mit dem über s konstanten Schubfluss und dem Hebelarm $r_\perp(s)$ bezüglich des Schwerpunkts S wie in Bild 13.15. Das Ringintegral stellt ein Integral entlang einer geschlossenen Kurve dar. Integriert wird hier entlang der Profilmittellinie, d. h. über den Umfang U.

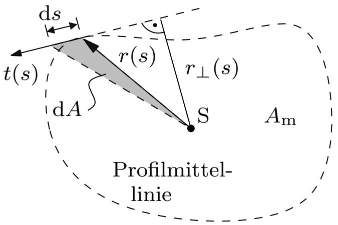

Bild 13.15
Dünnwandiges geschlossenes Profil

Dabei ist

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2} r_\perp \,\mathrm{d}s\,. \tag{13.38}$$

der Flächeninhalt des in Bild skizzierten Dreiecks. Die Integration über den Umfang des Querschnitts nach Gleichung 13.37 liefert gerade das Doppelte der von der Profilmittellinie eingeschlossenen Fläche A_m. Damit folgt für das Torsionsmoment

$$M_\mathrm{T} = t\,2A_\mathrm{m}\,. \tag{13.39}$$

Diese Gleichung ist in der Form

$$t = \frac{M_\mathrm{T}}{2A_\mathrm{m}} \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{M_\mathrm{T}}{2A_\mathrm{m}h(s)} \tag{13.40}$$

als *1. Bredtsche Formel* bekannt; nach Rudolf Bredt (1842–1900). Die maximale Schubspannung tritt an der Stelle der geringsten Wandstärke $h(s) = h_\mathrm{min}$ auf. Mit

$$\tau_\mathrm{max} = \frac{M_\mathrm{T}}{W_\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad W_\mathrm{T} = 2A_\mathrm{m}h_\mathrm{min} \tag{13.41}$$

wird darum das Torsionswiderstandsmoment W_T definiert.

Drillung

Durch das angreifende Torsionsmoment wird der Querschnitt verdreht. Die Drillung folgt aus der Schubverformung der Querschnittselemente. In Bild 13.16 ist ein verformtes Element des Querschnitts skizziert. Die Gleitung ist

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x}\,. \tag{13.42}$$

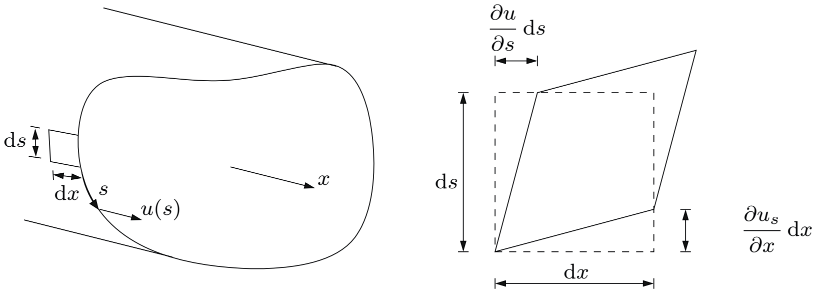

Bild 13.16 Schubverformung eines dünnwandigen geschlossenen Profils

Bei einem geschlossenen Querschnitt muss die Verschiebung $u(s)$ nach einem Umlauf entlang s über den Umfang wieder den gleichen Wert haben. Daher ist

$$\oint_U \frac{\partial u}{\partial s}\,\mathrm{d}s \;=\; 0\,. \tag{13.43}$$

Mit Gleichung 13.42 erhält man

$$\oint_U \gamma\,\mathrm{d}s \;-\; \oint_U \frac{\partial u_s}{\partial x}\,\mathrm{d}s \;=\; 0\,. \tag{13.44}$$

Anders als bei der Torsion von Kreisquerschnitten in Abschnitt 13.3.1 wird hier eine Verwölbung des Querschnittes explizit zugelassen, die nicht behindert werden darf. Der Querschnitt soll jedoch in der y-z-Ebene formtreu bleiben, d. h. die Projektion des Querschnitts auf diese Ebene darf sich lediglich verdrehen, aber nicht ihre Form ändern. Dies bedeutet, dass sich alle Punkte des Querschnitts in der y-z-Ebene um einen Punkt S drehen, sie können also lediglich eine Verschiebung

$$\mathrm{d}u_\varphi \;=\; r\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{13.45}$$

erfahren, die einer Kreisbewegung um S entspricht, also senkrecht auf den Radius r steht. Diese Situation ist in Bild 13.17 links skizziert.

Die Verschiebung eines Punktes $\mathrm{d}u_\varphi$ lässt sich dann wie in Bild 13.17 rechts in zwei Anteile aufspalten. Dabei ist $\mathrm{d}u_s$ der Anteil in Richtung der Profil-Koordinate s, der für die Verformung der Flächenelemente eine Rolle spielt, $\mathrm{d}u_\perp$ ist senkrecht zur Tangente an den Querschnitt. Aus der Ähnlichkeit der grau hinterlegten Dreiecke erhält man den Zusammenhang

$$\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}u_\varphi} \;=\; \frac{r_\perp}{r} \tag{13.46}$$

und zusammen mit Gleichung 13.45

$$\mathrm{d}u_s \;=\; \frac{r_\perp}{r}\,r\,\mathrm{d}\varphi \;=\; r_\perp\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{13.47}$$

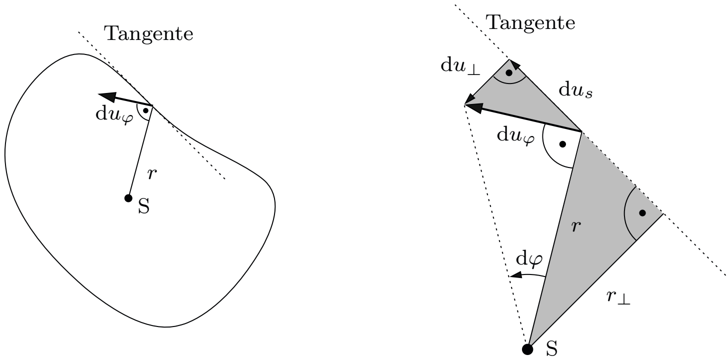

Bild 13.17 Kinematik der Torsion eines dünnwandigen geschlossenen Querschnitts

Setzt man diese Beziehung in Gleichung 13.44 ein, so erhält man zusammen mit dem HOOKEschen Gesetz für die Gleitung (Gleichung 10.7)

$$\oint_U \frac{\tau}{G}\,\mathrm{d}s \;=\; \oint_U r_\perp \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}s \;=\; \vartheta \oint_U r_\perp\,\mathrm{d}s\,, \tag{13.48}$$

wobei das Integral der doppelten Querschnittsfläche entspricht, also

$$\oint_U \frac{\tau}{G}\,\mathrm{d}s \;=\; \vartheta\, 2A_\mathrm{m}\,. \tag{13.49}$$

Damit ist die Drillung

$$\begin{aligned} \vartheta \;&=\; \frac{1}{G\,2A_\mathrm{m}} \oint_U \tau\,\mathrm{d}s \;=\; \frac{1}{G\,2A_\mathrm{m}} \oint_U \frac{t}{h(s)}\,\mathrm{d}s \\ &=\; \frac{t}{G\,2A_\mathrm{m}} \oint_U \frac{1}{h(s)}\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned} \tag{13.50}$$

Unter Verwendung der 1. BREDTschen Formel (Gleichung 13.40) erhält man schliesslich die *2. Bredtsche Formel*

$$\vartheta \;=\; \frac{M_\mathrm{T}}{G\,4A_\mathrm{m}^2} \oint_U \frac{1}{h(s)}\,\mathrm{d}s \;=\; \frac{M_\mathrm{T}}{GI_\mathrm{T}}\,, \tag{13.51}$$

die einen Zusammenhang zwischen der Drillung und dem Torsionsmoment liefert. Dabei ist mit

$$I_\mathrm{T} \;=\; \frac{4A_\mathrm{m}^2}{\displaystyle\oint_U \frac{1}{h(s)}\,\mathrm{d}s}\,. \tag{13.52}$$