Satz von Steiner

Einfach erklärt

- Der Satz von Steiner lässt sich sowohl bei **Flächenträgheitsmomenten** wie auch bei **Massenträgheitsmomenten** verwenden
- Beim Flächenträgheitsmoment wird er gebraucht, falls der **Flächenschwerpunkt** der Querschnittsfläche des Bauteils **nicht** mit dem **Koordinatenursprung** zusammenfällt!
- Bei Massenträgheitsmomenten hilft er, das Trägheitsmoment eines Körpers zu berechnen, falls die Drehachse parallel verschoben wurde
- Hier sei nur das Anwendungsbeispiel für Flächenträgheitsmomente gegeben.

© ingenieurkurse.de

Satz von Steiner

- Bei Flächenträgheitsmomenten geht es um den **Widerstand** gegenüber **Verformung** durch außen anliegende Belastung

- Das **Flächenträgheitsmoment** berechnet diesen Widerstand in Abhängigkeit der Querschnittsfläche des Bauteils, nur **diese** ist relevant!

- **Der Satz von Steiner** ist nur notwendig, falls Flächenschwerpunkt der Querschnittsfläche und Koordinatenursprung **nicht** zusammenfallen. Bspw. bei zusammengesetzten Profilen.

Berechnung in vier Schritten

1. **Geometrie** in bekannte Flächen (Kreise, Rechtecke etc.) **aufteilen**, die dann in Tabellenwerk nachschlagbar sind

2. **Flächenschwerpunkt** berechnen

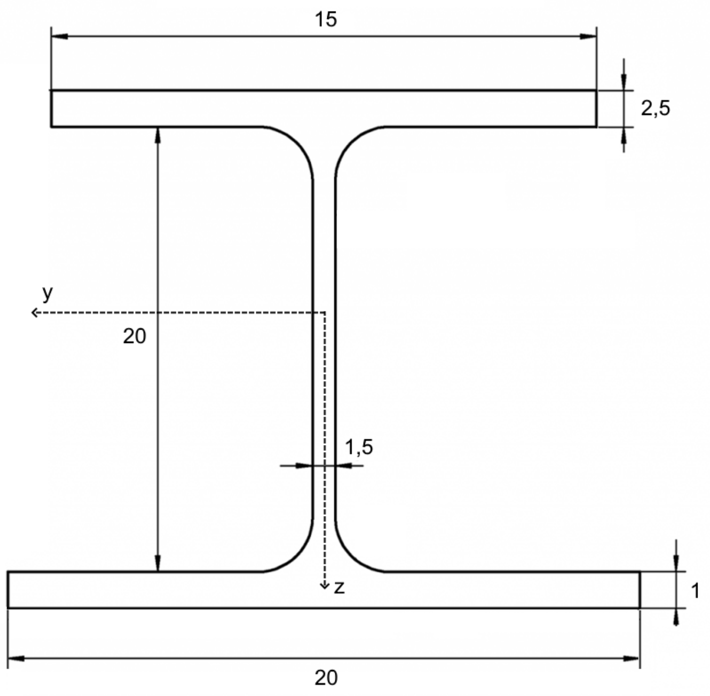
3. **Abstände der Schwerpunkte** der Einzelflächen zum Gesamtschwerpunkt des Gesamtprofils bestimmen

4. **Flächenträgheitsmomente** bestimmen: Zunächst Eigenträgheitsmomente, dann Anteile nach dem Satz von Steiner und zum Schluss beide zusammenführen

© ingenieurkurse.de

Beispiel:

- Gegeben sei ein Doppel-T-Träger:



© ingenieurkurse.de

Beispiel:

- Der Steg habe die Höhe h = 20cm und b = 1,5cm
- Der obere Gurt habe eine Höhe von h_2 = 2,5cm und eine Breite b_2 = 15cm
- Der untere Gurt habe hingegen eine Höhe h_3 = 1 cm und eine Breite von 20 cm.
- Das Koordinatensystem liegt in der Mitte des Steges
- **Einteilen der Flächen** geschieht durch Aufteilung des Doppel-T-Trägers in drei Einzelrechteckflächen!

Beispiel:

- Wir berechnen zunächst den Schwerpunkt. Aus Symmetriegründen erkennbar: y_S liegt im Urpsrung
- Wir brauchen nur noch die z-Koordinate des Schwerpunktes:
- Für die Fläche 1 (mittlerer Steg) gilt dabei: $z_1 = 0$
- Schwerpunktpositionen in Abhängigkeit von z der Flächen 2 und 3 lassen sich leicht berechnen:

$$z_2 = -\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right) = -\left(\frac{20}{2} + \frac{2{,}5}{2}\right) = -11,25\ cm$$

$$z_3 = \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_3}{2}\right) = \left(\frac{20}{2} + \frac{1}{2}\right) = 10,5\ cm$$

© ingenieurkurse.de

Beispiel:

- Setzen wir z_1, z_2 und z_3 in die Formel für die **z-Koordinate des Schwerpunktes** ein, erhalten wir:

$$z_S = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3}{A} = \frac{0 * A_1 + (-11{,}25cm) A_2 + (10.5cm) A_3}{A} = -2,421cm$$

- Als nächstes folgen die **Abstände**. Allgemein gilt folgender Zusammenhang:

$$z_{A,i} = z_i - z_S \ und \ y_{A,i} = y_i - y_S$$

Beispiel:

- Wir können für jede Fläche allgemein die Abstände bestimmen:

$$A_1 : \; z_{A,1} = z_1 - z_S = 2,421 cm \; und \; y_{A,1} = y_1 - y_S = 0$$

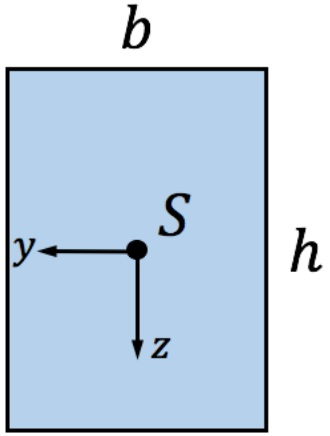
$$A_2 : \; z_{A,2} = z_2 - z_S = -8,829 \; cm \; und \; y_{A,2} = y_2 - y_S = 0$$

$$A_3 : \; z_{A,3} = z_3 - z_S = 12,921 cm \; und \; y_{A,3} = y_3 - y_S = 0$$

© ingenieurkurse.de

Flächenträgheitsmomente bestimmen:

- Nun können wir die Flächenträgheitsmomente bestimmen, es gilt für Rechteckquerschnitte:



$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$

© ingenieurkurse.de

Flächenträgheitsmomente bestimmen:

- Durch dieses Wissen können wir zunächst die **Eigenträgheitsmomente** der Teilflächen bestimmen:

$$A_1: \quad J_{22,1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = 1000 mm^4, \quad J_{33,1} = \frac{b_1^3 h_1}{12} = 5,625 mm^4$$

$$A_2: \quad J_{22,2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = 19,531 mm^4, \quad J_{33,2} = \frac{b_2^3 h_2}{12} = 703,125 mm^4$$

$$A_3: \quad J_{22,3} = \frac{b_3 h_3^3}{12} = 1,667 mm^4, \quad J_{33,3} = \frac{b_3^3 h_3}{12} = 666,667 mm^4$$

- Der zweite Teil der Berechnung besteht nun aus der Bestimmung der **Steineranteile**.

Steineranteile bestimmen:

- Steineranteile berechnen sich immer aus dem senkrechten Abstand zur Achse, in die das **Flächenträgheitsmoment zeigt**!
- Für J_{22} verwenden wir den Abstand in z-Richtung, für J_{33} den Abstand in y-Richtung.

Steineranteile bestimmen:

- Nun zur Bestimmung der Steineranteile:

$$A_1 : \quad J_{22,1} : \quad z_{A,1}^2 A_1 = 175{,}837 mm^4, \quad J_{33,1} : \quad y_{A,1}^2 A_1 = 0, \quad J_{23,1} = z_{A,1} y_{A,1} A_1 = 0$$

$$A_2 : \quad J_{22,2} : \quad z_{A,2}^2 A_2 = 2923{,}172 mm^4, \quad J_{33,2} : \quad y_{A,2}^2 A_2 = 0, \quad J_{23,2} = z_{A,2} y_{A,2} A_2 = 0$$

$$A_3 : \quad J_{22,3} : \quad z_{A,3}^2 A_3 = 3339{,}045 mm^4, \quad J_{33,3} : \quad y_{A,3}^2 A_3 = 0, \quad J_{23,3} = z_{A,3} y_{A,3} A_3 = 0$$

- Durch Bestimmung der Eigenträgheitsmomente wie auch der Steineranteile lässt sich das gesamte Flächenträgheitsmoment nun bestimmen!

Gesamt-Flächenträgheitsmoment bestimmen:

- Simples **Addieren** der **Eigenträgheitsmomente** und **Steineranteile** führt zum Gesamt-Flächenträgheitsmoment:

$$J_{22,ges} = J_{22,1} + J_{22,2} + J_{22,3} + z_{A,1}^2 A_1 + z_{A,2}^2 A_2 + z_{A,3}^2 A_3 = 7459,25\ mm^4$$

$$J_{33,ges} = J_{33,1} + J_{33,1} + J_{33,1} + y_{A,1}^2 A_1 + y_{A,2}^2 A_2 + y_{A,3}^2 A_3 = 1375,416\ mm^4$$

$$J_{11,ges} = J_{22,ges} + J_{33,ges} = 8834,668\ mm^4$$

$$J_{23,ges} = z_{A,1} y_{A,1} A_1 + z_{A,2} y_{A,2} A_2 + z_{A,3} y_{A,3} A_3 = 0$$

- Für J_{33} und J_{23} verschwinden die Steineranteile, da der y-Abstand der Teilflächen zum Schwerpunkt = 0 ist. Dieses Schema funktioniert für beliebig komplexe Querschnitte.