkeitsnachweis - Wellenprofile

	Glatte Welle	Genutete Welle	Glatte Hohlwelle	Keilwelle	Durchbohrte Welle
W_b	$\approx 0,1d^3$	$\approx 0,012(D+d^3)$	$\approx 0,1\frac{D^4-d^4}{D}$	$\approx 0,012(D+d)^3$	$\approx 0,1D^3 - 0,17d \cdot D^2$
W_t	$2 \cdot W_b$	$\approx 0,2 \cdot d^3$	$= 2 \cdot W_b$	$= 2 \cdot W_b$	$\approx 2 \cdot W_b$
I_b	$\approx 0,1d^4$	$\approx 0,003(D+d)^4$	$\approx 0,05(D^4 - d^4)$	$\approx 0,003(D+d)^4$	$\approx 0,05D^4 - 0,083d \cdot D^3$
I_t	$\approx 0,1d^4$	$\approx 0,1d^4$	$= 2 \cdot I_b$	$= 2 \cdot I_b$	$\approx 2I_b$

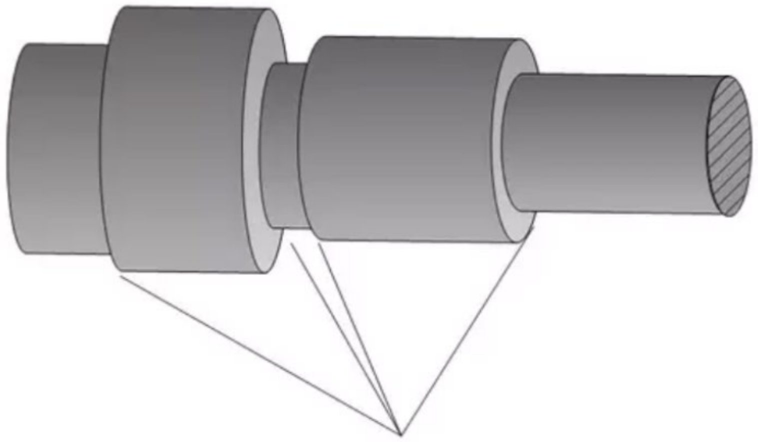
MERKE

Wir erinnern uns: Als **Widerstandsmomente** und **Flächenträgheitsmomente** bezeichnet man Größen, die allein aus der Geometrie eines Querschnitts abgeleitet werden, wie in der obigen Tabelle für die Wellen aufgelistet. Dabei berücksichtigen die Gleichungen zur Geometrie sowohl die Maße als auch die Form der Welle.

Kerben

MERKE

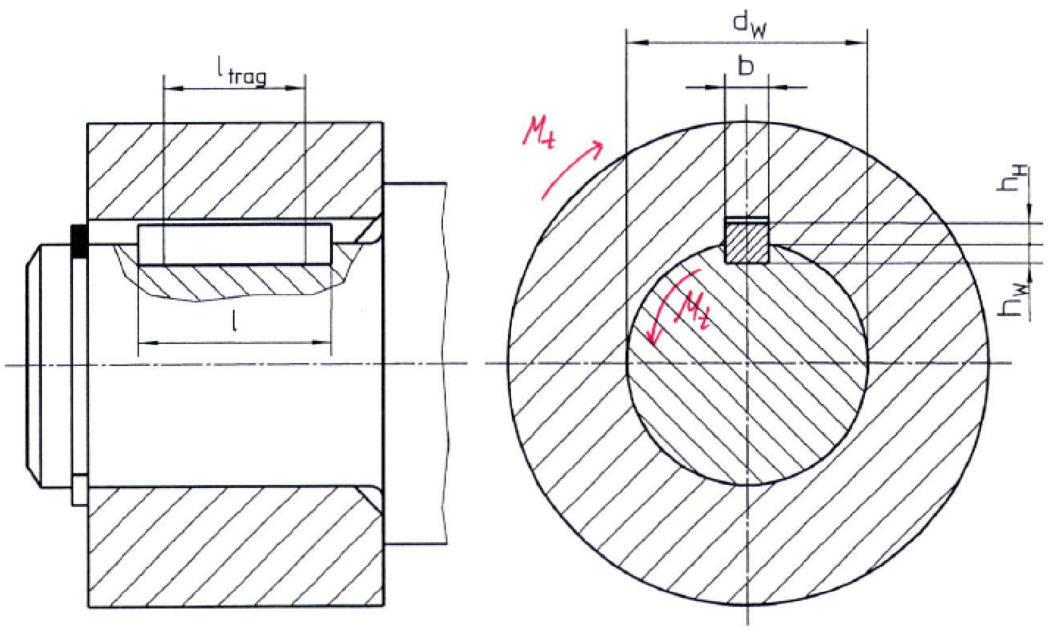
Achsen und Wellen werden konstruktiv oft mit Kerben versehen. Während der Konstruktion sollte jedoch beachtet werden, dass eine Verwendung der **Formziffer** α_K zulässig bleibt.



Welle-Nabe-Verbindung

- Im Nabensitz liegt keine Bruchgefahr vor. → Die Nabe wirkt systemversteifend.
- Der Kraftfluss in Passfedern hingegen erhöht die Kerbspannung.
- Nabenenden sind rissanfällig aufgrund des Steifigkeitssprungs an diesen Stellen.
- Mikrobewegungen in der Welle-Nabe-Verbindung lassen **Reibrost** entstehen, der widerum eine Kerbwirkung erzeugt.

Welle-Nabe-Verbindung – Formschlüssige Verbindungen



Passfeder: St 60 → bei *b*: P9 / h6 fester Sitz
N9 / h9 leichter Sitz

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Formschlüssige Verbindungen

Umfangskraft: $$F_U = \frac{M_t \cdot 2}{d_W}$$

Flächenpressung: $$p = \frac{F_U}{h_H \;\; bzw. \; h_W(l-b)} \leq p_{zul}$$

Scherspannung: $$\tau_a = \frac{F_U}{b(l-b)} \leq \tau_{zul}$$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Klemmverbindung

- Bei der **Klemmverbindung** wird die erforderliche Flächenpressung in der Fügefläche durch Schraubenkräfte oder Kippkräfte erzeugt

- Hierbei werden je nach Richtung der Verspannkräfte axial oder radial verspannte Verbindungen unterschieden

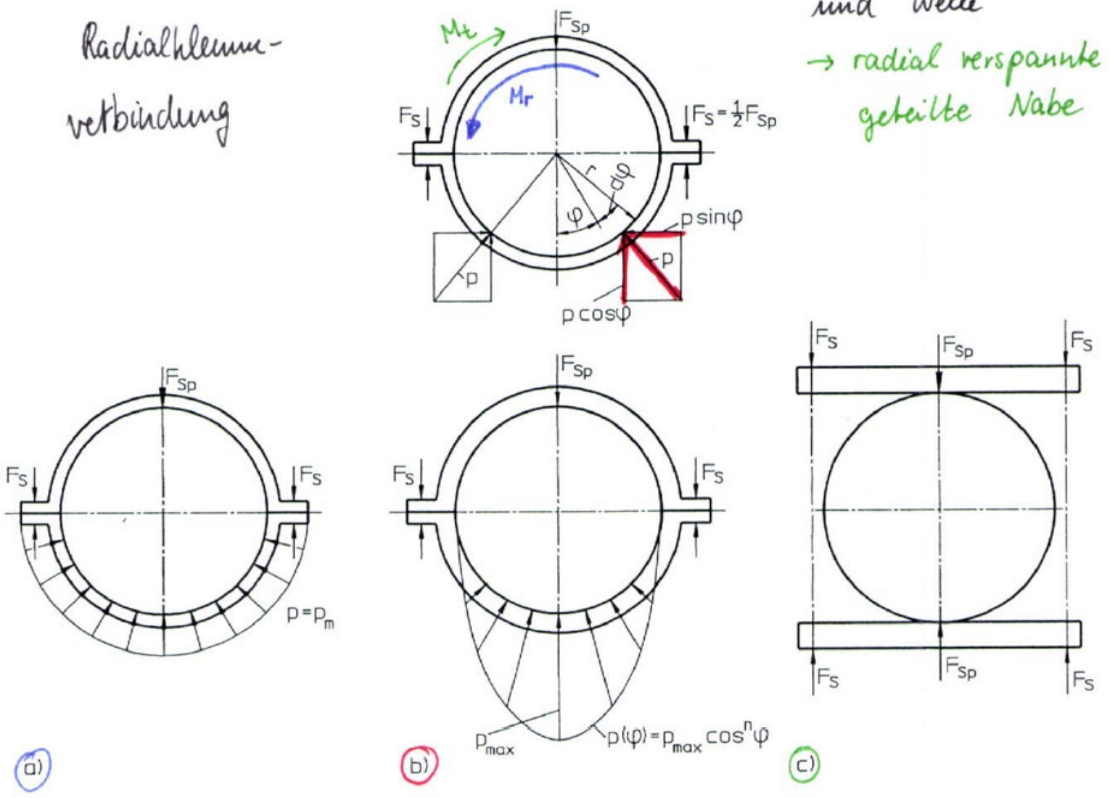
Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Klemmverbindung

z.B Zahnradnabe und Welle

→ radial verspannte geteilte Nabe

Radialklemm-verbindung



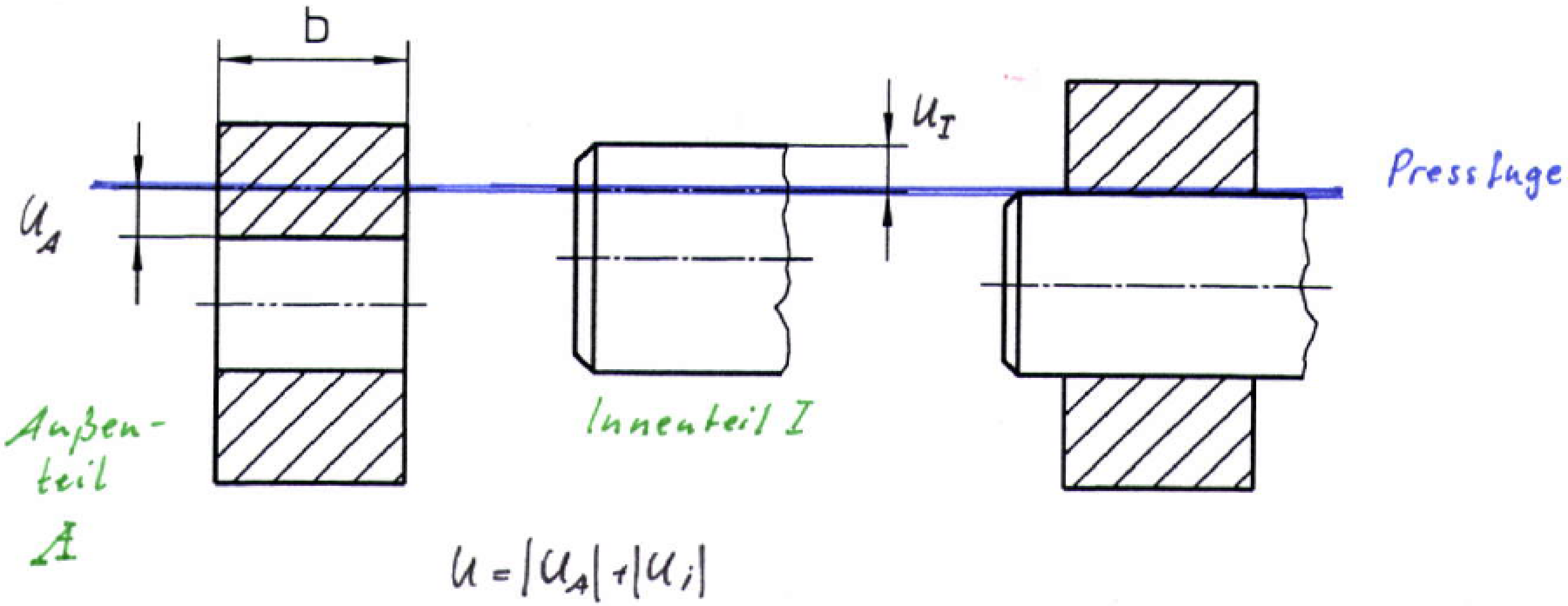
Spannkraft F_{Sp}, Schraubenkräfte F_S und Verteilung der Flächenpressung p in der Fügefläche

a) sehr biegeweiche oder biegeschlaffe Nabe $p = p_m$
b) biegesteife Nabe $p = p(\varphi)$
c) unendlich biegesteife Nabe

Quelle: Steinhilper / Röper

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen



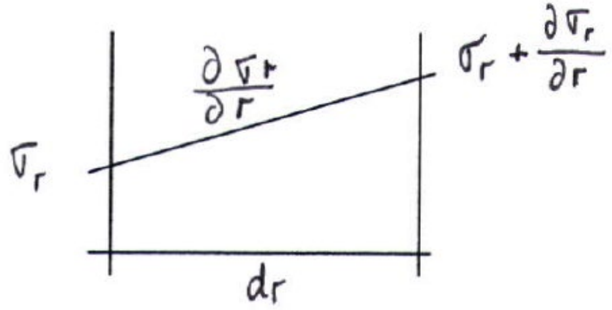
Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

Aus der DGL $\rightarrow$ $\dfrac{d\sigma_r}{dr} \cdot r = \sigma_t - \sigma_r = 2 \cdot A - \sigma_r - \sigma_r = 2(A - \sigma_r)$

$$\boxed{\frac{r}{dr} = \frac{2(A-\sigma_r)}{d\sigma_r} \quad \text{bzw.} \quad 2 \cdot \frac{dr}{r} = \frac{d\sigma_r}{A-\sigma_r}}$$

$\rightarrow$ *"Trennung der Veränderlichen"*



Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

Nach der Integration:

$$2\ln r = -\ln(A-\sigma_r)+C_1+C_2$$

$$r^2\cdot(A-\sigma_r) = e^{C_1+C_2} = B$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}} \qquad (1)$$

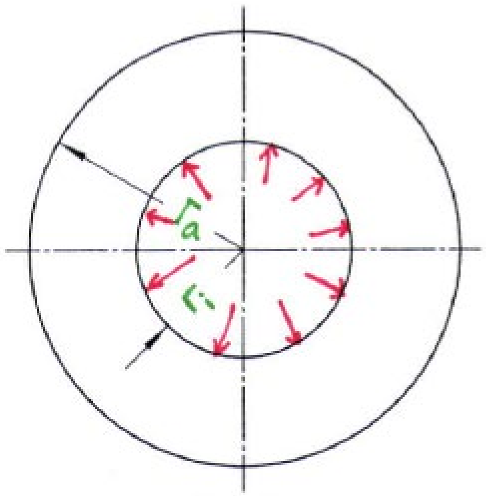
und mit $\sigma_t = 2\cdot A-\sigma_r \longrightarrow \sigma_t = 2A - A + \frac{B}{r^2}$

$$\boxed{\sigma_t = A + \frac{B}{r^2}} \qquad (2)$$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

$\Rightarrow$ *Ring unter Innendruck* (Nabe, Zahnrad)



Nach Gl. (1) ist $\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}$

für $r = r_i \rightarrow \sigma_{ri} = -p$

$r = r_a \rightarrow \sigma_{ra} = 0$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

Diese Randbedingungen werden in Gl. (1) eingesetzt:

$$\sigma_{ri} = -p = A - \frac{B}{r_i^2} = A - A \cdot \frac{r_a^2}{r_i^2} = A\left(1 - \frac{r_a^2}{r_i^2}\right)$$

$$\sigma_{ra} = 0 = A - B \cdot \frac{1}{r_a^2} \quad \Rightarrow \quad B = A \cdot r_a^2$$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

Mit $\boxed{Q_A = \frac{r_i}{r_a}}$ *Radienverhältnis des Außenringes* folgt:

$$A = p \cdot \frac{Q_A^2}{1 - Q_A^2} \qquad (3)$$

$$B = p \cdot \frac{Q_A^2}{1 - Q_A^2} \cdot r_a^2 \qquad (4)$$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

❒ *Radialspannung σ_r*

Aus Gl. (3) und (4) eingesetzt in Gl. (1) ergibt sich:

$$\sigma_r = p \frac{Q_A^2}{1-Q_A^2} - p \frac{Q_A^2}{1-Q_A^2} \cdot \frac{r_a^2}{r^2}$$

$$\boxed{\sigma_r = p \frac{Q_A^2}{1-Q_A^2}\left(1-\frac{r_a^2}{r^2}\right)}$$

❒ *Tangentialspannung σ_t*

Aus Gl. (3) und (4) eingesetzt in Gl. (2) ergibt sich:

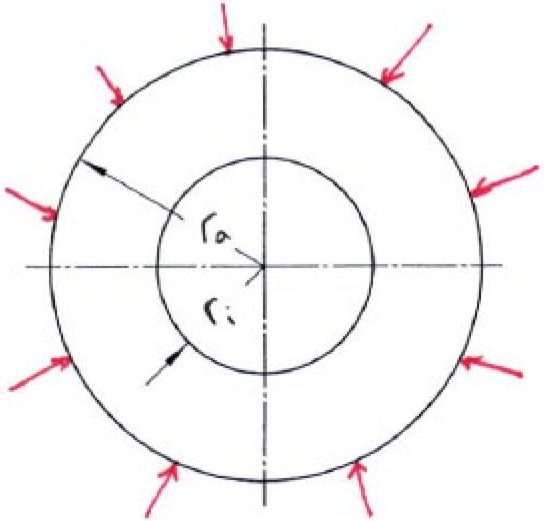
$$\sigma_t = p \cdot \frac{Q_A^2}{1-Q_A^2} + p \cdot \frac{Q_A^2}{1-Q_A^2} \cdot \frac{r_e^2}{r^2}$$

$$\boxed{\sigma_t = p \frac{Q_A^2}{1-Q_A^2}\left(1+\frac{r_a^2}{r^2}\right)}$$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

$\Rightarrow$ *Ring unter Außendruck* (Hohlwelle)



Nach Gl. (1) ist $\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}$

für $r = r_i \rightarrow \sigma_{ri} = 0$

$r = r_a \rightarrow \sigma_{ra} = -p$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

Diese Randbedingungen werden in Gl. (1) eingesetzt:

$$\sigma_{ri} = 0 = A - \frac{B}{r_i^2} \longrightarrow B = A \cdot r_i^2$$

$$\sigma_{ra} = -p = A - \frac{B}{r_a^2} = A - A \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2} = A(1 - Q_I^2)$$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

Mit $Q_I = \frac{r_i}{r_a}$ *Radienverhältnis des Innenringes* folgt:

$$A = -p \cdot \frac{1}{1 - Q_I^2} \quad (7)$$

$$B = -p \cdot \frac{1}{1 - Q_I^2} \cdot r_i^2 \quad (8)$$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

- *Radialspannung σ_r*

Aus Gl. (7) und (8) eingesetzt in Gl. (1) ergibt sich:

$$\boxed{\sigma_r = -\frac{p}{1-Q_I^2}\left(1-\frac{r_i^2}{r^2}\right)}$$

- *Tangentialspannung σ_t*

Aus Gl. (7) und (8) eingesetzt in Gl. (2) ergibt sich:

$$\boxed{\sigma_t = -\frac{p}{1-Q_I^2}\left(1+\frac{r_i^2}{r^2}\right)}$$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

Beispiel:

Radienverhältnis Außenring A

$$Q_A = \frac{d_F}{d_A} = \frac{2 \cdot r_{Ai}}{2 \cdot r_{Aa}} = \frac{60\,mm}{100\,mm} = 0{,}6$$

Radienverhältnis Innenring I

$$Q_I = \frac{d_I}{d_F} = \frac{2 \cdot r_{Ii}}{2 \cdot r_{Ia}} = \frac{20\,mm}{60\,mm} = 0{,}\overline{33}$$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen

$\Rightarrow$ *Beanspruchungsanalyse Welle-Nabe-Verbindung*
$\rightarrow$ *Beispiel: Spannungsverteilung*

Radienverhältnis Außenring A

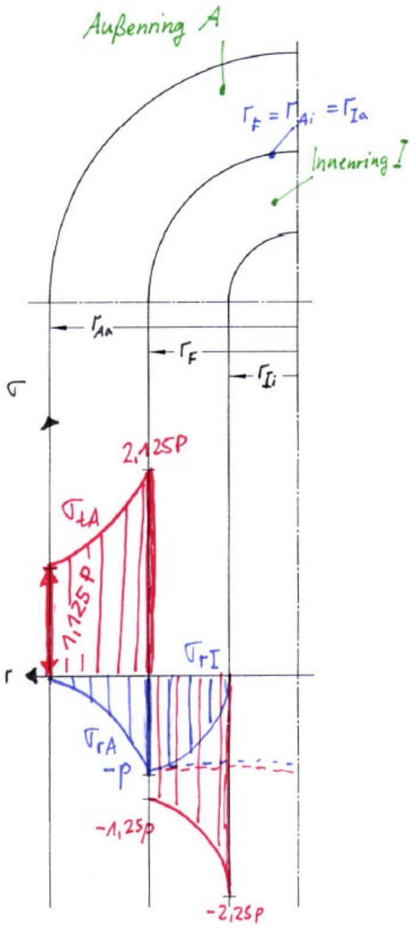
$$Q_A = \frac{d_F}{d_A} = \frac{2 \cdot r_{Ai}}{2 \cdot r_{Aa}} = \frac{60\ mm}{100\ mm} = 0{,}6$$

Radienverhältnis Innenring I

$$Q_I = \frac{d_I}{d_F} = \frac{2 \cdot r_{Ii}}{2 \cdot r_{Ia}} = \frac{20\ mm}{60\ mm} = 0{,}\overline{33}$$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger

Welle-Nabe-Verbindung – Reibschlüssige Verbindungen



r_{Aa}: $\sigma_{tAa} = p \cdot \dfrac{2 \cdot Q_A^2}{1 - Q_A^2} = 1{,}125\, P$

$\sigma_{rAa} = 0$

$r_F = r_{Ai}$: $\sigma_{tAi} = p \cdot \dfrac{1 + Q_A^2}{1 - Q_A^2} = 2{,}125\, P$

$\sigma_{rAi} = -P$

❒ *Innenring I:*

$r_F = r_{Ia}$: $\sigma_{tIa} = -p \cdot \dfrac{1 + Q_I^2}{1 - Q_I^2} = -1{,}25\, P$

$\sigma_{rIa} = -P$

r_{Ii}: $\sigma_{tIi} = -\dfrac{2 \cdot p}{1 - Q_I^2} = -2{,}25\, P$

$\sigma_{rIi} = 0$

Quelle: Skript ME2A, Prof. Dr.-Ing. H. Idelberger