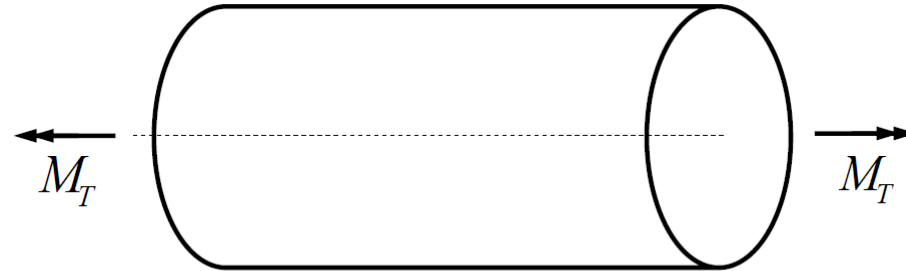


---

# Torsion

## Einfach erklärt

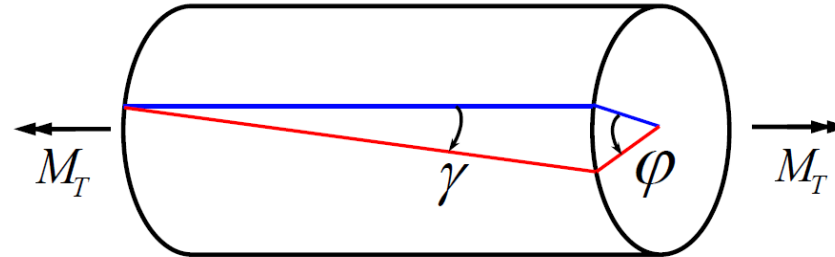


- Bei Torsion **verdreht** sich ein Körper infolge eines von außen anliegenden **Torsionsmoments**
- Dieses Torsionsmoment  $M_T$  verursacht Schubspannungen  $\tau$  im Querschnitt

## Einfach erklärt

- Falls sich die **Querschnitte** in Richtung Stabachse aus ihrer Ebene „**bewegen**“ können, so kommt es zur „**Verwölbung**“
- Diese Verwölbung nennt sich auch „**Saint-Venant'sche Torsion**“
- Man nennt **verwölbungsbehinderte** Torsion auch „**Wölbkrafttorsion**“
- $M_T$  ist **positiv**, wenn  $M_T$  am **positiven Schnittufer** als **Rechtsschraube** um die Stabachse dreht (auch „**Rechte-Hand-Regel**“)

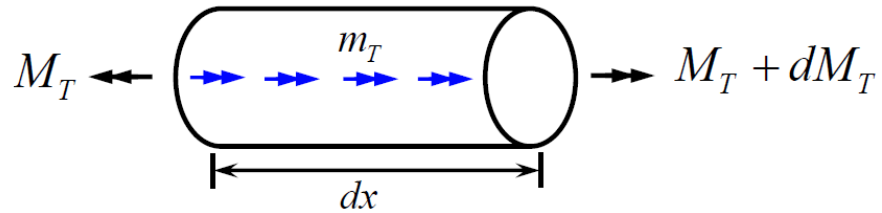
## Torsion von Kreisquerschnitten



- Weitere wichtige Größe bei der Torsion ist die sog. „**Verdrillung**“, anschaulich als „**Verschiebewinkel pro Flächeneinheit**“
- Querschnitte bleiben eben, d. h. keine Verschiebungen in  $x$ -Richtung (also keine Verwölbung)
- Querschnitte bleiben formtreu, d. h. sie verformen sich bei Torsion nicht und verdrehen sich nur um einen Winkel  $\varphi(x)$ .
- Die Gleitung  $\gamma$  ist auf der gesamten Zylinderoberfläche gleich

## Torsion von Kreisquerschnitten

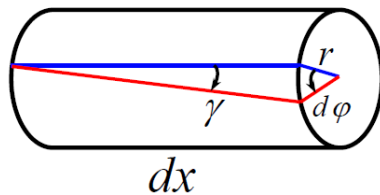
### 1. Gleichgewicht



$$dM_T + m_T \cdot dx = 0$$

$$\frac{dM_T}{dx} = -m_T$$

### 2. Kinematik



$$r \cdot d\varphi = \gamma \cdot dx$$

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dx} \cdot r = \theta \cdot r$$

### 3. HOOKE'sches Gesetz:

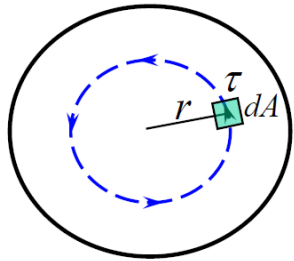
$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r \varphi'$$

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \varphi'$$

Drillung, Verwindung

## Torsion von Kreisquerschnitten

### 4. Äquivalenz von Schubspannung und Torsionsmoment



$$M_T = \int_A \tau \cdot r dA$$

### 5. Aufstellen der Differentialgleichungen

$$M_T = \int_A \tau \cdot r dA = G\varphi' \int_A r^2 dA = GI_T \varphi'$$



$$M_T = GI_T \varphi'$$

$$M_T' = (GI_T \varphi')' = -m_T$$



$$(GI_T \varphi')' = -m_T$$

$I_T = I_P$ : Torsionsträgheitsmoment

$GI_T$ : Torsionssteifigkeit

$m_T$ : Streckenlast / Moment pro LE

## Torsion von Kreisquerschnitten

- Differentialgleichung für Drillung:

$$(GI_T \theta)' = -m_T$$

Sonderfall:  $GI_T = \text{const.}$

$$GI_T \varphi'' = -m_T$$

$$GI_T \theta' = -m_T$$

Falls  $M_T = \text{const.}$ , dann erhält man für die **Endverdrehung** bzw. den **Verdrehwinkel**  $\varphi_l$ :

$$\varphi_l = \frac{M_T \cdot l}{GI_T}$$

## Torsion von Kreisquerschnitten

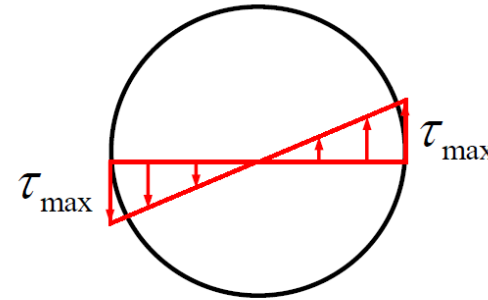
### 6. Schubspannung

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r \varphi'$$

$$M_T = G I_T \varphi'$$



$$\tau = \frac{M_T}{I_T} \cdot r$$



$\tau_{\max}$  tritt am Rand  $r = R$  auf:

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_T} \cdot R = \frac{M_T}{I_T / R} = \frac{M_T}{W_T}$$



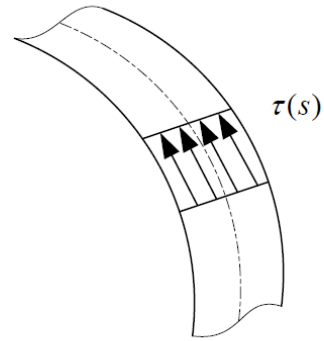
$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T}$$

$$W_T = \frac{I_T}{R} : \text{ Widerstandsmoment gegen Torsion}$$

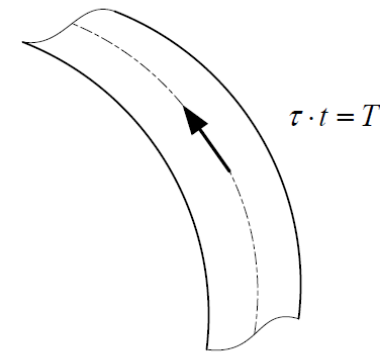


## Torsion von Kreisquerschnitten

Schubspannung



Schubfluss



Schubfluss:  $T = \tau(s) \cdot t(s) = \text{const.}$

Torsionsmoment:  $M_T = \int \tau(s) \cdot t(s) \cdot r_{\perp} ds = T \oint r_{\perp} ds = T \cdot 2A_m \rightarrow T = \frac{M_T}{2A_m}$

$$\left( dA_m = \frac{1}{2} r_{\perp} ds \rightarrow A_m = \frac{1}{2} \oint r_{\perp} ds \right)$$

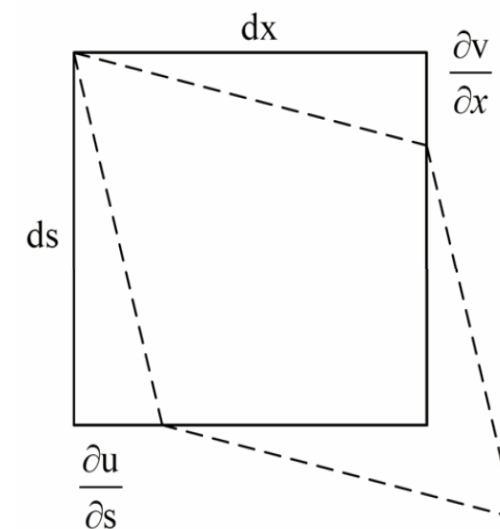
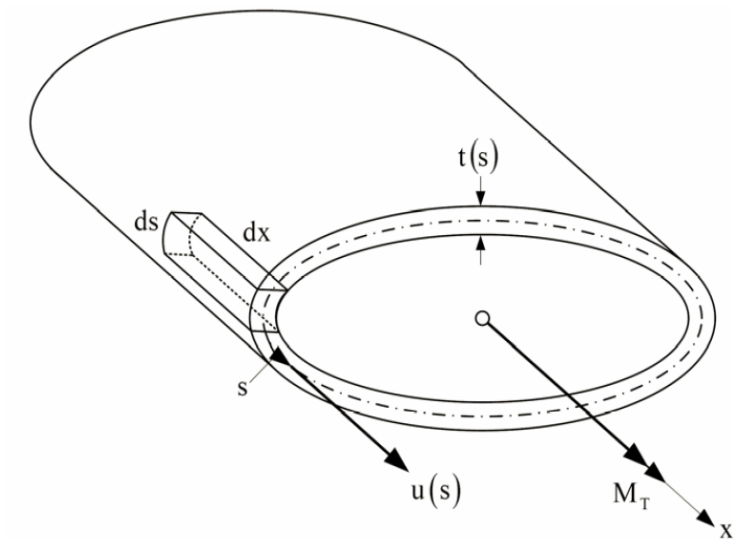
Schubspannung :

$$\tau = \frac{T}{t} = \frac{M_T}{2A_m t}$$

**Erste Bredtsche Formel**

## Torsion von Kreisquerschnitten

- Drillung:

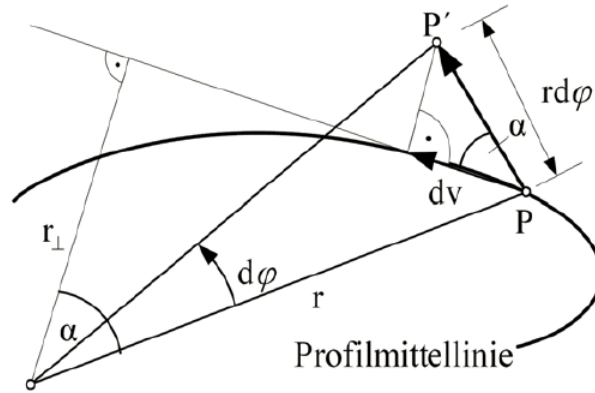


$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}$$



$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}$$

## Torsion von Kreisquerschnitten



$$dv = r \cdot d\varphi \cdot \cos\alpha = r \cdot \cos\alpha \cdot d\varphi = r_{\perp} \cdot d\varphi$$

$$\longrightarrow \frac{dv}{dx} = r_{\perp} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = r_{\perp} \cdot \varphi'$$

$$\frac{\tau}{G} = r_{\perp} \cdot \varphi' + \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\oint \frac{\tau}{G} ds = \varphi' \cdot \oint r_{\perp} ds + \oint \frac{\partial u}{\partial s} ds$$

Keine Klaffung:  $\oint \frac{\partial u}{\partial s} ds = \int_{s_A}^{s_E} \frac{\partial u}{\partial s} ds = u_E - u_A = 0$

$$\longrightarrow \oint \frac{\tau}{G} ds = \varphi' \cdot \oint r_{\perp} ds = \varphi' \cdot 2A_m$$

$$\varphi' = \frac{\oint \frac{\tau}{G} ds}{2 \cdot A_m} = \frac{\oint \frac{T}{G \cdot t} ds}{2 \cdot A_m} = \frac{\oint \frac{M_T}{G \cdot t \cdot 2 \cdot A_m} ds}{2 \cdot A_m} = \frac{M_T}{G \left[ (2 \cdot A_m)^2 / \oint (1/t) ds \right]}$$

## Torsion von Kreisquerschnitten

$$\theta = \varphi' = \frac{M_T}{GI_T}$$

Zweite Bredtsche Formel

Mit: 
$$I_T = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{1}{t} ds}$$

Sonderfall:  $t(s) = \text{const.}$

$$I_T = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{1}{t} ds} = \frac{(2A_m)^2 \cdot t}{\oint ds} = \frac{(2A_m)^2 \cdot t}{U}$$



$$I_T = \frac{(2A_m)^2 \cdot t}{U}$$

$U = \oint ds$       Profilumfang

## Verwölbung

### Verformungen unter Torsion:

- Keine Verformungen in der  $y$ - $z$ -Ebene (formtreu)
- Verschiebungen  $u$  in  $x$ -Richtung (Stabachse) möglich, die nicht über den Querschnitt konstant sind
- Dieser Effekt wird als **Verwölbung** des Querschnitts bezeichnet

## Verwölbung

Bestimmung der Verwölbung  $u(s)$ :

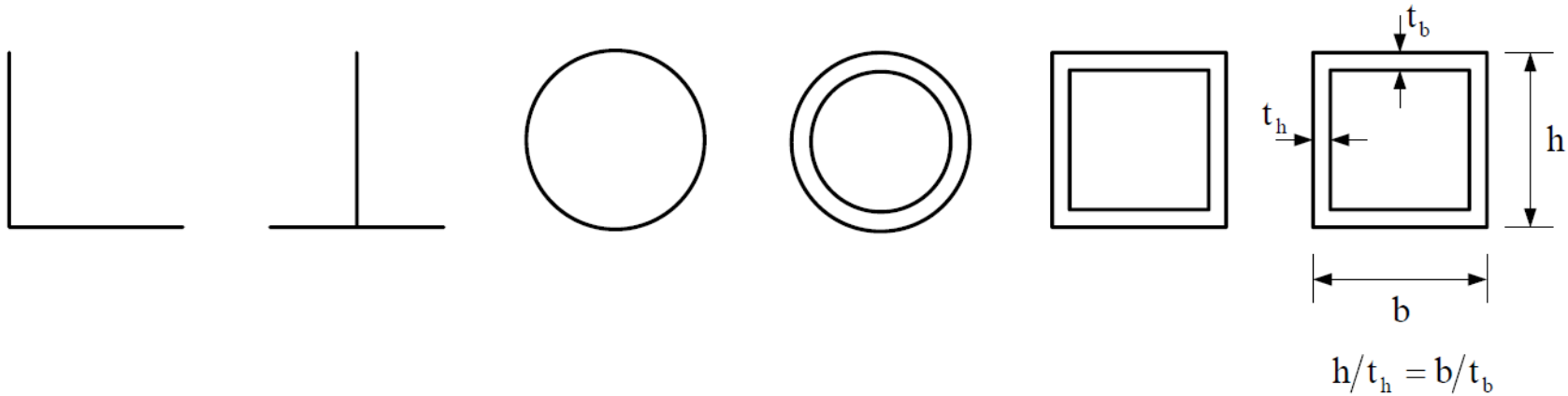
$$\left. \begin{aligned} \tau &= G\gamma = G \left( \mathbf{r}_\perp \cdot \varphi' + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \\ \tau &= \frac{T}{t} = \frac{M_T}{2A_m t} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{aligned} \frac{M_T}{2A_m t \cdot G} &= \mathbf{r}_\perp \cdot \varphi' + \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{M_T}{2A_m t \cdot G} - \mathbf{r}_\perp \cdot \varphi' \end{aligned}$$

$$\longrightarrow u(s) = \int \frac{\partial u}{\partial s} ds = \frac{M_T}{2A_m G} \int \frac{1}{t(s)} ds - \varphi' \int \mathbf{r}_\perp ds + C$$

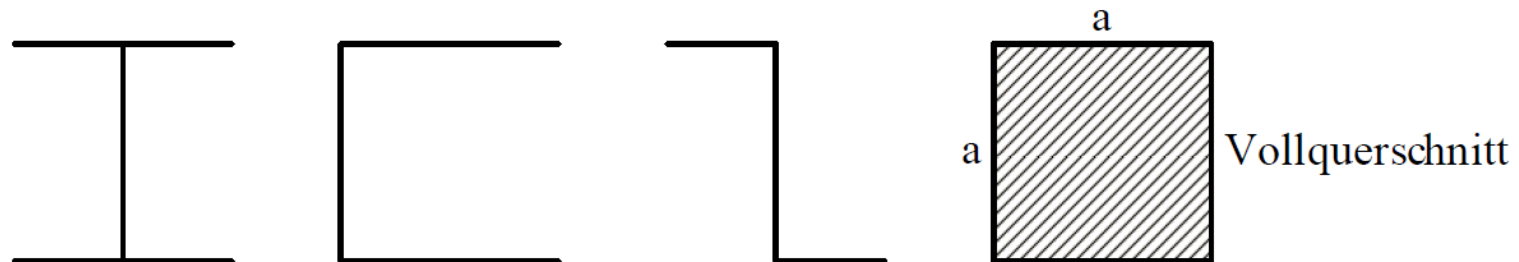
$C$  = Integrationskonstante

## Verwölbung

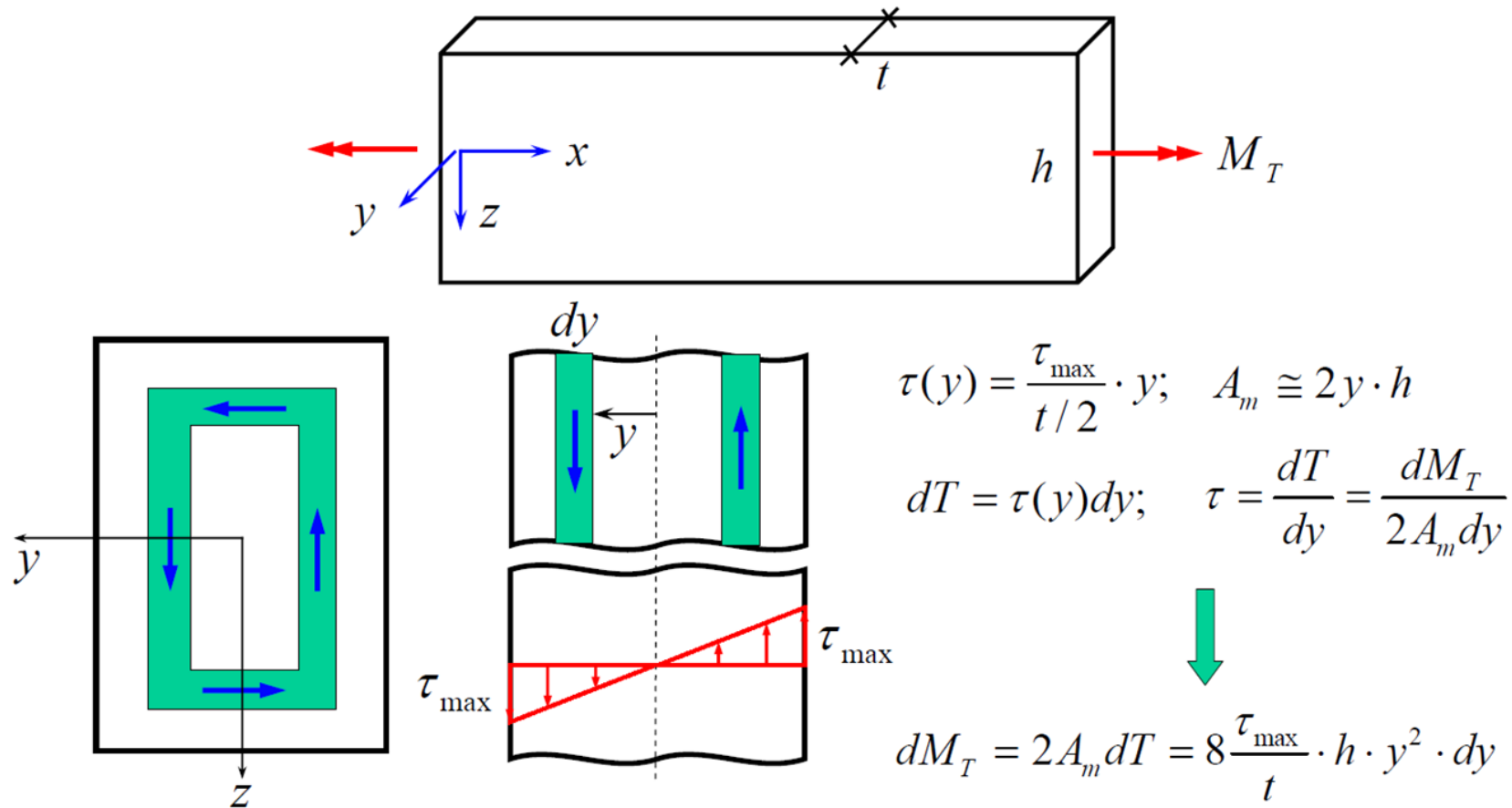
Wölbfreie Querschnitte :



Nicht wölbfreie Querschnitte :



## Torsion dünnwandiger offener Profile





## Torsion dünnwandiger offener Profile

$$\longrightarrow M_T = \int_0^{t/2} dM_T = \frac{1}{3} \tau_{\max} h t^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{\frac{1}{3} h t^2} = \frac{M_T}{W_T}$$

$$W_T = \frac{1}{3} h t^2$$

Torsionsträgheitsmoment :

$$dI_T = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{1}{dy} ds} = \frac{(2A_m)^2}{\oint ds} dy = \frac{(2 \cdot 2yh)^2}{2h} dy = 8hy^2 dy$$

$$I_T = \int_0^{t/2} dI_T = \int_0^{t/2} 8hy^2 dy = \frac{1}{3} h t^3$$

## Zusammengesetzte Profile

$$\theta = \varphi' = \theta_i = \frac{M_{T(i)}}{GI_{T(i)}} = \frac{M_T}{GI_T}$$

Drillung für alle Querschnittsteile gleich, da Querschnitte formtreu, also in der  $y$ - $z$ -Ebene ihre Form beibehalten!

$$M_T = \sum M_{T(i)}$$

$$I_T \cong \sum I_{T(i)} = \frac{1}{3} \sum h_i \cdot t_i^3$$

$$W_T = \frac{I_T}{t_{\max}} = \frac{1}{3} \frac{\sum h_i \cdot t_i^3}{t_{\max}}$$

Maximale Schubspannung:

$$\tau_{\max(i)} = \frac{M_{T(i)}}{W_{T(i)}}$$

$$M_{T(i)} = \frac{GI_{T(i)}}{GI_T} \cdot M_T \quad \longrightarrow$$

$$\tau_{\max(i)} = \frac{M_T \cdot I_{T(i)}}{I_T \cdot W_{T(i)}} = \frac{M_T}{I_T} \cdot t_i$$

$$W_T = \frac{I_T}{t_{\max}}$$

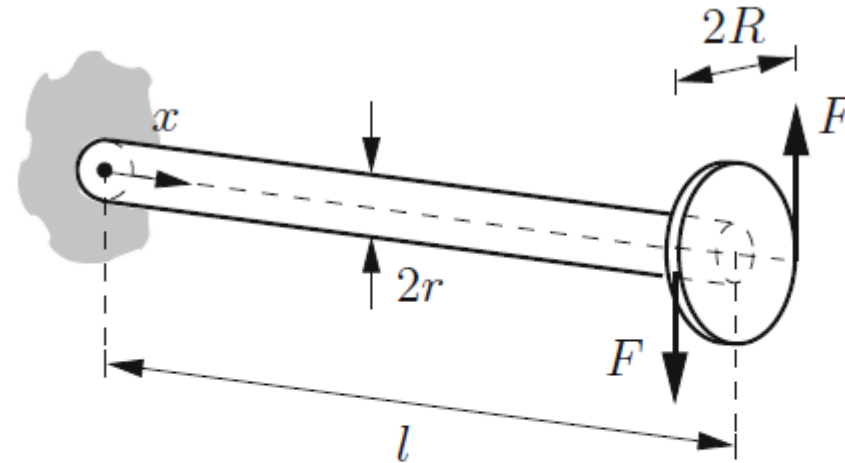
Die maximale Schubspannung im Gesamtquerschnitt tritt also an der Stelle mit dem maximalen  $t_i$  (dickste Stelle) auf!

## Beispielaufgaben:

**A 4.1**     **Aufgabe 4.1**     Ein einseitig eingespannter Stab mit Vollkreisquerschnitt wird durch ein Kräftepaar beansprucht.

Wie groß darf  $F$  höchstens sein, damit die zulässige Schubspannung  $\tau_{zul}$  nicht überschritten wird? Wie groß ist in diesem Fall die Verdrehung des Endquerschnittes?

Geg.:  $R = 200 \text{ mm}$ ,  $r = 20 \text{ mm}$ ,  $l = 5 \text{ m}$ ,  $\tau_{zul} = 150 \text{ MPa}$ ,  
 $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .



\* Gross, Wriggers, Ehlers (2011): *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 2* (10. Aufl.). Berlin, Deutschland: Springer.

**Lösung** Das Torsionsmoment (Schnittmoment)

$$M_T = 2RF$$

ist über die Länge des Stabes konstant. Die maximale Schubspannung im Querschnitt folgt mit

$$W_T = \frac{\pi}{2}r^3$$

zu

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T} = \frac{4RF}{\pi r^3} .$$

Damit die zulässige Spannung nicht überschritten wird, muss gelten

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{zul}} \quad \leadsto \quad F \leq \frac{\pi r^3}{4R} \tau_{\text{zul}} .$$

Daraus erhält man

$$\underline{\underline{F_{\max}}} = \frac{\pi r^3}{4R} \tau_{\text{zul}} = \frac{\pi \cdot 8000 \cdot 150}{4 \cdot 200} = \underline{\underline{4710 \text{ N}}} .$$

Die Verdrehung (im Bogenmaß) bei dieser Belastung ergibt sich mit

$$I_T = \frac{\pi}{2} r^4 \quad \text{und} \quad M_T = 2RF_{\max}$$

zu

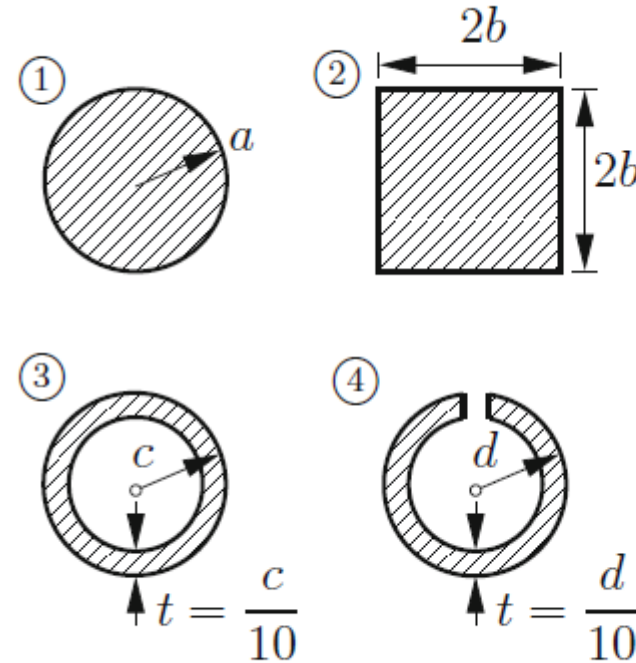
$$\underline{\underline{\Delta\vartheta}} = \frac{M_T l}{GI_T} = \frac{\tau_{\text{zul}} l}{Gr} = \frac{150 \cdot 5000}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 20} = \underline{\underline{0,47}} .$$

Dies entspricht einem Winkel von  $27^\circ$ .

**Aufgabe 4.2** Für einen Stab, der das Torsionsmoment  $M_T = 12 \cdot 10^3 \text{ Nm}$  aufnehmen soll, stehen vier verschiedene Querschnitte zur Auswahl.

Wie müssen die Querschnitte dimensioniert werden, damit die zulässige Schubspannung  $\tau_{\text{zul}} = 50 \text{ MPa}$  nicht überschritten wird? Welcher Querschnitt ist vom Materialaufwand am günstigsten?

A4.2



Mit den Torsionswiderstandsmomenten

$$W_{T_1} = \frac{\pi}{2} a^3, \quad W_{T_2} = 0,208 \cdot 8 b^3 = 1,664 b^3,$$

$$W_{T_3} = 2\pi c^2 t = \frac{\pi}{5} c^3, \quad W_{T_4} = \frac{2\pi}{3} d t^2 = \frac{\pi}{150} d^3$$



erhält man durch Einsetzen

$$\underline{\underline{a}} = \sqrt[3]{\frac{2M_T}{\pi \tau_{zul}}} = \underline{\underline{53,5 \text{ mm}}}, \quad \underline{\underline{b}} = \sqrt[3]{\frac{M_T}{1,664 \tau_{zul}}} = \underline{\underline{52,4 \text{ mm}}},$$
$$\underline{\underline{c}} = \sqrt[3]{\frac{5 M_T}{\pi \tau_{zul}}} = \underline{\underline{72,6 \text{ mm}}}, \quad \underline{\underline{d}} = \sqrt[3]{\frac{150 M_T}{\pi \tau_{zul}}} = \underline{\underline{225,5 \text{ mm}}}.$$

Daraus ergibt sich für die Querschnittsflächen

$$A_1 = \pi a^2 = 89,8 \text{ cm}^2, \quad A_2 = 4b^2 = 110,0 \text{ cm}^2,$$

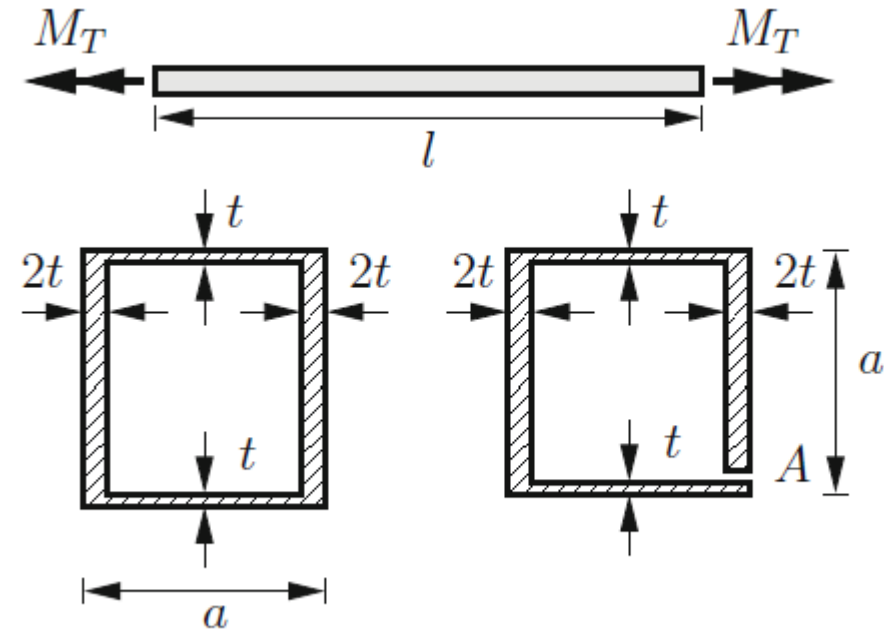
$$\underline{\underline{A_3}} = \frac{\pi}{5} c^2 = \underline{\underline{33,1 \text{ cm}^2}}, \quad A_4 = \frac{\pi}{5} a^2 = 319,4 \text{ cm}^2.$$

Der dritte Querschnitt, (d. h. das dünnwandige, *geschlossene* Profil) ist demnach vom Materialaufwand her am günstigsten.

### A4.3

**Aufgabe 4.3** Wie groß sind das zulässige Torsionsmoment und die zulässige Verdrehung im Fall des geschlossenen bzw. des bei  $A$  geschlitzten Profils?

Geg.:  $a = 20 \text{ cm}$ ,  $t = 2 \text{ mm}$ ,  
 $\tau_{\text{zul}} = 40 \text{ MPa}$ ,  
 $l = 5 \text{ m}$ ,  
 $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .



**Lösung** Das zulässige Torsionsmoment und die zulässige Verdrehung errechnen sich in beiden Fällen aus

$$M_{T_{\text{zul}}} = \tau_{\text{zul}} W_T, \quad \Delta\vartheta_{\text{zul}} = \frac{M_{T_{\text{zul}}} l}{GI_T} = \frac{\tau_{\text{zul}} W_T l}{GI_T}.$$

Im Fall des *geschlossenen* Profils gilt wegen  $t \ll a$

$$A_T = a^2, \quad \oint \frac{ds}{t(s)} = 2 \left( \frac{a}{2t} + \frac{a}{t} \right) = 3 \frac{a}{t},$$

$$I_T = \frac{4A_T^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} = \frac{4}{3} ta^3, \quad W_T = 2A_T t_{\text{min}} = 2a^2 t$$

und es folgen

$$\underline{\underline{M_{T_{zul}}}} = \tau_{zul} 2a^2 t = \underline{\underline{6400 \text{ Nm}}},$$

$$\underline{\underline{\Delta\vartheta_{zul}}} = \frac{3\tau_{zul} l}{2Ga} = \underline{\underline{0,0188}} \quad (\hat{=} 1,07^\circ).$$

Ist das Profil *offen* (bei A geschlitzt), so ergeben sich mit

$$I_T = \frac{1}{3} \sum_i t_i^3 h_i = 6t^3 a, \quad W_T = \frac{I_T}{t_{\max}} = 3t^2 a$$

Torsionsmoment und Verdrehung zu

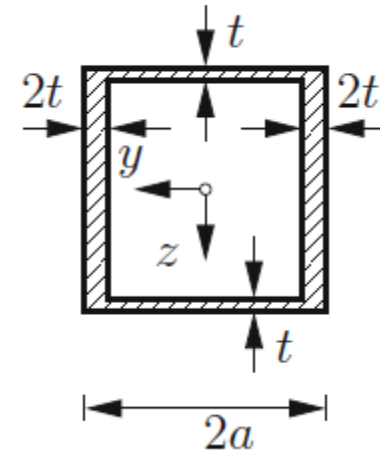
$$\underline{\underline{M_{T_{\text{zul}}}}} = \tau_{\text{zul}} 3t^2 a = \underline{\underline{96 \text{ Nm}}}, \quad \underline{\underline{\Delta\vartheta_{\text{zul}}}} = \frac{\tau_{\text{zul}} l}{2Gt} = \underline{\underline{0,625}} \quad (\hat{=} 35,8^\circ).$$

*Anmerkung:* Das geschlossene Profil ist wesentlich torsionssteifer als das offene Profil.

**A4.5**

**Aufgabe 4.5** Der dünnwandige, quadratische Kastenträger wird durch das Torsionsmoment  $M_T$  belastet.

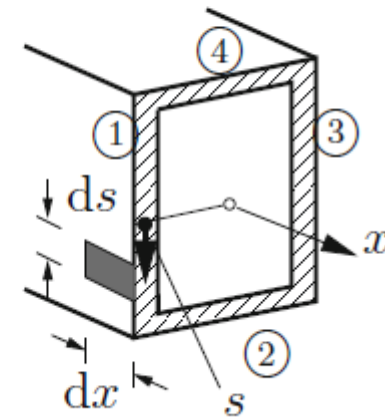
Es ist die Verwölbung des Querschnitts zu bestimmen.



**Lösung** Die Verwölbung  $u(s)$  (Verschiebung in Balkenlängsrichtung) wird aus der Winkelverzerrung

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

der Wandelemente ermittelt.





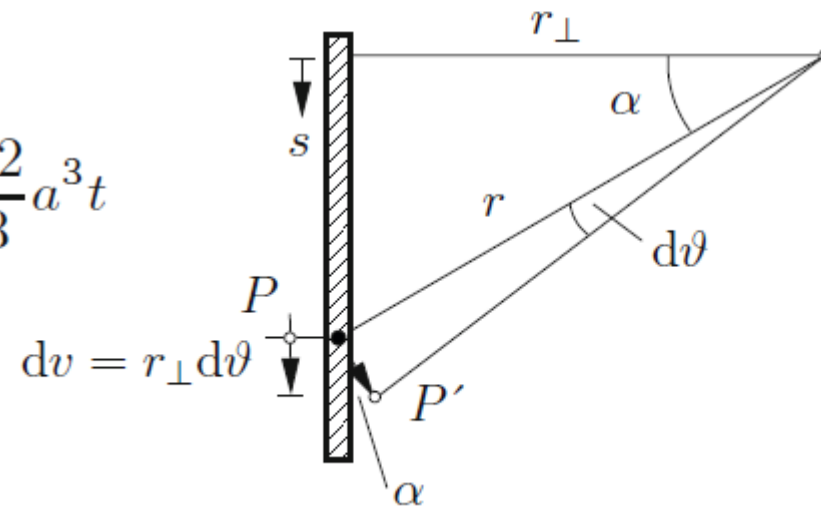
Mit

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{M_T}{G 2 A_T t(s)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = r_{\perp} \frac{d\vartheta}{dx} = r_{\perp}(s) \frac{M_T}{G I_T},$$

$$A_T = 4a^2, \quad I_T = \frac{4 \cdot 16a^4}{\frac{4a}{t} + \frac{4a}{2t}} = \frac{32}{3} a^3 t$$

ergibt sich daraus



$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{M_T}{8Ga^2t} \left[ \frac{t}{t(s)} - \frac{3r_{\perp}(s)}{4a} \right].$$

Integration liefert im Bereich ① ( $t(s) = 2t$ ,  $r = a$ ) mit  $u(s=0) = 0$   
(dann ist  $u$  im Mittel Null!)

$$\underline{\underline{u_1(s)}} = \frac{M_T}{8Ga^2t} \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right] s = \underline{\underline{-\frac{M_T}{32Ga^2t} s}}.$$

Integration liefert im Bereich ① ( $t(s) = 2t, r = a$ ) mit  $u(s=0) = 0$   
(dann ist  $u$  im Mittel Null!)

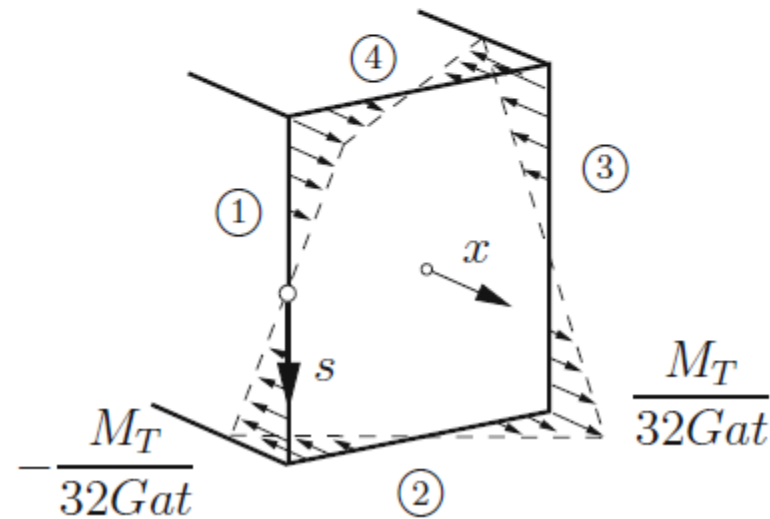
$$\underline{\underline{u_1(s) = \frac{M_T}{8Ga^2t} \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right] s = -\frac{M_T}{32Ga^2t} s .}}$$

Analog folgt in den Bereichen ② , ③ , ④

$$\underline{\underline{u_2(s) = \frac{M_T}{32Ga^2t} [s - 2a] ,}}$$

$$\underline{\underline{u_3(s) = -\frac{M_T}{32Ga^2t} [s - 4a] ,}}$$

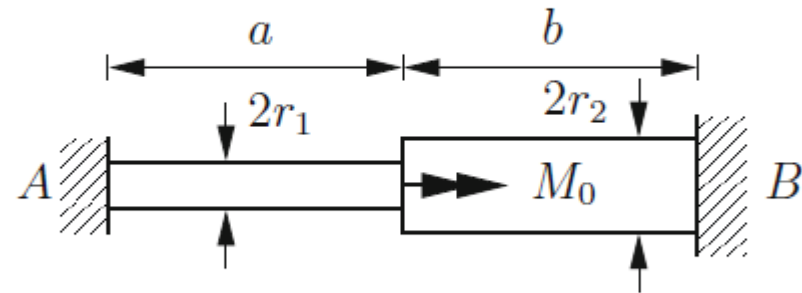
$$\underline{\underline{u_4(s) = \frac{M_T}{32Ga^2t} [s - 6a] .}}$$



**A4.9**

**Aufgabe 4.9** Eine homogene, abgestufte Welle mit Kreisquerschnitt ist an den Enden fest eingespannt und wird durch das Moment  $M_0$  belastet.

Wie groß sind die Einspannmomente und die Winkelverdrehung an der Angriffsstelle von  $M_0$ ?

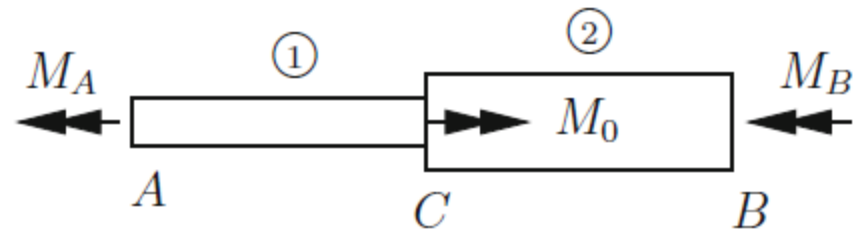


**Lösung** Das Problem ist statisch unbestimmt, da die Einspannmomente  $M_A$  und  $M_B$  aus der Gleichgewichtsbedingung

$$M_A + M_B = M_0$$

allein nicht bestimmbar sind. Wird die Welle bei  $C$  geschnitten, so erzeugen die in den Bereichen ① und ② konstanten Torsionsmomente an der Stelle  $C$  die Verdrehungen

$$\vartheta_1 = \frac{M_A a}{GI_{p1}}, \quad \vartheta_2 = \frac{M_B b}{GI_{p2}}.$$



Die geometrische Verträglichkeit verlangt, dass beide Verdrehungen gleich sind:

$$\vartheta_C = \vartheta_1 = \vartheta_2 .$$

Einsetzen liefert mit

$$I_{p1} = \frac{\pi}{2} r_1^4, \quad I_{p2} = \frac{\pi}{2} r_2^4$$

die Ergebnisse

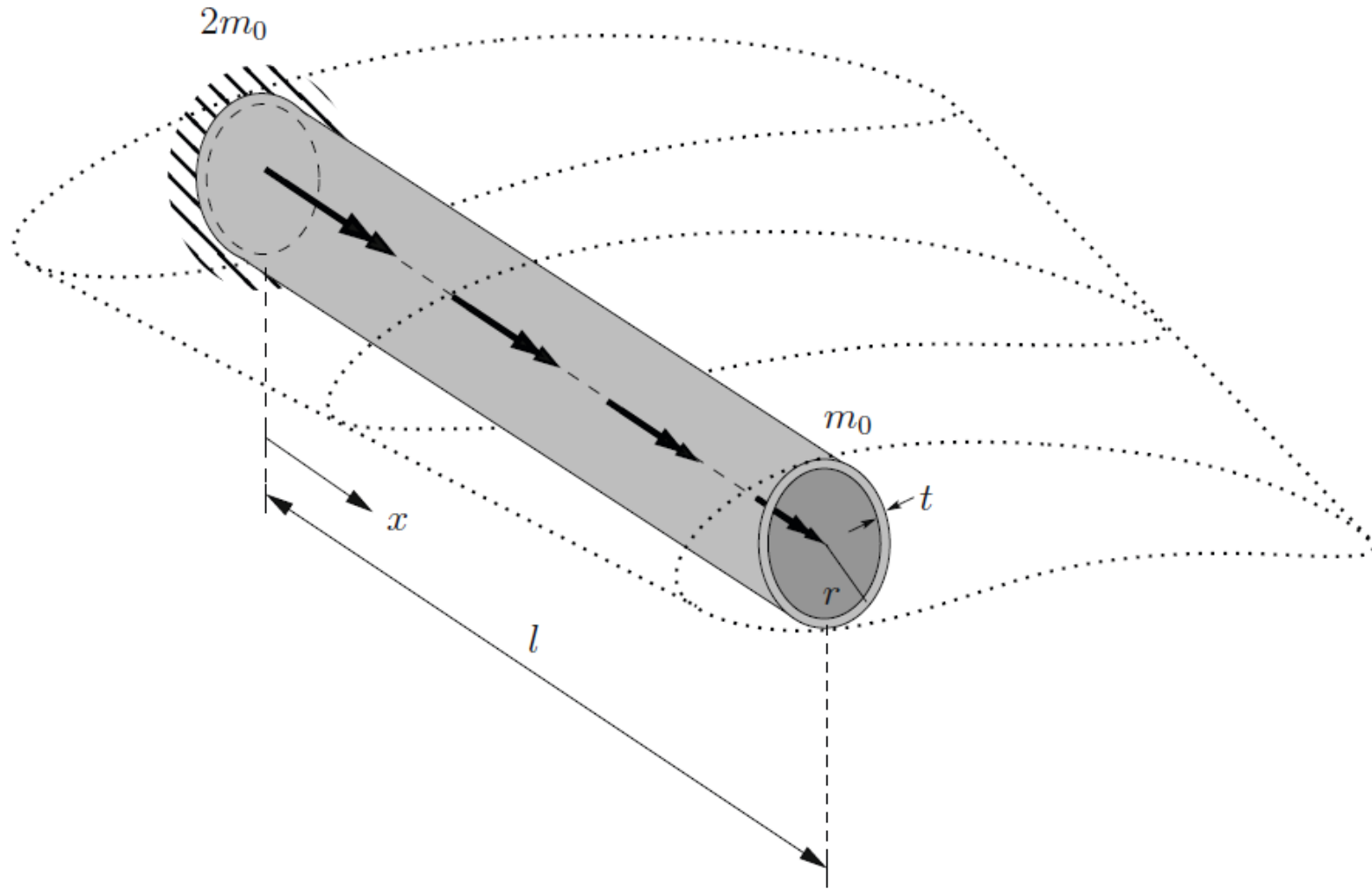
$$\underline{\underline{M_A = M_0 \frac{1}{1 + \frac{r_2^4 a}{r_1^4 b}}}}, \quad \underline{\underline{M_B = M_0 \frac{1}{1 + \frac{r_1^4 b}{r_2^4 a}}}},$$

$$\underline{\underline{\vartheta_C = \frac{2M_0 ab}{\pi G (br_1^4 + ar_2^4)}}}.$$

**A4.13**     **Aufgabe 4.13** Der dünnwandige Holm mit Kreisringquerschnitt (Länge  $l$ , Schubmodul  $G$ , Radius  $r$ , Dicke  $t \ll r$ ) im Inneren einer Flugzeugtragfläche wird durch ein linear veränderliches Torsionsmoment pro Längeneinheit  $m_T(x)$  mit  $m_T(0) = 2m_0$  und  $m_T(l) = m_0$  belastet. Am Rumpf ist der Holm fest eingespannt.



A4.13



- A4.13** Man ermittle
- das Torsionsmoment  $M_T(x)$  im Holm,
  - den Verlauf der Schubspannung  $\tau(x)$  und die maximale Schubspannung  $\tau_{\max}$  infolge Torsion,
  - den Drehwinkel  $\vartheta_l$ , um den sich das Ende des Flügels bei  $x = l$  gegenüber dem Rumpf verdreht.

**Lösung** zu a) Das verteilte Torsionsmoment ist durch

$$m_T(x) = \left(2 - \frac{x}{l}\right) m_0$$

gegeben. Das Torsionsmoment ergibt sich durch Integration

$$M_T(x) = - \int m_T(x) dx + C_1 = \left(\frac{x^2}{2l} - 2x\right) m_0 + C_1$$

mit der Randbedingung

$$M_T(l) = 0$$

$$\leadsto \left( \frac{l}{2} - 2l \right) m_0 + C_1 = 0 \quad \leadsto \quad C_1 = \frac{3}{2} m_0 l$$

zu

$$\underline{\underline{M_T(x) = \left( \frac{x^2}{2l^2} - 2\frac{x}{l} + \frac{3}{2} \right) m_0 l .}}$$

zu b) Für den dünnwandigen Holmquerschnitt berechnet sich die Schubspannung mit dem Torsionsträgheitsmoment  $I_T = 2\pi r^3 t$  zu

$$\underline{\underline{\tau(x) = \frac{M_T}{I_T} r = \frac{m_0 l}{2\pi r^2 t} \left( \frac{x^2}{2l^2} - 2\frac{x}{l} + \frac{3}{2} \right)}} .$$

Die maximale Schubspannung tritt an der Stelle  $x = 0$  auf und beträgt

$$\underline{\underline{\tau_{\max} = \frac{3}{4} \frac{m_0 l}{\pi r^2 t}}} .$$

zu c) Mit dem Torsionsträgheitsmoment  $I_T$  und dem Schubmodul  $G$  folgt für die Verwindung

$$\vartheta'(x) = \frac{M_T(x)}{GI_T} = \frac{m_0 l}{2G\pi r^3 t} \left( \frac{x^2}{2l^2} - 2\frac{x}{l} + \frac{3}{2} \right)$$

und für die Verdrehung

$$\vartheta(x) = \frac{m_0 l}{2G\pi r^3 t} \left( \frac{x^3}{6l^2} - \frac{x^2}{l} + \frac{3}{2}x \right) + C_2 .$$

Die Integrationskonstante folgt aus der Randbedingung  $\vartheta(0) = 0$  zu  $C_2 = 0$ . Damit ergibt sich für die Verdrehung  $\vartheta_l$  am Tragflügelende ( $x = l$ )

$$\vartheta_l = \vartheta(l) = \frac{m_0 l^2}{2G\pi r^3 t} \left( \frac{1}{6} - 1 + \frac{3}{2} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\vartheta_l = \frac{m_0 l^2}{3G\pi r^3 t} .}}$$