Aufgabensammlung 1

Aufgabe 1

Gegeben ist der Spannungszustand in einer Scheibe:

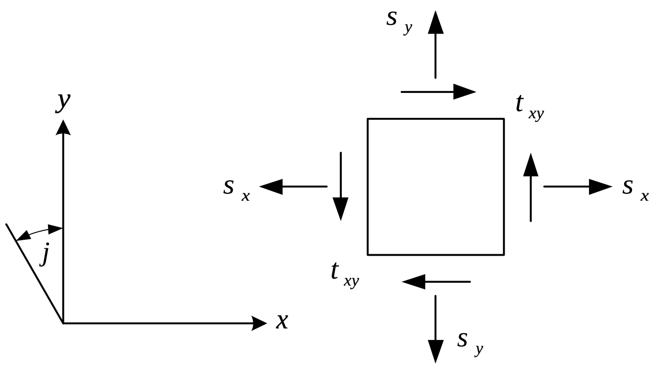
$$s_x = -20\frac{N}{mm^2}\ ;\ s_y = 60\frac{N}{mm^2}\ ;\ t_{xy} = -30\frac{N}{mm^2}$$

a.) Bestimmen Sie die Normalspannung s und die Schubspannung t für einen Schnitt unter dem Winkel $j = 30^{\circ}$ zur y-Achse und skizzieren Sie deren Richtungen.

b.) Ermitteln Sie die Hauptnormalspannungen und die Schnitte in denen sie wirken. Fertigen Sie ebenfalls eine Skizze an.

c.) Ermitteln Sie die Hauptschubspannungen und die Schnitte in denen sie wirken.

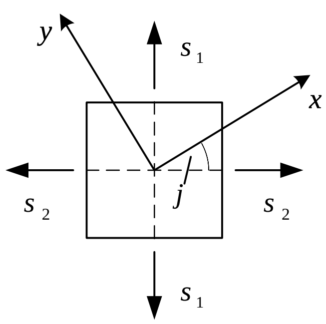
Lösen Sie die Aufgabe zuerst analytisch und dann graphisch mit dem Mohrschen Spannungskreis.



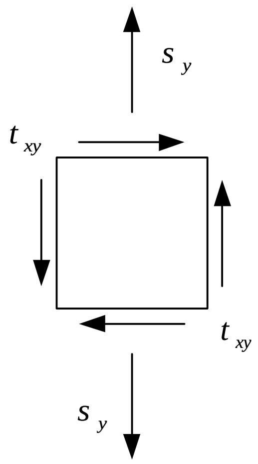
Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Spannungen unter einem Schnittwinkel von $j = 30^{\circ}$ zu den Hauptachsen. Zeichnen Sie für die ermittelten Werte den Mohrschen Spannungskreis.

Gegeben: $s_1 = 30\frac{N}{mm^2}\ ;\ s_2 = -60\frac{N}{mm^2}$



Aufgabe 3



$$s_y = 50 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$t_{xy} = 30 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Dargestellt ist der Spannungszustand an einem Punkt eines Bauteils. Bestimmen Sie

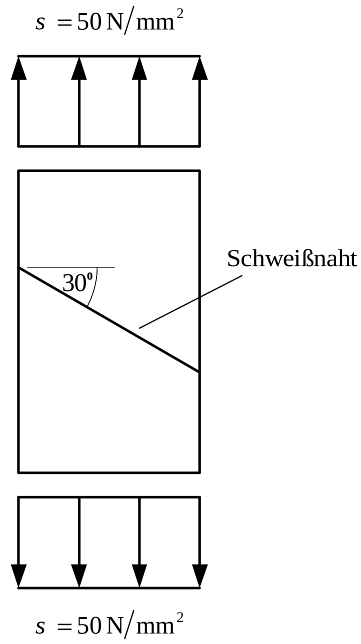
a.) die Hauptspannungen s_1 und s_2 und deren Richtungen,

b.) die Hauptschubspannungen $t_{\max}$ und deren Richtungen.

c.) Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises.

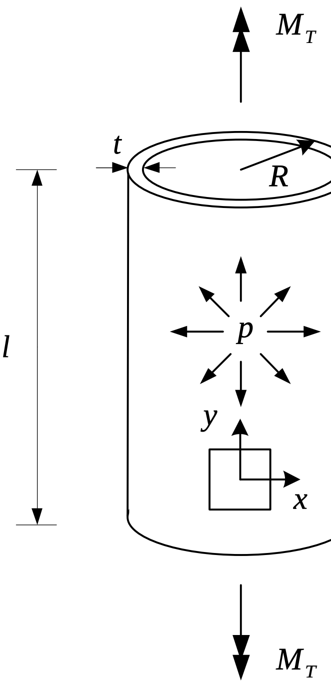
Aufgabe 4

Dargestellt ist ein dünner Blechstreifen mit einer schräg liegenden Schweißnaht, der auf Zug beansprucht wird.
Bestimmen Sie die Normal- und Schubspannungen in der Naht und stellen Sie diese im Mohrschen Spannungskreis dar.



Aufgabe 5

Ein dünnwandiges Kreisrohr mit dem Radius R und der Dicke t wird durch einen Innendruck p und ein Torsionsmoment M_T belastet. Die Materialkonstanten E und n sind bekannt.

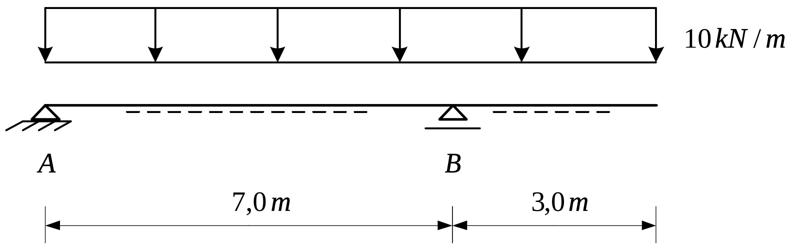


a.) Bestimmen Sie die Normalspannungen s_x, s_y und die Schubspannung t_{xy}.

b.) Bestimmen Sie die Hauptspannungen s_1 und s_2.

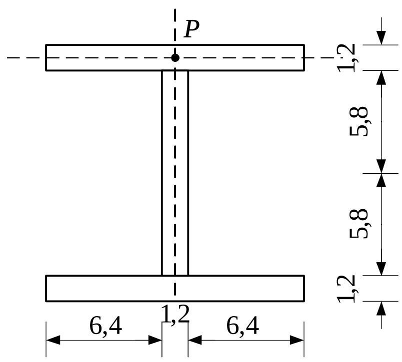
c.) Ermitteln Sie die Längenänderung Δl des Kreisrohres in y-Richtung unter Innendruck p und einer Temperaturänderung ΔT.

Aufgabe 6



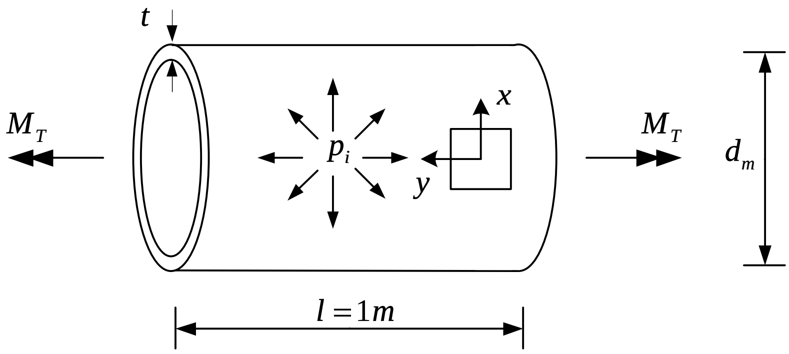
a.) Bestimmen Sie die Normalspannung s und die Schubspannung t am Lager A und B.
Gegeben: Stahlträger mit dem unten dargestellten Querschnitt (Maße in cm).

b.) Bestimmen Sie die Hauptspannungen an der in der Skizze eingezeichneten Stelle P des Querschnitts und tragen Sie diese in den Mohrschen Spannungskreis ein.

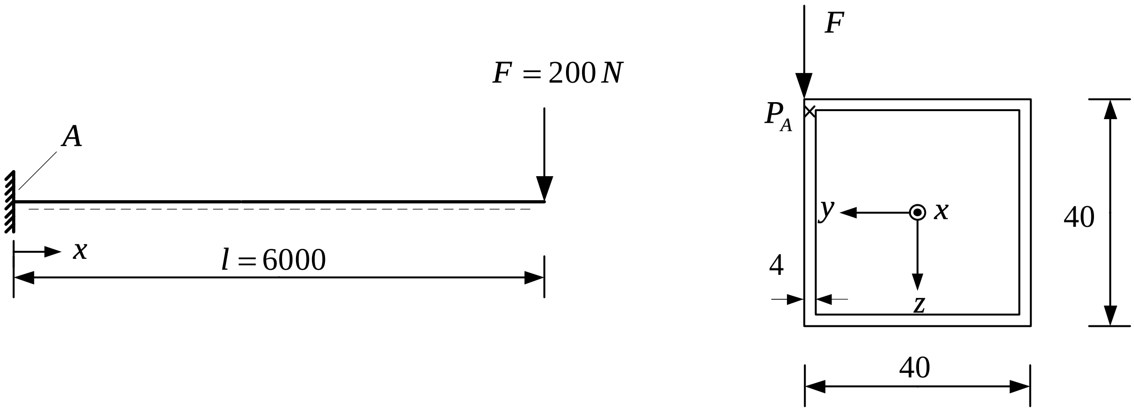


Aufgabe 7

Ein dünnwandiger Zylinder mit dem mittleren Durchmesser $d_m = 50\,\text{cm}$ steht unter Innendruck $p_i = 2\,\text{MN/m}^2$ und wird zusätzlich durch ein Torsionsmoment $M_T = 20\,\text{kNm}$ belastet. Berechnen Sie die Vergleichspannung nach der Schubspannungshypothese und bestimmen Sie die Mindestwanddicke t des Zylinders, wenn die zulässige Spannung $s_{zul} = 50\,\text{MN/m}^2$ voll ausgenutzt werden soll.



Aufgabe 8



a.) Bestimmen Sie an der Stelle A die Normalspannungen s und die Schubspannungen aus Querkraft t_Q und Torsion t_T und skizzieren Sie deren Verlauf über den dargestellten dünnwandigen Hohlquerschnitt (Maße in mm).

b.) Bestimmen Sie für den Punkt P_A die Vergleichsspannung nach der Normalspannungshypothese, der Schubspannungshypothese und der Hypothese der Gestaltänderungsenergie.

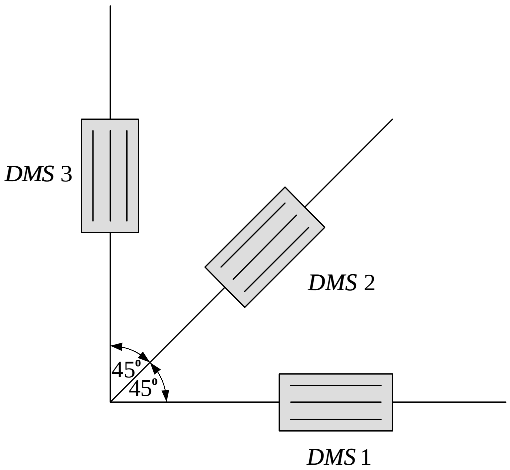
Aufgabe 9

Mit Hilfe einer Dehnungsmessstreifenrosette wurden an einem Blech folgende Dehnungen in den dargestellten Richtungen gemessen: $e^{(1)} = 9 \cdot 10^{-4}$, $e^{(2)} = 6 \cdot 10^{-4}$, $e^{(3)} = -5 \cdot 10^{-4}$.

Zusätzlich gegeben: $E = 2{,}1 \cdot 10^{5}$ N/mm², $n = 0{,}3$.

Bestimmen Sie:

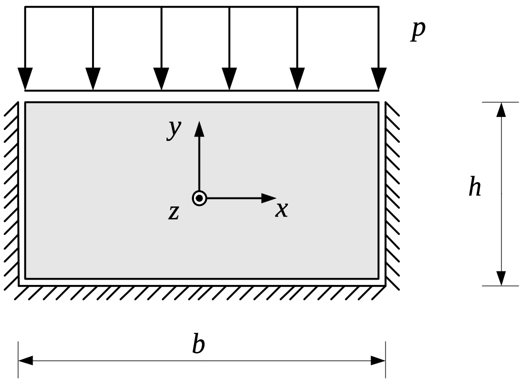
- den Verzerrungszustand e_x, e_y und g_{xy},
- die Hauptdehnungen e_1 und e_2 und deren Richtungen,
- den Spannungszustand s_x, s_y und t_{xy},
- die Hauptspannungen s_1 und s_2 sowie deren Richtungen.



Aufgabe 10

Ein Körper mit quadratischer Grundfläche (Breite b, Höhe h) passt im unbelasteten Zustand genau in einen Hohlraum mit starren Wänden, wobei der Kontakt zwischen Körper und Wänden reibungsfrei ist. Der Körper wird durch eine Streckenlast p belastet und gleichzeitig um ΔT erwärmt. Bestimmen Sie die Normalspannungen s_x, s_y, s_z und die Dehnungen e_x, e_y, e_z im Körper für den Fall eines homogen räumlichen Spannungszustandes.

Gegeben: $b, h, p, E, n, a_T, \Delta T$.



Musterlösungen

Aufgabe 1

$s_x = -20\ \frac{N}{mm^2}$, $s_y = 60\ \frac{N}{mm^2}$, $t_{xy} = -30\ \frac{N}{mm^2}$, $j = 30°$

Analytische Lösung:

a) **Bestimmen Sie die Normalspannung s und die Schubspannung t für einen Schnitt unter dem Winkel j = 30° zur y-Achse und skizzieren Sie deren Richtungen.**

Transformationsbeziehungen:

$$\boxed{s_x = \frac{1}{2}\left(s_x + s_y\right) + \frac{1}{2}\left(s_x - s_y\right)\cdot\cos 2j + t_{xy}\cdot\sin 2j}$$

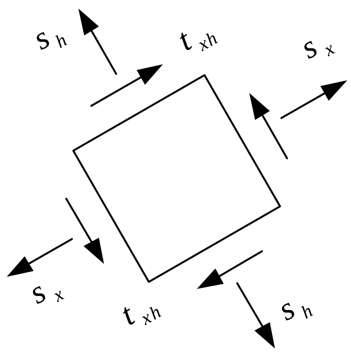
à $s_x = \frac{1}{2}\left(-20+60\right) + \frac{1}{2}\left(-20-60\right)\cdot\cos\left(2\cdot 30°\right) + \left(-30\right)\cdot\sin\left(2\cdot 30°\right) \quad = -25{,}98\ \frac{N}{mm^2}$

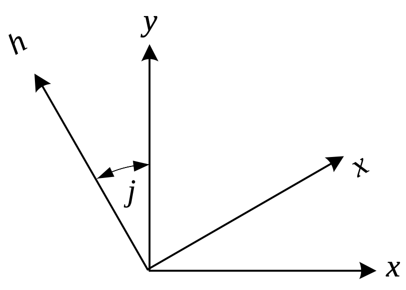
$$\boxed{s_h = \frac{1}{2}\left(s_x + s_y\right) - \frac{1}{2}\left(s_x - s_y\right)\cdot\cos 2j - t_{xy}\cdot\sin 2j}$$

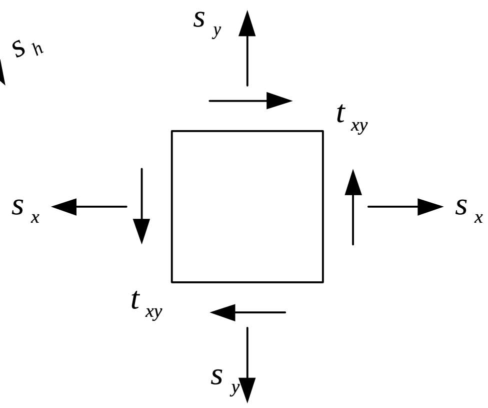
à $s_h = \frac{1}{2}\left(-20+60\right) - \frac{1}{2}\left(-20-60\right)\cdot\cos\left(2\cdot 30°\right) - \left(-30\right)\cdot\sin\left(2\cdot 30°\right) \quad = 65{,}98\ \frac{N}{mm^2}$

$$\boxed{t_{xh} = -\frac{1}{2}\left(s_x - s_y\right)\cdot\sin 2j + t_{xy}\cdot\cos 2j}$$

à $t_{xh} = -\frac{1}{2}\left(-20-60\right)\cdot\sin\left(2\cdot 30°\right) + \left(-30\right)\cdot\cos\left(2\cdot 30°\right) \quad = 19{,}64\ \frac{N}{mm^2}$







b) **Ermitteln Sie die Hauptnormalspannungen und die Schnitte in denen sie wirken. Fertigen Sie ebenfalls eine Skizze an.**

Hautspannungen

$$\boxed{s_{1,2} = \frac{(s_x + s_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^{\ 2}}}$$

à $s_{1,2} = \dfrac{(-20+60)}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{-20-60}{2}\right)^2 + (-30)^2}$ $\qquad s_1 = 70\ \dfrac{N}{mm^2}$, $s_2 = -30\ \dfrac{N}{mm^2}$

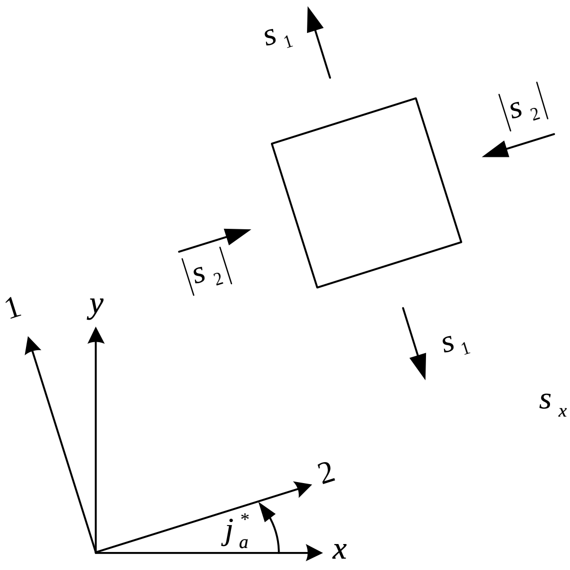
$$\boxed{\tan 2j^* = \frac{2t_{xy}}{s_x - s_y}}$$

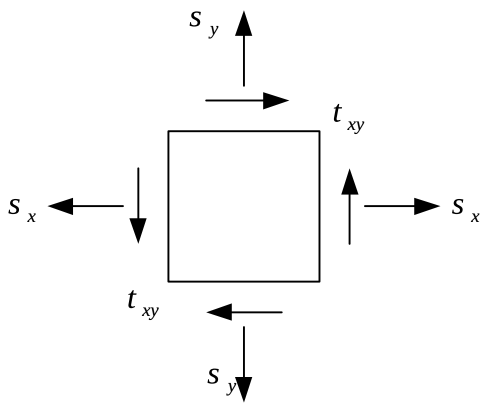
à

$$\tan 2j^* = \frac{2\cdot(-30)}{-20-60} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \qquad j_a^* = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 18{,}43° \qquad j_b^* = j_a^* + 90° = 108{,}43°$$

Winkel in Transformationsbeziehungen einsetzen, um sie der Richtung 1 oder 2 zuzuordnen:

$j_a^* \rightarrow s_2$ und $j_b^* \rightarrow s_1$.





c) **Ermitteln Sie die Hauptspannungen und die Schnitte in denen sie wirken.**

Maximale Schubspannung

$$\boxed{t_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^{\ 2}}}$$

$$\text{à} \quad t_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{-20-60}{2}\right)^2 + (-30)^2} = \pm\, 50\ \frac{N}{mm^2}$$

$$\boxed{j_{a,b}^{**} = j_a^{*} \pm 45°}$$

$$\text{à} \quad j_{a,b}^{**} = 18{,}43° \pm 45° \qquad j_a^{**} = 63{,}43° \quad j_b^{**} = -26{,}57°$$

Aus der Transformationsbeziehung folgt

$$j_a^{**} \rightarrow t_{\max} = 50\frac{N}{mm^2} \ \text{ und } \ j_b^{**} \rightarrow t_{\max} = -50\frac{N}{mm^2}$$

Graphische Lösung

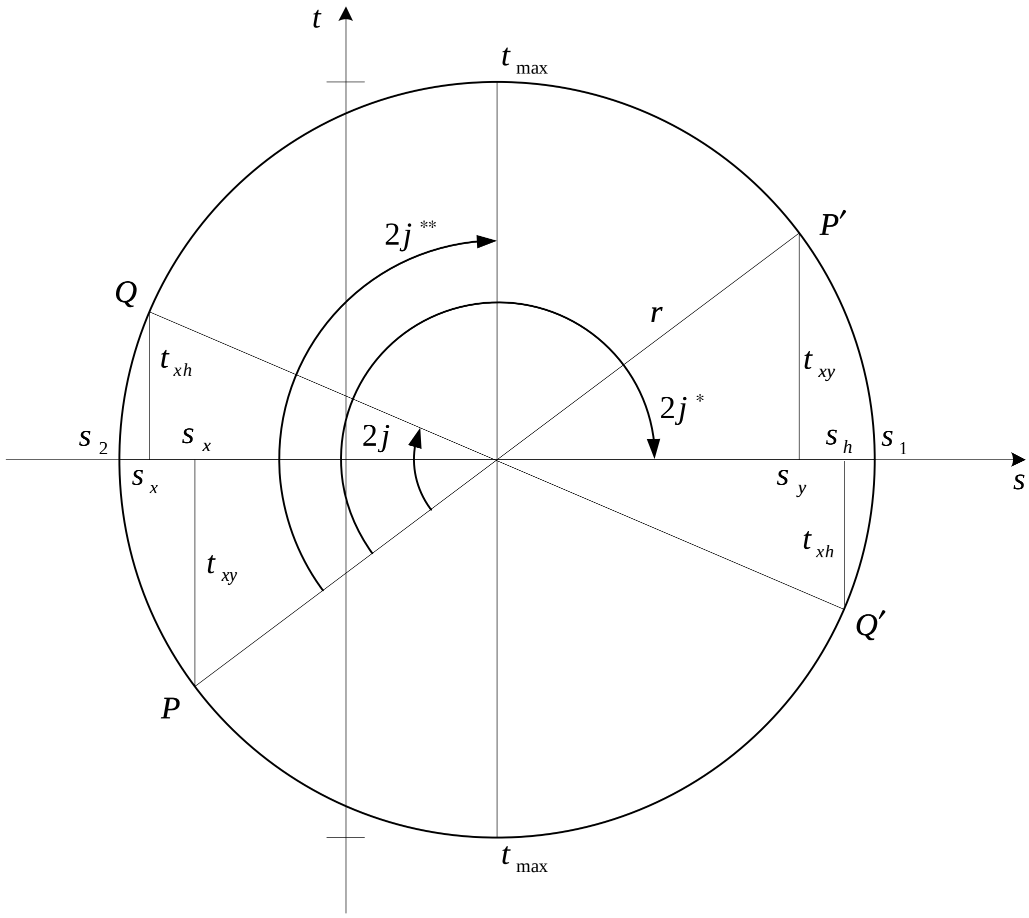
Mohrscher Spannungskreis

Mittelpunkt: $\boxed{s_M = \frac{(s_x + s_y)}{2},\ t = 0}$

$$\text{à} \quad s_0 = \frac{(-20+60)}{2} = 20\ \frac{N}{mm^2}, \quad t = 0$$

Radius: $\boxed{r = \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^{\ 2}}}$

$$\text{à} \quad r = \sqrt{\left(\frac{-20-60}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 50\ \frac{N}{mm^2}$$

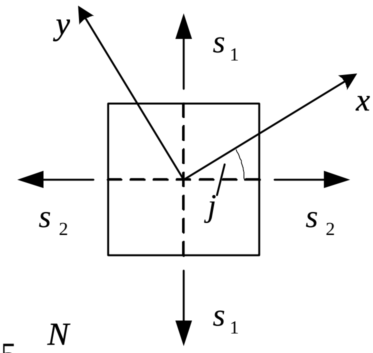


Maßstab: $1\ cm \mathrel{\hat{=}} 10\ \frac{N}{mm^2}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Spannungen unter einem Schnittwinkel von j =30° zu den Hauptachsen. Zeichnen Sie für die ermittelten Werte den Mohrschen Spannungskreis

$s_1 = 30 \frac{N}{mm^2}$, $s_2 = -60 \frac{N}{mm^2}$



Transformationsbeziehungen

Hauptspannungen à $t_{1,2} = 0$

$$\boxed{s_x = \frac{1}{2}(s_2 + s_1) + \frac{1}{2}(s_2 - s_1)\cdot\cos j}$$

$$\text{à}\quad s_x = \frac{1}{2}(-60+30) + \frac{1}{2}(-60-30)\cdot\cos 60° \qquad = -37{,}5\ \frac{N}{mm^2}$$

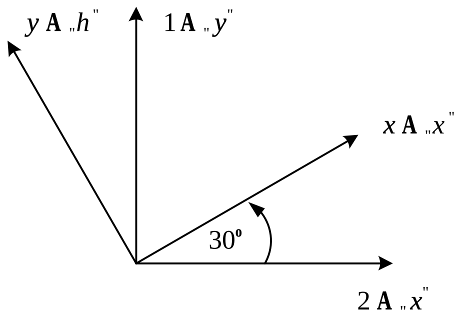
$$\boxed{s_y = \frac{1}{2}(s_2 + s_1) - \frac{1}{2}(s_2 - s_1)\cdot\cos j}$$

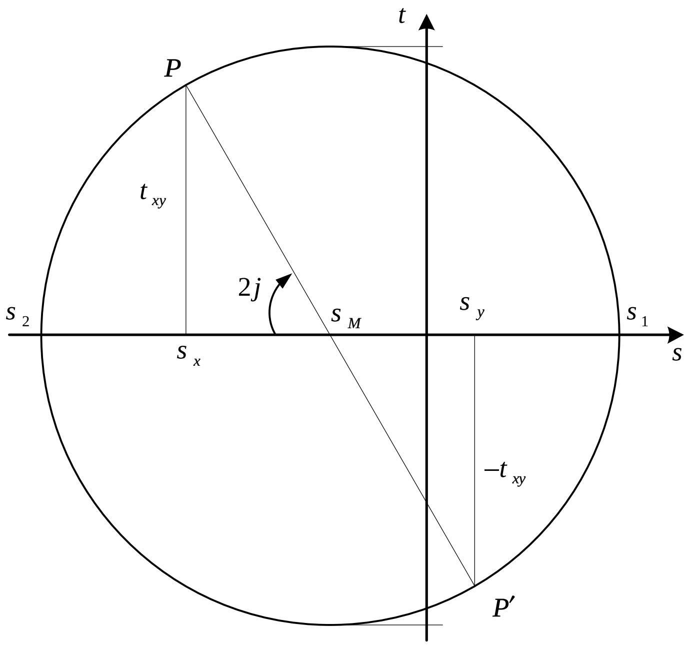
$$\text{à}\quad s_y = \frac{1}{2}(-60+30) - \frac{1}{2}(-60-30)\cdot\cos 60° \qquad = 7{,}5\ \frac{N}{mm^2}$$

$$\boxed{t_{xy} = -\frac{1}{2}(s_2 - s_1)\cdot\sin j}$$

$$\text{à}\quad t_{xy} = -\frac{1}{2}(-60-30)\cdot\sin 60° \qquad = 38{,}97\ \frac{N}{mm^2}$$

Mohrscher Spannungskreis





Maßstab: $1\ cm \ \hat{=}\ 10\ \frac{N}{mm^2}$

Aufgabe 3

a) <u>Hauptspannungen:</u>

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{0 + 50\,\frac{N}{mm^2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 50\,\frac{N}{mm^2}}{2}\right)^2 + \left(30\,\frac{N}{mm^2}\right)^2}$$

$$\sigma_1 = 64{,}05\,\frac{N}{mm^2} \quad ; \quad \sigma_2 = -14{,}05\,\frac{N}{mm^2}$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1^* = -25{,}1° \ (\sigma_2)$$

$$\varphi_2^* = \varphi_1^* + \frac{\pi}{2} = 64{,}9° \ (\sigma_1)$$

b) <u>Maximale Schubspannung</u>

$$\tau_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

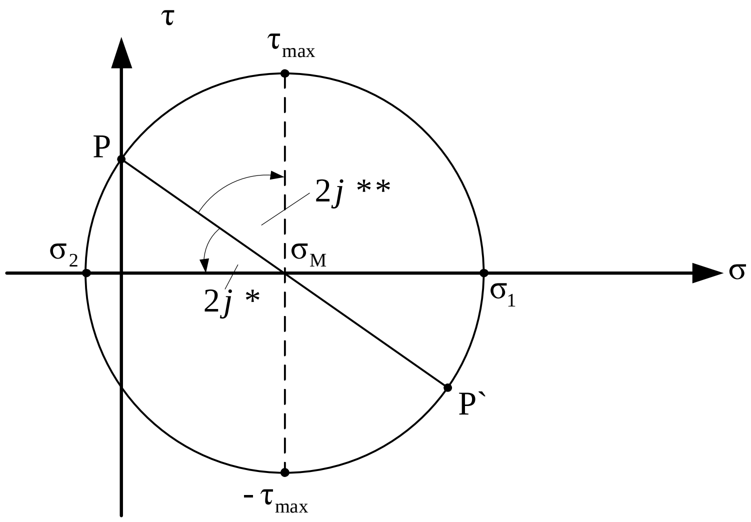
$$\tau_{max} = \pm 39{,}05\,\frac{N}{mm^2}$$

$$\tan 2\varphi^{**} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1^{**} = 19{,}9°, \qquad \varphi_2^{**} = \varphi_1^{**} + \frac{\pi}{2} = 109{,}9°$$

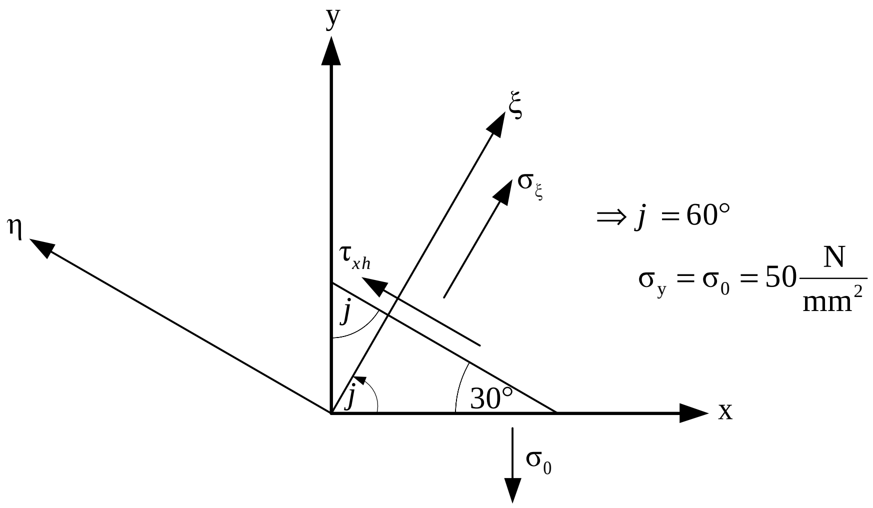
$$\varphi_1^{**} \rightarrow \tau_{max} = 39{,}05°, \qquad \varphi_2^{**} \rightarrow \tau_{max} = -39{,}05°$$

Die Zuordnung der Winkel folgt über die zugehörigen Transformationsbeziehungen.

c) <u>Mohrscher Spannungskreis</u>



Aufgabe 4



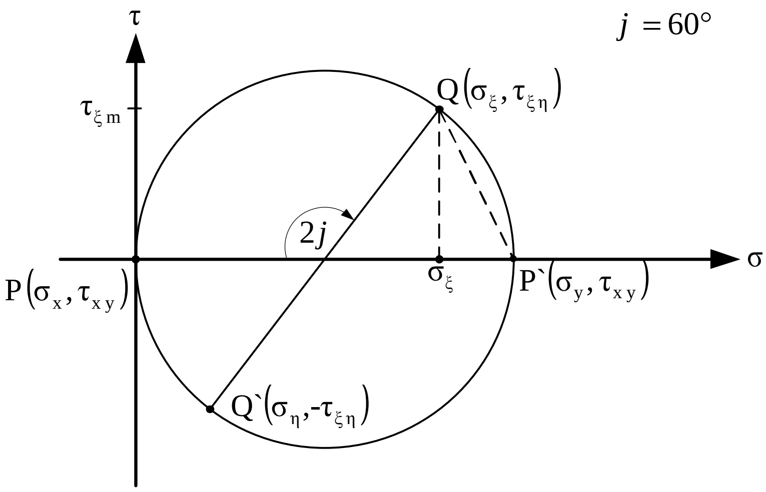
Aus Transformationsgleichung folgt

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}\left(0+\sigma_0\right)+\frac{1}{2}\left(0-\sigma\right)\cdot\cos\left(2\cdot 60°\right)+0$$

$$=\frac{\sigma_0}{2}-\frac{\sigma_0}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\underline{\underline{\frac{3}{4}\sigma_0}}=37{,}5\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}\left(0-\sigma_0\right)\cdot\sin\left(2\cdot 60°\right)+0$$

$$=\frac{\sigma_0}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sigma_0}{4}\sqrt{3}=21{,}65\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



Aufgabe 5

a) **Bestimmen Sie die Normalspannungen s_x, s_y und die Schubspannung t_{xy}.**

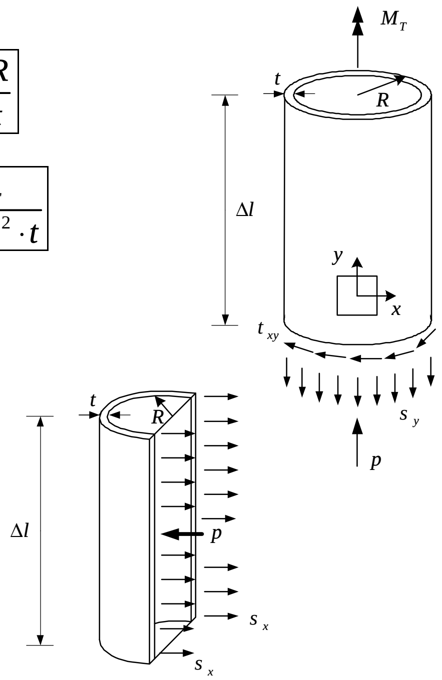
Annahme: Längsspannungen σ_y wegen t << R über die Wanddicke gleichmäßig verteilt.

Kräftegleichgewicht:

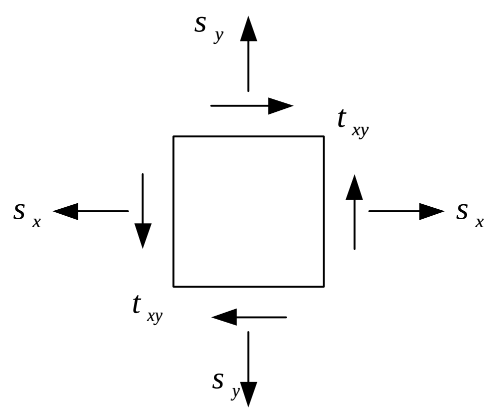
$$\uparrow:\ -s_y \cdot 2p \cdot R \cdot t + p \cdot p \cdot R^2 = 0 \quad \text{à} \quad \boxed{s_y = \frac{1}{2} p \cdot \frac{R}{t}}$$

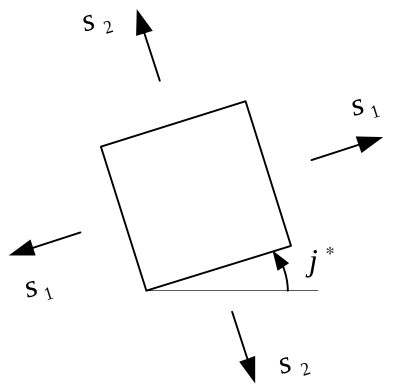
$$\Sigma M_T:\ M_T - t_{xy} \cdot 2p \cdot R \cdot t \cdot R = 0 \quad \text{à} \quad \boxed{t_{xy} = \frac{M_T}{2p \cdot R^2 \cdot t}}$$

$$\rightarrow:\ 2s_x \cdot t \cdot \Delta l - p \cdot 2R \cdot \Delta l = 0 \quad \text{à} \quad \boxed{s_y = p \cdot \frac{R}{t}}$$



b) **Bestimmen Sie die Hauptspannungen s_1 und s_2.**





$$\tan 2j^* = \frac{2t_{xy}}{s_x - s_y} = \frac{2M_T}{p \cdot R^3 \cdot p} \qquad \Rightarrow j^* = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2M_T}{p \cdot R^3 \cdot p}\right)$$

$$s_{1,2} = \frac{(s_x + s_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^{\ 2}} \quad \text{mit: } s_x + s_y = \frac{3}{2} p \cdot \frac{R}{t} \text{ und } s_x - s_y = \frac{1}{2} p \cdot \frac{R}{t}$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = \frac{3}{4} p \cdot \frac{R}{t} \pm \sqrt{\frac{1}{16} p^2 \cdot \frac{R^2}{t^2} + \frac{M_T^2}{4p^2 \cdot R^4 \cdot t^2}}$$

c) **Ermitteln Sie die Längenänderung Dl des Kreisrohres in y-Richtung unter Innendruck p und einer Temperaturänderung DT.**

$$e_y = \frac{1}{E}\left(s_y - n \cdot s_x\right) + a_T \cdot \Delta T = \frac{1}{E}\left(\frac{1}{2} p \cdot \frac{R}{t} - n \cdot p \cdot \frac{R}{t}\right) + a_T \cdot \Delta T$$

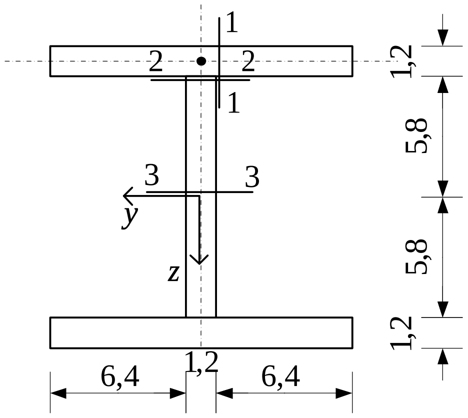
$$e_y = \frac{\Delta l}{l} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta l = e_y \cdot l$$

$$\Delta l = p \cdot \frac{l}{E} \cdot \frac{R}{t}\left(\frac{1}{2} - n\right) + a_T \cdot \Delta T \cdot l$$

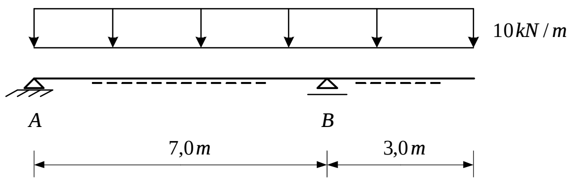
Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie die Normalspannung s und die Schubspannung t am Auflager A und B.

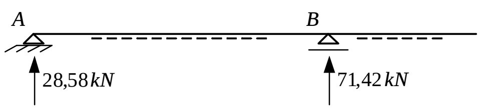
Gegeben: Stahlträger mit dem unten dargestellten Querschnitt (Maße in cm)



Statisches System und Einwirkungen:

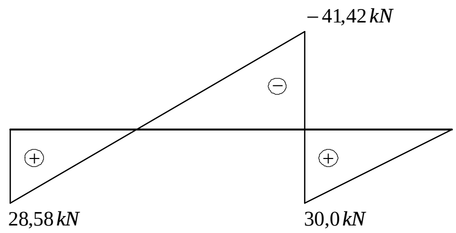


Auflagerkräfte:

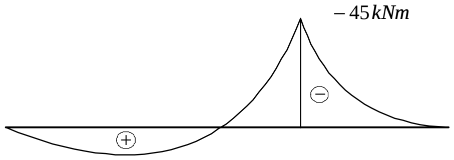


Schnittgrößen:

Querkraft



Moment



Auflager A: $M_y = 0$ $Q_z^{rechts} = 28,58\ kN$

Auflager B: $M_y = -45\ kNm$ $Q_z^{links} = -41,42\ kN$ $\Rightarrow$ *maßgebend*

$$Q_z^{rechts} = 30,00\ kN$$

<u>Querschnittswerte</u>:

Flächenträgheitsmoment 2.Ordnung

$$I_y = \frac{1,2 \cdot (2 \cdot 5,8)^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{14 \cdot 1,2^3}{12} + (5,8 + 0,6)^2 \cdot 14 \cdot 1,2 \right) = 1536,4\ cm^4$$

<u>Auflager A</u>:

<u>Normalspannung σ_x</u> am Lager A nicht vorhanden à $M_y = 0$.

<u>Schubspannungen τ</u>

Schnitt 1-1:

$$S_y^{1-1} = 7,0\,cm \cdot 1,2\,cm \cdot (7,0cm - 0,6cm) = 53,76\,cm^3$$

$$t_{xy}^{1-1} = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot t} = \frac{28,58\,kN \cdot 53,76\,cm^3}{1536,4\,cm^4 \cdot 1,2\,cm} = 0,83\frac{kN}{cm^2}$$

Schnitt 2-2:

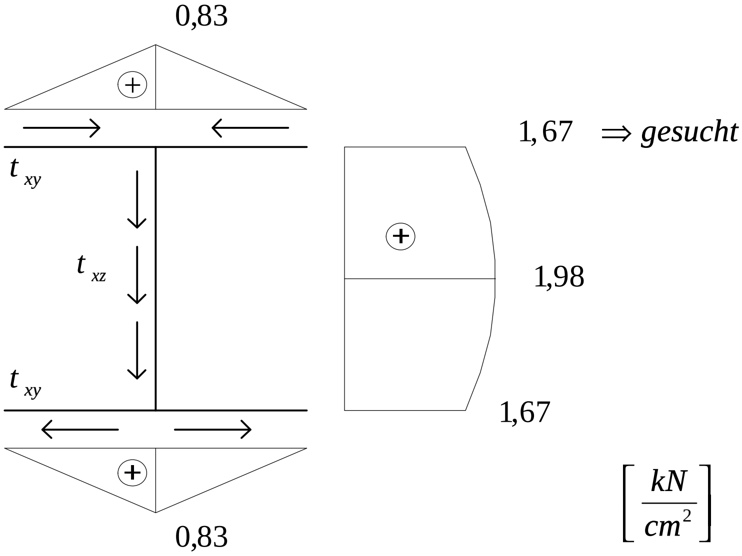
$$S_y^{2-2} = 2 \cdot S_y^{1-1} = 107,52\,cm^3$$

$$t_{xz}^{2-2} = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot t} = \frac{28,58\,kN \cdot 107,52\,cm^3}{1536,4\,cm^4 \cdot 1,2\,cm} = 1,67\frac{kN}{cm^2}$$

Schnitt 3-3:

$$S_y^{3-3} = S_y^{2-2} + 5,8\,cm \cdot 1,2\,cm \cdot \frac{5,8\,cm}{2} = 127,7\,cm^3$$

$$t_{xz}^{3-3} = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot t} = \frac{28,58\,kN \cdot 127,7\,cm^3}{1536,4\,cm^4 \cdot 1,2\,cm} = 1,98\frac{kN}{cm^2}$$

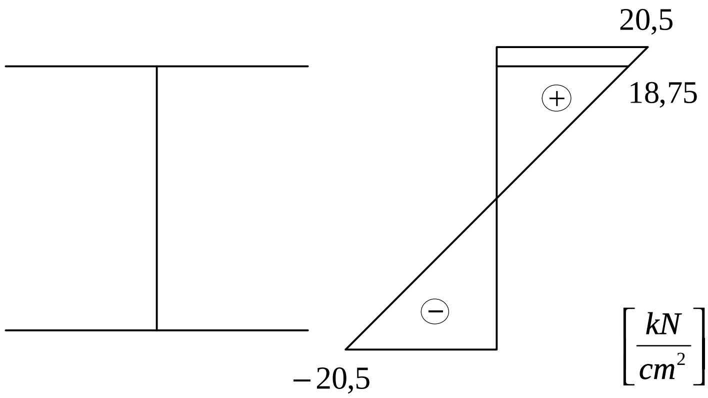


<u>Auflager B</u>:

<u>Normalspannung σ_x</u>

$$s_x^{oben} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \frac{-4500\,kNcm}{1536,4\,cm^4} \cdot (-7,0\,cm) = 20,5\frac{kN}{cm^2}$$

$$s_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_P = \frac{-4500\,kNcm}{1536,4\,cm^4} \cdot (-7,0\,cm + 0,6\;cm) = 18,75\;\frac{kN}{cm^2}$$

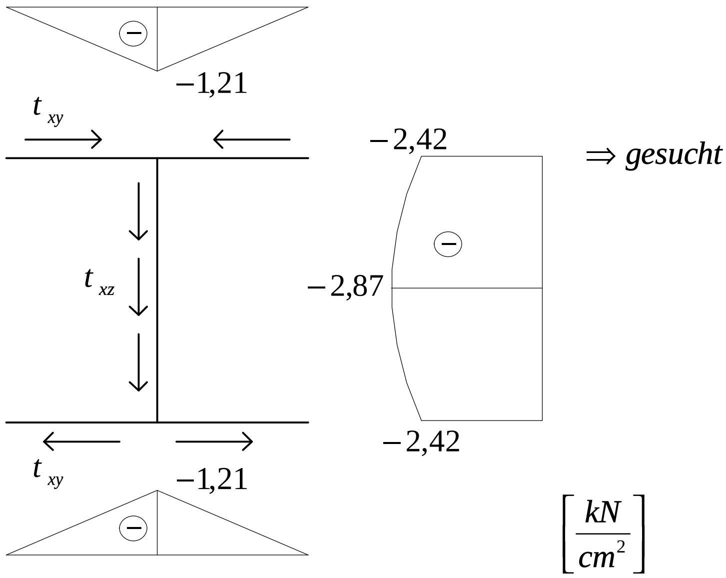


<u>Schubspannungen τ</u>

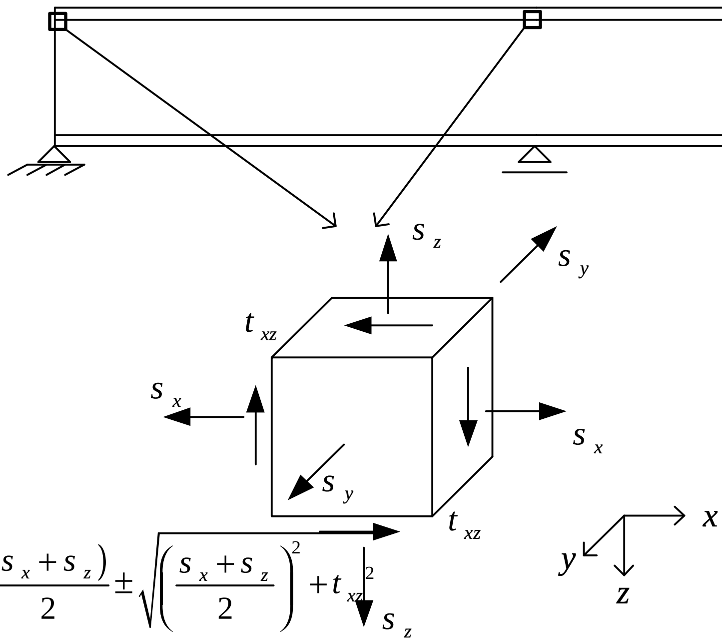
Schnitt 1-1: $t_{xy}^{1-1} = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot t} = \frac{-41,42\,kN \cdot 53,76\,cm^3}{1536,4\,cm^4 \cdot 1,2\,cm} = -1,21\;\frac{kN}{cm^2}$

Schnitt 2-2: $t_{xz}^{2-2} = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot t} = \frac{-41,42\,kN \cdot 107,52\,cm^3}{1536,4\,cm^4 \cdot 1,2\,cm} = -2,42\frac{kN}{cm^2}$

Schnitt 3-3: $t_{xz}^{3-3} = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot t} = \frac{-41,42\,kN \cdot 127,7\,cm^3}{1536,4\,cm^4 \cdot 1,2\,cm} = -2,87\;\frac{kN}{cm^2}$



b) **Bestimmen Sie die Hauptspannungen an der in der Skizze eingezeichneten Stellen P des Querschnitts und tragen Sie diese in den Mohrschen Spannungskreis ein.**

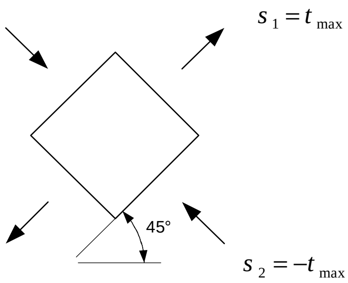


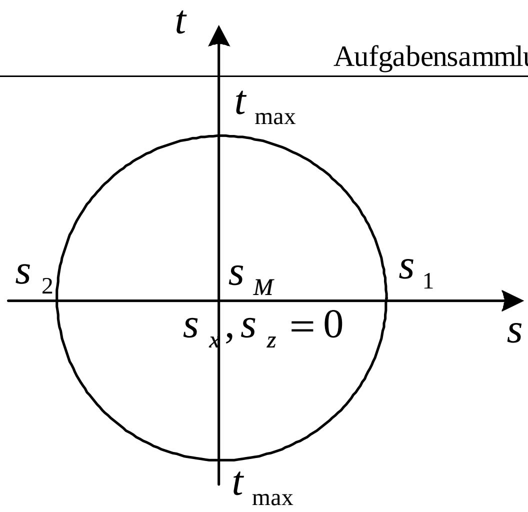
$$s_{1,2} = \frac{(s_x + s_z)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_x + s_z}{2}\right)^2 + t_{xz}^2}$$

Auflager A:

$$s_{1,2} = 0 \pm \sqrt{0 + 1,67^2} = \pm 1,67 \frac{kN}{cm^2}$$

Sonderfall: reiner Schub



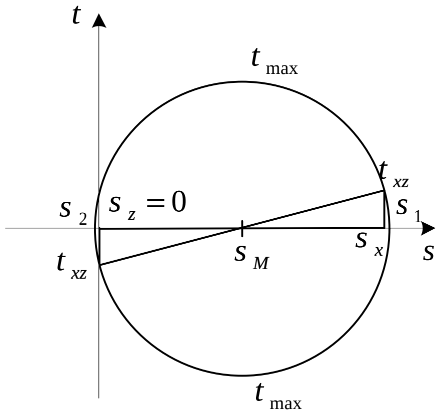


Maßstab: $1\ cm\ \hat{=}\ 0,5\ \frac{N}{mm^2}$

Auflager B:

$$s_{1,2} = \frac{(18,75+0)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{18,75+0}{2}\right)^2 + 2,42^2} = \begin{cases} 19,06\dfrac{kN}{cm^2} \\ -0,31\dfrac{kN}{cm^2} \end{cases}$$

Maßstab: $1\ cm\ \hat{=}\ 5\ \frac{N}{mm^2}$



Aufgabe 7

$$s_x = p \cdot \frac{r_m}{t} = 2\frac{MN}{m^2} \cdot \frac{0,25m}{t} \qquad = \frac{1}{2 \cdot t}$$

$$s_y = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{r_m}{t} = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{MN}{m^2} \cdot \frac{0,25m}{t} \qquad = \frac{1}{4 \cdot t}$$

$$t_{xy} = \frac{M_T}{W_T} = \frac{0,02\ MNm}{2p \cdot (0,25\ m)^2 \cdot t} \qquad = \frac{4}{25 \cdot p \cdot t}$$

Schubspannungshypothese:

$$s_v = \sqrt{\left(s_x - s_y\right)^2 + 4 \cdot t_{xy}^2}$$

$$s_v = \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot t} - \frac{1}{4 \cdot t}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{4}{25 \cdot p \cdot t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4 \cdot t}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{4}{25 \cdot p \cdot t}\right)^2}$$

$$s_v = \sqrt{\frac{1}{16 \cdot t^2} + \frac{64}{625 \cdot p^2 \cdot t^2}} = 0,27 \cdot \frac{1}{t}$$

Bestimmungen der Mindestwanddicke:

$$s_v \ \leq \ s_{zul}$$

$$\Rightarrow\ 0,27 \cdot \frac{1}{t} = 50\ \frac{MN}{m^2}$$

$$\Rightarrow\ t = 0,0054\ m \ \hat{=}\ 5,4\ mm$$

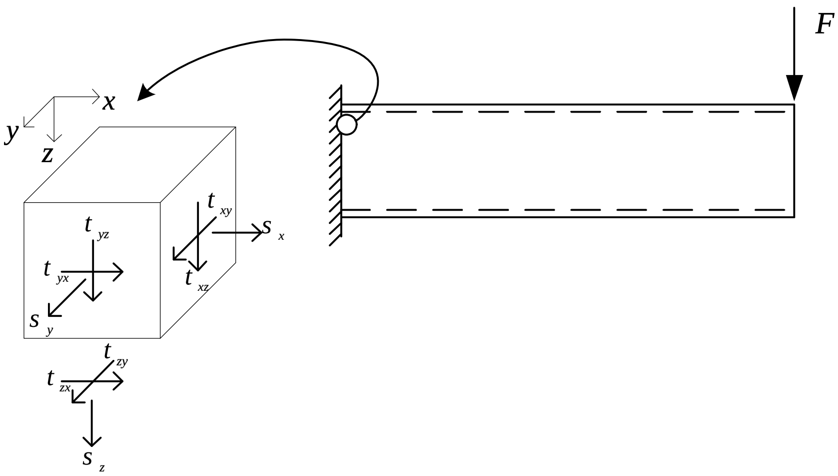
Aufgabe 8

a) Schnittgrößen an der Stelle A:

$$M_y = -1200\ Nm,\ M_x = 4{,}00\ Nm,\ Q_z^A = 200\ N$$

Flächenträgheitsmoment:

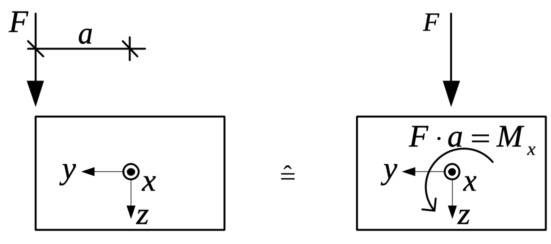
$$I_y = \frac{4 \cdot 4^3}{12} - \frac{3{,}2 \cdot 3{,}2^3}{12} = 12{,}6\ cm^4$$

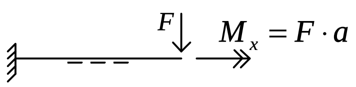


Man erhält aus

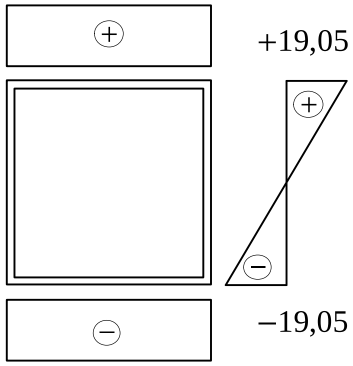
- Biegung $\quad M_y \quad \Rightarrow \quad s_x$
- Biegung $\quad M_z \quad \Rightarrow \quad s_y = 0$
- Querkraft $\quad Q_z \quad \Rightarrow \quad t_{xz},\ t_{xy}$
- Torsionsmomnet $\quad M_x \quad \Rightarrow \quad t_{xz},\ t_{xy}$

<u>Moment einer Kraft (siehe TM1):</u>





Normalspannung:



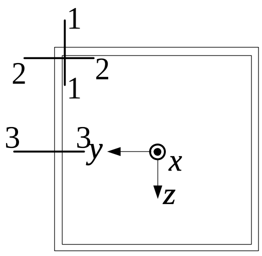
Oberer Rand:

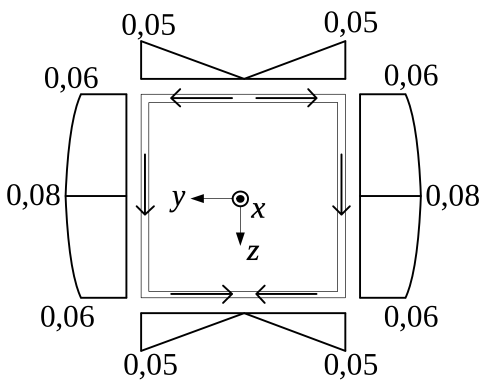
$$s_x = \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \frac{1200\ Nm \cdot \frac{1}{10}}{12,6\ cm^4} \cdot (\pm 2\ cm) = \pm 19,05\ \frac{kN}{cm^2}$$

oder genauer in P_A:

$$s_x = \frac{1200 \cdot \frac{1}{10}}{12,6} \cdot (\pm 1,6) = \pm 15,24\ \frac{kN}{cm^2}$$

Schubspannung aus Querkraft:





$$S_1 = \left(\frac{4,0}{2} - 0,4\right) \cdot 0,4 \cdot \left(\frac{4,0-0,4}{2}\right) = 1,15\ cm^3$$

$$S_2 = \frac{4,0}{2} \cdot 0,4 \cdot \left(\frac{4,0-0,4}{2}\right) = 1,44\ cm^3$$

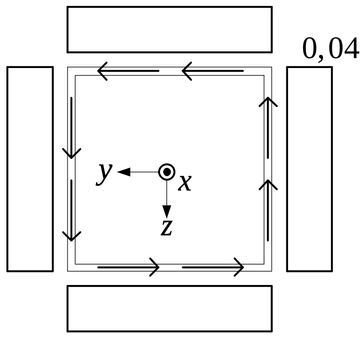
$$S_3 = S_2 + \left(\frac{4,0}{2} - 0,4\right) \cdot 0,4 \cdot \left(\frac{\frac{4,0}{2} - 0,4}{2}\right) = 1,95\ cm^3$$

$$t_1 = \frac{Q_z \cdot S_1}{I_y \cdot t} = \frac{0,2\ kN \cdot 1,15\ cm^3}{12,6\ cm^4 \cdot 0,4\ cm} = 0,05\ \frac{kN}{cm^2}$$

$$t_2 = \frac{Q_z \cdot S_2}{I_y \cdot t} = \frac{0,2\ kN \cdot 1,44\ cm^3}{12,6\ cm^4 \cdot 0,4\ cm} = 0,06\ \frac{kN}{cm^2}$$

$$t_3 = \frac{Q_z \cdot S_3}{I_y \cdot t} = \frac{0,2\ kN \cdot 1,95\ cm^3}{12,6\ cm^4 \cdot 0,4\ cm} = 0,08\ \frac{kN}{cm^2}$$

<u>Schubspannung aus Torsionsmoment:</u>



$$\tau_T = \frac{M_T}{W_T} = \frac{M_T}{2 \cdot A_m \cdot t} = \frac{4\ Nm \cdot \frac{1}{10}}{2 \cdot (4{,}0 - 0{,}4) \cdot (4{,}0 - 0{,}4) \cdot 0{,}4} = 0{,}04\ \frac{kN}{cm^2}$$

<u>Superposition (Überlagerung der Schubspannungen) an der Stelle P_A:</u>

$$\tau_{P_A} = \tau_{Q,PA} + \tau_{T,PA} = 0{,}06 + 0{,}04 = 0{,}10\ \frac{kN}{cm^2}$$

b) Normalspannungshypothese:

Winkel für die Hauptspannungsrichtung:

$$\tan(2\varphi^*) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi^* = 0{,}38^\circ \approx 0^\circ$$

Winkel ist hier vernachlässigbar klein, deswegen gilt, $\sigma_1 \approx \sigma_x$. Damit folgt

$$\sigma_v = \sigma_1 = 15{,}24\ \frac{kN}{cm^2}.$$

Schubspannungshypothese:

$$\sigma_v = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \sqrt{15{,}24^2 + 4 \cdot 0{,}10^2} = 15{,}24\ \frac{kN}{cm^2}$$

Hypothese der Gestaltungsenergie:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} = \sqrt{15{,}24^2 + 3 \cdot 0{,}10^2} = 15{,}24\ \frac{kN}{cm^2}$$

Aufgabe 9

<u>Transformationsbeziehungen:</u>

$$e_x = \frac{1}{2}\left(e_x + e_y\right) + \frac{1}{2}\left(e_x - e_y\right)\cdot\cos 2j + \frac{1}{2}g_{xy}\cdot\sin 2j$$

$$e_h = \frac{1}{2}\left(e_x + e_y\right) - \frac{1}{2}\left(e_x - e_y\right)\cdot\cos 2j - \frac{1}{2}g_{xy}\cdot\sin 2j$$

<u>Verzerrungszustand:</u>

Gesucht: 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten e_x, e_y, g_{xy}

$\boxed{j = 0°}$ in Transformationsbeziehungen einsetzen

$$e_x = e^{(1)} = \frac{1}{2}\left(e_x + e_y\right) + \frac{1}{2}\left(e_x - e_y\right) = e_x \qquad (1)$$

$$e_h = e^{(3)} = \frac{1}{2}\left(e_x + e_y\right) - \frac{1}{2}\left(e_x - e_y\right) = e_y \qquad (2)$$

$\boxed{j = 45°}$ in Transformationsbeziehung einsetzen

$$e_x = e^{(2)} = \frac{1}{2}\left(e_x + e_y\right) + \frac{1}{2}g_{xy} \qquad (3)$$

(1) und (2) in (3) eingesetzt

$$e^{(2)} = \frac{1}{2}\left(e^{(1)} + e^{(3)}\right) + \frac{1}{2}g_{xy}$$

$$g_{xy} = 2\cdot e^{(2)} - e^{(1)} - e^{(3)} = 8,0\cdot 10^{-4}$$

und aus (1) bzw. (2) folgt

$$e_x = e^{(1)} = \quad 9,0\cdot 10^{-4}$$

$$e_y = e^{(3)} = -5,0\cdot 10^{-4}$$

<u>Hauptrichtung</u>:

$$\tan 2j^* = \frac{g_{xy}}{e_x - e_y}$$

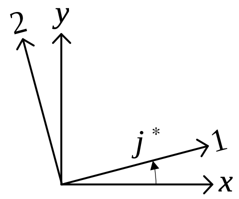
$$\Rightarrow \qquad j^* = \frac{1}{2}\cdot\arctan\left(\frac{2\cdot e^{(2)} - e^{(1)} - e^{(3)}}{e^{(1)} - e^{(3)}}\right) = 14,87°$$

Hauptdehnungen:

$$e_{1,2} = \frac{e_x + e_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e_x + e_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g_{xy}\right)^2}$$

$$e_1 = 10,06 \cdot 10^{-4}$$

$$e_2 = -6,06 \cdot 10^{-4}$$



Spannungszustand s_x, s_y und t_{xy}

$$\underline{s} = \underline{E} \cdot \underline{e} \qquad \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-n^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-n}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{bmatrix}$$

$$s_x = \frac{E}{1-n^2} \cdot \left(e_x + n \cdot e_y\right) = 173,1 \frac{N}{mm^2}$$

$$s_y = \frac{E}{1-n^2} \cdot \left(n \cdot e_x + e_y\right) = -53,1 \frac{N}{mm^2}$$

$$t_{xy} = \frac{E}{1-n^2} \cdot \frac{(1-n)}{2} \cdot g_{xy} = 64,6 \frac{N}{mm^2}$$

Hauptspannungen (mit Hilfe der Hauptdehnungen bestimmt):

$$e_1 = \frac{1}{E}\left(s_1 - n \cdot s_2\right) \qquad (4)$$

$$e_2 = \frac{1}{E}\left(s_2 - n \cdot s_1\right) \qquad (5)$$

Aus (4) folgt $\quad s_1 = e_1 \cdot E + n \cdot s_2$

In (5) $\quad e_2 = \frac{1}{E} \cdot \left(s_2 - n \cdot e_1 \cdot E - n^2 \cdot s_2\right)$

$$\Rightarrow \quad e_2 = \frac{s_2}{E} \cdot \left(1 - n^2\right) - n \cdot e_1 \cdot \frac{E}{E}$$

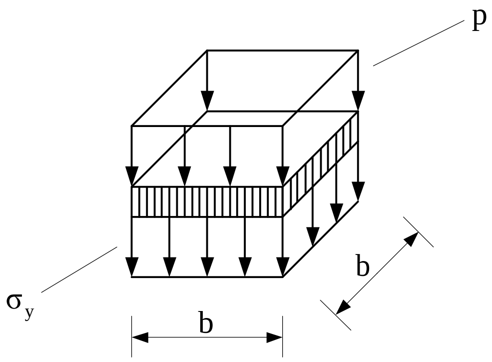
$$\Rightarrow \quad s_2 = \frac{E}{\left(1-n^2\right)} \cdot \left(e_2 + n \cdot e_1\right) = -70,2 \frac{N}{mm^2}$$

$$s_1 = 190,2 \frac{N}{mm^2}$$

Aufgabe 10

<u>Normalspannungen</u>

Gleichgewicht:



$$\uparrow: -\sigma_y - p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_y = -p$$

Aufgrund der starren Wände folgt

$$\varepsilon_x = 0 \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - n\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha_T \cdot \Delta T = 0 \qquad (1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - n\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha_T \cdot \Delta T = 0 \qquad (2)$$

Gleichsetzen von (1) und (2)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - n\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha_T \cdot \Delta T = \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - n\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha_T \cdot \Delta T$$

$$\sigma_x - n\left(\sigma_y - \sigma_z\right) = \sigma_z - n\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

$$\sigma_x - n\,\sigma_y - n\,\sigma_z = \sigma_z - n\,\sigma_x - n\,\sigma_y$$

$$\sigma_x\left(1+n\right) = \sigma_z\left(1+n\right)$$

$$\sigma_x = \sigma_z$$

Darüber hinaus folgt aus (1) und (2)

$$\sigma_x - n\left(\sigma_y + \sigma_z\right) + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{E} = 0 \qquad (3)$$

$$\sigma_z - n \; (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{E} = 0 \qquad (4)$$

und

$$\sigma_x = n \; \sigma_y + n \; \sigma_z - \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{E} \qquad (5)$$

$$\sigma_z = n \; \sigma_x + n \; \sigma_y - \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{E} \qquad (6)$$

Gleichung (6) in (5) eingesetzt

$$\sigma_x = n \; \sigma_y + n^2 \; \sigma_x + n^2 \; \sigma_y - \frac{\alpha_T \cdot \Delta T \cdot n}{E} - \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{E}$$

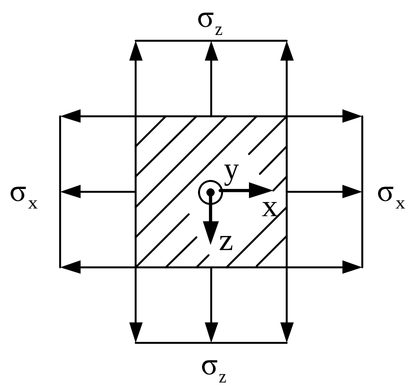
$$\sigma_x \; \left(1 - n^2\right) = n \; (1+n) \cdot \sigma_y - (1+n) \cdot \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{E}$$

$$\sigma_x \; (1-n) \; (1+n) = n \; (1+n) \cdot \sigma_y - (1+n) \cdot \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{E}$$

$$\sigma_x = \frac{\nu \cdot \sigma_y}{(1-\nu)} - \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{E \; (1-n)}$$

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{n \cdot p}{(1-n)} - \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{E \; (1-n)}$$

Draufsicht:



<u>Dehnungen</u>

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0 \qquad \text{(starre Wände)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \; \left[\sigma_y - n \; (\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha_T \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\; -p + \frac{2 \; n}{(1-n)} \; \left(n \cdot p + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{E}\right)\right] + \alpha_T \cdot \Delta T$$