# Klausur in Mathematik I

für Maschinenbau- und Wirtschaftsingenieurwesen am 05.02.2010

1. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = (2, -1, 1)\ ,\ \vec{b} = (2t, -2, t)\ \mathit{und}\ \vec{c} = (2-t, t, -t)\ .$$

   a) Man bestimme $t \in \mathrm{R}$ so, daß die Flächeninhalte der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ , sowie von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Dreiecke gleich sind.

   b) Man bestimme alle $t \in \mathrm{R}$ , für welche der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht zu $\vec{c}$ ist.

2. Man bestimme alle Lösungen der komplexen Gleichungen

   a) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z+2i}{z-2}\right) = 0$ ,

   b) $2z^2 + (4+3i)z + 2 - 2i = 0$ .

3. Man berechne die Grenzwerte

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cosh(2x)}{\sinh^2 x}$ ,

   b) $\lim\limits_{x \to -\pi} (1 + \cos x)^{\sin x}$

4. Man berechne die Integrale

   a) $\displaystyle\int arsinh(\frac{1}{x})dx$ ,

   b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sinh(lnx)}$ .

Klausur Math. I MBI/WIW 05.02.2010

1a) Flächeninhalte gleich $\Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}\times\vec{c}|$ gilt.

$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2t & -2 & t \end{vmatrix} = (2-t, 0, 2(t-2)) = (t-2)(-1,0,2) \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = |t-2|\sqrt{5}$

$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2-t & t & -t \end{vmatrix} = (0, t+2, t+2) = (t+2)(0,1,1) \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{c}| = |t+2|\sqrt{2}$

$\Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}\times\vec{c}| \Leftrightarrow 5(t-2)^2 = 2(t+2)^2 \Leftrightarrow 3t^2 - 28t + 12 = 0,\ t^2 - \frac{28}{3}t + 4 = 0$

$\Rightarrow$ für $t_{1,2} = \frac{14}{3} \pm \sqrt{\frac{160}{9}}$ sind die Flächeninhalte gleich!

b) $\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c} \perp \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ und $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = 0$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (t-2)(-1,0,2)(2-t, t, -t) = -(t-2)(t+2) = 0$

$\Rightarrow t = \pm 2$. Da für $t=2$ $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ ist, ist $t=-2$ die Lösung.

2a) Mit $z = x+iy$ ist $\operatorname{Im}\left(\frac{z+2i}{z-2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(x+i(y+2))(x-2-iy)}{(x-2+iy)((x-2)-iy)}\right) =$ $(z \neq 2)$

$= \operatorname{Im}\left(\frac{x(x-2)+y(y+2) + i[(y+2)(x-2) - xy]}{(x-2)^2+y^2}\right) = \frac{(y+2)(x-2)-xy}{(x-2)^2+y^2} = 0$

$\Rightarrow 2x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = x-2,\quad z = x + i(x-2) \quad x \in \mathbb{R}$.

3a) Wegen $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$ ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cosh(2x)}{\sinh^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}(-2) = -2$

(Man kann natürlich auch de l'Hospital anwenden.)

b) $\lim\limits_{x\to -\pi}(1+\cos x)^{\sin x}\ (0^0) = e^{\lim_{x\to -\pi} \sin x \ln(1+\cos x)}\ (0\cdot\infty) = e^{\lim_{x\to -\pi} \frac{\ln(1+\cos x)}{\frac{1}{\sin x}}}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$= e^{\lim_{x\to -\pi} \frac{\frac{-\sin x}{1+\cos x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}} = e^{\lim_{x\to -\pi} \frac{\sin^3 x}{\cos x + \cos^2 x}}\ \left(\frac{0}{0}\right) = e^{\lim_{x\to -\pi} \frac{3\sin^2 x\cos x}{-\sin x - 2\cos x\sin x}}$

$= e^{\lim_{x\to -\pi} \frac{3\sin x\cos x}{-1-2\cos x}} = e^0 = 1$

4a) $\int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{x}\right)} dx = x \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{x}\right) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$= x\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{x}\right) + \int \frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}dx = x \operatorname{arsh} x + \operatorname{sgn} x \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sgn} x \operatorname{arsh} x + c$

b) Wegen $\sinh(\ln x) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln x} - e^{-\ln x}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow$

$J = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\sinh(\ln x)}dx = \int_2^{+\infty} \frac{2}{x(x^2-1)}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{2}{x(x-1)(x+1)}dx$

Partialbruchzerlegung $\frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} \Rightarrow$

$2 = a(x^2-1) + b(x^2+x) + c(x^2-x) = x^2\underbrace{(a+b+c)}_{=0} + x\underbrace{(b-c)}_{=0} - \underbrace{a}_{=2}$

$\Rightarrow a = -2 \quad b = c \quad a + 2b = 0 \Rightarrow b = c = 1$

$\Rightarrow J = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}\right)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-2\ln x + \ln(x+1) + \ln(x-1)\right)\Big|_2^b$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \ln\frac{x^2-1}{x^2}\Big|_2^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\Big|_2^b = \ln\frac{4}{3} + \lim\limits_{b\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{b^2}\right) = \ln\frac{4}{3}$

2b) $2z^2 + (4+3i)z + 2 - 2i = 0 \Rightarrow z^2 + \left(2+\frac{3}{2}i\right)z + 1 - i = 0 \Rightarrow$ (p,q-F.)

$z_{1,2} = -1 - \frac{3}{4}i + \sqrt{\left(1+\frac{3}{4}i\right)^2 - 1 + i} = -1 - \frac{3}{4}i + \sqrt{-\frac{9}{16} + \frac{5}{2}i} = -1 - \frac{3}{4}i + \frac{1}{4}\sqrt{-9+40i}$

$\sqrt{-9+40i} = \alpha + i\beta \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = -9 + 40i \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = -9 \wedge 2\alpha\beta = 40 \Rightarrow \beta = \frac{20}{\alpha}$

$\Rightarrow (\alpha^2)^2 + 9\alpha^2 - 400 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} + 400} = -\frac{9}{2} + \frac{41}{2} = 16 \Rightarrow \alpha = \pm 4$

$\beta = \pm\frac{20}{4} = \pm 5 \Rightarrow z_{1,2} = -1 + \frac{3}{4}i \pm \left(1 + \frac{5}{4}i\right) \Rightarrow z_1 = \frac{i}{2},\ z_2 = -2-2i$.