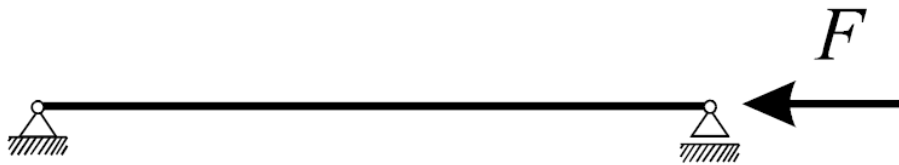


Stabilität und Knickung



Anschaulich erklärt



Statisches Grundsystem

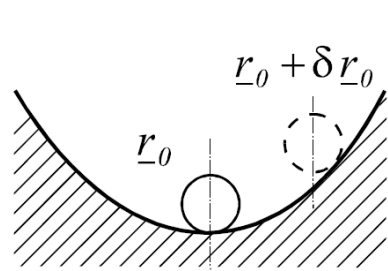


Ausgeknickte Lage

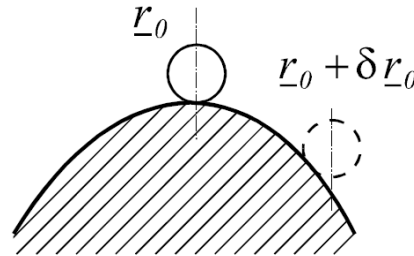
- Ein durch **Druckkraft F** belasteter Stab (Abb. links) geht durch **Steigerung der Last** bis zu einem **kritischen Wert $F_k = \lambda_k F$** bei geringster Störung in die **ausgeknickte Lage** über
- System ist für den Praktiker dann unbrauchbar, nur noch von theoretischem Interesse



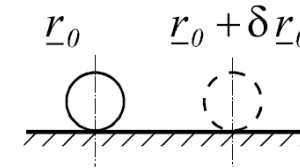
Einfach erklärt



a) stabil



b) labil



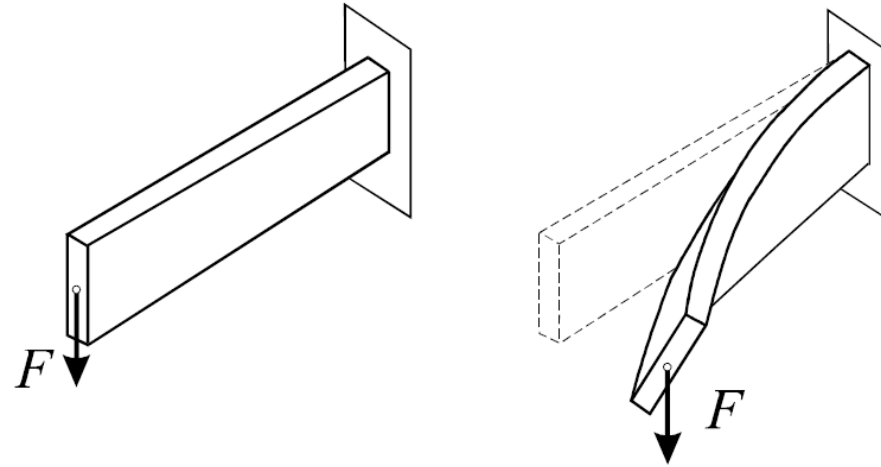
c) indifferent

Gleichgewichtszustände einer schweren Kugel auf einer gekrümmten Unterlage

- Gleichgewichtslage r_0 wird als **stabil** bezeichnet, wenn beschränkte Störungen δr_0 ebenfalls zu beschränkten Lageänderungen führen
- **Wachsen** dagegen bei beschränkter Störung die Bewegungen **unbeschränkt**, ist das System labil
- **Indifferent** sind diejenigen Systeme, die in jeder Lage $r_0 + \delta r_0$ im Gleichgewicht sind



Weitere Fälle elastischer Instabilität



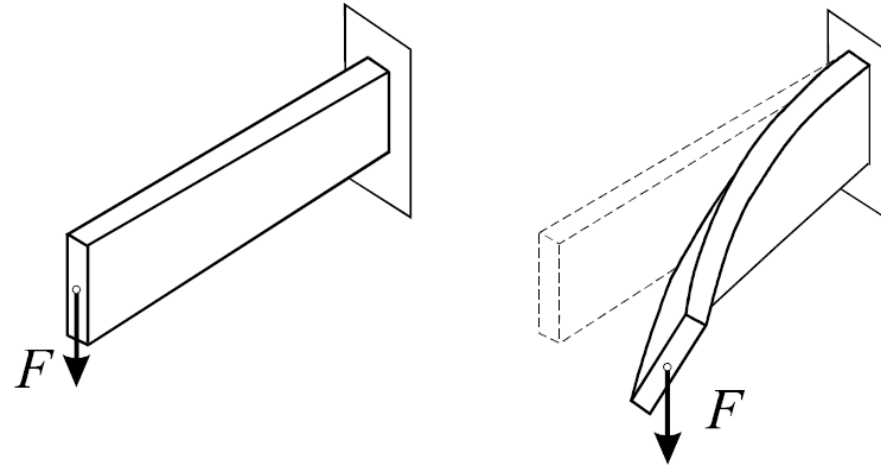
Kippen eines Hochkanträgers

Andere Fälle:

- **Beulen** von Platten
- **Kippen** oder **Biegedrillknicken** von Trägern



Weitere Fälle elastischer Instabilität

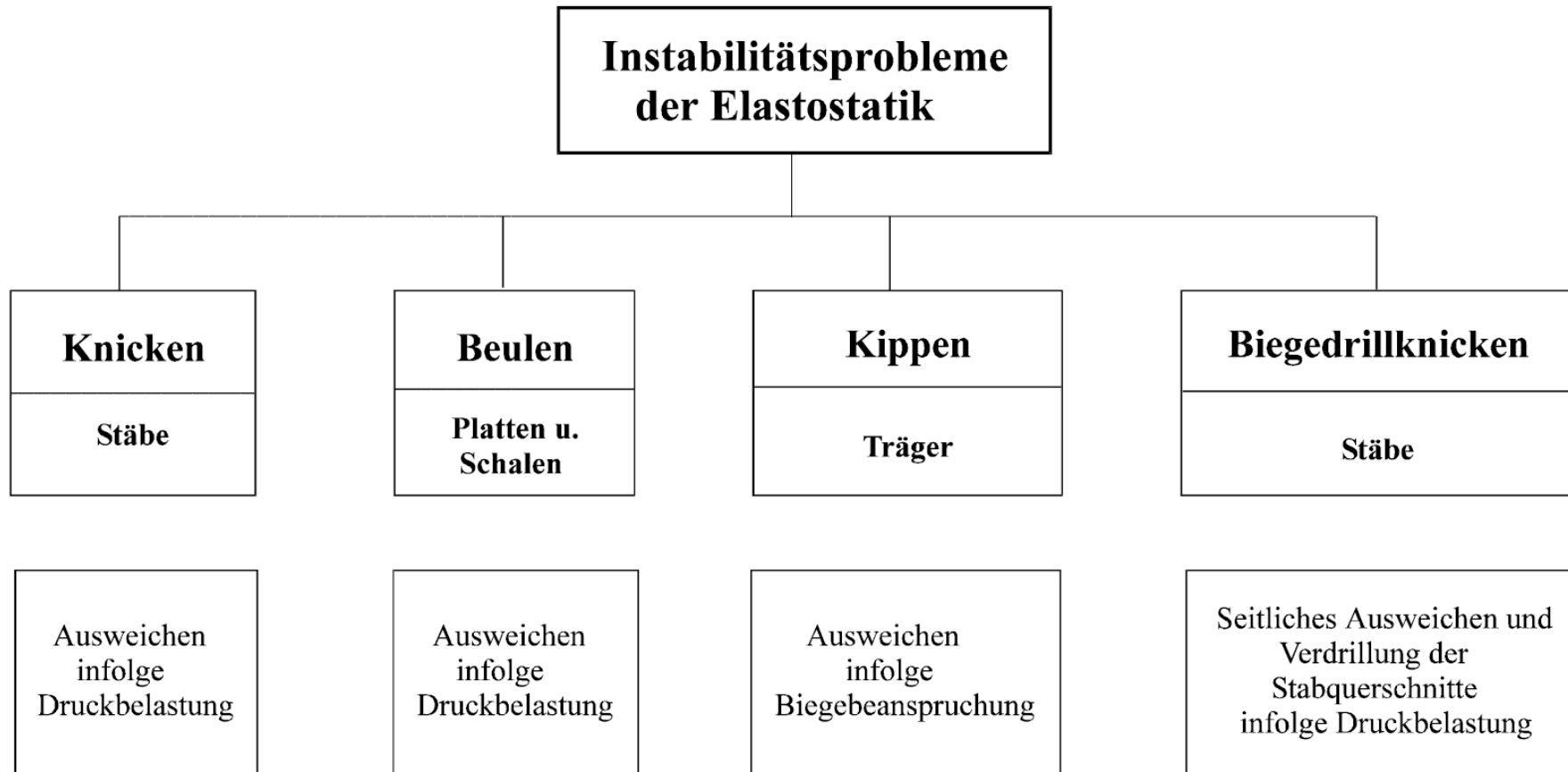


Kippen eines Hochkanträgers

- **Kippen** tritt nur bei Trägern auf, deren Querschnittshöhe groß im Vergleich zur Querschnittsbreite ist
- Bei bestimmten Biegebeanspruchungen tritt **Instabilität** auf, die sich durch **seitliches Auskippen** bei **gleichzeitiger Torsion** des Querschnitts äußert



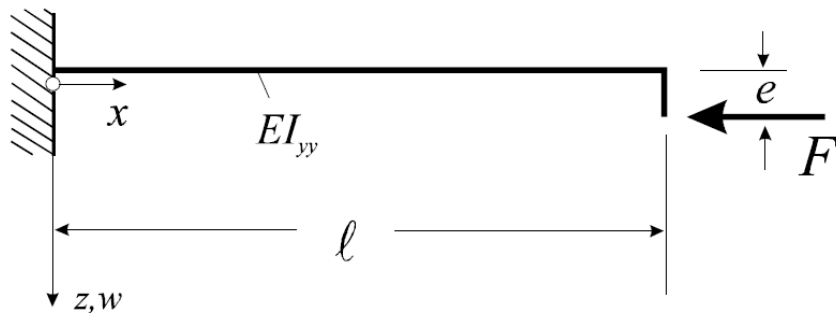
Erscheinungsformen der Instabilität



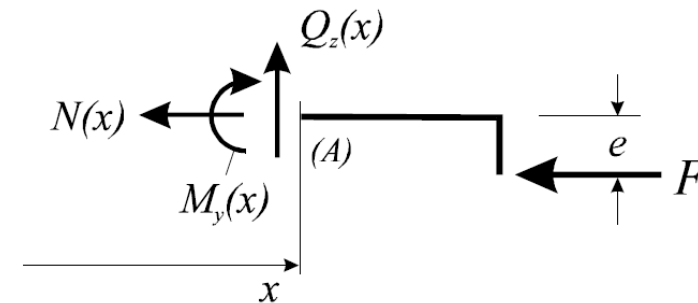


Elastisches Knicken gerader Stäbe

- Beschränkung auf die Ableitung der **Knickgleichung** für gerade Stäbe
- Betrachtung eines einseitig eingespannten Stabs, der durch eine Druckkraft F mit der Exzentrizität e belastet wird:



Kragträger mit exzentrischer Last F



Freischnittsskizze Theorie 1. Ordnung



Elastisches Knicken gerader Stäbe

- In der klassischen Vorgehensweise wird das Gleichgewicht am **unverformten System** als Theorie 1. Ordnung bezeichnet

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 : & N(x) &= -F \\ \sum F_z &= 0 : & Q_z(x) &= 0 \\ \sum M_y^{(A)} &= 0 : & M_y(x) &= -Fe\end{aligned}$$

- Beachten wir noch das Werkstoffgesetz $EI_{yy} w''(x) = -M_y(x)$, dann erhalten wir die Biegedifferentialgleichung nach Theorie 1. Ordnung:

$$\boxed{w''(x) = \frac{Fe}{EI_{yy}}}$$

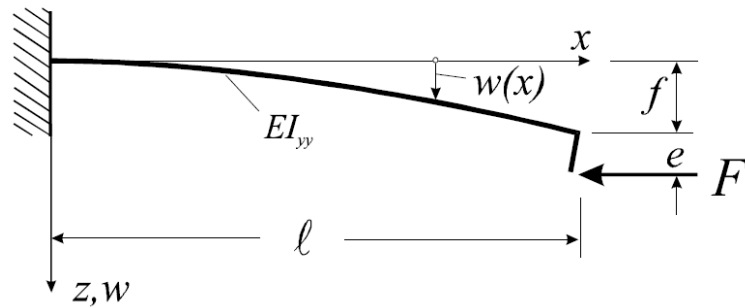


Elastisches Knicken gerader Stäbe

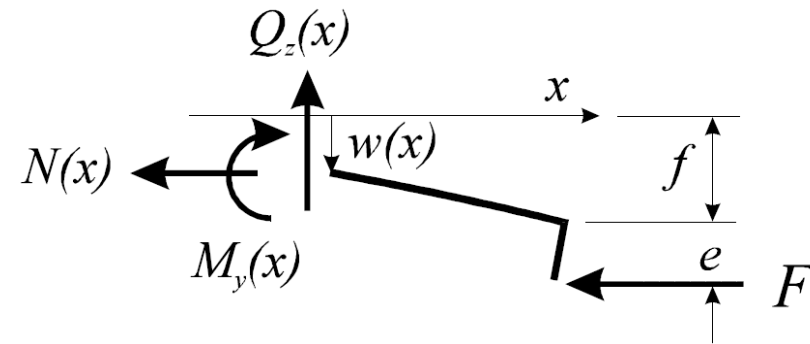
- **Entscheidender Unterschied:** Wir betrachten das Gleichgewicht am **verformten** System!
- Vorgehensweise wird als **Theorie 2. Ordnung** bezeichnet
- Verschiebungen und deren 1. Ableitung werden als *klein* angenommen, daher Theorie „*linearisiert*“
- Während der Verformung behält die Kraft F ihre Richtung bei
- Durchbiegung $w(\ell)$ am Stabende wird im Folgenden mit f abgekürzt



Elastisches Knicken gerader Stäbe



Ausgelenkte Lage



Freischnittsskizze nach Theorie 2. Ordnung

- Gleichgewichtsbedingungen für den abgeschnittenen Trägerteil (Abb. *rechts*):

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & N(x) &= -F \\ \sum F_z &= 0 & Q_z(x) &= 0 \\ \sum M_y &= 0 & M_y(x) &= -F[e + f - w(x)]\end{aligned}$$



Elastisches Knicken gerader Stäbe

- Das Schnittmoment $M_y(x)$ hängt von der noch unbekannten Verschiebung $w(x)$ ab.
- Der Zusammenhang $EI_{yy} w''(x) = -M_y(x)$ zwischen der linearisierten Krümmung und dem Biegemoment gilt weiterhin!
- Damit erhalten wir aus $EI_{yy} w''(x) = F[e + f - w(x)]$ und mit der Abkürzung

$$\kappa^2 = \frac{F}{EI_{yy}}$$

die inhomogene lineare DGL 2. Ordnung:

$$w''(x) + \kappa^2 w(x) = \kappa^2 (e + f)$$



Elastisches Knicken gerader Stäbe

- Die vollständige Lösung der DGL setzt sich zusammen aus der homogenen und der partikulären Lösung, also $w(x) = w_h(x) + w_p(x)$:

- Homogener Teil:

$$w_h''(x) + \kappa^2 w_h(x) = 0$$

und inhomogener Teil / partikuläre Lösung:

$$w_p''(x) + \kappa^2 w_p(x) = \kappa^2(e + f)$$

- Durch Einsetzen wird relativ schnell ersichtlich, dass $w_h = C_1 \sin \kappa x + C_2 \cos \kappa x$ Lösung der homogenen und $w_p = e + f$ partikuläre Lösung der inhomogenen DGL ist, sodass gilt:

$$\boxed{w(x) = C_1 \sin \kappa x + C_2 \cos \kappa x + e + f}$$



Elastisches Knicken gerader Stäbe

- Erste Ableitung bilden, um die Konstanten aus den geometrischen Randbedingungen ermitteln zu können:

$$w'(x) = \kappa (C_1 \cos \kappa x - C_2 \sin \kappa x)$$

- Die beiden Konstanten werden nun aus den Randbedingungen an der Stelle $x = 0$ bestimmt:

$$w(x=0) = 0 = C_2 + e + f \quad \rightarrow C_2 = -(e + f)$$

$$w'(x=0) = 0 = C_1$$

- Einsetzen der Konstanten liefert zunächst für die Verschiebung:

$$w(x) = (e + f)(1 - \cos \kappa x)$$



Elastisches Knicken gerader Stäbe

- Unter Beachtung von $w(\ell) \equiv f = (e + f)(1 - \cos \kappa \ell)$ folgen die Beziehungen

$$e + f = \frac{e}{\cos \kappa \ell}; \quad e + f = \frac{f}{1 - \cos \kappa \ell}; \quad e = f \frac{\cos \kappa \ell}{1 - \cos \kappa \ell}$$

und damit endgültig:

$$w(x) = \frac{e(1 - \cos \kappa x)}{\cos \kappa \ell}$$

- Die Durchbiegung $w(x)$ ist also mit der Exzentrizität e des Kraftangriffs proportional
- Für $e = 0$ folgt auch weiterhin $w = 0$, also keine Auslenkung bzw. Stab bleibt in gestreckter Lage



Elastisches Knicken gerader Stäbe

- Die Form der Biegelinie im kritischen Fall erhalten wir, wenn wir aus der vorherigen Gleichung mit der zweiten Gleichung für $e + f$ die Exzentrizität eliminieren:

$$w(x) = f \frac{1 - \cos \kappa x}{1 - \cos \kappa \ell}$$

- Auch im kritischen Fall ist die Biegelinie mit $\cos \kappa \ell = 0$ eine Kosinuskurve, deren Amplitude nicht bekannt ist, da f selbst nicht bestimmt werden kann
- Zu den kritischen Werten, die periodisch für $\cos \kappa \ell = 0$ bestimmt werden können

$$\cos \kappa \ell = 0 \quad \rightarrow \quad \kappa \ell = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots = (2j - 1) \frac{\pi}{2} \quad (j = 1, 2, 3 \dots)$$

gehören auch kritische Lasten F_k .



Elastisches Knicken gerader Stäbe

- Die **kleinste kritische Last** (und nur die ist praktisch von Interesse) ergibt sich bei $j = 1$ und $\kappa\ell = \pi/2$

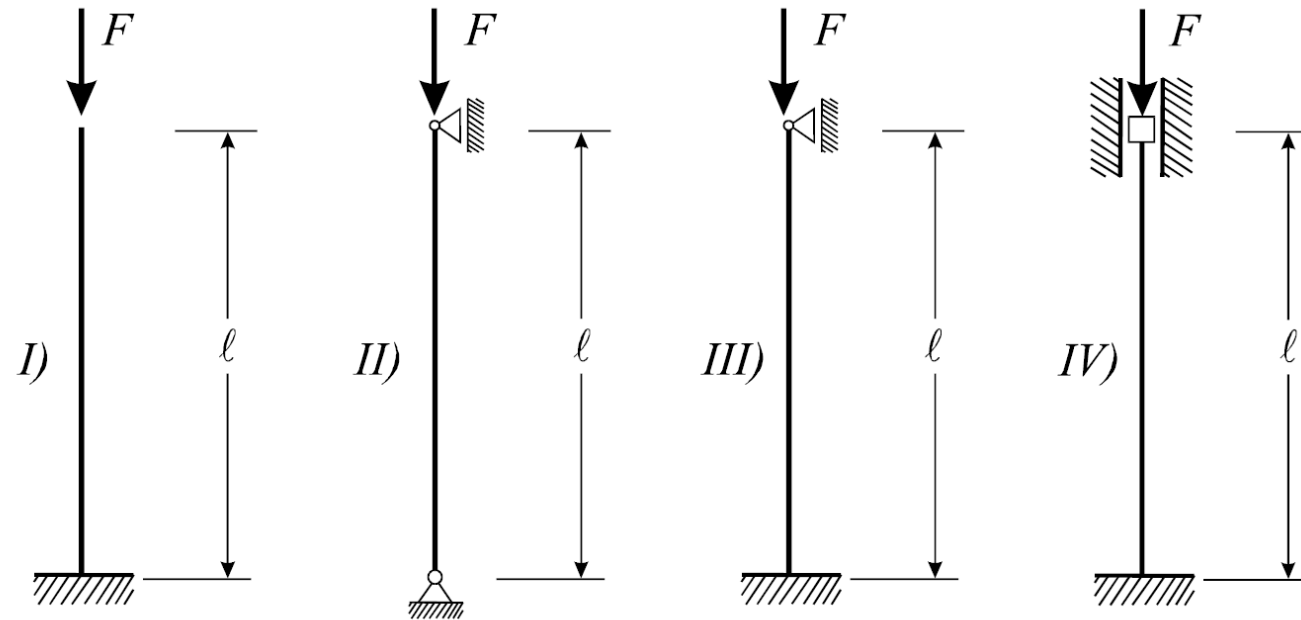
$$F_k^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{4\ell^2}$$

- Erst wenn die Druckkraft F in die Nähe von $F_k^{(1)}$ kommt, wachsen die Auslenkungen über alle Grenzen!
- Sind beide Kräfte gleich, sind wir am sog. **Verzweigungspunkt**, darüber wechselt das System von einer *stabilen* in eine *indifferente* Gleichgewichtslage
- Annahme:** Das System hat weiterhin nur *kleine Auslenkungen*, bei zu großen Auslenkungen funktionieren die Ansätze nicht mehr!



Die Eulerschen Knickfälle

- Leonhard Euler veröffentlichte 1759 in seiner Arbeit die **vier** unten skizzierten **Knickfälle**:

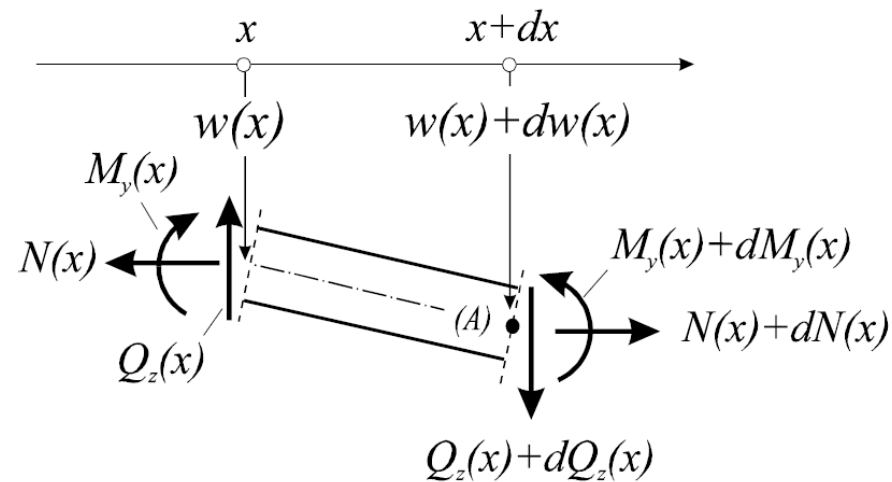


Eulersche Knickfälle



Die Eulerschen Knickfälle

- Die vier Knickfälle stehen in einem **engen Zusammenhang** und unterscheiden sich lediglich in ihren **Randbedingungen**
- Um diesen Zusammenhang aufzudecken, müssen wir die allgemeine DGL für den Knickstab herleiten:



Freischnittsskizze für ein Stabelement im ausgelenkten Zustand



Die Eulerschen Knickfälle

- Wir notieren das lokale Gleichgewicht (GG) am verformten Stabelement, es gelten weiterhin alle bei der Balkenbiegung getroffenen Annahmen.

Zusätzlich gilt, dass:

1. I_{yy} Hauptträgheitsmoment ist
2. außer der Randbelastung keine längs der x -Achse verteilten Kräfte auftreten und
3. die Verschiebungen $u(x)$ (wie gehabt) in Stablängsrichtung vernachlässigbar klein sind.

- Die GG-Bedingungen liefern:

$$\sum F_x = 0$$

$$dN = 0,$$

$$\text{also } N' = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$dQ_z = 0,$$

$$\text{also } Q'_z = 0$$

$$\sum M_y^{(A)} = 0$$

$$dM_y - Q_z dx + N dw = 0,$$

$$\text{also } M'_y + Nw' - Q_z = 0$$



Die Eulerschen Knickfälle

- Durch Differentiation der 3. Gleichung folgt unter Berücksichtigung von $N' = Q_z' = 0$:

$M_y''(x) + Nw''(x) = 0$, was unter Einbeziehung der Momenten-Krümmungsbeziehung

$M_y = -EI_{yy}w''(x)$ und der Normalkraft $N = -F$ übergeht in eine **homogene DGL 4. Ordnung**:

$$\left[EI_{yy}(x) w''(x) \right]'' + Fw''(x) = 0$$

- Bei (abschnittsweiser) **konstanter Biegesteifigkeit** erhalten wir so die **DGL des Knickstabes**:

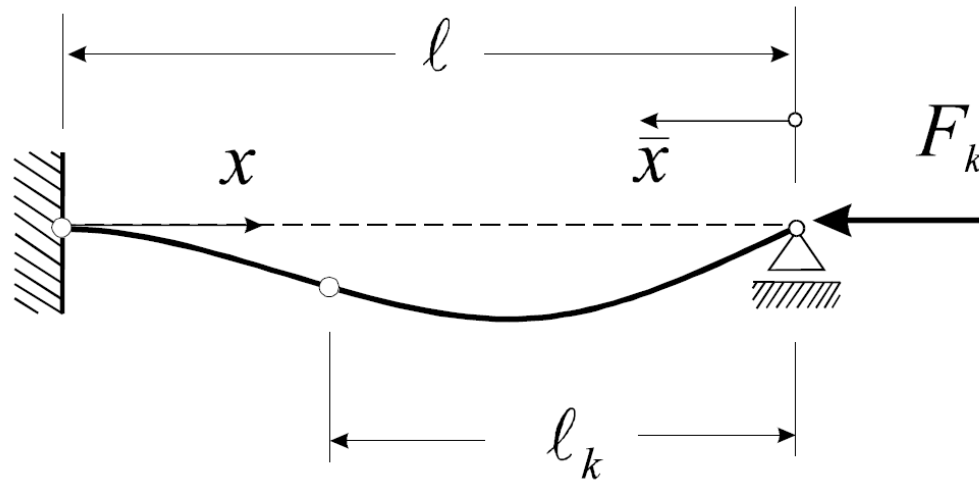
$$\boxed{w''''(x) + \kappa^2 w''(x) = 0}$$



Die Eulerschen Knickfälle

- Die Lösung dieser homogenen Differentialgleichung lautet:

$$w(x) = C_1 \sin \kappa x + C_2 \cos \kappa x + C_3 x + C_4$$



Der 3. Eulerfall



Die Eulerschen Knickfälle

- Die Konstanten C_1 bis C_4 werden aus den Randbedingungen bestimmt
- Exemplarisch wird hier der 3. Eulerfall betrachtet (alle anderen Lagerungsfälle analog):

$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w(\ell) = 0 \\ w''(\ell) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & C_2 & + & 0 & + & C_4 & = & 0 \\ C_1 \kappa & + & 0 & + & C_3 & + & 0 & = & 0 \\ C_1 \sin \kappa \ell & + & C_2 \cos \kappa \ell & + & C_3 \ell & + & C_4 & = & 0 \\ -C_1 \kappa^2 \sin \kappa \ell & - & C_2 \kappa^2 \cos \kappa \ell & + & 0 & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

Dieses homogene Gleichungssystem zur Bestimmung der vier Konstanten besitzt nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn seine Nennerdeterminante verschwindet (also = 0 wird)



Die Eulerschen Knickfälle

- Aufstellung der Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \kappa & 0 & 1 & 0 \\ \sin \kappa \ell & \cos \kappa \ell & \ell & 1 \\ -\kappa^2 \sin \kappa \ell & -\kappa^2 \cos \kappa \ell & 0 & 0 \end{vmatrix} = \kappa \ell \cos \kappa \ell - \sin \kappa \ell = 0$$

- Die Determinante verschwindet nur, wenn folgende Gleichung erfüllt ist:

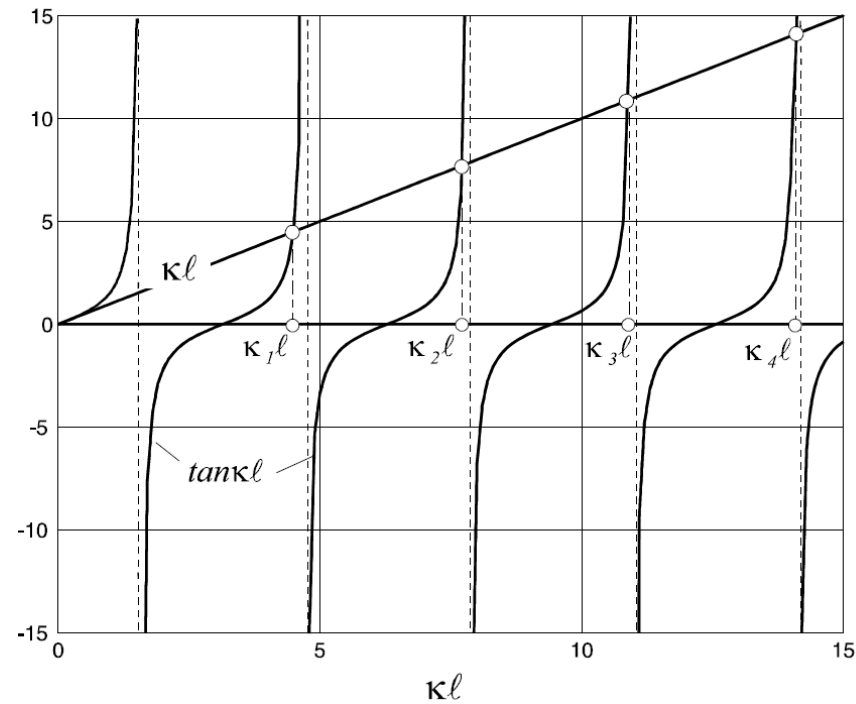
$$\boxed{\tan \kappa \ell = \kappa \ell}$$

- Diese transzendente **Eigenwertgleichung** hat *unendlich viele Lösungen*, die *Eigenwerte* des Problems!



Die Eulerschen Knickfälle

- Die Lösung für diese Gleichung kann durch Approximation (bspw. nach NEWTON) erfolgen, z. B. so:



Darstellung der Eigenwertgleichung



Die Eulerschen Knickfälle

- Die ersten drei Eigenwerte sind:

$$\kappa_1 \ell = 4,4934$$

$$\kappa_2 \ell = 7,7253$$

$$\kappa_3 \ell = 10,9041$$

- Zum ersten Eigenwert gehört die **kleinste Knicklast**: $F_k^{(1)} = \frac{20,2 EI_{yy}}{\ell^2}$

Knicklasten zu höheren Eigenwerten werden entsprechend berechnet.

- Dem vorherigen Gleichungssystem können wir die folgenden Verhältnisse zwischen den Konstanten entnehmen:

$$C_4 = -C_2; C_3 = -C_1 \kappa; C_2 = -C_1 \tan \kappa \ell$$



Die Eulerschen Knickfälle

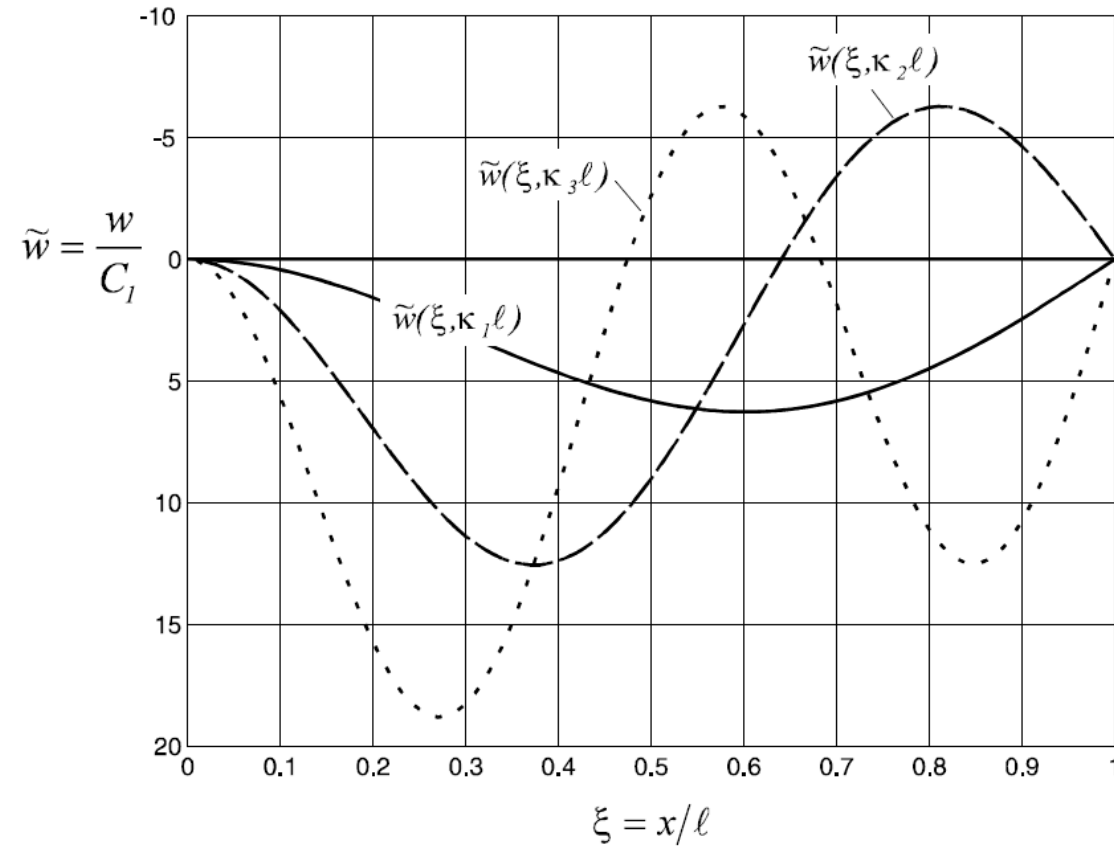
- Einsetzen liefert die Form der Knickfigur:

$$w(x) = C_1 [\sin \kappa x + \tan \kappa \ell (1 - \cos \kappa x) - \kappa x]$$

die allerdings nur bis auf eine Konstante (hier C_1) festgelegt ist.



Die Eulerschen Knickfälle



Darstellung der ersten drei Knickfiguren für den 3. Eulerfall



Die Eulerschen Knickfälle

- Da die verbleibenden Lagerungsfälle jeweils **ähnliche Formeln** ergeben, macht es Sinn, die Knicklasten zu einer einheitlichen Knickformel zusammenzufassen:

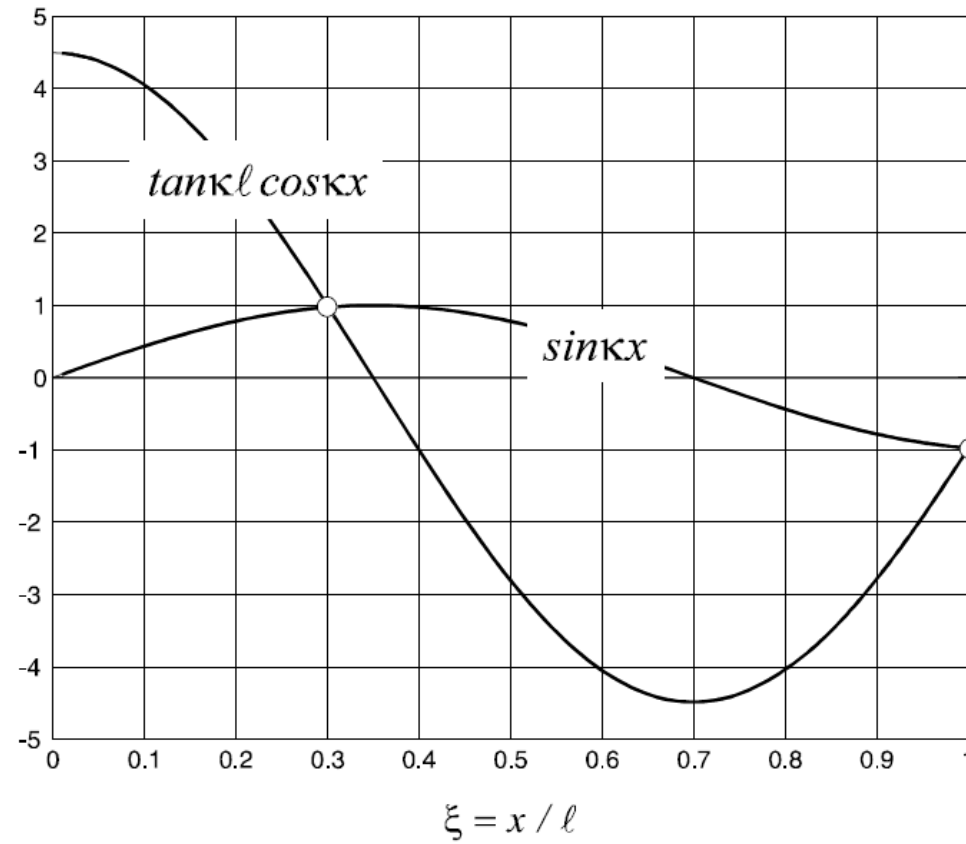
$$F_k = \kappa^2 EI_{yy} = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{(\pi/\kappa)^2} = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{\ell_k^2}$$

mit

$$\ell_k = \frac{\pi}{\kappa}$$



Die Eulerschen Knickfälle



Nullstellen der Krümmung der Knickfigur



Die Eulerschen Knickfälle

- In der obigen Gleichung bezeichnet ℓ_k die *Knicklänge* des Stabes
- Es lässt sich zudem zeigen, dass die Knicklänge *identisch* ist mit dem Abstand der Wendepunkte der Knickfigur
- Durch zweimalige Ableitung der Durchbiegung folgt nämlich für die Krümmung

$$w''(x) = -\kappa^2 C_1 [\sin \kappa x - \tan \kappa \ell \cos \kappa x]$$

und damit die Bestimmungsgleichung für die Nullstellen:

$$w''(x) = 0 = \sin \kappa x - \tan \kappa \ell \cos \kappa x$$



Die Eulerschen Knickfälle

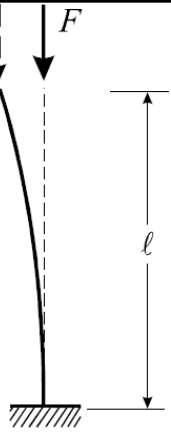
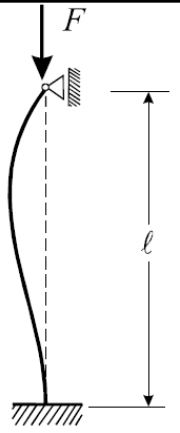
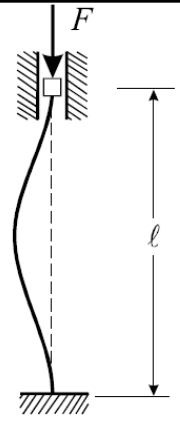
- Der Gleichung können wir entnehmen, dass die Lösung $x = \ell$ lautet
- Es existiert allerdings noch im Bereich $0 < x < \ell$ eine zweite Lösung
- Dazu müssen wir die vorherige Gleichung mit $\bar{x} = \ell - x$ transformieren und erhalten

$$0 = \sin \kappa(\ell - \bar{x}) - \tan \kappa \ell \cos \kappa(\ell - \bar{x}) = \sin \kappa \bar{x} [\cos \kappa \ell + \tan \kappa \ell \sin \kappa \ell]$$

- Für $\kappa = \kappa_I$ kommt im Bereich $0 < x < \ell$ aus $\sin \kappa_I \bar{x} = 0$ die Nullstelle $\bar{x} = \pi / \kappa_I = \ell_k$
- Damit haben **die beiden Wendepunkte** der Knickfigur **zum 1. Wendepunkt** den **Abstand** ℓ_k



Die Eulerschen Knickfälle

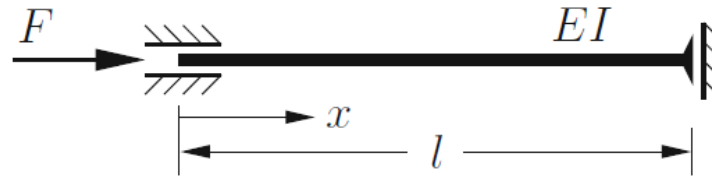
<i>Euler-Fall</i>	<i>I)</i>	<i>II)</i>	<i>III)</i>	<i>IV)</i>
				
Eigenwertgleichung	$\cos \kappa \ell = 0$	$\sin \kappa \ell = 0$	$\tan \kappa \ell = \kappa \ell$	$\kappa \ell \sin \kappa \ell = 2(1 - \cos \kappa \ell)$
Kleinsten Eigenwert	$\kappa \ell = \frac{\pi}{2}$	$\kappa \ell = \pi$	$\kappa \ell = 4,49$	$\kappa \ell = 2\pi$
Knicklänge ℓ_k	2ℓ	ℓ	$\approx 0,7 \ell$	$\frac{\ell}{2}$

Grundgleichungen zu den Eulerfällen



Beispielaufgaben

Aufgabe 6.4 Für den auf Druck beanspruchten elastischen Stab sind die Knickbedingung und die kritische Last zu bestimmen.



A 6.4

* Gross, Wriggers, Ehlers (2011): *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 2* (10. Aufl.). Berlin, Deutschland: Springer.



Lösung Aus der allgemeinen Lösung der DGL des Knickstabes

$$w = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C \lambda x + D, \quad \lambda^2 = \frac{F}{EI},$$

$$w' = -A\lambda \sin \lambda x + B\lambda \cos \lambda x + C\lambda,$$

$$w'' = -M/EI = -A\lambda^2 \cos \lambda x - B\lambda^2 \sin \lambda x,$$

$$w''' = -Q/EI = A\lambda^3 \sin \lambda x - B\lambda^3 \cos \lambda x$$

und den Randbedingungen erhält man

$$w(0) = 0 : \leadsto A + D = 0 \leadsto D = -A,$$

$$w'(0) = 0 : \leadsto B + C = 0 \leadsto C = -B,$$

$$w'(l) = 0 : \leadsto -A \sin \lambda l + B \cos \lambda l + C = 0,$$

$$Q(l) = 0 : \leadsto A \sin \lambda l - B \cos \lambda l = 0.$$



Einsetzen von $C = -B$ liefert für die beiden letzten Gleichungen

$$A \sin \lambda l - B(\cos \lambda l - 1) = 0 ,$$

$$A \sin \lambda l - B \cos \lambda l = 0 .$$

Hieraus folgt $B = 0$, und die Knickbedingung lautet damit

$$\underline{\underline{\sin \lambda l = 0}} \quad \leadsto \quad \underline{\underline{\lambda_n l = n\pi}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) .$$

Der kleinste Eigenwert $\lambda_1 l = \pi$ liefert die kritische Last

$$\underline{\underline{F_{\text{krit}} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}}} .$$



Durch Einsetzen der Konstanten und des Eigenwertes erhält man die zugehörige Knickform

$$w = A \left(\cos \frac{\pi x}{l} - 1 \right) ,$$

wobei A unbestimmt ist.

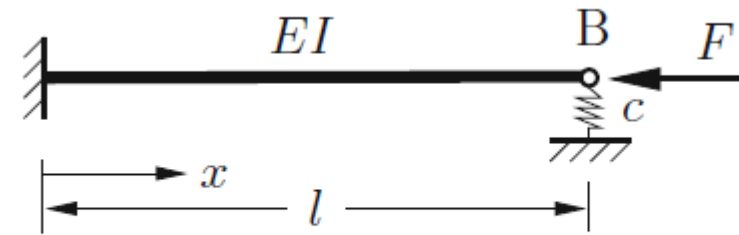
Anmerkung: Die kritischen Lasten für den gegebenen Fall und für den 2. EULERSchen Knickfall sind gleich.



A 6.6

Aufgabe 6.6 Der links eingespannte elastische Stab ist bei B federnd gelagert (Federkonstante c).

Es ist die Knickbedingung zu bestimmen.





Lösung Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung des Knickstabes lautet

$$w = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C \lambda x + D, \quad \lambda^2 = \frac{F}{EI},$$

$$w' = -A \lambda \sin \lambda x + B \lambda \cos \lambda x + C \lambda,$$

$$w'' = -M/EI = -A \lambda^2 \cos \lambda x - B \lambda^2 \sin \lambda x,$$

$$w''' = -Q/EI = A \lambda^3 \sin \lambda x - B \lambda^3 \cos \lambda x.$$



Aus den Randbedingungen

$$w(0) = 0 ,$$

$$w'(0) = 0 ,$$

$$M(l) = 0 ,$$

$$Q(l) = -c w(l) + F w'(l)$$

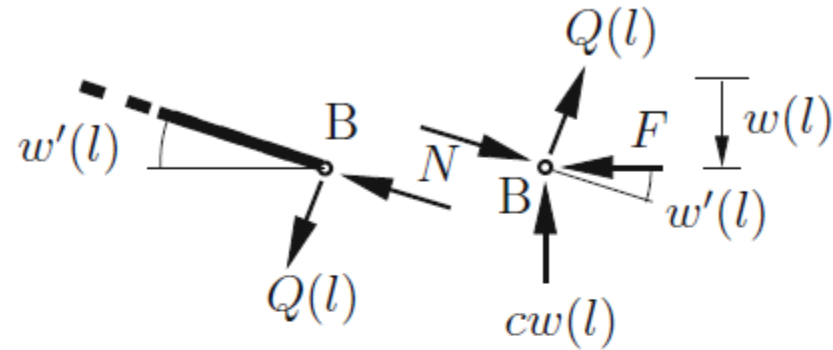
folgt das homogene Gleichungssystem

$$A + D = 0 ,$$

$$B + C = 0 ,$$

$$-A \cos \lambda l - B \sin \lambda l = 0 ,$$

$$A \cos \lambda l + B \sin \lambda l + C(\lambda l - EI\lambda^3/c) + D = 0 .$$



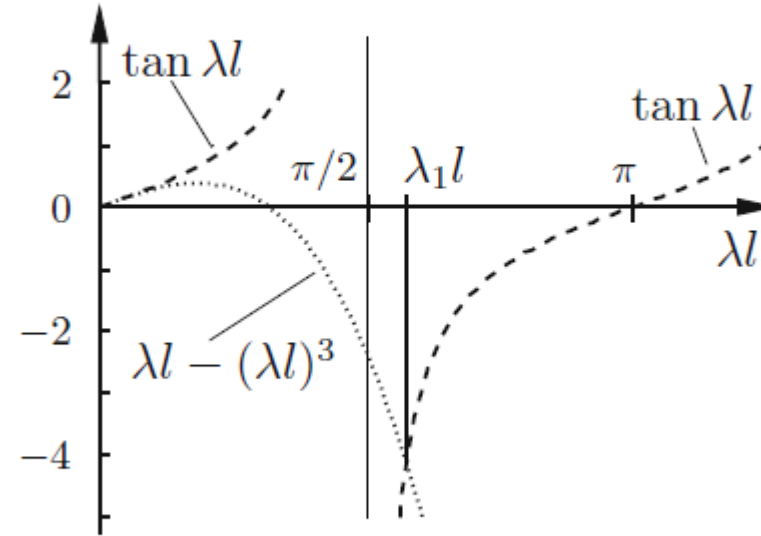


Eliminieren der Konstanten führt auf die Eigenwertgleichung (Knickbedingung)

$$\underline{\underline{\tan \lambda l = \lambda l - (\lambda l)^3 \frac{EI}{cl^3} .}}$$

Die Lösung dieser transzendenten Gleichung kann grafisch erfolgen. Im Spezialfall $EI/cl^3 = 1$ erhält man als ersten Eigenwert

$$\lambda_1 l \cong 1,81 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{F_{\text{krit}} \cong 3,27 \frac{EI}{l^2} .}}$$



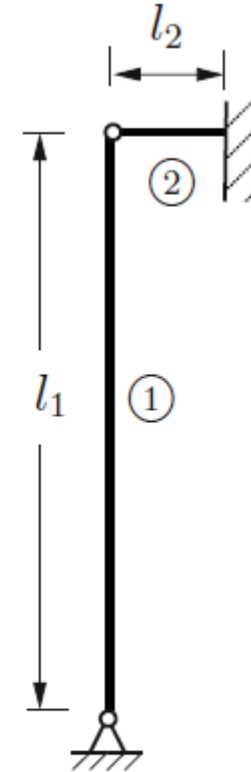


A 6.8

Aufgabe 6.8 Gegeben sei der skizzierte Halbrahmen mit folgenden Querschnittswerten für den Stiel ① und den Balken ②

$$\begin{aligned}\text{Geg.: } l_1 &= 5,0 \text{ m} , \\ l_2 &= 1,0 \text{ m} , \\ E &= 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2 , \\ \alpha_T &= 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K} , \\ A_1 &= 50,0 \text{ cm}^2 , \\ I_1 &= 500 \text{ cm}^4 , \\ I_2 &= 10000 \text{ cm}^4 .\end{aligned}$$

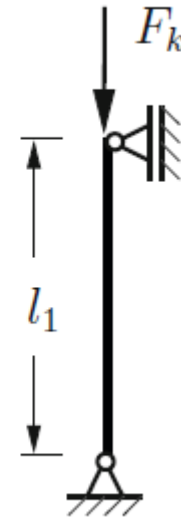
Um wieviel Grad Kelvin darf der Stiel ① höchstens erwärmt werden, ohne auszuknicken?





Lösung Wir wählen als Ersatzsystem für den Stiel einen Knickstab gemäß EULER-Fall 2 mit $s_k = l_1$. Die Knicklast hierfür beträgt:

$$F_k = \pi^2 \frac{EI_1}{l_1^2} = \pi^2 \frac{2,1 \cdot 10^4 \cdot 500}{500^2} \\ = 414,52 \text{ kN} .$$

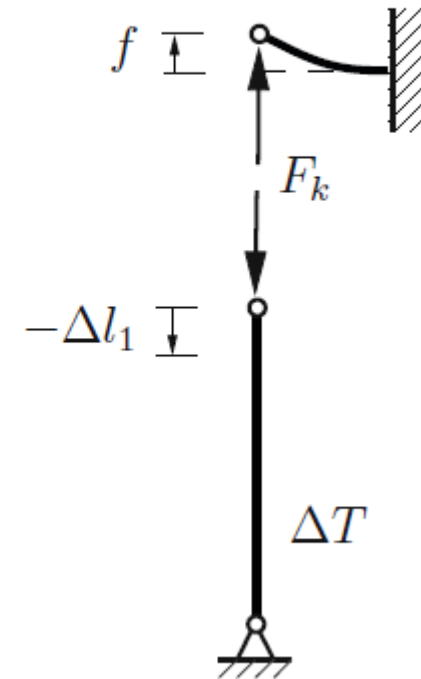




Die Verschiebungen des Stieles ① und des Balkens ② ergeben sich wie folgt:

$$f = \frac{F_k l_2^3}{3EI_2} = \frac{414,52 \cdot 100^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 10^4}$$
$$= 0,658 \text{ cm ,}$$

$$\Delta l_1 = \varepsilon_1 l_1 = -\frac{F_k l_1}{EA_1} + \alpha_T \Delta T l_1$$
$$= -0,1974 + 6 \cdot 10^{-3} \Delta T .$$





Aus der Kompatibilitätsbedingung

$$f = \Delta l_1 \quad \leadsto \quad 0,658 = -0,1974 + 6 \cdot 10^{-3} \Delta T$$

erhält man die gesuchte Temperaturdifferenz

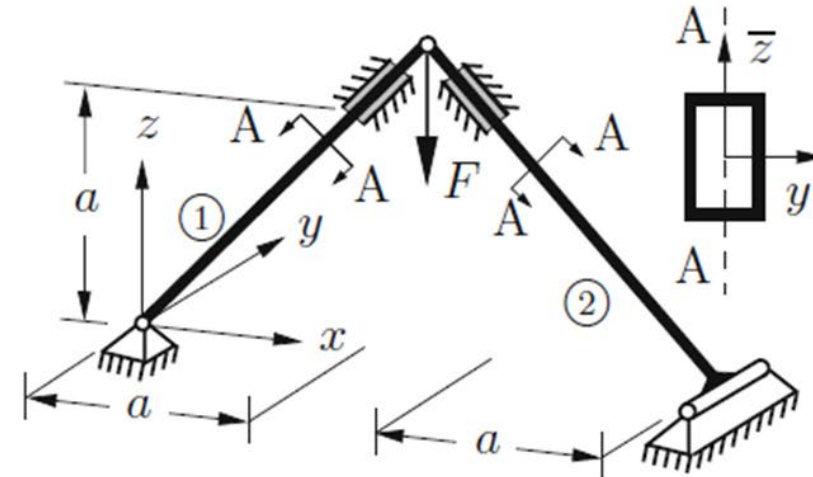
$$\underline{\underline{\Delta T = 142,5 \text{ K} .}}$$



A6.10

Aufgabe 6.10 Die nebenstehende Konstruktion wird von zwei Stäben aus einem doppel-symmetrischen Profil (jeweils $I_y = 2I_{\bar{z}}$) gebildet.

Wie groß darf die Abmessung a maximal werden, damit kein Knicken auftritt?





Lösung Aufgrund der Symmetrie von Tragwerk und Belastung ergeben sich die Druckkräfte in den Stäben zu

$$S_1 = S_2 = \frac{F}{\sqrt{2}} .$$

Zur Untersuchung der Stabilität sind die jeweils unterschiedlichen Lagerungsarten und Biegesteifigkeiten zu betrachten.



Stab ① ist am unteren Ende gelenkig gelagert. Das obere Ende ist in einer festen Hülse und ist über ein Momentengelenk mit Stab ② verbunden. Dies entspricht dem 3. EULERSchen Knickfall. Damit folgt bei Knickung um die lokale y -Achse des Profils

$$S_1 = \frac{F}{\sqrt{2}} = 2,04 \frac{\pi^2 EI_y}{2a^2} \quad \leadsto \quad a_{1y} = 1,20 \pi \sqrt{\frac{EI_y}{F}}$$

und bei Knickung um die lokale $\bar{z}$ -Achse mit $EI_{\bar{z}} = 0,5 EI_y$

$$S_1 = \frac{F}{\sqrt{2}} = 2,04 \frac{\pi^2 EI_{\bar{z}}}{2a^2} \quad \leadsto \quad a_{1\bar{z}} = 0,85 \pi \sqrt{\frac{EI_y}{F}} .$$



Stab ② ist am unteren Ende durch ein Scharniergelenk mit Bewegungsachse in y -Richtung gelenkig gelagert, bezüglich der x - z -Ebene ist der Anschluss biegesteif. Das obere Ende ist entsprechend Stab 1 gelagert. Knickung um die lokale y -Achse entspricht dem 3. EULERSchen Knickfall. Mit $S_2 = S_1$ erhält man

$$a_{2y} = a_{1y} .$$



Eine Knickung um die lokale $\bar{z}$ -Achse stellt den 4. EULERSchen Knickfall dar und führt mit $EI_{\bar{z}} = 0,5 EI_y$ auf

$$S_2 = \frac{F}{\sqrt{2}} = 2,04 \frac{\pi^2 EI_y}{2a^2} \quad \leadsto \quad a_2 \bar{z} = 1,19 \pi \sqrt{\frac{EI_y}{F}}.$$

Da $a_1 \bar{z}$ den kleinsten Wert darstellt, ergibt sich die kritische Länge zu

$$\underline{\underline{a_{\text{krit}} = 0,85 \pi \sqrt{\frac{EI_y}{F}}.}}$$