13 Aufgaben mit Lösungsweg

Wie? Das war es schon? Ja genau, das war es. Hiermit ist diese Einführung in die Grundlagen der Thermodynamik zu Ende[161]. Wir haben 12 Kapitel lang versucht, diese Grundlagen anschaulich darzustellen, vermutlich mal mit mehr und mal mit weniger großem Erfolg.

An einigen Stellen wurden Dinge ausgelassen, die in anderen Büchern über Thermo wie selbstverständlich ihre Erwähnung finden. Gemische zum Beispiel wurden nur in Form des idealen Gasgemisches und der idealen Lösung behandelt. Das geschah, genauso wie das Weglassen von langen Herleitungen, in voller Absicht, um den Stoff übersichtlich zu halten und auf das zu beschränken, was *uns* für die Grundlagen-Vorlesung der Thermodynamik wichtig erscheint, nicht um diese Gebiete in ihrer wissenschaftlichen Wichtigkeit herabzuwürdigen. Also wirklich, nein, auf gar keinen Fall.....

Wer *noch mehr* wissen will, der kann sich mit dem Wissen und dem Verständnis aus diesem Buch getrost an die im Literaturverzeichnis angegebenen Werke herantrauen und dort fehlende Themen und Herleitungen nachlesen. Dieses Buch ist eine Brücke zur Thermodynamik. Das Land, das jenseits der Brücke liegt, kann man mit seiner Hilfe trockenen Fußes erreichen. Expeditionen in das Landesinnere aber erfordern, es wundert kaum, ein wenig Beschäftigung mit dem dahinter liegenden Gerüst aus Modellen und Mathematik. Dieses Land ist stellenweise unwegsam, trotzdem kann es sich für den Einen oder die Andere lohnen, sich auch dort weiter umzusehen[162].

Alle anderen sollten mit den Tipps in diesem Buch in der Lage sein, sich auf eine anstehende Thermo-Prüfung vorzubereiten. Was dazu extrem nützlich ist, das sind die **Übungsaufgaben** in diesen Kapitel. Leider gilt auch für die Zusammenhänge der Thermodynamik, dass man deren praktische Anwendung am besten durch Schmerzen lernt. Gemeint ist natürlich, dass man sich an den Übungsaufgaben die Zähne ausbeißen soll, weil viel mehr hängen bleibt, wenn man erst vergeblich auf einer Aufgabe rumkaut und man sich *dann* den Lösungsweg ansieht, als wenn man als Erstes nachschaut und dann behauptet „al-

[161] Aber es schadet auch nicht, sich das Buch noch einmal durchzulesen!

[162] Herr Dr. Labuhn wischt sich an dieser Stelle verstohlen eine Träne der Rührung aus den Augen.

D. Labuhn, O. Romberg, *Keine Panik vor Thermodynamik!*,
DOI 10.1007/978-3-8348-2328-1_13, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

les klar, ...kapiert[163], ...hätte ich genauso gemacht“. Beim Bearbeiten der heftigeren Aufgaben kommt es unter Garantie zu Frust, Schweißausbrüchen oder Wutanfällen[164]. Das ist beabsichtigt und steigert den Lerneffekt.

Man sollte sich für die Aufgaben erst mal Zeit nehmen, den Schreibtisch frei räumen, leise Musik (ohne Text!!) anstellen und eventuell ein Gläschen Wein bereit stellen[165]. „Ein romantischer Abend mit der Aufgabe!“ Das sollte die Devise sein! Die Einstellung „Jetzt aber ran, ich will die Arbeit hinter mir haben“ führt auch im späteren Berufsleben zu keiner Befriedigung, sondern nur zur steten Vermehrung des Stressaufkommens.

Die folgenden Aufgaben stammen zum Großteil aus dem Fundus des Instituts für Thermodynamik der Universität Hannover [16], weitere wurden der Aufgabensammlung des Fachbereichs Technische Thermodynamik der TU Darmstadt [23] entlehnt und manche haben wir uns sogar extra für dieses Buch ausgedacht.

Zu jeder Aufgabe ist angegeben, in welchem Kapitel der entsprechende Stoff im Buch erwähnt wird. Bis dahin sollte man das Buch also gelesen und am besten das Wichtigste auch verstanden haben. Außerdem gibt es eine Angabe zum Schwierigkeitsgrad der Aufgaben. Wir unterscheiden hier, ganz thermodynamisch, vier Fälle:

- $S^{\mathrm{irr}} = 0$ bedeutet, dass die Bearbeitung der Aufgabe als reversibler Vorgang betrachtet werden darf. Es ist zu erwarten, dass bei dem Versuch, diese vergleichsweise leichten Aufgaben zu lösen, keine bleibenden Schäden entstehen.

- $S^{\mathrm{irr}} > 0$ bedeutet, dass bei der Bearbeitung der Aufgabe durchaus ein wenig Entropie entstehen kann. Die so gekennzeichneten Aufgaben sind schon etwas komplexer und erfordern ein wenig Nachdenken über den Lösungsweg.

[163] Das ist oft ein gefährlicher Trugschluss.

[164] Die Autoren und auch der Verlag möchten gemeinsam darauf hinweisen, dass es sie nicht im Mindesten stört, wenn dieses Buch dabei in kleine Fetzen gerissen wird (und anschließend neu gekauft werden muss).

[165] Zur Belohnung!

- $S^{\text{irr}} >> 0$ bedeutet, dass bei der Bearbeitung der Aufgabe eine Menge Entropie entsteht, zum Beispiel durch heiß werdende Köpfe. Diese Aufgaben erfordern, dass das Wissen aus mehreren Kapiteln dieses Buches kombiniert und angewendet wird.

- $S^{\text{irr}} < 0$ ist das Kennzeichen für Aufgaben, die schlicht und einfach unmöglich sind, entweder weil sie komplett abgehoben sind oder weil sie zumindest einen gewissen Sadismus erkennen lassen. Diese Art von Aufgabe kommt aber nur sehr selten vor (eigentlich gar nicht) und nach der Lektüre dieses Buches hört sie sowieso auf zu existieren

Außerdem muss man als Ingenieur/-in immer bedenken, dass mindestens die Hälfte der Probleme nicht durch die Thermodynamik verursacht wird, sondern dass im Zweifelsfall *immer* die Mathematik (zumindest zum Teil) schuld ist. Wenn der Thermo-Teil der Aufgaben erledig ist, dann ist schon viel erreicht und man braucht sich dann durch Mathe auch nicht mehr aus der Ruhe bringen zu lassen.

Und jetzt viel Spaß mit den Aufgaben!

13.1 Aufgaben zum idealen Gasgesetz

Aufgabe: 1	**Kapitel: 2.1**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$**

Welche Kantenlänge a hat ein Würfel, der bei p = 100 kPa und t = 20 °C exakt 1 mol eines idealen Gases enthält?

Lösung

Diese Aufgabe bettelt geradezu nach der Anwendung des idealen Gasgesetzes in der Fassung

$$\bar{v} = \frac{V}{n} = \frac{\bar{R}T}{p}$$

und mit dem Wert $\bar{R} = 8{,}314\ \mathrm{J/(mol\,K)}$ und der Temperatur $T = t + 273{,}15\mathrm{K} = 293{,}15\ \mathrm{K}$ wird aus dem rechten Teil der Gleichung

$$V = a^3 = n\frac{\bar{R}T}{p} = 1\,\mathrm{mol}\frac{8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)}\,293{,}15\mathrm{K}}{100000\,\mathrm{N/m^2}} = 0{,}02437\mathrm{m}^3$$

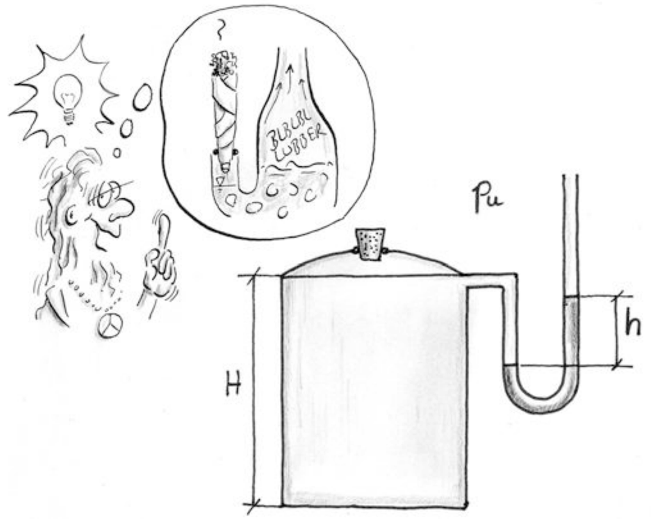
$$\Leftrightarrow \quad a = 0{,}2899\,\mathrm{m} \ .$$

Wichtig ist hier zuerst, dass die richtigen Einheiten verwendet werden. Die Temperatur wird in Kelvin eingesetzt, der Druck in Pascal, usw.

Zweitens, sollte man sich merken, dass man in schriftlichen Prüfungen die Formeln für die Oberflächen und Volumen der wichtigsten geometrischen Körper (Kugel, Würfel, etc.) parat haben sollte. Gerade für die Kugel hat es sich aus eigener Erfahrung sehr bewährt, diese Gleichungen irgendwo notiert zu haben.

Aufgabe: 2	**Kapitel: 2.1**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$**

Ein Behälter mit der Höhe H = 6,5 m enthält Stickstoff. Der Druck wird am oberen Ende des Behälters mit einem U-Rohr-Manometer gemessen. Das U-Rohr ist mit Wasser der Dichte ρ_W = 998,2 kg/m³ gefüllt. Die Höhe der Wassersäule beträgt h = 875 mm. Der Druck der Atmosphäre wird mit p_U = 1020 mbar gemessen. Wie hoch ist der Druck am oberen Ende des Behälters (dort wo das U-Rohr in den Behälter mündet), wenn die Dichte des Stickstoffs zunächst vernachlässigt wird? Wie hoch ist der Druck am Boden des Behälters? Bei konstanter Temperatur und bei nicht zu hohen Drücken ist die Dichte des Stickstoffes dem Druck proportional: $\rho = K \cdot p$ mit $K = 1{,}15 \cdot 10^{-5}$ s²/m².



Lösung

Das Kräftegleichgewicht an der Wassersäule liefert

$$p_{\text{oben}} A = p_{\text{U}} A + \rho_{\text{W}} g h A \ .$$

Rauskürzen der Fläche des U-Rohrs A und alles einsetzen ergibt

$$p_{\text{oben}} = p_{\text{U}} + \rho_{\text{W}} g h = 1020 \cdot 100\,\text{Pa} + 998{,}2\ \text{kg/m³} \cdot 9{,}81\ \text{m/s²} \cdot 0{,}875\ \text{m}$$
$$= 110568{,}3\,\text{Pa} = 1{,}105683\,\text{bar}.$$

Für den Druck unten im Behälter muss man die für den Stickstoff gegebene thermische Zustandsgleichung bemühen, da dessen Dichte, im Gegensatz zu der von Wasser, nicht konstant ist. Exkurs: In der Gleichung steckt das ideale Gasgesetz in der Form

$$\rho = \frac{1}{v} = \frac{M}{RT} p \ .$$

Man kommt sogar ungefähr auf die Konstante K, wenn man spaßeshalber mal die Molmasse von Stickstoff $M = 28{,}01 \cdot 10^{-3}\,\text{kg/mol}$, die Raumtemperatur $T = 293{,}15\text{K}$ und die universelle Gaskonstante einsetzt:

$$K \approx \frac{M}{RT} = \frac{28{,}01 \cdot 10^{-3}\,\text{kg/mol}}{8{,}314\ \text{J/(mol K)} \cdot 293{,}15\ \text{K}} = 1{,}1492 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \ .$$

Um an den Druck unten im Behälter zu kommen, muss man sich entlang dessen Höhe H von oben bis zum Boden hangeln. Hangeln heißt hier letztlich leider, ein einfaches Integral aufstellen und lösen. Wenn man ein kleines Stück - wir nennen es vorsichtshalber schon mal dH - nach unten geht, dann herrscht an dieser Stelle der Druck von einem ein Stück weiter oben plus einer kleinen Druck*änderung*, die durch die Masse in dem kleinen Stück erzeugt wird:

$$dp = \rho(p) \cdot g \cdot dH = K \cdot p \cdot g \cdot dH \ .$$

Jetzt wird sortiert und dann integriert vom Zustand 1 (oben) zum Zustand 2 (unten):

$$\int_1^2 \frac{1}{p} dp = \int_1^2 Kg \, dH \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{p_{\text{unten}}}{p_{\text{oben}}}\right) = KgH \ .$$

Dieses Integral, bei dem ein Ausdruck (hier p) im Nenner steht und dann am Ende ein Logarithmus raus kommt, ist das einzige Integral, dessen Lösung man für die Thermo-Grundlagen überhaupt braucht. Oft geht es zwar in den Prüfungen auch ganz ohne, besser ist es aber, wenigstens dieses eine Integral parat zu haben. Wenn man das gelöste Integral nach p_{unten} auflöst, dann bekommen wir:

$$p_{\text{unten}} = p_{\text{oben}} \cdot \mathrm{e}^{KgH} = 1{,}105683\,\text{bar} \cdot \mathrm{e}^{(1{,}15 \cdot 10^{-5}\, s^2/m^2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 6{,}5\,\text{m})} = 1{,}106494\,\text{bar} \ .$$

Aufgabe: 3	**Kapitel: 2.1**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

Ein tragisches Unglück passiert auf einem Kindergeburtstag. Einer der kleinen Gäste schafft es, beim Luftballonwettaufpusten durch vorheriges hastiges Trinken einer größeren Menge Cola einen ungewollten Turbo-Effekt zu erzeugen. Neben der in diesem Zusammenhang kurz danach erforderlich gewordenen Reinigung des Mobiliars ist Folgendes dabei zu beobachten gewesen: Vor dem kurzen aber heftigen Rülpser hatte der Ballon ein Volumen V_1 = 1 dm³ und einen Innendruck p_1 = 1,1 bar. Danach war das Volumen um den Faktor 1,5 größer, wobei die Temperatur unverändert blieb.

Durch die anwesenden Eltern (zum Teil ganz offensichtlich Ingenieurinnen und Ingenieure) wurde durch Anwendung wissenschaftlicher Methoden der Zusammenhang $p(V) = V/V_1 \cdot K$ zwischen dem Volumen und dem Druck im Inneren des Luftballons ermittelt. Frage: Um wie viel Prozent hat die Gasmasse im Ballon zugenommen?

Lösung

Als Erstes kann die Ballon-Zustandsgleichung dadurch verbessert werden, dass man die unbekannte Konstante K bestimmt. Für den Zustand 1 sind alle dazu erforderlichen Größen bekannt:

$$p_1 = \frac{V_1}{V_1} K \quad \Leftrightarrow \quad K = p_1 = 1{,}1\,\text{bar} \ .$$

Jetzt kommen die idealen Gasgleichungen im Zustand 1 und 2. Dabei nicht vergessen, dass T sich nicht ändert:

$$RT = \frac{p_1 V_1}{m_1} \qquad \text{und} \qquad RT = \frac{p_2 V_2}{m_2} \; .$$

Das kann man jetzt gleichsetzen und dann umstellen:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} \; .$$

Berechnen von $V_2 = 1{,}5 \cdot V_1 = 1{,}5\,\text{dm}^3$ und $p_2 = V_2 / V_1 \cdot 1{,}1\text{ bar} = 1{,}65\text{ bar}$ ergibt

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1{,}65\text{bar} \cdot 1{,}5\,\text{dm}^3}{1{,}1\text{bar} \cdot 1\,\text{dm}^3} = 2{,}25 \; ,$$

wenn man alles einsetzt. Ergo: Die Gasmasse hat um 125 % zugenommen. Das ist einfache Prozentrechnung, war irgendwann zwischen der 7. und 9. Klasse[166] dran. Übrigens: Wer mehr zum Thema „Gummi und Thermodynamik" wissen will, kann bei [19] noch viel mehr finden.

Aufgabe: 4	**Kapitel: 2.1**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

Einer der Autoren hat eine weitere „After-Five-Invention"[167] gemacht. (Er erhofft sich neben Ruhm und Ehre eine nachhaltige Verbesserung seiner angeschlagenen finanziellen Situation.) Er stellt sie als den „pneumatischen Einweg-Fahrstuhl" vor, dem wir uns jetzt mit den Mitteln der Thermodynamik nähern wollen. Dieses Wunderwerk der Ingenieurskunst besteht aus einer schwereren Stahlplatte mit der Masse $m^* = 300$ kg und der Querschnittsfläche $A = 2{,}25$ m² und ruht meistens im Erdgeschoss auf den in der Skizze eingezeichneten Auflagern.

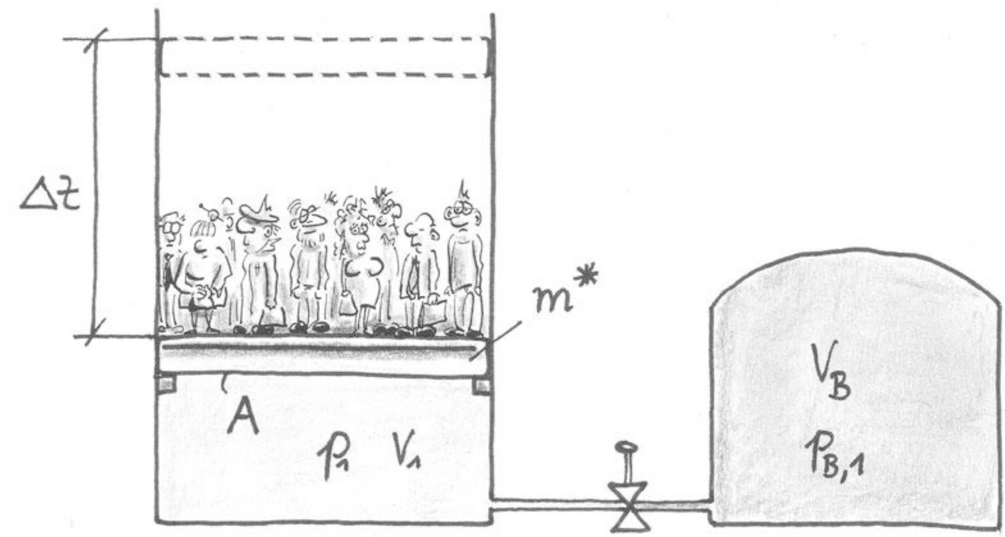
Der unter der Stahlplatte im Ruhezustand befindliche zylindrische Raum (Volumen $V_1 = 0{,}230$ m³) ist mit Luft bei Umgebungsdruck $p_1 = p_U = 1{,}0$ bar gefüllt. Die Stahlplatte ist reibungsfrei beweglich und soll pneumatisch um $\Delta z = 2{,}50$ m dadurch gehoben werden, dass der Raum unter ihr mit einem Druckluftbehälter (Volumen $V_B = 1$ m³) verbunden wird, aus dem Druckluft mit dem Anfangsdruck $p_{B,1}$ nach dem Öffnen des Ventils langsam überströmt. Das Volumen der Verbindungsleitung ist zu vernachlässigen. Die Luft soll als ideales Gas behandelt werden.

---

166 Bremen: 12. Klasse oder auch gar nicht.

167 Was das ist, steht im Mechanik-Buch aus dieser Reihe [21].

a) Welcher Druck p_2 herrscht in dem Luftraum unter der Stahlplatte, wenn diese auf der Höhe $z_2 = z_1 + \Delta z$ zum Stillstand kommt und Personen mit einem Gewicht von insgesamt 600 kg mitgenommen wurden?
b) Wie groß muss dazu der Anfangsdruck $p_{B,1}$ im Druckbehälter sein, damit die Platte um Δz gehoben wird und in dieser Position bei geöffnetem Ventil stehen bleibt? Die Zustandsänderung der Luft wird als isotherm angenommen.



Lösung

Bei Teil a) hilft eine einfache Kräftebilanz für die Stahlplatte. Von oben wirkt in Richtung der Schwerkraft die Masse der Leute und der Stahlplatte und außerdem der Umgebungsdruck (nicht vergessen!). Von unten drückt der Druck im Volumen. Als Gleichung:

$$p_U A + g\left(m_{\text{Leute}} + m^*\right) = p_2 A$$

$$\Leftrightarrow p_2 = p_U + \frac{g\left(m_{\text{Leute}} + m^*\right)}{A} = 10^5\ \text{N/m}^2 + \frac{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 900\,\text{kg}}{2{,}25\,\text{m}^2} = 1{,}03924\,\text{bar}\ .$$

Bei Teil b) muss man sich das gesamte System ansehen. Was sich bei der Fahrt des Fahrstuhls nicht ändert, ist die Gesamtmasse der Luft im System, nur deren Verteilung auf das Behältervolumen und das Volumen unter der Stahlplatte ändert sich durch das Öffnen des Ventils. Vor dem Öffnen gelten die beiden Gleichungen

$$m_1 = \frac{p_1 V_1}{RT} \qquad \text{und} \qquad m_{\mathrm{B},1} = \frac{p_{\mathrm{B},1} V_\mathrm{B}}{RT} \quad .$$

Nachher gilt

$$m_1 + m_{\mathrm{B},1} = \frac{p_2 \left(V_\mathrm{B} + V_1 + \Delta V \right)}{RT} \quad .$$

Das kann man jetzt zusammenfassen, RT rauswerfen und ΔV durch $\Delta z \cdot A$ ersetzen:

$$p_1 V_1 + p_{\mathrm{B},1} V_\mathrm{B} = p_2 \left(V_\mathrm{B} + V_1 + \Delta z \cdot A \right)$$

$$\Leftrightarrow p_{\mathrm{B},1} = \frac{p_2 \left(V_\mathrm{B} + V_1 + \Delta z \cdot A \right) - p_1 V_1}{V_\mathrm{B}} = 6{,}89\,\mathrm{bar} \quad .$$

13.2 Aufgaben zum ersten Hauptsatz

Aufgabe: 5	**Kapitel: 4.4**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$**

Ein Wasserbett ist durch die Isolierung seitlich und nach unten, sowie eine vorsorglich aufgelegte Daunendecke so gut gegen seine Umgebung isoliert, dass es als adiabat betrachtet werden kann. Das Wasserbett wird 1 Stunde lang mit der elektrischen Leistung $P_\mathrm{el} = 250$ W beheizt. Anschließend wird 10 Minuten lang mechanische Arbeit am System verrichtet, im zeitlichen Mittel $P_\mathrm{M} = 50$ W. Um welchen Betrag ändert sich die innere Energie des Wasserbettes?

Lösung

Wir haben hier einen instationären Vorgang. Wenn man das Stichwort „adiabat“ nicht vergisst, kann man die Energiebilanz korrekt aufstellen. Dabei kennzeichnet der Index 1 den Ausgangszustand, 2 den Zustand nach dem elektrischen Beheizen und 3 der Zustand nach Verrichtung der mechanischen Arbeit:

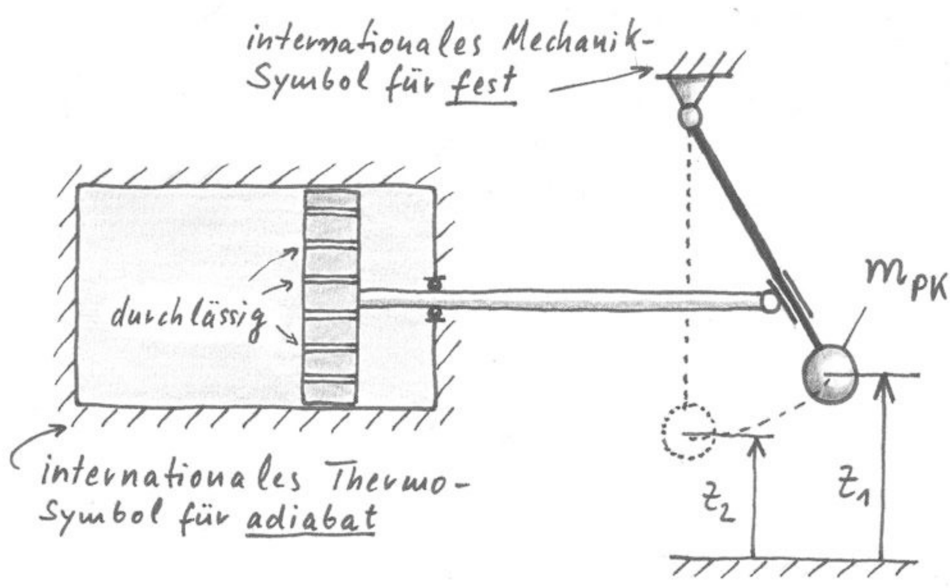
$$U_3 - U_1 = \int_1^2 P_\mathrm{el}\, d\tau + \int_2^3 P_\mathrm{M}\, d\tau \quad .$$

Die Prozessgrößen P_el und P_M sind zeitlich konstant, daher sind die Integrale eher trivial. Einsetzen der bekannten Größen ergibt:

$$U_3 - U_1 = 250\,\mathrm{W} \cdot 3600\,\mathrm{s} + 50\,\mathrm{W} \cdot 600\,\mathrm{s} = 930000\,\mathrm{J} = 930\,\mathrm{kJ} \quad .$$

Die innere Energie des Wasserbettes nimmt um 930 kJ zu.

Aufgabe: 6	Kapitel: 4.4	Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$



Ein Pendel, das über eine Stange mit einem perforierten Kolben verbunden ist, wird in der Höhe z_1 los gelassen (siehe Skizze). Der Kolben bewegt sich in einem mit Gas gefülltem Zylinder mit wärmeisolierter Wand, bis er zur Ruhe kommt. Die innere Energie von Pendel, Kolben und Stange bleibt dabei konstant. Die Masse des Gewichtes m_{PK} ist die einzige zu beachtende bewegte Masse. Frage: Um welchen Betrag hat sich die innere Energie U des Gases geändert, wenn das Pendel im tiefsten Punkt seiner Bahn in der Höhe z_2 zur Ruhe gekommen ist?

Lösung

Wenn man in der Thermo-Klausur schon nach einer halben Stunde alle anderen Aufgaben gelöst hat und man beginnt sich ganz übel zu langweilen, dann kann man zur Lösung von Aufgaben wie dieser auch versuchen, jeden einzelnen Ausschlag des Pendels zu betrachten, um dann aufzusummieren. Alle Anderen können (und sollten) es sich einfacher machen, denn Thermo ist eine vorher-nachher Wissenschaft. Soll heißen: Es reicht in vielen Fällen aus, sich ein System zu Beginn und am Ende eines Prozesses anzusehen. Der Weg, den das System in der Zwischenzeit nimmt, ist nicht interessant.

Das zur Lösung notwendige Schlüsselwort „wärmeisoliert“ steht im Aufgabentext. Das Gas im Zylinder ändert seine innere Energie nur durch die Arbeit, die an ihm verrichtet wird. Und die Tatsache, dass „die innere Energie des Pendels konstant bleibt“ bedeutet, dass die durch den Kolben verrichtete Arbeit W zu 100% an das Gas geht und nicht etwa den Kolben erwärmt.

Achtung: Die Vorzeichenregelung ist am Anfang extrem wichtig, also gut aufpassen! Die Arbeit W hat im 1. Hauptsatz für das System „Pendel plus Kolben“ ein negatives Vorzeichen, denn sie geht vom System „Pendel plus Kolben“ hin zum System „Gas“. Das sagt der 1. Hauptsatz für das System „Pendel plus Kolben“ auch ganz formell:

$$E_{\mathrm{PK},2} - E_{\mathrm{PK},1} =$$

$$U_{\mathrm{PK},2} - U_{\mathrm{PK},1} + m_{\mathrm{PK}} g (z_{\mathrm{PK},2} - z_{\mathrm{PK},1}) + \frac{m_{\mathrm{PK}}}{2}\left(c_{\mathrm{PK},2}^2 - c_{\mathrm{PK},1}^2\right) = -W \ .$$

Weil unser System vor und nach dem Pendeln in Ruhe ist, sind die Geschwindigkeiten gleich Null und damit auch die kinetischen Energien. Die fallen gleich wieder raus, genauso wie die Differenz der inneren Energien, die ja laut Aufgabentext „dabei konstant bleibt“. Wenn wir nur das rechte der beiden Gleichheitszeichen betrachten, bekommen wir also:

$$W = m_{\mathrm{PK}} g (z_{\mathrm{PK},1} - z_{\mathrm{PK},2}) \ .$$

In Worten: Die Änderung der Energie des Systems „Pendel plus Kolben“ ist gleich der an das Gas abgegebenen Arbeit. Weil z_1 größer als z_2 ist, ist W größer als Null. Unsere Annahme, dass die Arbeit *vom* Kolben *zum* Gas geht, war also richtig (strike!).

Der 1. Hauptsatz für das adiabat im Kolben eingeschlossene Gas lautet (genauso formell):

$$E_{\mathrm{G},2} - E_{\mathrm{G},1} = U_{\mathrm{G},2} - U_{\mathrm{G},1} + m_{\mathrm{G}} g (z_{\mathrm{G},2} - z_{\mathrm{G},1}) + \frac{m_{\mathrm{G}}}{2}\left(c_{\mathrm{G},2}^2 - c_{\mathrm{G},1}^2\right) = W \ .$$

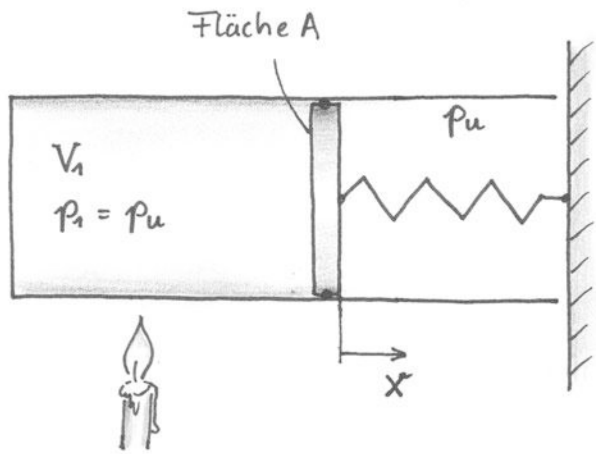
Man beachte bitte zuerst einmal das Vorzeichen von W, das hier positiv ist. Dann kann man anfangen, Dinge raus zu werfen. Da der Kolben waagerecht liegt, ändert sich die Höhe des Massenmittelpunktes des Gases nicht, daher fällt der Ausdruck für die Änderung der potentiellen Energie wieder raus. Genauso ist das Gas, von außen gesehen, vor und nach dem Pendeln in Ruhe. Also fällt auch die andere Klammer mit der Änderung der kinetischen Energie weg. Beim rechten Gleichheitszeichen bleibt

$$U_{\mathrm{G},2} - U_{\mathrm{G},1} = W$$

$$\Leftrightarrow \quad U_{G,2} - U_{G,1} = m_{PK}\, g(z_{PK,1} - z_{PK,2})$$

übrig. Die innere Energie des Gases nimmt genau um den Betrag zu, um den die potentielle Energie des Pendels abnimmt. Die Lösung dieser Aufgabe hätten Thermo-Profis auch direkt hinschreiben können. Dazu braucht man nur ein wenig Übung mit den Vorzeichen der einzelnen Ausdrücke. Nur damit Ihr die bekommen könnt, wurde hier der lange Weg gegangen.

Aufgabe: 7	**Kapitel: 4.4**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**



Ein Zylinder (Querschnittsfläche A), dessen Kolben durch eine Feder gehalten wird, ist mit Luft gefüllt. In der Umgebung herrscht der Druck $p_U = p_1$. Das Volumen der Luft im Zylinder ist V_1. Die Feder ist in dieser Position gerade entspannt. Der Luft wird nun so lange Wärme zugeführt, bis sich das Volumen verdoppelt hat ($V_2 = 2 \cdot V_1$). Für die Federkraft gilt nach dem Hookeschen Gesetz die Beziehung $F_F = K_F \cdot x$ mit der Federkonstanten K_F. Der Prozess verläuft reversibel.

a) Welche Arbeit $W_{V,12}$ wurde insgesamt von der Luft an den Kolben übertragen?
b) Welcher Teil dieser Arbeit ist als Energie in der Feder gespeichert?
c) Stelle die Zustandsänderung im p,V-Diagramm dar und kennzeichne die Energien von a) und b).

Lösung

Zu a): Im Ausgangszustand haben wir das Volumen V_1, wenn sich der Kolben am Ort $x_1 = 0$ befindet. Am Ende ist das Volumen doppelt so groß ($V_2 = 2 \cdot V_1$) und der Kolben hat sich bis zum Punkt $x_2 = (V_2 - V_1)/A = V_1/A$ bewegt.

Die Volumenänderungsarbeit ist per Definition minus Kraft mal Weg. Und zwar ist hier der Weg x gemeint, den der Kolben zurück legt. Die Kraft ist die Summe aus der Druckkraft der Umgebung und der Federkraft:

$$F = p_\mathrm{U} A + F_\mathrm{F} = p_\mathrm{U} A + K_\mathrm{F} x \ .$$

Damit wird die Volumenänderungsarbeit ein Integral, denn die Kraft hängt wegen der Feder vom Weg ab:

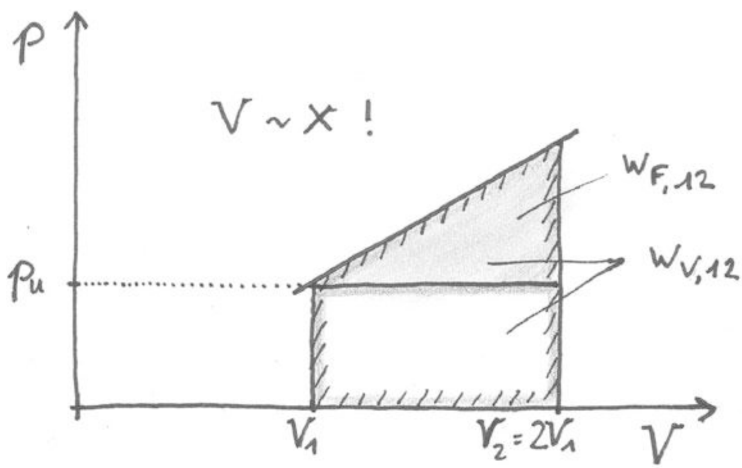
$$W_{\mathrm{V},12} = -\int_{x_1}^{x_2} F \, dx = -\int_{x_1}^{x_2} p_\mathrm{U} A + K_\mathrm{F} x \, dx = -\left[p_U A x + \frac{K_\mathrm{F}}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=V_1/A}$$

$$= -\left(p_\mathrm{U} V_1 + \frac{K_\mathrm{F}}{2 \cdot A^2} V_1^2 \right).$$

Zu b): In der Feder steckt jetzt die Energie, die sich ebenfalls aus dem Integral Kraft mal Weg berechnet, jetzt aber mit umgekehrtem Vorzeichen, denn was der Kolben an Arbeit abgibt, das nimmt die Feder (zumindest zum Teil) auf:

$$W_{\mathrm{F},12} = \int_{x_1}^{x_2} F_\mathrm{F} \, dx = \int_{x_1}^{x_2} K_\mathrm{F} \, x \, dx = \left[\frac{K_\mathrm{F}}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=V_1/A} = \frac{K_\mathrm{F}}{2A^2} V_1^2 \ .$$

Das p,V-Diagramm für c) ist leicht zu zeichnen. Man muss nur wissen, dass der Druck im Zylinder wegen des Hookeschen Gesetzes für die Feder linear mit x und damit linear mit V zunimmt. Außerdem ist der Druck im Zustand 1 gleich Umgebungsdruck, da die Feder hier entlastet ist.



Aufgabe: 8	Kapitel: 4.5	Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$

Eine Turbine zum Antrieb eines elektrischen Generators ist 1500 m unterhalb eines Bergsees aufgestellt. Aus dem Bergsee werden pro Stunde 20 t Wasser (Dichte ρ = 1000 kg/m³) durch ein Rohr mit der Querschnittsfläche A = 0,05 m² zugeführt. Nach dem Durchströmen der Turbine verlässt das Wasser diese mit einer Geschwindigkeit von 0,1 m/s. Wärmeverluste der Turbine können ebenso vernachlässigt werden, wie die Änderung der Temperatur des Wassers. Welche Leistung gibt die Turbine im stationären Betrieb ab?

Lösung

Der Massenstrom des Wassers ist

$$\dot{m} = \frac{20\ \text{t}}{1\ \text{h}} = \frac{20 \cdot 1000\,\text{kg}}{3600\,\text{s}} = 5{,}555\,\text{kg/s}$$

und dessen Geschwindigkeit im Rohr beträgt

$$c_{\text{rein}} = \frac{\dot{m}}{\rho A_{\text{Rohr}}} = \frac{5{,}555\,\text{kg/s}}{1000\,\text{kg/m}^3 \cdot 0{,}05\text{m}^2} = 0{,}111\,\text{m/s}\ .$$

Der erste Hauptsatz für die stationär und adiabat arbeitende Turbine lautet unter Berücksichtigung kinetischer und potentieller Energien und wenn man erst mal annimmt, dass die Leistung von der Turbine aufgenommen wird:

$$0 = P + \dot{m}\left[\left(h_{\text{rein}} + gz_{\text{rein}} + \frac{c_{\text{rein}}^{\;2}}{2}\right) - \left(h_{\text{raus}} + gz_{\text{raus}} + \frac{c_{\text{raus}}^{\;2}}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P = \dot{m}\left[h_{\text{raus}} - h_{\text{rein}} + g\left(z_{\text{raus}} - z_{\text{rein}}\right) + \frac{1}{2}\left(c_{\text{raus}}^{\;2} - c_{\text{rein}}^{\;2}\right)\right]\ .$$

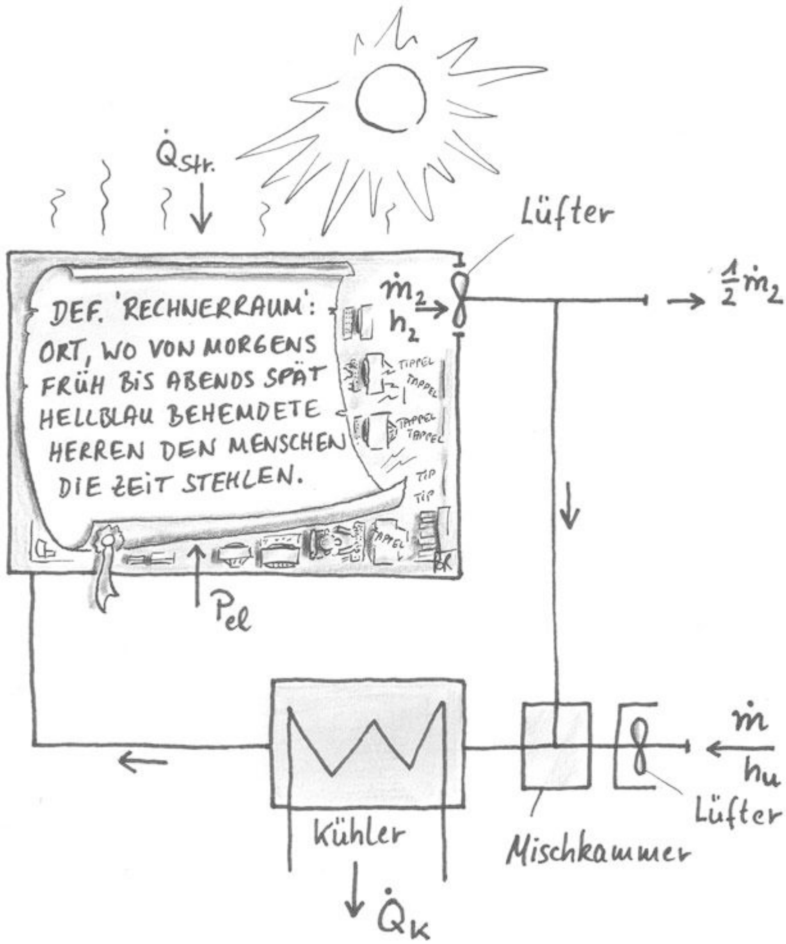
Der Bilanzraum umfasst hier die Wasseroberfläche des Bergsees und geht bis zum Austrittsquerschnitt der Turbine. Die Enthalpiedifferenz $h_{\text{raus}} - h_{\text{rein}}$ ist gleich Null, denn der Druck ist in beiden Fällen der Umgebungsdruck und die Temperatur bleibt laut Aufgabenstellung ebenfalls unverändert. Dann haben wir:

$$P = 5{,}555\,\text{kg/s} \cdot \left[9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \left(0\,\text{m} - 1500\,\text{m}\right) + \frac{1}{2}\left([0{,}1\,\text{m/s}]^2 - [0{,}111\,\text{m/s}]^2\right)\right]$$

$$= -81{,}74\,\text{kW}\ .$$

Es ist zu erkennen, erstens dass die Turbine die Leistung abgibt und zweitens, dass die Änderung der kinetische Energie im Vergleich zur Änderung der potentiellen Energie *hier* vernachlässigbar klein ist.

Aufgabe: 9	Kapitel: 4.5	Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$



Das Bild zeigt ein vereinfachtes Schema einer Klimaanlage für einen Rechnerraum. Zum Betrieb der Rechenanlage wird eine elektrische Leistung von P_{el} = 6 kW benötigt. Durch Sonneneinstrahlung wird der Wärmestrom $\dot{Q}_{Str} = 4$ kW dem Raum zugeführt. Mit Hilfe eines Lüfters wird dem Raum der Luftstrom $\dot{m}_2$ = 2 kg/s (h_2 = 30 kJ/kg) entzogen. Die Hälfte der Luftmenge geht in die Umgebung. Die restliche Luft wird in einer adiabaten Mischkammer mit der Umgebungsluft (spez. Enthalpie h_U = 22 kJ/kg) vermischt und anschließend über einen Kühler dem Rechnerraum zugeführt. Wie groß ist der im Kühler abzuführende Wärmestrom $\dot{Q}_K$ während des stationären Betriebes? Die Lüfterleistungen können vernachlässigt werden.

Lösung

Was kommt meistens als Erstes? Die Energiebilanz natürlich! Die ist hier so aufgeschrieben, dass der abgeführte Wärmestrom des Kühlers auch tatsächlich aus der Anlage raus geht (negatives Vorzeichen):

$$0 = P_{\mathrm{el}} + \dot{Q}_{\mathrm{Str}} + \dot{m}_1 h_{\mathrm{U}} - \frac{\dot{m}_2}{2} h_2 - \dot{Q}_{\mathrm{K}} \ .$$

Was uns in der Gleichung noch fehlt, das sind die beiden Massenströme. Da hilft die Massenbilanz für die Luft. Die an die Umgebung abgegebene Luftmenge ist 1 kg/s, also muss für den stationären Betrieb ein gleich großer Massenstrom wieder aufgenommen werden. Damit haben wir alle Zahlen in der Energiebilanz und können

$$\dot{Q}_{\mathrm{K}} = 6\,\mathrm{kW} + 4\,\mathrm{kW} + 1\,\mathrm{kg/s} \cdot 22\,\mathrm{kJ/kg} - 1\,\mathrm{kg/s} \cdot 30\,\mathrm{kJ/kg} = 2\,\mathrm{kW}$$

schreiben. Das positive Vorzeichen bestätigt unsere Annahme, dass der Wärmestrom vom Kühler abgeführt wird.

Aufgabe: 10 Kapitel: 5.1.3 Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$

Eine unter Freunden des Gerstensaftes sehr beliebte Idee ist die der so genannten „Bierdiät“. Folgender Gedankengang liegt dem Ganzen zu Grunde: Wenn man nicht lauwarmes Bier mit Körpertemperatur t_{K} = 37 °C trinkt (igitt!), sondern es möglichst kalt zu sich nimmt, dann wird ein Teil der mit dem Nährwert zugeführten Energie zum Erwärmen des kühlen Nass auf Körpertemperatur verwendet und kann somit nicht als Energie-Reserve an Hüfte und Bauch gespeichert werden.

Die Wärmekapazität von Bier kann, unabhängig von der Sorte und der Temperatur, mit c_{Bier} = 4,1 kJ/(kgK) angesetzt werden.

a) Macht euch Gedanken über die Umrechnung zwischen den beiden Energieeinheiten „Kalorien“ und „Joule“.
b) Ist es möglich, ein handelsübliches Pilsbier mit dem Nährwert e_{PB} = 423 kcal/kg so weit abzukühlen, dass beim Trinken keine Energie in Fettreserven umgewandelt werden kann?
c) Bei welcher Temperatur muss unter diesen Umständen ein alkoholfreies Bier (igitt!) mit dem Nährwert e_{AA} = 256 kcal/kg getrunken werden?

Lösung

Aufgabe a) ist einfach zu machen: Laut Definition ist eine Kalorie die Wärmemenge, die bei normalen atmosphärischen Druck (1013 hPa) benötigt wird, um 1 *Gramm* Wasser von 14,5 °C auf 15,5 °C zu erwärmen. Also ist zur Erwärmung von 1 *Kilo*gramm Wasser 1 *Kilo*kalorie erforderlich. Die Wärmekapazität von Wasser ist in diesem Zustand c_P = 4,1868 kJ/kg und deswegen ist der Umrechnungsfaktor von Kalorien zu Joule auch genau dieser Zahlenwert. <u>Aber Achtung: Im Alltag wird fast immer von Kalorien (cal) gesprochen, auch wenn eigentlich Kilokalorien (kcal) gemeint sind.</u>

Bei b) reicht eine einfache Energiebilanz. Aus thermodynamischer Sicht interessiert hier nur das, was im System „Körper" an Energie ankommt. Der Wirkungsgrad der menschlichen Verdauung muss hier deswegen nicht betrachtet werden, weil der Nährwert bereits angibt, was unser Körper aus der Nahrung an Energie herausholen kann. Beim Aufstellen der Energiebilanz für unseren Körper muss beachtet werden, dass sich dessen Energieinhalt beim Trinken des Bieres nicht ändern soll. Dann muss die zum Erwärmen des Bieres dem Körper entzogene Energie genauso groß sein, wie die beim Trinken dem Körper zugeführte Energie. Damit lautet die Bilanz:

$$e_{\mathrm{PB}} = \left(t_{\mathrm{K}} - t_{\mathrm{PB}}\right) \cdot c_{\mathrm{Bier}}$$

und die erforderliche Temperatur wird zu

$$t_{\mathrm{PB}} = t_{\mathrm{K}} - \frac{e_{\mathrm{PB}}}{c_{\mathrm{Bier}}} = 37\,°\mathrm{C} - \frac{423\,\mathrm{kcal/kg} \cdot 4{,}1868\,\mathrm{kJ/kcal}}{4{,}1\,\mathrm{kJ/(kgK)}} = -394{,}96\,°\mathrm{C}$$

berechnet. Schade eigentlich, aber da setzt die Thermodynamik dem Genuss ohne Reue eine *ganz* klare Grenze, denn Temperaturen unter dem absoluten Nullpunkt, das geht nun wirklich nicht. Oder andersrum ausgedrückt: Egal was man anstellt, Bier macht dick. Danke, Thermodynamik!

Für das alkoholfreie Bier in Teilaufgabe c) bleibt der Ansatz derselbe, wie eben auch:

$$t_{\mathrm{AA}} = t_{\mathrm{K}} - \frac{e_{\mathrm{AA}}}{c_{\mathrm{Bier}}} = 37\,°\mathrm{C} - \frac{256\,\mathrm{kcal/kg} \cdot 4{,}1868\,\mathrm{kJ/kcal}}{4{,}1\,\mathrm{kJ/(kgK)}} = -224{,}42\,°\mathrm{C}\ .$$

Das geht zwar aus der Sicht der Thermodynamik, ist aber in der Praxis nicht wirklich eine erfreuliche Angelegenheit. Wir sehen also: Alkohol ist keine Lösung und kein Alkohol ist auch keine Lösung.

Aufgabe: 11	Kapitel: 5.1.2	Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$

Luft strömt durch eine adiabate Drosselstelle (also ein gegen die Umgebung gut isoliertes Bauteil, z.B. ein Absperrschieber, ein Ventil oder eine Blende). Durch die Drosselung vermindert sich der Druck der mit T_1 = 300 K anströmenden Luft von p_1 = 1000 kPa auf p_2 = 700 kPa. Die Zuströmgeschwindigkeit beträgt c_1 = 20 m/s. Die Querschnittsflächen des Kanals A_1 und A_2 vor und hinter der Drosselstelle sind gleich groß. Die Luft ist als ideales Gas zu behandeln mit c_V = 0,717 kJ/kgK und R = 0,287 kJ/kgK. Wie hoch sind die Temperatur T_2 und die Strömungsgeschwindigkeit c_2 nach der Drosselung?

Lösung

Zuerst ein Hinweis: Da in der Aufgabenstellung explizit von Geschwindigkeiten die Rede ist, dürfen die kinetischern Energien in der Energiebilanz <u>nicht</u> vernachlässigt werden, auch wenn es sonst meistens so gemacht wird.

Wir haben als Erstes die Massenbilanz $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$. Das ist einfach zu erledigen, denn wir können von einer stationär durchströmten Drosselstelle ausgehen. Die Massenströme können dann durch Volumenströme ersetzt werden, wenn man die spezifischen Volumen kennt. Das führt uns über

$$\frac{\dot{V}_1}{v_1} = \frac{\dot{V}_2}{v_2}$$

mit Hilfe des idealen Gasgesetzes zur Konti-Gleichung:

$$\frac{A_1 c_1 p_1}{RT_1} = \frac{A_2 c_2 p_2}{RT_2} \quad .$$

In dieser *einen* Gleichung stehen mit T_2 und c_2 *zwei* Unbekannte. Zur Lösung brauchen wir daher *noch eine* Gleichung und die finden wir mit der Energiebilanz. Die Totalenthalpien vor und nach der Drosselung sind gleich und daraus folgt

$$h_1^+ = h_2^+$$

$$\Rightarrow \quad h_1 + \frac{c_1^2}{2} = h_2 + \frac{c_2^2}{2} .$$

Jetzt wird umgestellt und die Enthalpiedifferenz (*Enthalpie*, nicht *Total*enthalpie!) wird mit Hilfe der kalorischen Zustandsgleichung für das ideale Gas ausgedrückt:

$$\frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} = c_\text{P}(T_2 - T_1) .$$

Anschließend werden die beiden Gleichungen zusammen gebracht und die isobare Wärmekapazität c_p wird ersetzt:

$$\frac{c_1^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{c_1 p_1 T_2}{p_2 T_1}\right)^2 = (c_\text{V} + R)(T_2 - T_1) .$$

Damit haben wir *eine* Gleichung mit der *einen* Unbekannten T_2. Jetzt kommt *nur* noch pure Mathematik[168], denn wir müssen die quadratische Gleichung noch nach T_2 auflösen. Vorher setzten wir alles ein (das ist durchaus aufwändig und somit fehlerträchtig, also Achtung) und sortieren nach Potenzen von T_2:

$$T_2^2 + 221382\text{K} \cdot T_2 - 66458700\text{K}^2 = 0 .$$

Jetzt kommt wieder elementares Schulwissen, denn wir lösen mit der hoffentlich altbekannten „minus-p-halbe-plusminus-wurzel-aus-p-halbe-zum-quadrat-minus-q“-Formel nach T_2 auf:

$$T_2 = -110691\,\text{K} \pm \sqrt{1225249748\,1\,\text{K}^2 + 66458700\,\text{K}^2}$$

und haben dann, wie es bei einer quadratischen Gleichung ja üblich ist, erst mal zwei mögliche Lösungen

$$T_2 = -221681{,}79\,\text{K} \quad \text{oder}$$
$$T_2 = 299{,}79\,\text{K} .$$

Da die erste Lösung jenseits des absoluten Nullpunktes liegt (was hochgradig verboten ist), kann nur die zweite Lösung physikalisch richtig sein. Der Effekt der Abkühlung ist nur sehr klein, aber doch vorhanden.

Das alles können wir jetzt in die nach c_2 umgestellte Konti-Gleichung einsetzen und wir bekommen dann mit

$$c_2 = \frac{c_1 p_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{20\,\text{m/s} \cdot 1000\,\text{kPa} \cdot 299{,}79\,\text{K}}{700\,\text{kPa} \cdot 300\,\text{K}} = 28{,}55\,\text{m/s}$$

die Geschwindigkeit nach der Drosselstelle.

Achtung, die Abkühlung beruht nicht auf dem Joule-Thomson Effekt, denn dieser gilt für eine isenthalpe Zustandsänderung und tritt außerdem bei idealen Gasen nicht auf. Hier liegt der Grund in der Änderung der Strömungsgeschwindigkeit, die eine Änderung der spezifischen Enthalpie zur Folge hat.

[168] Der gemeine Mathematiker (und vermutlich auch der Nette) würden das noch nicht einmal als Mathematik bezeichnen, sondern allenfalls als Rechnerei.

Aufgabe: 12	Kapitel: 5.1.2	Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$

Frage: „Steigt die Temperatur der Hölle oder sinkt sie mit der Zeit?“

Lösung

Dies ist eine Prüfungsfrage, die angeblich einmal an der Universität von Washington gestellt wurde. Nur für eine Antwort gab es die volle Punktzahl. Hier ist sie: „Zuerst müssen wir feststellen, wie sich die Masse der Hölle über die Zeit ändert. Dazu benötigen wir die Rate der Seelen, die "zur Hölle fahren" und die Rate derjenigen, die sie verlassen. Ich denke, wir sind uns darüber einig, dass eine Seele, einmal in der Hölle, diese nicht wieder verlässt. Wir stellen also fest: Es gibt keine Seelen, welche die Hölle verlassen. Um festzustellen, wie viele Seelen hinzukommen, sehen wir uns doch mal die verschiedenen Religionen auf der Welt heute an. Einige dieser Religionen sagen, dass, wenn man nicht dieser Religion angehört, man in die Hölle kommt. Da es auf der Welt mehr als eine Religion mit dieser Überzeugung gibt und da niemand mehr als einer Religion angehört, kommen wir zu dem Schluss, dass alle Seelen in der Hölle enden. Auf der Basis der weltweiten Geburten- und Sterberaten können wir davon ausgehen, dass die Anzahl der Seelen in der Hölle exponentiell ansteigt.

Nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte muss, bei gleich bleibender Temperatur und gleich bleibendem Druck, das Volumen proportional zur Anzahl der hinzukommenden Seelen ansteigen. Daraus ergeben sich zwei Möglichkeiten:

1. Expandiert die Hölle langsamer, als es die Anzahl der hinzukommenden Seelen erfordert, dann steigen Temperatur und Druck in der Hölle an.
2. Expandiert die Hölle schneller, als es die Anzahl der hinzukommenden Seelen erfordert, dann sinken Temperatur und Druck in der Hölle, bis sie gefriert.

Zur Lösung führt uns der Ausspruch meiner Kommilitonin Teresa während des ersten Semesters, „dass es in der Hölle ein kalter Tag sein wird", bevor sie mit mir schlafen würde. Da ich gestern mit ihr geschlafen habe, kommt nur Möglichkeit Zwei in Frage. Deshalb muss die Hölle bereits zugefroren sein, woraus folgt, dass keine weiteren Seelen dort aufgenommen werden können. Damit bleibt nur noch der Himmel übrig, was die Existenz eines göttlichen Wesens beweist, was wiederum erklärt, warum Teresa gestern Abend die ganze Zeit „Oh mein Gott" geschrien hat."

Aufgabe: 13	**Kapitel:4.3**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} >> 0$**

Für ein reales Gas, das der Zustandsgleichung von Redlich-Kwong[169]

$$\left(p + \frac{a}{T^{0,5} v(v+b)}\right)(v-b) = RT$$

gehorcht, ist die Volumenänderungsarbeit $w_{\mathrm{V},12}$ bei einer isothermen Zustandsänderung in einem geschlossenen System herzuleiten. Hinweis: Die Parameter a und b sind Konstanten.

Lösung

Die Volumenänderungsarbeit wird durch die Gleichung

$$w_{\mathrm{V},12} = -\int_1^2 p\,dv$$

angegeben (siehe Abschnitt 4.3). Man kann mit Hilfe der nach p umgestellten Redlich-Kwong Gleichung

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{T^{0,5} v(v+b)}$$

den Druck p ersetzen und man bekommt das folgende Integral:

$$w_{\mathrm{V},12} = -\int_1^2 \left[\frac{RT}{v-b} - \frac{a}{T^{0,5} v(v+b)}\right] dv = -\int_1^2 \frac{RT}{v-b}\,dv + \int_1^2 \frac{a}{T^{0,5} v(v+b)}\,dv \ .$$

[169] Sorry, Herr van der Waals.

Hier ist wichtig, dass T im vorliegenden Fall eine Konstante ist, denn wir betrachten laut Aufgabenstellung ja eine *isotherme* Zustandsänderung. Deswegen können wir auch

$$w_{\mathrm{V},12} = -RT\int_1^2 \frac{1}{v-b}\,dv + \frac{a}{T^{0,5}}\int_1^2 \frac{1}{v^2+bv}\,dv$$

schreiben. Jetzt ist mathematisches Grundwissen oder aber ein Tabellenbuch mit den Standard-Integralen gefragt. Heikel wie eine Diva, aber sehr umfassend und damit letztlich hilfreich ist der Klassiker, das „Taschenbuch" der Mathematik von Bronstein-Semendjajew [6], das in keinem Haushalt fehlen sollte[170]. Die beiden Terme in der Gleichung kann man getrennt integrieren und erhält dann

$$w_{\mathrm{V},12} = \left(-RT\cdot\ln(v-b) - \frac{a}{T^{0,5}}\cdot\frac{1}{b}\cdot\ln\left[\frac{v}{v+b}\right]\right)\Bigg|_1^2 \quad .$$

Jetzt werden die Integrationsgrenzen eingesetzt und die bekannten Rechenregeln für Logarithmen[171] angewendet und wir haben dann

$$w_{\mathrm{V},12} = -RT\cdot\ln\left(\frac{v_2-b}{v_1-b}\right) - \frac{a}{T^{0,5}}\cdot\frac{1}{b}\cdot\ln\left[\frac{v_2\cdot(v_1+b)}{v_1\cdot(v_2+b)}\right] \quad .$$

Et voilà, schon haben wir ein Ergebnis, in dem sogar das gute alte ideale Gasgesetz zu erkennen ist, wenn man $a = b = 0$ setzt.

13.3 Aufgaben zum Nassdampfgebiet

Aufgabe: 14	**Kapitel: 6.6**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

Pille hat es geschafft, eine ebenso seltene wie seltsame Lebensform zu isolieren. Als Captain Kirk gerade einmal mit Lieutenant Uhura am Shakern war, hat er die Wesen heimlich von einem Planeten in der Nähe hoch gebeamt und sie dann in einen thermisch gut isolierten Behälter (Volumen V = 0,015 m³) mit siedendem Ammoniak gesperrt.

Die Viecher, deren Eigenvolumen und Masse vernachlässigbar klein sind, fühlen sich nur wohl, wenn das spezifische Volumen des Ammoniaks überkri-

[170] Und sei es nur, um den abgebrochenen Fuß einer Kommode provisorisch zu ersetzen oder aus Prestigegründen das Wohnzimmerregal damit zu schmücken.

[171] ln(a) - ln(b) = ln(a/b), usw.

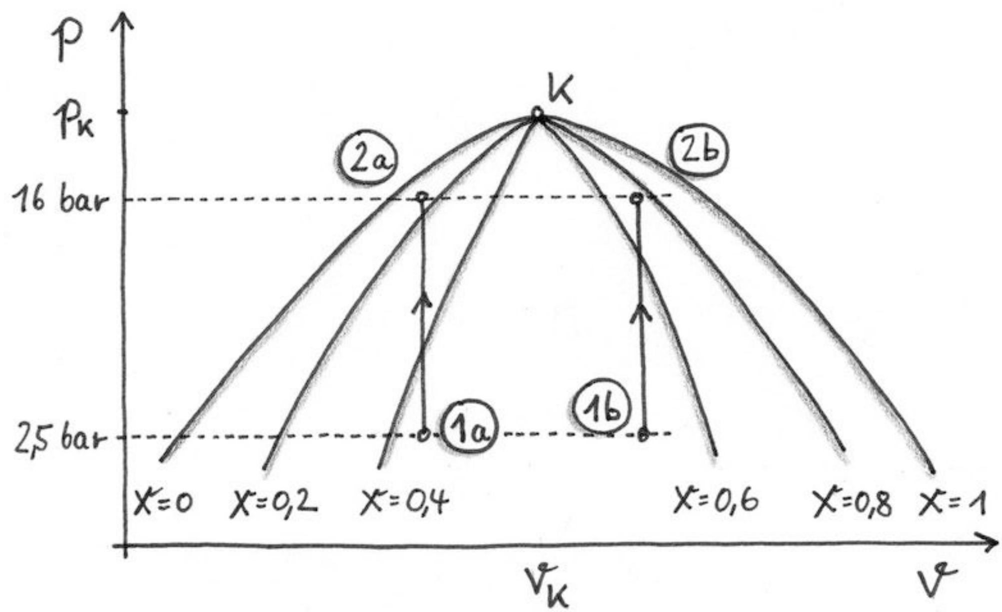
tisch ist. Um herauszufinden, ob das so ist, hat Pille in dem Behälter eine elektrische Heizung mit einer Heizleistung von 1,1 kW und ein Druckmessgerät installiert. Pille misst im Behälter einen Druck p_1 = 2,5 bar und schaltet dann die Heizung für 200 s ein. Nach dem Heizen misst er im Behälter einen Druck p_2 = 16 bar. Dem thermodynamisch ahnungslosen Pille soll bei den Fragen geholfen werden, ob es der Lebensform gut geht und wie groß die Masse *m* des Ammoniaks im Behälter ist.

p	*v'*	*v''*	*u'*	*u''*
bar	dm³/kg	dm³/kg	kJ/kg	kJ/kg
2,5	1,522	482,15	298,8	1486,7
16,0	1,731	80,78	554,8	1522,8

Stoffdaten für Ammoniak

Lösung

Um a) zu beantworten, machen wir erst mal eine Skizze, um uns klar zu werden, was hier eigentlich gemeint ist.



Es gibt zwei Möglichkeiten (1 und 2, jeweils mit dem Ausgangszustand a bei 2,5 bar und dem Endzustand b bei 16 bar). Wenn wir unterkritisch sind, dann sinkt der Dampfgehalt bei der isochoren Zustandsänderung, sonst steigt er. Deswegen muss der Dampfgehalt vor und nach dem Heizen ausgerechnet werden. Für den Dampfgehalt gilt

$$v = (1-x)v' + xv'' \ .$$

Da der Behälter geschlossen ist, bleibt sowohl die Masse des Ammoniaks als auch dessen Volumen während des Prozesses gleich und damit auch dessen spezifisches Volumen, also ist $v_1 = v_2$. Daraus folgt eine Gleichung, die nur x_1 und x_2 als Unbekannte enthält, denn die spezifischen Volumen sind gegeben:

$$(1-x_1)v_1' + x_1 v_1'' = (1-x_2)v_2' + x_2 v_2'' \ .$$

Was fehlt, ist eine zweite Gleichung und die liefert die Energiebilanz:

$$U_2 - U_1 = 220 \text{ kJ} \ .$$

Die linke Seite der letzten Gleichung kann jetzt zu

$$U_2 - U_1 = m(u_2 - u_1) = m\left((1-x_2)u_2' + x_2 u_2'' - \left[(1-x_1)u_1' + x_1 u_1''\right]\right)$$

umgeschrieben werden. Die Masse können wir mit

$$m = \frac{V}{v_1} = \frac{V}{v_2}$$

ersetzen und haben dann unsere gesuchte zweite Gleichung

$$\frac{V}{(1-x_1)v_1' + x_1 v_1''}\left((1-x_2)u_2' + x_2 u_2'' - \left[(1-x_1)u_1' + x_1 u_1''\right]\right) = 220 \,\text{kJ} \ .$$

Huch. Wir haben jetzt zwei längliche Gleichungen mit den 2 Unbekannten x_1 und x_2. Alle anderen Größen stehen aber zum Glück in der gegebenen Tabelle. Der Rest ist wieder mal reine, gemeine Mathematik[172], der sich durch Einsetzen der Werte aus der Dampftafel in beide Gleichungen und anschließendes Auflösen ergibt:

$$x_1 = 0{,}098 \quad \text{und} \quad x_2 = 0{,}595 \ .$$

Der Dampfgehalt steigt also an und wir können sagen, dass es der Lebensform vermutlich gut geht, weil das spezifische Volumen des Ammoniaks im Behälter überkritisch ist.

Die Berechnung der Masse des Ammoniaks im Behälter für b) ist jetzt nebenbei zu erledigen, denn die Gleichung hatten wir schon verwendet:

$$m = \frac{V}{v_1} = \frac{0{,}015}{(1-0{,}098)\cdot 1{,}522\cdot 10^{-3} + 0{,}098 \cdot 482{,}15 \cdot 10^{-3}}\,\text{kg} = 0{,}31\,\text{kg} \ .$$

[172] Zitat gemeiner Mathematiker: „Naja...“

Aufgabe: 15	**Kapitel: 6.6**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

Ein adiabater Zylinder ist mit einem reibungsfrei beweglichen Kolben verschlossen. Im Zylinder befinden sich ein elektrischer Heizleiter und siedendes Ammoniak (NH_3) unter dem Druck p = 857,2 kPa, mit dem Volumen V_1 = 0,0656 dm³. Durch den Heizleiter fließt ein Gleichstrom mit der konstanten Stromstärke I_{el} = 5,55 A und der konstanten Spannung U_{el} = 60 V. Nach der Zeit $\Delta\tau$ = 143 s ist das NH_3 verdampft, wobei sein Druck und seine Temperatur konstant bleiben. Der gesättigte Dampf nimmt das Volumen V_2 = 5,96 dm³ ein. Einer Dampftafel entnimmt man sein spezifisches Volumen $v_2 = v''$ = 149,0 dm³/kg.

a) Wenn man nur den Heizleiter als System betrachtet, wird ihm bei diesem Prozess Energie als Arbeit und/oder Wärme zugeführt und/oder entzogen? Ändert sich seine innere Energie?
b) Berechne die Arbeit und die Wärme, welche die Grenze des Systems „Heizleiter" überschreiten.
c) Um welchen Betrag ändern sich die innere Energie und die spezifische innere Energie des NH_3 beim Verdampfen?

Lösung

Aufgabenteil a) ist einfach: In das System Heizleiter geht elektrische Arbeit hinein und Wärme geht hinaus. Die innere Energie des Heizleiters ändert sich nicht, da alle Hinweise im Aufgabentext („*konstante Stromstärke*", „*konstante Spannung*") für ein stationäres System sprechen.

Teil b) ist dann die Fortsetzung von a), jetzt nur mit Zahlen. Bei der elektrischen Arbeit hilft uns die Elektrotechnik mit dem Term $P_{el} = U_{el} \cdot I_{el}$ für die aufgenommene elektrische *Leistung* kurz aus und wir bekommen

$$W_{el,12} = \int_1^2 U_{el} I_{el} \, d\tau = 60\,\mathrm{V} \cdot 5{,}55\,\mathrm{A} \cdot 143\,\mathrm{s} = 47{,}619\,\mathrm{kJ} \ .$$

Der erste Hauptsatz für den stationären Heizleiter im Zeitraum zwischen den Zuständen 1 und 2 lautet

$$0 = W_{el,12} - Q_{12}$$

und damit haben die *raus* gehende Wärme und die *rein* gehende elektrische Arbeit denselben Betrag

$$Q_{12} = W_{el,12} = 47{,}619\,\mathrm{kJ} \ .$$

Kommen wir also zur letzten Teilaufgabe c). Hier ist eine Energiebilanz für das Ammoniak im geschlossenen System gefordert:

$$U_2 - U_1 = Q_{12} - W_{V,12} \ .$$

Die Volumenänderungsarbeit kann man einfach ausrechnen, weil laut Aufgabentext Temperatur und Druck im Nassdampfgebiet konstant bleiben:

$$U_2 - U_1 = Q_{12} - p(V_2 - V_1) \ .$$

Damit wird die Änderung der inneren Energie zu

$$U_2 - U_1 = 47{,}619\,\text{kJ} - 857200\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\left(5{,}96\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 - 0{,}0656\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3\right)$$
$$= 42{,}566\,\text{kJ} \ .$$

Um aus der Änderung der inneren Energie eine spezifische Größe zu machen, muss sie auf die Masse bezogen werden. Die Masse des Ammoniaks ist durch das gegebene spezifische Volumen leicht auszurechnen

$$v_2 = \frac{V_2}{m} \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{V_2}{v_2} = \frac{5{,}96\,\text{dm}^3}{149\,\text{dm}^3/\text{kg}} = 0{,}04\,\text{kg} \ .$$

Am Ende steht dann

$$u_2 - u_1 = \frac{U_2 - U_1}{m} = \frac{42{,}566\,\text{kJ}}{0{,}04\,\text{kg}} = 1064{,}15\,\text{kJ/kg}$$

für die Änderung der spezifischen inneren Energie des Ammoniaks.

Aufgabe: 16	**Kapitel: 6.6**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} >> 0$**

Im Labor eines Thermodynamik-Institutes werden Experimente mit siedendem Wasser der Masse m = 1200 kg unter hohem Druck bei p_1 = 180 bar durchgeführt. Da an der Anlage auch Studenten arbeiten sollen, muss diese ~~idioten~~sicher[173] ausgelegt werden. Zu dem Zweck wurde das eigentliche Druckgefäß, falls es platzt oder ein Leck entsteht, in einen Außenbehälter gestellt, der für einen zulässigen Innendruck von p_2 = 7,0 bar ausgelegt ist. Der Raum zwischen dem Druckgefäß und dem Außenbehälter wird vor jedem Experiment evakuiert. Wie groß muss das Volumen des Außenbehälters sein, damit die Institutsleitung vor unliebsamen Überraschungen sicher ist? Es kann vereinfachend

[173] Nichts gegen Studenten, die Autoren waren ja schließlich selber einmal welche. Aber die Beachtung des Grundsatzes „Make it idiot-proof and someone will make a better idiot“ (auch bekannt als Murphys Gesetz) gilt leider auch für Labor-Experimente .

angenommen werden, dass der Prozess 1→2 (Bersten des Druckgefäßes) adiabat ist. Außerdem darf das Materialvolumen des Druckgefäßes vernachlässigt werden.

p	t	v'	v''	h'	h''
bar	°C	dm³/kg	m³/kg	kJ/kg	kJ/kg
7	165,96	1,1082	0,2727	697,06	2762,0
180	365,96	1,8399	0,007498	1734,8	2513,9

Ausschnitt aus der Dampftafel für Wasser

Lösung

Bei dieser Aufgabe ist das Volumen des Außenbehälters zu bemessen und zwar so, dass der zulässige Druck p_2 nach dem Bersten des Druckgefäßes und dem Ausströmen und Verdampfen des Wassers nicht überschritten wird. Während des gesamten Prozesses bleibt die innere Energie ebenso wie die Masse konstant und damit auch die spezifische innere Energie. Gegeben ist aber in der Tabelle leider nur die spezifische Enthalpie. Also müssen wir zur Berechnung der spezifischen inneren Energie einen kleinen Umweg machen und schreiben

$$u_1 = h_1 - p_1 v_1 = 1734{,}8\,\text{kJ/kg} - 180 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2 \cdot 0{,}0018399\,\text{m}^3/\text{kg}$$
$$= 1701{,}68\,\text{kJ/kg}\ .$$

Jetzt müssen wir uns die spezifische innere Energie nach dem Bersten etwas genauer ansehen, denn der Dampfgehalt x_2 ist bislang noch unbekannt:

$$u_2 = u_1 = h_2 - p_2 v_2 = (1 - x_2)h_2' + x_2 h_2'' - p_2 \cdot \left[(1 - x_2)v_2' + x_2 v_2''\right]$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{u_2 - (h_2' - p_2 v_2')}{h_2'' - h_2' - p_2 \cdot (v_2'' - v_2')} = \frac{1701{,}68 - (697{,}06 - 0{,}77574)}{2762{,}0 - 697{,}06 - 190{,}11} = 0{,}5362\ .$$

Achtung, bei den Einheiten der spezifischen Volumina muss man gut aufpassen, denn in der Tabelle werden verschiedene Einheiten verwendet! Mit Hilfe des Dampfgehaltes kann das erforderliche Volumen berechnet werden:

$$V = mv = m\left[(1 - x_2)v_2' + x_2 v_2''\right]$$
$$= 1200\,\text{kg} \cdot \left[(1 - 0{,}5362) \cdot 0{,}0011082 + 0{,}5362 \cdot 0{,}2727\right]\,\text{m}^3/\text{kg}$$
$$= 176{,}08\,\text{m}^3\ .$$

Aufgabe: 17 Kapitel: 6.6 Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$

In einer adiabaten Dampfturbine expandiert Wasserdampf vom Eintrittszustand $p_1 = 10$ bar, $t_1 = 500$ °C ($h_1 = 3478{,}3$ kJ/kg) auf den Druck $p_2 = 0{,}050$ bar. Kinetische und potentielle Energien sind zu vernachlässigen. Der Dampfgehalt des austretenden nassen Dampfes beträgt $x_2 = 0{,}965$. Wie groß ist die spezifische technische Arbeit $w_{t,12}$?

p / bar	t / °C	h' / kJ/kg	h'' / kJ/kg
0,050	32,898	137,77	2561,6

Stoffdaten für Wasser

Lösung

Die spezifische technische Arbeit der stationär laufenden Dampfturbine wird aus der Energiebilanz

$$0 = h_1 - h_2 - w_{t,12}$$

berechnet. In der Gleichung ist bereits berücksichtigt, dass die Maschine adiabat sein soll und das kinetische und potentielle Energien vernachlässigt werden dürfen. Außerdem steckt hier die Annahme dahinter, dass die Arbeit tatsächlich abgegeben wird (denn die spezifische technische Arbeit hat ein negatives Vorzeichen bekommen). Wenn die berechnete technische Arbeit nachher ein positives Vorzeichen hat, war die Annahme also richtig.

Der Massenstrom des Dampfes muss nicht bekannt sein. Die spezifische Enthalpie im Eintritt h_1 ist gegeben, aber die spezifische Enthalpie im Austritt muss mit den Angaben in der Tabelle berechnet werden:

$$\begin{aligned} h_2 &= (1-x)h' + xh'' \\ &= (1-0{,}965)\cdot 137{,}77\,\text{kJ/kg} + 0{,}965\cdot 2561{,}6\,\text{kJ/kg} = 2476{,}77\,\text{kJ/kg} \;. \end{aligned}$$

Damit kann die spezifische technische Arbeit berechnet werden:

$$w_{t,12} = h_1 - h_2 = 3478{,}3\,\text{kJ/kg} - 2476{,}77\,\text{kJ/kg} = 1001{,}5\,\text{kJ/kg} \;.$$

Das Ergebnis unserer Rechnung ist größer als Null. Unsere Annahme war also richtig und die technische Arbeit wird tatsächlich von der Dampfturbine abgegeben.

13.4 Aufgaben zum zweiten Hauptsatz

Aufgabe: 18	**Kapitel: 6.4**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$**

Eine stationär arbeitende Heizungsanlage nimmt aus dem Grundwasser den Wärmestrom $\dot{Q}$ = 100 kW bei der Temperatur t = 10 °C auf. Sie liefert bei der Temperatur t_H = 60 °C den Heizwärmestrom $\dot{Q}_\mathrm{H}$ = 15 kW und gibt den Wärmestrom $\dot{Q}_\mathrm{U}$ = 85 kW an die Umgebung ab, deren Temperatur t_U = -6 °C beträgt.

Diese Bauart einer Heizungsanlage wird übrigens auch als Wärmetransformator bezeichnet, denn ähnlich dem elektrischen Trafo, der eine gewünschte Spannung erzeugt, wandelt sie die Temperatur eines Wärmestroms auf einen gewünschten Wert. Es soll überprüft werden, ob diese Anlage so wie beschrieben arbeiten kann[174].

Lösung

Die Energiebilanz für diese Maschine lautet

$$0 = \dot{Q} - \dot{Q}_\mathrm{H} - \dot{Q}_\mathrm{U} = 100\,\mathrm{kW} - 15\,\mathrm{kW} - 85\,\mathrm{kW} = 0 \quad .$$

Null gleich Null, das passt schon mal. Die Entropiebilanz liefert uns

$$0 = \frac{\dot{Q}}{T} - \frac{\dot{Q}_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}} - \frac{\dot{Q}_\mathrm{U}}{T_\mathrm{U}} + \dot{S}^\mathrm{irr} \quad .$$

Um zu prüfen, ob auch der zweite Hauptsatz erfüllt wird, muss das Vorzeichen der Entropieerzeugungsrate

$$\dot{S}^\mathrm{irr} = \frac{15\,\mathrm{kW}}{333{,}15\,\mathrm{K}} + \frac{85\,\mathrm{kW}}{267{,}15\,\mathrm{K}} - \frac{100\,\mathrm{kW}}{283{,}15\,\mathrm{K}} = 0{,}01\,\mathrm{kW/K}$$

betrachtet werden. Die erzeugte Entropie ist größer als Null, also lautet die Antwort: Ja, das geht. (Zumindest theoretisch!)

Aufgabe: 19	**Kapitel: 6.4**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

An einem schönen Sommertag wird ein Mensch beobachtet, der mit einer Apparatur in der Hand, die irgendwie an eine Luftpumpe erinnert, in das Becken eines Hallenbades steigt. Bei der Apparatur handelt es sich um ein gasgefülltes,

174 In der Thermodynamik läuft eine solche Frage *immer* darauf hinaus, nachzusehen, ob einer der beiden Hauptsätze verletzt wird

reibungsfreies und massedichtes Zylinder-Kolben System.[175] Die Befragung durch den misstrauisch gewordenen Bademeister ergibt, dass es sich um einen Maschinenbaustudenten im dritten Semester bei der Vorbereitung auf die Thermoprüfung handelt. Beruhigt wendet sich der Bademeister wieder seinem Schwimmkurs zu und überlässt den Kandidaten sich selbst. Auch wir interessieren uns als Thermodynamiker natürlich ebenfalls nicht für mögliche Badefreuden, sondern nur für das Zylinder-Kolben-System und dessen Umgebung. Der Student taucht die Apparatur unter Wasser. Sie steht somit, thermodynamisch gesprochen, in thermischem Kontakt mit einem großen Wärmereservoir mit konstanter Temperatur. Dann wird das ideale Gas im Zylinder (R = 0,280 kJ/(kgK), Masse m_{iG} = 0,0001 kg, t_{iG} = 30 °C) isotherm und reversibel vom Druck p_1 = 100 kPa auf den Druck p_2 = 150 kPa verdichtet.

a) Wie lange dauert (qualitativ) diese Zustandsänderung jeweils, einmal wenn das Experiment am Warmbadetag bei einer Wassertemperatur t_W = 30 °C durchgeführt wird und einmal, wenn dessen Temperatur nur t_K = 10 °C beträgt?

b) Wie groß ist die Änderung der Entropie des Gases im Zylinder und die Änderung der Entropie des Wärmereservoirs in beiden Fällen?

c) Wie groß ist in beiden Fällen die insgesamt im Zylinder und in der Umgebung erzeugte Entropie S^{irr} ?

Lösung

Bei Aufgabenteil a) muss man sich den Text erst mal genau durchgelesen haben. Wir haben ein ideales Gas, das isotherm, also bei konstanter Temperatur und reversibel, also ohne das dabei im Gas Entropie entsteht, verdichtet werden soll. Reversibel ist kein Problem, da das System laut Aufgabenstellung reibungsfrei sein soll. Damit der Vorgang isotherm abläuft, muss der Anteil der Energie, die dem Gas bei der Verdichtung zugeführt wird an die Umgebung durch einen Wärmestrom abgegeben werden (1. Hauptsatz). Das ist der Teil, der nicht zur Erhöhung des Drucks aufgewendet wird. Und genau da liegt der Zugang zur Ermittlung der Zeit, die man für die Verdichtung brauchen muss. Hier kommt nämlich die Temperaturdifferenz zwischen dem Gas und der Um-

[175] Die eher praktisch Veranlagten können sich hier einfach eine Luftpumpe vorstellen, allerdings mit Daumen auf dem Ventil.

gebung ins Spiel (siehe Abschnitte 8.1 und 8.2). Wenn die Temperaturen gleich sind (Null Differenz), dann ist der abgegebene Wärmestrom unendlich klein. Damit überhaupt ein nennenswerter Wärmestrom übertragen werden kann, braucht man daher am Warmbadetag unendlich lange. Am kalten Tag muss die Verdichtung so erfolgen, dass der zu Erwärmung führende Teil der bei der Verdichtung zugeführte Energie jederzeit genau dem abgeführten Wärmestrom entspricht.

Im Aufgabenteil b) wird es jetzt etwas konkreter. Wir betrachten ein ideales Gas und können folglich dessen Entropie-Zustandsgleichung verwenden, um die Änderung der Entropie zu berechnen:

$$\Delta S_{12}^{\mathrm{iG}} = m \cdot (s_2 - s_1) = m \cdot \left(c_{\mathrm{P}} \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \right) .$$

Die Temperatur des idealen Gases bleibt sowohl am Warmbadetag als auch im kalten Fall konstant. Da an beiden Tagen dieselbe Druckänderung abläuft, ist auch die Änderung der Entropie in beiden Fällen gleich groß:

$$\Delta S_{12}^{\mathrm{iG}} = -m\, R \ln \frac{p_2}{p_1} = -0{,}0001\,\mathrm{kg} \cdot 280 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}} \cdot \ln \frac{150}{100} = -0{,}011353 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} .$$

Die Entropie des idealen Gases nimmt bei einer isothermen Verdichtung also ab. Zur Berechnung der Änderung der Entropie des Wärmereservoirs (WR) muss man für das Reservoir die Entropiebilanz aufstellen:

$$\Delta S_{12}^{\mathrm{WR}} = \frac{Q_{12}^{\mathrm{WR}}}{T_{\mathrm{WR}}} .$$

Die vom Reservoir aufgenommene Wärme ist vom Betrag her gleich der vom Gas für die isotherme Zustandsänderung (siehe Abschnitt 5.1.2.1) abgegebenen Wärme

$$Q_{12}^{\mathrm{iG}} = mRT_{\mathrm{iG}} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 0{,}0001\,\mathrm{kg} \cdot 280 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}} \cdot 303{,}15\,\mathrm{K} \cdot \ln \frac{100}{150} = -3{,}4417\,\mathrm{J}$$

nur mit entgegengesetztem Vorzeichen. Damit ist die Entropieänderung der Umgebung leicht zu berechnen und wir haben am Warmbadetag

$$\Delta S_{12,\mathrm{W}}^{\mathrm{WR}} = \frac{-Q_{12}^{\mathrm{iG}}}{T_{\mathrm{WR,W}}} = \frac{3{,}4417\,\mathrm{J}}{303{,}15\,\mathrm{K}} = 0{,}011353 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

und am Kaltbadetag

$$\Delta S_{12,\mathrm{K}}^{\mathrm{WR}} = \frac{-Q_{12}^{\mathrm{iG}}}{T_{\mathrm{WR,K}}} = \frac{3{,}4417\,\mathrm{J}}{283{,}15\,\mathrm{K}} = 0{,}012155\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \ .$$

Bei Aufgabenteil c) ist die insgesamt erzeugte Entropie durch eine gemeinsame Entropiebilanz für das System und dessen Umgebung, bestehend aus dem idealen Gas plus dem Wärmereservoir zu bestimmen. Das führt zu:

$$S_{12,\mathrm{W}}^{\mathrm{irr}} = \Delta S_{12}^{\mathrm{iG}} + \Delta S_{12,\mathrm{W}}^{\mathrm{WR}} = 0\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

und

$$S_{12,\mathrm{K}}^{\mathrm{irr}} = \Delta S_{12}^{\mathrm{iG}} + \Delta S_{12,\mathrm{K}}^{\mathrm{WR}} = 0{,}0008\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \ .$$

Was lernen wir daraus? Da das ideale Gas reversibel verdichtet wird, ist die einzige mögliche Ursache für die Erzeugung von Entropie die Wärme, die beim Verdichten an das Wärmereservoir abgeführt werden muss. Wenn dabei das Reservoir auch noch dieselbe Temperatur wie das Gas hat, dann muss der Vorgang der Verdichtung unendlich langsam ablaufen. Damit ist dann auch der gesamte Vorgang (Verdichtung und die Wärmeabgabe an die Umgebung und die Wärmeaufnahme in der Umgebung) reversibel.

Aufgabe: 20	**Kapitel: 6.4**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

Ein Not leidender Student (mittlerweile im 25. Semester, das Vordiplom ist fast geschafft, aber die Eltern wollen den Ruhestand auf Mallorca genießen und kündigen an, die monatlichen Zahlungen bald einzustellen) behauptet, eine Erfindung gemacht zu haben. Dabei handelt es sich um eine adiabate Düse, in der sich das ideale Gas Helium (R = 2,0772 kJ/(kgK), c_P = 2,5·R) von c_1 = 0 m/s auf c_2 = 1500 m/s bei einer Expansion beschleunigen lässt, die zu einer Druckänderung von p_1 = 3,0 bar auf p_2 = 1,0 bar führt. Die Eintrittstemperatur des Heliums soll t_1 = 20 °C sein. Hat der arme Mensch eine Chance auf finanzielle Rettung durch die Erteilung eines Patentes? Dazu muss man wissen, dass das Deutsche Patentamt ein Patent verweigert, wenn die Erfindung auch nur einen der Hauptsätze der Thermodynamik verletzt.

Lösung

Zur Beantwortung der Frage müssen wir uns beide Hauptsätze für den stationären Fließprozess ansehen. Der erste Hauptsatz kann ziemlich elegant mit der

Totalenthalpie aufgestellt werden:

$$h_1^+ = h_2^+$$
$$\Rightarrow \quad h_1 + \frac{c_1^2}{2} = h_2 + \frac{c_2^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad h_1 - h_2 = c_P \cdot (t_1 - t_2) = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2{,}5R \cdot (t_1 - t_2) = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \; .$$

Damit bekommen wir die Temperatur am Austritt

$$\Rightarrow \quad t_2 = t_1 - \frac{c_2^2 - c_1^2}{2 \cdot 2{,}5R} = 20°C - \frac{1500^2\ \mathrm{m^2/s^2}}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 2077{,}2\ \mathrm{J/kgK}} = -196{,}638\,°\mathrm{C} \; ,$$

bei welcher der erste Hauptsatz erfüllt wird.
Dann können wir den zweiten Hauptsatz aufstellen:

$$0 = s_1 - s_2 + s_{12}^{\mathrm{irr}} \; .$$

Dieser ist erfüllt, wenn die massenstromspezifische Entropieproduktion $s_{12}^{\mathrm{irr}} \geq 0$ ist. Für ein ideales Gas gilt:

$$s_{12}^{\mathrm{irr}} = c_P \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} = 2{,}0772\,\mathrm{kJ/kgK} \cdot \left(2{,}5 \cdot \ln\left[\frac{76{,}51}{293{,}15}\right] - \ln\left[\frac{1}{3}\right]\right)$$
$$= -4{,}69\,\mathrm{kJ/kgK} \, .$$

Das Minuszeichen vor dem Ergebnis bedeutet einen Widerspruch zum zweiten Hauptsatz, da bei *keinem* Prozess Entropie vernichtet werden kann. Der Student muss also wohl oder übel entweder schleunigst seinen Abschluss machen oder jobben gehen.

Aufgabe: 21	**Kapitel: 8.2**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

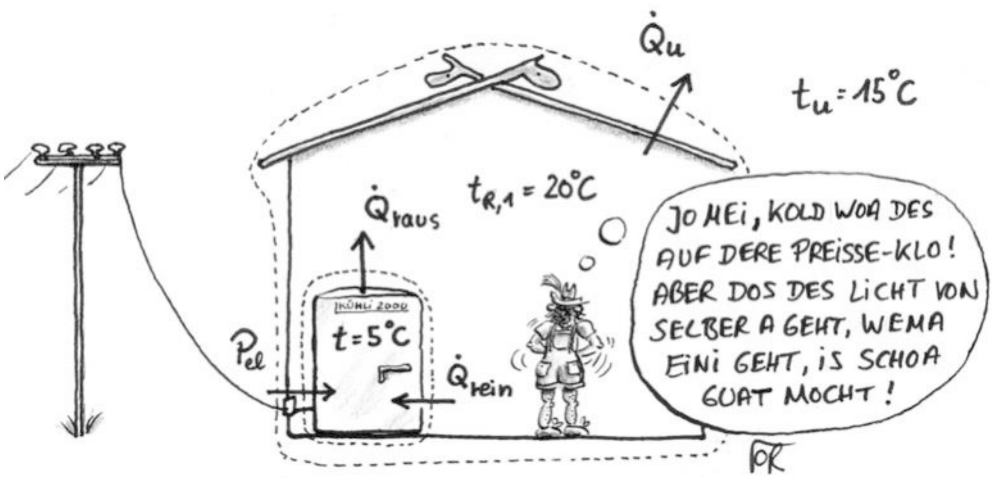
Es ist die alte Frage zu beantworten, was eigentlich genau passiert, wenn man die Kühlschranktür zu- oder aufmacht. Es soll hier nicht darum gehen, zu untersuchen, ob das Licht bei geschlossener Tür auch *wirklich* aus ist, sondern es wird das folgende System betrachtet.

Das Kühlaggregat des Kühlschranks wird wie eine kontinuierlich arbeitende Kältemaschine behandelt, die so ausgestattet ist, dass sie die eingestellte Temperatur t_K = 5 °C, bei der die Wärme aufgenommen wird, halten kann, egal was passiert. Das Gerät steht in einem Raum, der zunächst die Temperatur $t_{R,1}$ = 20 °C hat. Aus dem Raum geht der Wärmestrom $\dot{Q}_U$ an die Umgebung, welche die Temperatur t_U = 15° C hat. Die Abwärme des Kühlschranks wird, unabhängig von dessen Betriebszustand, bei der Temperatur t_H = 65 °C an die Raumluft abgegeben. Die Tür ist zunächst ordnungsgemäß geschlossen, in diesem Zustand 1 wird die elektrische Leistung P_1 = 100 W aufgenommen. Für den Wärmeeintrag in den Kühlschrank bei *geschlossener* Tür gilt

$$\dot{Q}_{\text{rein},1} = 2\frac{\text{W}}{\text{K}} \cdot \left(t_{R,1} - t_K\right)$$

und es ist bekannt, dass sich bei *geöffneter* Tür der aufgenommene Wärmestrom (unter Berücksichtigung der Tatsache, dass jetzt das Licht im Kühlschrank brennt) demgegenüber vervierfacht.

Außerdem ist bekannt, dass die Entropieproduktion der Kältemaschine proportional zu derer Leistung P ist und mit der Gleichung $\dot{S}^{\text{irr}}(P) = K \cdot P$ berechnet werden kann, wobei K eine Proportionalitätskonstante ist.



a) Wie lautet die Gleichung, die den Wärmeübergang zwischen dem Raum und dessen Umgebung beschreibt?
b) Welche Raumtemperatur stellt sich nach dem Öffnen der Kühlschranktür ein?

Lösung

Für a) wird die Energiebilanz im Zustand 1 für den gesamten Raum aufgestellt. Hinein geht eine elektrische Leistung und hinaus geht ein Wärmestrom an die

Umgebung (siehe Abschnitt 8.2):

$$P_1 = \dot{Q}_\mathrm{U} = kA \cdot \left(t_{\mathrm{R},1} - t_\mathrm{U}\right) .$$

Damit kann das Produkt kA berechnet werden:

$$kA = \frac{P_1}{t_{\mathrm{R},1} - t_\mathrm{U}} = \frac{100\,\mathrm{W}}{5\,\mathrm{K}} = 20\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}} \quad .$$

Allgemein wird der Wärmeübergang zwischen dem Raum und der Umgebung dann durch

$$P = 20\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}}\left(t_\mathrm{R} - 15\,°\mathrm{C}\right)$$

beschrieben. Für b) wird zuerst der Zustand bei geschlossener Tür betrachtet und der aufgenommene Wärmestrom berechnet:

$$\dot{Q}_{\mathrm{rein},1} = 2\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}} \cdot \left(20°\mathrm{C} - 5\,°\mathrm{C}\right) = 30\,\mathrm{W} \quad .$$

Damit gehen wir in die Energiebilanz für den Kühlschrank und haben:

$$\dot{Q}_{\mathrm{raus},1} = P_1 + \dot{Q}_{\mathrm{rein},1} = 130\,\mathrm{W} \quad .$$

Dann ab damit in die Entropiebilanz:

$$\dot{S}_1^\mathrm{irr} = \frac{\dot{Q}_{\mathrm{raus},1}}{T_\mathrm{H}} - \frac{\dot{Q}_{\mathrm{rein},1}}{T_\mathrm{K}} = \frac{130\,\mathrm{W}}{338{,}15\,\mathrm{K}} - \frac{30\,\mathrm{W}}{278{,}15\,\mathrm{K}} = 0{,}27659\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}} \quad .$$

Aufgrund der gegebenen Proportionalität zwischen Leistung und Entropieproduktion kann damit eine Gleichung für die Entropieproduktion als Funktion der Leistung aufgestellt und die Proportionalitätskonstante K bestimmt werden:

$$\dot{S}^\mathrm{irr}(P) = \frac{\dot{S}_1^\mathrm{irr}}{P_1} \cdot P = 0{,}0027659\frac{1}{\mathrm{K}} \cdot P \quad .$$

Ab jetzt ist die Tür offen und wir müssen die neue Raumtemperatur $t_{\mathrm{R},2}$ bestimmen. Für den jetzt aufgenommenen Wärmestrom gilt:

$$\dot{Q}_{\mathrm{rein},2} = 4 \cdot \dot{Q}_{\mathrm{rein},1} = 120\,\mathrm{W} \quad .$$

Dann nehmen wir wieder den ersten Hauptsatz, zuerst aber zur Abwechslung wieder für den ganzen Raum als Bilanzraum

$$P_2 = 20\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}} \cdot \left(t_{\mathrm{R},2} - 15\,°\mathrm{C}\right)$$

und dann wieder nur für den Kühlschrank

$$\dot{Q}_{\mathrm{raus},2} = P_2 + \dot{Q}_{\mathrm{rein},2} = 20\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}} \cdot \left(t_{\mathrm{R},2} - 15\,°\mathrm{C}\right) + 120\,\mathrm{W} \quad .$$

Es folgt, wie meistens, der zweite Hauptsatz:

$$0 = \dot{S}_2^{\mathrm{irr}} + \frac{\dot{Q}_{\mathrm{rein},2}}{\mathrm{T_K}} - \frac{\dot{Q}_{\mathrm{raus},2}}{\mathrm{T_H}} \quad .$$

Die beiden Hauptsätze werden zusammengewürfelt und dann wird alles eingesetzt, was wir haben:

$$0 = 0{,}0027659\frac{1}{\mathrm{K}} \cdot \left[20\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}} \cdot \left(T_{\mathrm{R},2} - 288{,}15\,\mathrm{K}\right)\right] + \frac{120\,\mathrm{W}}{278{,}15\,\mathrm{K}}$$

$$- \frac{20\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}} \cdot \left(T_{\mathrm{R},2} - 288{,}15\,\mathrm{K}\right) + 120\,\mathrm{W}}{338{,}15\,\mathrm{K}} \quad .$$

Und jetzt noch „mal eben“ Auflösen nach der Temperatur:

$$0 = 0{,}0553\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}^2} \cdot T_{\mathrm{R},2} - 15{,}9399\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}} + 0{,}4314\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}} - 0{,}0592\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}^2} \cdot T_{\mathrm{R},2} + 16{,}6879\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}}$$

$$\Leftrightarrow 0 = -0{,}00383\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}^2} \cdot T_{\mathrm{R},2} + 1{,}17940\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}} \quad .$$

Ächz! Jetzt haben wir endlich eine ordentliche Lösung:

$$T_{\mathrm{R},2} = 307{,}94\,\mathrm{K} = 34{,}79\,°\mathrm{C} \quad .$$

Damit hat die Thermodynamik jetzt auch bewiesen, was man immer schon vermutet hat, aber ohne die beiden Hauptsätze nie wissenschaftlich belegen konnte: Das Öffnen einer Kühlschranktür, um einen Raum zu kühlen, ist überhaupt keine gute Idee!

Aufgabe: 22	**Kapitel: 8.3**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} >> 0$**

Ein im Weltraum fliegender Satellit hat zur Kühlung eines hochempfindlichen elektronischen Bauteils eine stationär arbeitende Kältemaschine an Bord. Das elektronische Bauteil gibt einen Verlustwärmestrom bei der konstanten Temperatur T an die Kältemaschine ab. Die Kältemaschine selber kann ihren Abwärmestrom $\dot{Q}_0$ nur in den Weltraum hin abstrahlen. Diese Abstrahlung erfolgt über die (aus Kostengründen, wie immer) möglichst klein zu haltende Abstrahlfläche A, die der Sonne abgewandt ist. Die Abstrahlung der Wärme folgt dem Gesetz

$$\dot{Q}_0 = K \cdot A \cdot T_0^4 ,$$

wobei das K eine Strahlungskonstante ist, welche die Eigenschaften der Abstrahlfläche und einige Naturkonstanten für die Strahlung zusammenfasst.
Frage: Wenn die irreversibel erzeugte Entropie $\dot{S}^{\mathrm{irr}}$ der Kältemaschine ebenso konstant ist wie deren Antriebsleistung P, wie muss dann das Verhältnis von T und T_0 sein, damit die Abstrahlfläche minimal ist?

Lösung

Der erste Hauptsatz für die stationär laufende Kältemaschine lautet

$$0 = P + \dot{Q} - \dot{Q}_0$$

und der zweite Hauptsatz lautet

$$0 = \frac{\dot{Q}}{T} - \frac{\dot{Q}_0}{T_0} + \dot{S}^{\mathrm{irr}} \quad .$$

Zusammenwurschteln und Einsetzen aller bekannten Dinge:

$$0 = \frac{\dot{Q}_0 - P}{T} - \frac{\dot{Q}_0}{T_0} + \dot{S}^{\mathrm{irr}} = \dot{Q}_0\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) - \frac{P}{T} + \dot{S}^{\mathrm{irr}}$$

$$= KA\left(\frac{T_0^4}{T} - T_0^3\right) - \frac{P}{T} + \dot{S}^{\mathrm{irr}}$$

und dann Umstellen nach der gesuchten Abstrahlfläche ergibt:

$$A = \frac{\frac{P}{T} - \dot{S}^{\text{irr}}}{K\left(\frac{T_0^4}{T} - T_0^3\right)} \; .$$

Der Zähler des Bruches ist eine Konstante. Alle Größen, die dort stehen, ändern sich laut Aufgabenstellung nicht. Wer Spaß daran hat, kann jetzt natürlich den ganzen Bruch ableiten. Es reicht aber aus, das Maximum des Nenners zu finden, um das Minimum der Abstrahlfläche zu erhalten (Holzauge!). Zuerst wird der Nenner nach T_0 abgeleitet und das Ganze wird dann gleich Null gesetzt

$$0 = \frac{d}{dT_0}\left[K\left(\frac{T_0^4}{T} - T_0^3\right)\right] = \frac{4}{T}T_0^3 - 3T_0^2 \; ,$$

woraus

$$T_0 = \frac{3}{4}T$$

folgt. Wer mag, kann jetzt mit Hilfe der zweiten Ableitung zeigen, dass es sich hier tatsächlich um ein Minimum handelt.

13.5 Aufgaben zur Exergie

Aufgabe: 23	**Kapitel: 7.1.3**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$**

Während er seiner liebsten Tätigkeit nachgeht, fragt sich ein thermodynamisch interessierter Hausmann, welche Leistung P_{max} aus der Abluft $\dot{m}_{\text{L}} = 0{,}001$ kg/s eines stationär arbeitenden Staubsaugers maximal gewonnen werden kann. Die Abluft mit $\kappa = 1{,}4$ und $R = 287$ J/(kgK) verlässt den Staubsauger mit der Temperatur $T_1 = 303$ K und dem Druck $p_1 = 1{,}2$ bar. In dem zu reinigenden Zimmer herrscht der Druck $p_{\text{U}} = 1$ bar und die Temperatur $T_{\text{U}} = 293$ K.

Lösung

Die Frage nach der maximal gewinnbaren Leistung ist gleichbedeutend mit der Frage nach der spezifischen Exergie des Luftstromes, der den Staubsauger im Zustand 1 in die Umgebung U verlässt. Dafür haben wir in Abschnitt 7.1.3 die Gleichung

$$e_{\text{ex}} = w_{\text{t}} = h_1 - h_{\text{U}} - T_{\text{U}}(s_1 - s_{\text{U}})$$

vorgestellt, die wir jetzt weiter verwenden können. Achtung, mit dieser Gleichung wird die spezifische Exergie des Massenstromes berechnet, das Vorzeichen der spezifischen Exergie hängt von den Unterschieden zur Umgebung ab. Das Vorzeichen des Exergie*stroms* muss zusätzlich noch die Richtung (und damit das Vorzeichen) des Massen*stroms* berücksichtigen. Wenn wir ab jetzt den in der Umgebung ankommenden Massenstrom betrachten, dann berechnen wir die Exergie, die in der Umgebung ankommt und mit dem Modell des idealen Gases (bei Luft unter Umgebungsdruck und bei Raumtemperatur spricht überhaupt nichts dagegen) können wir die Ausdrücke für die Enthalpie- und Entropiedifferenzen ersetzen:

$$P_{\max} = \dot{m}_L \cdot e_{ex} = \dot{m}_L \cdot w_t = \dot{m}_L \cdot \left[c_P (T_1 - T_U) - T_U \left(c_P \ln \frac{T_1}{T_U} - R \ln \frac{p_1}{p_U} \right) \right]$$

Was jetzt nur noch fehlt, sind Zahlenwerte für die Wärmekapazitäten. Die bekommen wir mit den in Abschnitt 5.1.1 hergeleiteten Beziehungen $c_P = c_V + R$ und $\kappa = c_P / c_V$. Dann können wir nämlich

$$c_P = \frac{R}{1 - 1/\kappa} = 1004{,}5 \text{ J/(kgK)}$$

schreiben und jetzt endlich alles einsetzen:

$$P_{\max} = 0{,}001 \text{ kg/s} \cdot \begin{bmatrix} 1004{,}5 \text{ J/(kgK)} \cdot (303 \text{ K} - 293 \text{ K}) \\ -293 \text{ K} \cdot \left(1004{,}5 \text{ J/(kgK)} \cdot \ln \dfrac{303 \text{ K}}{293 \text{ K}} - 287 \text{ J/(kgK)} \cdot \ln \dfrac{1{,}2 \text{ bar}}{1 \text{ bar}} \right) \end{bmatrix}$$

$$= 15{,}5\, W.$$

Aufgabe: 24	**Kapitel: 7.1.4**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

Zwei Ingenieure bekommen die Aufgabe, sich Möglichkeiten zu überlegen, wie die Leistung einer Dampfturbine geregelt werden könnte. Kandidat A schlägt die aufwändige Lösung vor, den Massenstrom des zuströmenden Frischdampfes entsprechend dem Bedarf zu regeln. Beim Einstellen des Massenstromes ändert sich die spezifische Entropie des Dampfes nicht.

Kandidat B meint, dass es doch auch funktionieren müsste, wenn der zuströmende Frischdampf vor der Turbine einfach auf einen niedrigeren Druck gedrosselt wird. Zur Betrachtung der Drosselung darf davon ausgegangen werden, dass diese adiabat erfolgt und dass Änderungen der kinetischen Energie des Dampfes vernachlässigt werden können. Konkret wird der mit $t_1 = 540$ °C und $p_1 = 180$ bar zuströmende Dampf ($h_1 = 3387{,}8$ kJ/kg, $s_1 = 6{,}3722$ kJ/kgK) auf $p_2 = 155$ bar gedrosselt. Der Umgebungszustand ist durch $t_U = 15$ °C und $p_U = 1{,}0$ bar ($h_U = 63{,}1$ kJ/kg, $s_U = 0{,}2237$ kJ/kgK) gegeben. Welche der beiden Varianten ist besser[176], wenn man diese anhand des jeweiligen Exergieverlustes für die Regelung der Turbine vergleicht?

t / °C	520	530	540
h / kJ/kg	3360,7	3388,5	3415,9
s / kJ/(kgK)	6,3993	6,4341	6,4681

Stoffdaten von Wasser bei 155 bar

Lösung

Der Vorschlag von Kandidat A ist hinsichtlich der Exergieverluste leicht zu bewerten. Diese sind 0%, denn laut Aufgabe „*ändert sich die spezifische Entropie des Dampfes nicht*". Also ist die Entropieerzeugung gleich Null und damit auch der Exergieverlust.

Dann wird der Vorschlag von Kandidat B beleuchtet. Dabei ist als Erstes zu klären, wie groß die spezifische Exergie $e_{\mathrm{ex},1}$ des zuströmenden Dampfes ist. Für die spezifische Exergie einer Masse (siehe Abschnitt 7.1.3) gilt

$$\begin{aligned} e_{\mathrm{ex},1} &= h_1 - h_{\mathrm{U}} - T_U\,(s_1 - s_{\mathrm{U}}) \\ &= 3387{,}8\,\mathrm{kJ/kg} - 63{,}1\,\mathrm{kJ/kg} - 288{,}15\,\mathrm{K}\cdot\left(6{,}3722\ \mathrm{kJ/kgK} - 0{,}2237\,\mathrm{kJ/kgK}\right) \\ &= 1553{,}0\,\mathrm{kJ/kg}\,. \end{aligned}$$

Um dann den Exergieverlust zu bestimmen, muss die Entropiebilanz aufgestellt werden. Das passiert hier gleich ohne den Massenstrom und umgestellt nach der Entropieerzeugung:

$$s_{12}^{\mathrm{irr}} = s_2 - s_1\ .$$

[176] „Besser" heißt in fast allen Fällen, und so auch hier „billiger". Jeder Exergieverlust bedeutet einen Geldverlust, denn hochwertige Exergie wird dabei zu Anergie entwertet. Hier liefert die Exergie-Betrachtung einen ganz konkreten Ansatz, den mit viel Überzeugungsarbeit (oder mit Hilfe dieses Buches) sogar die Wirtschaftswissenschaftler verstehen können.

Leider fehlt uns s_2, so dass wir uns hier noch ein paar Gedanken machen müssen. Im Aufgabentext steht, dass die Drossel adiabat sein soll und dass Änderungen der kinetischen Energie keine Rolle spielen. Eine nebenbei im Hinterkopf aufgestellte Energiebilanz für die Drossel ergibt dann, dass die spezifische Enthalpie des Dampfes vorher und nachher gleich sein muss. Da wir die spezifische Enthalpie kennen, können wir mit deren Hilfe in der Tabelle die Entropie durch eine lineare Interpolation berechnen:

$$s_2 = 6{,}3993\,\text{kJ/kgK} + (6{,}4341 - 6{,}3993)\,\text{kJ/kgK} \cdot \frac{3387{,}8\,\text{kJ/kg} - 3360{,}7\,\text{kJ/kg}}{3388{,}5\,\text{kJ/kg} - 3360{,}7\,\text{kJ/kg}}$$

$$= 6{,}4332\,\text{kJ/kgK}\,.$$

Damit wird

$$s_{12}^{\text{irr}} = 6{,}4332\,\text{kJ/kgK} - 6{,}3722\,\text{kJ/kgK} = 0{,}0610\,\text{kJ/kgK}$$

und der spezifische Exergieverlust ist

$$e_{\text{ex,V,12}} = T_{\text{U}} \cdot s_{12}^{\text{irr}} = 288{,}15\,\text{K} \cdot 0{,}0610\,\text{kJ/kgK} = 17{,}584\,\text{kJ/kg}\,.$$

In Prozenten ausgedrückt nimmt die Exergie um

$$\Delta e_{\text{ex,V,12}} = \frac{e_{\text{ex,V,12}}}{e_{\text{ex,1}}} \cdot 100\% = 1{,}13\%$$

ab. Damit ist jetzt auch durch Zahlen belegt, dass die Variante mit der plumpen Drosslung, vom Standpunkt der Exergie aus gesehen, deutlich schlechter ist als die technisch anspruchsvollere Lösung der Regelung des Dampfmassenstromes. Vorher war das aber auch schon zu erkennen, denn die eine Variante wird per Definition als frei von Exergieverlusten hingestellt, die andere aber nicht.

13.6 Aufgaben zu Kreisprozessen

Aufgabe: 25	**Kapitel: 9.1.2.1**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

Ein Kraftwerk in Bremen liefert für das Stadion des Deutschen Meisters 1965, 1988, 1993, 2004, des Vizemeisters 1968, 1983, 1985, 1986, 1995, 2006, des DFB Pokalsiegers 1961, 1991, 1994, 1999, 2004, des Pokalfinalisten 1989, 1990, 2000, des Supercup-Siegers 1988, 1993, 1994, des Europapokalsiegers der Pokalsieger 1992 und des Deutschen Amateurmeisters 1966, 1985 und 1991 Strom (für die Flutlichtanlage) und Wärme (für die Rasenheizung, damit den millionenschweren Profis im Winter nicht die Hufe einfrieren).

Während eines leichten Spiels im Februar gegen Bayern München wird in dem nach außen adiabaten Dampfkessel des Kraftwerkes der Wassermassenstrom $\dot{m} = 90\,\mathrm{kg/s}$ verdampft und anschließend in einer nach außen adiabaten Turbine entspannt. Die spezifische Enthalpie des Wassers beträgt am Eintritt in den Dampfkessel h_1 = 121 kJ/kg. Die Enthalpie des Dampfes, der aus dem Kessel austritt und in die Turbine eintritt, beträgt h_2 = 3140 kJ/kg. Im Austrittsquerschnitt aus der Turbine beträgt die spezifische Enthalpie h_3 = 2340 kJ/kg. Im anschließenden Wärmeübertrager wird zur Beheizung des Rasens die spezifische Enthalpie auf h_4 = 1520 kJ/kg verringert.

a) Wie groß ist der im Kessel zugeführt Heizwärmestrom $\dot{Q}_\mathrm{K}$?
b) Welche Leistung P_T wird von der Turbine abgegeben?
c) Welcher Wärmestrom $\dot{Q}_\mathrm{H}$ steht zur Beheizung der Spielfläche zur Verfügung?
d) Welchen Wirkungsgrad η_1 hat das Kraftwerk im Bezug auf die Turbinenleistung und welchen Wirkungsgrad η_2 hat es insgesamt?
e) Wer tröstet nach dem Spiel mal wieder die bayrischen Spieler?

Lösung

Zur Lösung der ersten drei Teilaufgaben muss jeweils die Energiebilanz für das jeweilige Bauteil aufgestellt werden. In diesen Bilanzen werden die unbekannten Größen so eingesetzt, als ob sie in das System hinein gehen würden. Deswegen werden alle Größen, deren Ergebnis ein positives Vorzeichen haben, tatsächlich hinein gehen und die mit einem negativen Vorzeichen werden abgegeben. Bei a) geht es um den Kessel, dem ein Wärmestrom zugeführt wird:

$$0 = \dot{m}(h_1 - h_2) + \dot{Q}_\mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_\mathrm{K} = \dot{m}(h_2 - h_1) = 271{,}71\,\mathrm{MW} \ .$$

Bei b) geht es um die Turbine, die eine Leistung abgibt:

$$0 = \dot{m}(h_2 - h_3) + P_\mathrm{T} \quad \Rightarrow \quad P_\mathrm{T} = \dot{m}(h_3 - h_2) = -72{,}0\,\mathrm{MW} \ .$$

Bei c) geht es um den Wärmestrom, der für die Rasenheizung abgezogen wird:

$$0 = \dot{m}(h_3 - h_4) + \dot{Q}_\mathrm{H} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_\mathrm{H} = \dot{m}(h_4 - h_3) = -73{,}8\,\mathrm{MW} \ .$$

Damit kann Aufgabe d) bearbeitet werden. Einmal wird nur die Turbinenleistung als gewünschtes Ergebnis behandelt

$$\eta_1 = \frac{|P_\mathrm{T}|}{\dot{Q}_\mathrm{K}} = 0{,}2650$$

und einmal wird zur Berechnung des Wirkungsgrades die Summe aus der Turbinenleistung und dem Heizwärmstrom verwendet:

$$\eta_2 = \frac{\left|P_{\mathrm{T}}\right| + \left|\dot{Q}_{\mathrm{H}}\right|}{\dot{Q}_{\mathrm{K}}} = 0{,}5366 \quad .$$

Der Aufgabenteil e) ist zu schwierig, auf eine Lösung wird daher verzichtet.

Aufgabe: 26	**Kapitel: 9.2.2.3**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

Es soll ein Stirling-Motor behandelt werden, bei dem die expandierte Luft im kalten Zylinderraum bei 20 °C ein Volumen von 3 *l* einnimmt und dann im selben Raum auf 0,5 *l* verdichtet wird. Der Motor läuft mit 2000 Umdrehungen pro Minute. Die maximale Temperatur, die bei dem Kreisprozess auftritt, beträgt 800°C. Der Stirling-Motor kann als idealer Stirling-Prozess behandelt werden!

a) Wie groß ist der höchste Druck in der Anlage, wenn die Maschine eine Leistung von 50 kW abgeben soll?
b) Welchen thermischen Wirkungsgrad hat der Prozess?

Lösung

Für Teilaufgabe a) erinnern wir uns zuerst: Die Zustandsänderungen des Stirling-Prozesses sind entweder isotherm (Expansion und Kompression) oder isochor (Erwärmung und Abkühlung mit Hilfe des Regenerators). Dann sammeln wir erst mal die Daten, die wir haben:

- Zustand 1: (Luft ist verdichtet, heißester Zustand): $V_1 = 0{,}5$ l, $t_1 = 800$ °C
- Zustand 2: (Luft ist expandiert, aber immer noch heiß): $V_2 = 3$ l, $t_2 = 800$ °C
- Zustand 3: (expandierte Luft, jetzt aber kalt): $V_3 = 3$ l, $t_3 = 20$ °C
- Zustand 4: (verdichtete Luft, immer noch kalt): $V_4 = 0{,}5$ l, $t_4 = 20$ °C

Während einer Umdrehung der Kurbelwelle um 360° durchläuft die Luft alle vier Zustandsänderungen des Stirling-Prozesses. Danach geht alles wieder von vorne los. Deswegen reicht es, diesen Zeitraum zu betrachten. Bei der gegebenen Drehzahl dauert eine Umdrehung

$$\Delta\tau = \frac{60}{2000\,\mathrm{s}^{-1}} = 0{,}03\,\mathrm{s} \quad .$$

In der Zeit $\Delta\tau$ müssen alle Wärmen übertragen und die mechanischer Arbeit muss abgegeben sein. Im Aufgabentext ist nur die mittlere *Leistung* gegeben, aber die technische *Arbeit* kann berechnet werden

$$W_{\mathrm{t}} = -50\,\mathrm{kW} \cdot 0{,}03\,\mathrm{s} = -1500\,\mathrm{J} \quad .$$

Die Arbeit hat ein negatives Vorzeichen bekommen, weil wir wissen, dass sie abgegeben wird. Der erste Hauptsatz für den stationären Motor lautet

$$0 = mq_{12} - mq_{34} - W_{\mathrm{t}}$$

und für die beiden hier beteiligten isothermen Zustandsänderungen kann das zu

$$W_{\mathrm{t}} = mRT_{12}\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - mRT_{34}\ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) \quad .$$

umgeschrieben werden. In dieser Gleichung ist außer dem Produkt $m{\cdot}R$ alles bekannt und das rechnen wir jetzt aus:

$$mR = \frac{-W_{\mathrm{t}}}{T_{12}\cdot\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - T_{34}\cdot\ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)} = \frac{-1500\,\mathrm{J}}{1073{,}15\,\mathrm{K}\cdot\ln\left(\frac{0{,}5}{3}\right) - 293{,}15\,\mathrm{K}\cdot\ln\left(\frac{3}{0{,}5}\right)}$$

$$= 0{,}6127\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \; .$$

Damit kann das ideale Gasgesetz angewendet werden und zwar für den Zustand 1, an dem der höchste Druck auftritt:

$$p_1 = \frac{m\cdot R\cdot T_1}{V_1} = \frac{0{,}6127\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot 1073{,}15\,\mathrm{K}}{0{,}0005\,\mathrm{m}^3} = 13{,}15\ \mathrm{bar} \quad .$$

Das ist ein ziemlich hoher Druck für ein ideales Gas. Da in der Aufgabenstellung aber von einem „idealen Stirling-Prozess“ die Rede war, kann als thermische Zustandsgleichung trotzdem das ideale Gasgesetz angewendet werden[177].

Der Wirkungsgrad (Teilaufgabe b) kann ganz leicht berechnet werden

$$\eta_{\mathrm{th}} = 1 - \frac{T_{12}}{T_{34}} = 1 - \frac{293{,}15\,K}{1073{,}15\,K} = 0{,}727 \quad .$$

Aufgabe: 27	**Kapitel: 9.2.3.1**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

[177] Man sollte, wenn man mit dem idealen Gasgesetz rechnet, natürlich immer sehen, wie hoch der Druck in etwa ist. Wenn man über 10 bar kommt, dann sollte man nachsehen, ob irgendwo ein Hinweis zu finden ist, dass man das ideale Gasgesetz trotzdem verwenden darf oder ob vielleicht doch eine andere thermische Zustandsgleichung gegeben ist.

Ein Otto-Motor hat ein Hubvolumen von 1,6 l und arbeitet mit einem Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = 10$. Er saugt brennbares Gasgemisch von 20 °C und 1,013 bar im Zustand 1 an und verdichtet das dann reversibel und adiabat (Zustandsänderung 1→2). Anschließend wird das Gemisch gezündet und verbrennt bei konstantem Volumen (Zustandsänderung 2→3), wobei ein Druck von 30 bar erreicht wird. Dann expandiert das Gas reversibel und adiabat bis zum Zustand 4. Die Verbrennung und das Ausschieben der Abgase durch den Auspuff werden durch Wärmezufuhr bzw. Wärmeentzug bei jeweils konstantem Volumen ersetzt.

Für das arbeitende Gemisch, egal ob vor, während oder nach der Verbrennung, können in erster Näherung die Eigenschaften der Luft $\kappa = 1{,}4$ und $c_V = 0{,}7171$ kJ/kgK angenommen werden. Und weil wir großzügig sind, darf auch davon ausgegangen werden, dass die spezifische Wärmekapazität konstant ist.

a) Wie groß sind im Zustand 2 der Druck p_2 und die Temperatur t_2 und im Zustand 4 die Temperatur t_4?
b) Welche Verbrennungswärme wird bei jedem Arbeitszyklus frei und welche Wärme wird am unteren Totpunkt entzogen?
c) Welche theoretische Arbeit leistet die Maschine bei jedem Arbeitszyklus?

Lösung

Zuerst müssen die Volumen im unteren Totpunkt (Zustände 1 und 4) und oberen Totpunkt (Zustände 2 und 3) berechnet werden. Dabei hilft uns das Verdichtungsverhältnis

$$\varepsilon = \frac{V_{\text{Hub}} + V_2}{V_2} = 1 + \frac{V_{\text{Hub}}}{V_2} \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = \frac{V_{\text{Hub}}}{\varepsilon - 1}$$

und wir bekommen für den oberen Totpunkt

$$V_2 = V_3 = \frac{1{,}6\,l}{9} = 0{,}178\ l$$

und für den unteren Totpunkt

$$V_1 = V_4 = V_{\text{Hub}} + V_2 = 1{,}6\,l + 0{,}178\,l = 1{,}778\ l\ .$$

Dann müssen (mal wieder) die Gleichungen für die Zustandsänderungen rausgesucht werden, die bei diesem Otto-Prozess ablaufen (1→2: isentrop, 2→3: isochor, 3→4: isentrop, 4→1: isochor). Um auf den Druck im Zustand 2 zu kommen, bietet sich die Zustandsänderung 1→2 an, da im Zustand 1 Druck und Temperatur bekannt sind. Für die isentrope Zustandsänderung gilt:

$$p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\chi} = 1{,}013\,\text{bar} \cdot \left(\frac{1{,}778}{0{,}178}\right)^{1{,}4} = 25{,}4\,\text{bar} \ .$$

Die Temperatur im Zustand 2 kann genauso leicht berechnet werden:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(\chi-1)} = 293{,}15\,\text{K} \cdot \left(\frac{1{,}778}{0{,}178}\right)^{0{,}4} = 736{,}03\,\text{K} = 462{,}88\,°\text{C} \ .$$

Um an die Temperatur im Zustand 4 zu kommen, muss man einen etwas längeren Weg gehen. Zuerst wird die Temperatur im Zustand 3 berechnet und zwar mit Hilfe des idealen Gasgesetzes für die Zustände 1 und 3:

$$p_1 V_1 = mRT_1 \quad \text{bzw.} \quad p_3 V_3 = mRT_3 \ .$$

Weil der Ausdruck *mR* in beiden Gleichungen vorkommt, kann man gleichsetzen und hat dann

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1} \cdot T_1 = \frac{30\,\text{bar} \cdot 0{,}178\,l}{1{,}013\,\text{bar} \cdot 1{,}778\,l} \cdot 293{,}15\,\text{K} = 869{,}14\,\text{K} = 595{,}99\,°\text{C} \ .$$

Dann können wir uns weiter zum Zustand 4 hangeln und haben dann

$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{(\chi-1)} = 869{,}14\,\text{K} \cdot \left(\frac{0{,}178}{1{,}778}\right)^{0{,}4} = 346{,}17\,\text{K} = 73{,}02\,°\text{C} \ .$$

Im Aufgabenteil b) geht es um Wärmen. Daher brauchen wir als Erstes die Wärmekapazität des Arbeitsgases im Motor

$$R = c_P - c_V = c_V \cdot (\kappa - 1) = 0{,}7171\,\text{kJ/(kgK)} \cdot 0{,}4 = 0{,}2868\,\text{kJ/(kgK)}$$

und dazu auch dessen Masse

$$m = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{1{,}013 \cdot 10^5\,\text{N/m}^2 \cdot 0{,}001778\,\text{m}^3}{286{,}8\,\text{J/(kgK)} \cdot 293{,}15\,\text{K}} = 2{,}14 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \ .$$

Dann können die Wärmen

$$Q_{23} = mc_V (T_3 - T_2) = 2{,}14 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 0{,}7171\,\text{kJ/(kgK)} \cdot (869{,}14\,\text{K} - 736{,}03\,\text{K})$$
$$= 204{,}3\,\text{J}$$

und

$$Q_{41} = mc_V (T_1 - T_4) = 2{,}14 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 0{,}7171\,\text{kJ/(kgK)} \cdot (293{,}15\,\text{K} - 346{,}17\,\text{K})$$
$$= -81{,}4\,\text{J}$$

berechnet werden. *Beide* Wärmen wurden beim Aufstellen der Energiebilanz als in den Motor hinein gehend angenommen. Deswegen bedeutet das negative Vorzeichen, dass die Wärme Q_{41} in Wahrheit *aus* dem Motor geht.

Um die (vermutlich abgegebene) Arbeit zu berechnen (Aufgabenteil c) wird der erste Hauptsatz für einen kompletten Arbeitszyklus aufgestellt und zwar wieder unter der Annahme, dass alle Energien in den Motor rein gehen:

$$0 = W_\mathrm{t} + Q_{23} + Q_{41} \ .$$

Damit wird die Arbeit

$$W_\mathrm{t} = -Q_{23} - Q_{41} = -204{,}3\,\mathrm{J} - (-81{,}4\,\mathrm{J}) = -122{,}9\,\mathrm{J}$$

berechnet. Diese hat ein negatives Vorzeichen, also haben wir *abgegebene* Arbeit.

Aufgabe: 28	**Kapitel: 9.2.4.1**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

Es wird jetzt ein Dampfkraft-Prozess betrachtet, der wie folgt abläuft: Siedendes Wasser des Zustandes 1 wird adiabat und reversibel auf p_2 = 160 bar verdichtet. Anschließend wird bis zum Zustand 3 isobar Wärme zugeführt. Der dann vorliegende überhitzte Dampf wird in einer Turbine ($\eta_{\mathrm{s,T}} < 1$) adiabat auf den unteren Prozessdruck p_1 = 0,03 bar entspannt. Würde die Turbine isentrop arbeiten, läge am Turbinenaustritt (Zustand 4‘) gerade trocken gesättigter Dampf vor. Im Kondensator des Prozesses wird isobar so lange gekühlt, bis das Wasser gerade vollständig kondensiert ist. Die Temperatur, bei der die Wärme abgegeben wird, liegt 15 K über der Umgebungstemperatur. Alle Informationen zu diesem Prozess sollen in einem T,s-Diagramm dargestellt werden.

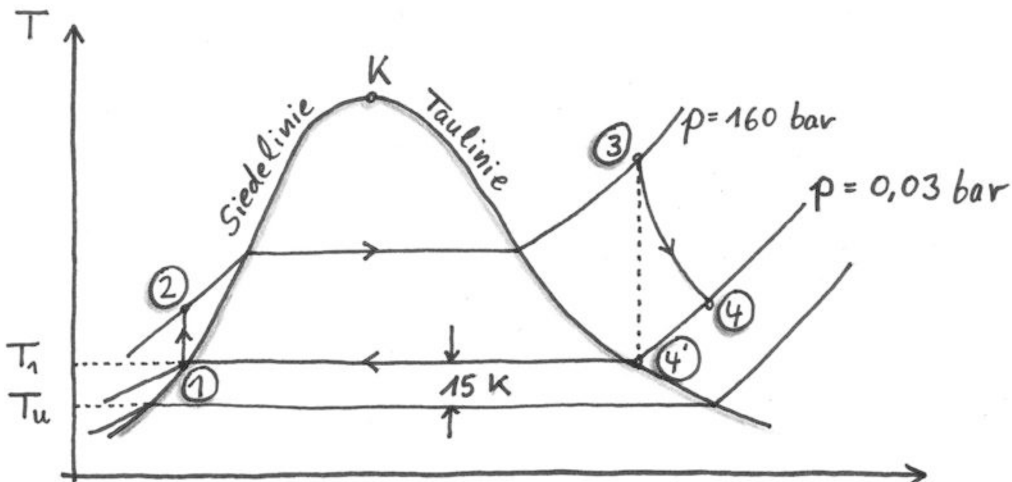
Lösung

Es ist „nur“ ein Diagramm gefordert. Das kommt in Prüfungsaufgaben oft vor und meistens als erste Teilaufgabe. Man sollte solche Diagramme daher am besten im Schlaf zeichnen können. Folgendes Vorgehen hat sich dabei gut bewährt:

- Zuerst werden die Achsen gezeichnet und beschriftet.
- Dann wird bei einem Clausius-Rankine-Prozess das Nassdampfgebiet eingezeichnet. Dabei sollte man wissen, wo der kritische Punkt liegt und wo die Siedelinie und die Taulinie zu finden sind. Wenn ein Prozess dargestellt werden soll, bei dem z.B. ein ideales Gas verwendet wird, dann kann und sollte man das Nassdampfgebiet natürlich komplett weg lassen.
- Dann kann man die gegebenen Zustandspunkte einzeichnen. Hier stecken Informationen zur Lage der Punkte oft in so Worten wie „gerade eben siedende Flüssigkeit“, „gesättigter Dampf“ oder „bei Umgebungsdruck“

- Weitere Zustandspunkte kann man dann anhand der Angaben über die Zustandsänderungen einzeichnen. Dazu muss man das Diagramm um Isobaren (wenn eine Zustandsänderung isobar ist), Isothermen (wenn eine Zustandsänderung isotherm ist) und so weiter ergänzen. Bei Kreisprozessen kommen zum Beispiel oft zwei Isobaren vor. Dann ist es wichtig zu wissen, welche Isobare die mit dem höheren Druck ist.
- Daher muss man sich vorher einmal hingesetzt haben und sich fragen, ob man in der Lage ist, in allen möglichen Zustandsdiagrammen zu erkennen, welche von zwei Isobaren (gilt genauso für Isothermen, Isentropen, usw.) die mit dem größeren Wert des Druckes (der Temperatur, der Entropie, usw.) ist. Wenn nein: Schluss machen für heute, oder den inneren Schweinehund überwinden, hinsetzen und entweder die Zusammenhänge verstehen oder auswendig lernen!

Wenn man das alles beachtet, dann sieht das T,s-Diagramm für den in der Aufgabe beschriebenen Prozess so aus:



13.7 Aufgaben zu Gemischen

Aufgabe: 29	**Kapitel: 10.2**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$**

Trockene Luft ist ein Gemisch aus N_2, O_2, Ar, CO_2 und Ne, deren Molanteile y_i und spezifische Wärmekapazitäten $c_{p,i}$ (bei 25 °C) in der Tabelle angegeben sind, sowie einiger anderer Gase (Kr, He, H_2, Xe, O_3) in vernachlässigbar kleiner Menge. Gesucht sind die Molmasse M, die Gaskonstante R, die Mischungsentropie ΔS und der Isentropenexponent χ der Luft bei 25 °C.

	N_2	O_2	Ar	CO_2	Ne
y_i	0,78084	0,20948	0,00934	0,00032	0,00002
$c_{p,i}$ in kJ/(kg/K)	1,0397	0,91738	0,5203	0,8432	1,0299
M_i in kg/kmol	28,0134	31,998	39,948	44,010	20,179

Stoffdaten der Bestandteile von Luft

Lösung

Zuerst kommt die Molmasse des Gemisches „Luft“ dran. Zu deren Berechnung mit Hilfe der Molmassen der Komponenten und der Zusammensetzung haben wir folgende Gleichung:

$$M = \sum_{i=1}^{j} M_\mathrm{i}\, y_\mathrm{i} = 28{,}9645\,\mathrm{kg/kmol}\ .$$

Die Berechnung der Gaskonstante ist schnell gemacht:

$$R = \frac{\overline{R}}{M} = \frac{8{,}314}{28{,}9645}\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}} = 0{,}2870\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}\ .$$

Die spezifische Mischungsentropie ist ganz allgemein

$$\Delta s = \frac{\Delta S}{m} = \sum_{i=1}^{j}\frac{m_\mathrm{i}}{m}\cdot\left(c_{\mathrm{p,i}}\ln\frac{T}{T_{\mathrm{i,1}}} - R_\mathrm{i}\ln\frac{p_{\mathrm{i,2}}}{p_{\mathrm{i,1}}}\right) = \sum_{i=1}^{j}\xi_\mathrm{i}\cdot\left(c_{\mathrm{p,i}}\ln\frac{T}{T_{\mathrm{i,1}}} - R_i\ln\frac{p_{\mathrm{i,2}}}{p_{\mathrm{i,1}}}\right)\ .$$

Da wir hier alle Komponenten bei 25 °C mischen, ist die Temperatur des Gemisches gleich der Temperatur aller Komponenten. Damit wird der erste Logarithmus in der Klammer schon mal zu Null. Der Zweite hat das Verhältnis der Partialdrücke nach und vor dem Mischen als Argument, was durch y_i ersetzt werden. Dann wird aus der Gleichung oben:

$$\Delta s = -\sum_{i=1}^{j}\xi_\mathrm{i} R_\mathrm{i}\ln y_\mathrm{i} = -\sum_{i=1}^{j}\xi_\mathrm{i}\frac{\overline{R}}{M_\mathrm{i}}\ln y_\mathrm{i}\ .$$

Für die Massenanteile ξ_i gilt

$$\xi_\mathrm{i} = \frac{M_\mathrm{i}}{M}y_\mathrm{i}\ ,$$

und damit haben wir

$$\Delta s = -\sum_{i=1}^{j} y_\mathrm{i}\frac{\overline{R}}{M}\ln y_\mathrm{i} = -R\cdot\sum_{i=1}^{j} y_\mathrm{i}\ln y_\mathrm{i} = 0{,}1627\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}\ .$$

Für den Isentropenexponenten müssen die Gaskonstante und die isobare Wärmekapazität des Gemisches bekannt sein. Die Gaskonstante des Gemisches haben wir schon, also fehlt nur noch dessen isobare Wärmekapazität. Dazu müssen wir als erstes die Massenanteile berechnen. Die Gleichung steht schon oben und dann folgt:

$$\xi_{N_2} = 0{,}7552\,,\quad \xi_{O_2} = 0{,}23142\,,\quad \xi_{Ar} = 0{,}01288\,,$$

$$\xi_{CO_2} = 0{,}00049 \quad \text{und} \quad \xi_{Ne} = 0{,}00001\,.$$

Damit wird die isobare Wärmekapazität

$$c_P = \sum_{i=1}^{j} \xi_i \cdot c_{P,i} = 1{,}0047 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

berechnet und als letztes auch der Isentropenexponent

$$\chi = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_P}{c_P - R} = \frac{1{,}0046}{1{,}0046 - 0{,}2870} = 1{,}4\ .$$

Aufgabe: 30	**Kapitel: 10.2**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

Ein adiabater Verdichter mit dem isentropen Wirkungsgrad $\eta_{s,V}$ = 0,910 soll Synthesegas von p_1 = 1,02 bar, t_1 = 30 °C auf p_2 = 6,75 bar verdichten. Das Synthesegas besteht aus H_2 und CO (Molanteil y_{CO} = 0,333) und hat im Normzustand (p_n = 1,013 bar, t_n = 0 °C) den Volumenstrom $\dot{V}_n$ = 100000 m³/h. Der Verdichter wird durch eine adiabate Dampfturbine ($\eta_{s,T}$ = 0,875) direkt angetrieben. Dampf steht mit 4,6 bar und 260 °C (h = 2983,2 kJ/kg, s = 7,3518 kJ/(kgK)) zur Verfügung. Er expandiert in der Turbine auf 0,08 bar.

a) Wie groß ist die erforderliche Verdichterleistung $P_{V,12}$ wenn die spezifischen isobaren Wärmekapazitäten von H_2 und CO konstant sind?

b) Wie groß muss der Dampfmassenstrom $\dot{m}_D$ sein? Zur Berücksichtigung von mechanischen Reibungsverlusten wird für die Berechnung der Turbinenleistung der Ausdruck $P_{T,12} = P_{V,12}/\eta_m$ mit η_m = 0,97 verwendet.

Komponente	M / kg/kmol	c_p / kJ/(kgK)
H_2	2,016	14,435
CO	28,011	1,044

Stoffdaten des Synthesegases

p / bar	t / °C	h' / kJ/kg	h'' / kJ/kg	s' / kJ/(kgK)	s'' / kJ/(kgK)
0,080	32,898	173,9	2577,1	0,5925	8,2296

Stoffdaten von Wasser

Lösung

In Aufgabenteil a) wird nur der Verdichter betrachtet. Dazu müssen zuerst die Molmasse und die Gaskonstante des Synthesegases berechnet werden:

$$M = \sum_{i=1}^{j} M_\mathrm{i}\, y_\mathrm{i} = 0{,}333 \cdot 28{,}011\,\mathrm{kg/kmol} + 0{,}667 \cdot 2{,}016\,\mathrm{kg/kmol}$$
$$= 10{,}678\,\mathrm{kg/kmol}\,.$$

Und damit haben wir auch dessen individuelle Gaskonstante

$$R = \frac{8{,}314\,\mathrm{kJ/(kmolK)}}{10{,}678\,\mathrm{kg/kmol}} = 0{,}7786\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}\ .$$

Jetzt kommt der Massenstrom des Gases im Normzustand dran:

$$\dot{m} = \dot{V}\rho = \frac{\dot{V}p_\mathrm{n}}{RT_\mathrm{n}} = \frac{27{,}778\,\mathrm{m^3/s} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{N/m^2}}{778{,}6\,\mathrm{J/(kgK)} \cdot 273{,}15\,\mathrm{K}} = 13{,}231\,\mathrm{kg/s}\ .$$

Da ein isentroper Wirkungsgrad gegeben ist, wird der Verdichter auch erst mal so behandelt. Soll heißen, die Entropie des idealen(!) Synthesegases bleibt beim Verdichten konstant

$$s_2 - s_1 = 0 = c_\mathrm{P} \ln\frac{T_{2'}}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}\ .$$

Damit kann die Temperatur $T_{2'}$ berechnet werden, die sich im reversiblen Fall im Verdichteraustritt ergeben *würde*. Vorher muss die isobare Wärmekapazität

$$c_\mathrm{P} = c_\mathrm{P,CO} \cdot \xi_\mathrm{CO} + c_{\mathrm{P,H_2}} \cdot \xi_{\mathrm{H_2}} = c_\mathrm{P,CO} \cdot \frac{M_\mathrm{CO}}{M}\, y_\mathrm{CO} + c_{\mathrm{P,H_2}} \cdot \frac{M_{\mathrm{H_2}}}{M}\, y_{\mathrm{H_2}}$$
$$= 1{,}044\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot \frac{28{,}011}{10{,}678} \cdot 0{,}333 + 14{,}435\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot \frac{2{,}016}{10{,}678} \cdot 0{,}667$$
$$= 2{,}73\,\mathrm{kJ/(kgK)}$$

bestimmen und wir bekommen

$$T_{2'} = T_1 \cdot \mathrm{e}^{\left(\frac{R}{c_p}\ln\frac{p_2}{p_1}\right)} = 303{,}15\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{e}^{\left(\frac{0{,}7786}{2{,}687}\ln\frac{6{,}75}{1{,}02}\right)} = 519{,}67\,\mathrm{K}\ .$$

Jetzt kann endlich die Realität mit Hilfe des isentropen Wirkungsgrades zurückkehren und wir berechnen die Verdichterleistung

$$P_{V,12} = \frac{1}{\eta_{s,V}} \cdot \dot{m} \cdot w_{t,12} = \frac{1}{\eta_{s,V}} \cdot \dot{m} \cdot c_p (T_{2'} - T_1)$$

$$= \frac{1}{0{,}91} \cdot 13{,}231\,\text{kg/s} \cdot 2{,}73\,\text{kJ/(kgK)} \cdot (519{,}67\,\text{K} - 303{,}15\,\text{K}) = 8{,}595\,\text{MW}\,.$$

Im Aufgabenteil b) wird die Turbine behandelt. Auch hier ist ein isentroper Wirkungsgrad gegeben. Um die Enthalpie im Austritt für die reversibel arbeitende Turbine zu bestimmen, muss der Dampfgehalt x bestimmt werden:

$$x = \frac{s - s'}{s'' - s'} = \frac{7{,}3518 - 0{,}5925}{8{,}2296 - 0{,}5925} = 0{,}88506\ .$$

Für den reversiblen Fall ist damit die spezifische Enthalpie im Austritt

$$h_{D,2'} = x \cdot h'' + (1 - .x) \cdot h' = 0{,}85506 \cdot 2577{,}1\,\text{kJ/kg} + (1 - 0{,}85506) \cdot 173{,}9\,\text{kJ/kg}$$

$$= 2300{,}88\,\text{kJ/kg}$$

und jetzt kommen wir über die Energiebilanz der Turbine

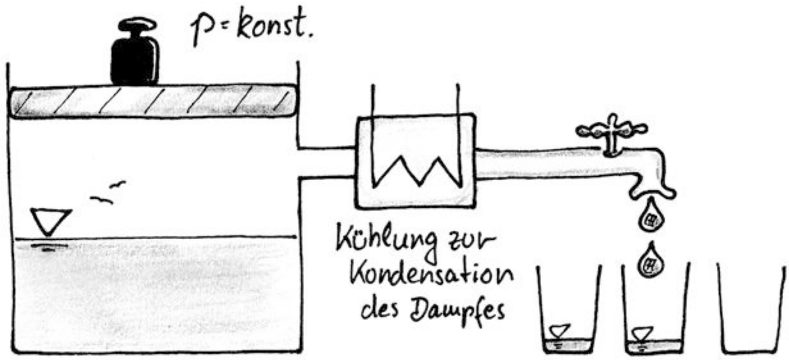
$$P_{T,12} = \frac{P_{V,12}}{\eta_m} = \dot{m}_D \cdot \eta_{s,T} \cdot (h_{D,1} - h_{D,2'})$$

zum gesuchten Dampfmassenstrom

$$\dot{m}_D = \frac{P_{V,12}}{\eta_m \cdot [\eta_{s,T} \cdot (h_{D,1} - h_{D,2'})]} = \frac{8595\,\text{kW}}{0{,}97 \cdot [0{,}875 \cdot (2983{,}2\,\text{kJ/kg} - 2300{,}88\,\text{kJ/kg})]}$$

$$= 14{,}84\,\text{kg/s}\ .$$

Aufgabe: 31	**Kapitel: 10.2.4**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**



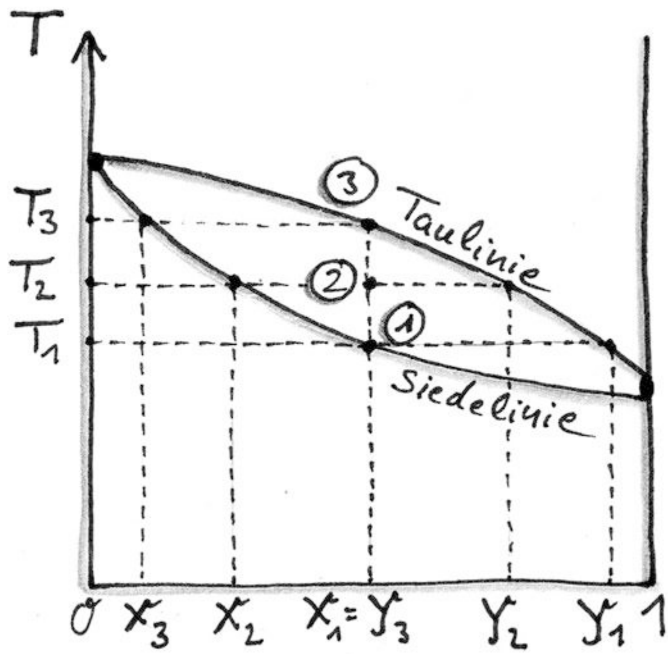
Mit einem binären, idealen Gemisch wird eine fraktionierte Destillation durchgeführt. Der Begriff der Destillation ist hoffentlich klar. Das ist, wenn ein Gemisch, normalerweise durch Erwärmen, soweit wie möglich[178] in seine reinen Komponenten getrennt wird. Fraktioniert läuft das Ganze dann ab, wenn man den Vorgang, wie hier im Bild zu sehen ist, in einem geschlossenen Behälter durchführt, der so gebaut ist, dass der Druck im Inneren konstant bleibt und man dann die einzelnen so genannten Fraktionen aus der Dampfphase abzieht. Eine Fraktion ist eine sehr kleine Menge an Stoff, deren Entnahme die Verhältnisse im System nicht merklich ändert.

Bei der hier durchgeführten Destillation wird insgesamt dreimal eine kleine Menge Destillat abgenommen. Die erste Entnahme findet unmittelbar nach dem Siedebeginn statt und die letzte am Ende des Siedevorganges. Die Temperaturerhöhung zwischen der ersten und der zweiten Abnahme ist genauso groß wie die Temperaturerhöhung zwischen der zweiten und der dritten Abnahme. Der Vorgang dieser Destillation ist in einem T,xy-Diagramm darzustellen.

Lösung

Die Lösung ist eigentlich ganz einfach. Zuerst brauchen wir ein T,xy-Diagramm für eine ideale, binäre Lösung und dann müssen nur noch die drei Punkte eingezeichnet werden, an denen Destillat entnommen wird. Laut Aufgabenstellung muss der Abstand zwischen der Temperatur T_1 bei der ersten Entnahme zu Siedebeginn und der Temperatur T_2 bei der zweiten Entnahme genauso groß sein, wie der Abstand zwischen T_2 und T_3, der Temperatur am Ende des Siedevorganges. Dann können im Diagramm auch die Zusammensetzungen der Destillat-Phasen zu allen Zeitpunkten abgelesen werden. Beim Siedebeginn (Zustand 1, nur Flüssigkeit im Behälter) hat die entnommene Dampfphase die Zusammensetzung y_1, im Zustand 2 Zusammensetzung y_2 und im Zustand 3 (alles im Behälter ist gerade gasförmig), die Zusammensetzung y_3.

[178] Die Zerlegung in 100% reine Reinstoffe geht allerdings nicht.



13.8 Aufgaben zu feuchter Luft

Aufgabe: 32	**Kapitel: 11.3.1**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} = 0$**

Feuchte Luft mit der relativen Feuchte $\varphi_1 = 0{,}50$ wird von $p_1 = 1{,}02$ bar, $t_1 = 20$ °C auf $p_2 = 4{,}55$ bar adiabat verdichtet und dann isobar abgekühlt.

a) Bei welcher Temperatur $t_{3,a}$ beginnt Wasserdampf zu kondensieren, wenn mit der Antoine-Gleichung für den Dampfdruck gerechnet wird?

$$\log_{10}\left[\frac{p_S}{\text{bar}}\right] = 5{,}19625 - \frac{1730{,}630}{233{,}426 + t/°\text{C}}$$

b) Bei welcher Temperatur $t_{3,b}$ beginnt Wasserdampf zu kondensieren, wenn mit den Stoffdaten aus der Tabelle und linearer Interpolation gerechnet wird?

t / °C	20	25	30	31	32	33	34	35
p_s / mbar	23,30	31,58	42,32	44,81	47,43	50,18	53,07	56,09

Dampfdruck von Wasser

Lösung

Beide Teilaufgaben haben denselben Lösungsweg, nur dass die verwendeten Stoffdaten unterschiedliche Quellen haben. Einmal haben wir eine Gleichung und einmal muss in einer Dampftafel interpoliert werden. Es geht hier also letztlich um den Vergleich der linearen Interpolation mit einer Gleichung. Zuerst werden die Sättigungspartialdrücke des Wasserdampfes bei 20 °C ausgerechnet. Diese sind bei Verwendung der angegebenen Antoine-Gleichung

$$\log_{10}\left[\frac{p_{1a}}{\text{bar}}\right] = 5{,}19625 - \frac{1730{,}630}{233{,}426 + 20} \quad \Leftrightarrow \quad p_{1a} = 23{,}2977 \text{ mbar}$$

und bei Verwendung der Dampftafel

$$p_{2a} = 23{,}30 \text{ mbar} \ .$$

Wir können die Wasserdampfbeladung jeweils für den Zustand 1 ausrechnen und bekommen die folgenden Ergebnisse:

$$x_{W,D,1a} = 0{,}622 \cdot \left(\frac{\varphi \cdot p_S}{p - \varphi \cdot p_S} \right) = 0{,}622 \cdot \left(\frac{0{,}5 \cdot 0{,}0232977}{1{,}02 - 0{,}5 \cdot 0{,}0232977} \right) = 0{,}0071856 \ .$$

$$x_{W,D,1b} = 0{,}622 \cdot \left(\frac{0{,}5 \cdot 0{,}02330}{1{,}02 - 0{,}5 \cdot 0{,}02330} \right) = 0{,}0071863 \ .$$

Kondensation in dem Augenblick ein, wenn durch die Abkühlung der Partialdruck des Wasserdampfes gleich dem Sättigungspartialdruck geworden ist. Das ist der Zustand 3. Die Wasserdampfbeladung ist unverändert, aber jetzt ist $\varphi =$ 1 und die beiden letzten Gleichungen können jeweils zu

$$0{,}622 \cdot \left(\frac{p_{\mathrm{S,3a}}}{4{,}55\,\mathrm{bar} - p_{\mathrm{S,3a}}} \right) = 0{,}0071856 \quad \text{und}$$

$$0{,}622 \cdot \left(\frac{p_{\mathrm{S,3b}}}{4{,}55\,\mathrm{bar} - p_{\mathrm{S,3b}}} \right) = 0{,}0071863$$

umgeschrieben werden. Am Ende bekommt man dann die Werte

$$p_{S,3a} = 51{,}96\,\mathrm{mbar} \quad \text{und} \quad p_{S,3b} = 51{,}97\,\mathrm{mbar}$$

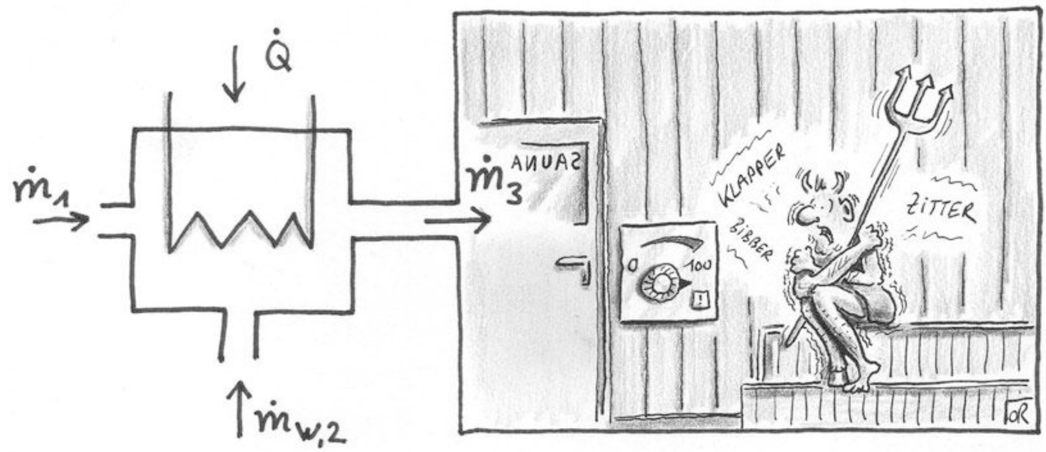
für den Partialdruck des Wasserdampfes. Daraus wird jetzt zuerst die Temperatur für den Fall a) berechnet

$$\log_{10}\left[\frac{0{,}05196}{\mathrm{bar}}\right] = 5{,}19625 - \frac{1730{,}630}{233{,}426 + t_{3a}/{^\circ\mathrm{C}}} \;\Leftrightarrow\; t_{3a} = 33{,}62\ {^\circ\mathrm{C}}$$

und dann die Temperatur für den Fall b)

$$t_{3b} = 33\,{^\circ\mathrm{C}} + \frac{51{,}97\,\mathrm{mbar} - 53{,}07\,\mathrm{mbar}}{50{,}18\,\mathrm{mbar} - 53{,}07\,\mathrm{mbar}} \cdot (34\,{^\circ\mathrm{C}} - 33\,{^\circ\mathrm{C}}) = 33{,}38\ {^\circ\mathrm{C}}\ .$$

Die Ergebnisse unterscheiden sich erst hinter dem Komma, also im Bereich von Zehntel Grad. Auch wenn die Methode der linearen Interpolation im Computer-Zeitalter etwas altbacken wirkt: Man kann dieses Verfahren ruhig anwenden und bekommt auch meistens akzeptable Resultate dabei.



Aufgabe: 33 **Kapitel: 11.3.2** **Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

Zur Beheizung einer finnischen Sauna (das sind die für Rücklichtreparierer und Saisonkennzeichenfahrer) wird gesättigte feuchte Luft mit den Daten $t_1 = 20{,}0$ °C, $p_1 = 990$ mbar und dem Volumenstrom $\dot{V}_1 = 180$ m³/h in eine beheizte Mischkammer geleitet, in die auch Wasser mit $t_2 = 35{,}0$ °C einströmt. Aus der Mischkammer soll feuchte Luft mit $t_3 = 60{,}0$ °C, $p_3 = 1013$ mbar und der relativen Feuchte $\varphi_3 = 0{,}9$ für die Sauna kommen. Der Sättigungsdruck von Wasserdampf ist $p_s(t = 20\ °C) = 23{,}30$ mbar und $p_s(t = 60\ °C) = 198{,}72$ mbar.

a) Wie groß sind die Wasserdampfbeladungen x_1 und x_3 der Luftströme?

b) Wie groß sind der Massenstrom $\dot{m}_{W,2}$ des zugeführten Wassers und der Massenstrom $\dot{m}_3$ der abströmenden feuchten Luft?

c) Wie groß ist der Wärmestrom $\dot{Q}$ mit dem die Mischkammer beheizt werden muss?

Stoffdaten	Wasser	Luft
spezifische isobare Wärmekapazitäten	$c_{p,W,D} = 1{,}852$ kJ/(kg K) $c_{p,W,F} = 4{,}19$ kJ/(kg K) $c_{p,W,E} = 2{,}05$ kJ/(kg K)	$c_{p,L} = 1{,}005$ kJ/(kg K)
Verdampfungsenthalpie bei 0°C	$r_{W,D} = 2502$ kJ/kg	-

Lösung

Für a) haben wir eine Gleichung, die man auf die Massenströme der Reihe nach anwenden kann:

$$x_{\mathrm{W,D}} = 0{,}622 \cdot \left(\frac{p_{\mathrm{W,D}}}{p - p_{\mathrm{W,D}}} \right) \ .$$

Man muss jetzt nur noch wissen, dass beim Zustand 1 der Partialdruck des Wasserdampfes gleich dem Sättigungspartialdruck bei der entsprechenden Temperatur ist, weil es sich dort um gesättigte feuchte Luft handelt. Dann kann man

$$x_{\mathrm{W,D,1}} = 0{,}622 \cdot \left(\frac{23{,}23\,\mathrm{mbar}}{990\,\mathrm{mbar} - 23{,}23\,\mathrm{mbar}} \right) = 0{,}01495$$

schreiben. Für den Zustand 3 kann der Partialdruck des Wasserdampfes mit Hilfe der relativen Feuchte und des Sättigungspartialdrucks ausgedrückt werden:

$$x_{\mathrm{W,D,3}} = 0{,}622 \cdot \left(\frac{0{,}9 \cdot 198{,}72\,\mathrm{mbar}}{1013\,\mathrm{mbar} - 0{,}9 \cdot 198{,}72\,\mathrm{mbar}} \right) = 0{,}13336 \ .$$

Für den Teil b) brauchen wir eine Massenbilanz. Genauer gesagt: Zwei Massenbilanzen, wir können nämlich Wasser und Luft einzeln bilanzieren.

Wasser: $\dot{m}_{\mathrm{W,D,1}} + \dot{m}_{\mathrm{W,F,2}} = \dot{m}_{\mathrm{W,D,3}}$

Luft: $\dot{m}_{\mathrm{L,1}} = \dot{m}_{\mathrm{L,3}}$.

Das spezifische Volumen der feuchten Luft im Eintritt (Zustand 1) ist

$$v_{1+x,1} = \frac{T_1 \cdot R_{\mathrm{W,D}}}{p_1} \cdot \left(0{,}622 + x_{\mathrm{W,D,1}} \right)$$

$$= \frac{293{,}15\,\mathrm{K} \cdot 461{,}5\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{99000\,\mathrm{N/m^2}} \cdot \left(0{,}622 + 0{,}01653 \right) = 0{,}872585\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg}}$$

und damit ist der Massenstrom der Luft im Eintritt

$$\dot{m}_{L,1} = \frac{\dot{V}_1}{v_{1+x,1}} = \frac{0{,}05\,\mathrm{m^3/s}}{0{,}872585\,\mathrm{m^3/kg}} = 0{,}05730\,\mathrm{kg/s} \ .$$

Jetzt kann der Massenstrom des Wasserdampfes

$$\dot{m}_{W,D,1} = x_{\mathrm{W,D,1}} \cdot \dot{m}_{\mathrm{L,1}} = 0{,}01495 \cdot 0{,}05730\,\mathrm{kg/s} = 0{,}0008567\,\mathrm{kg/s}$$

im selben Zustand berechnet werden.

Für den Austritt aus der Mischkammer (Zustand 3) wird ganz ähnlich vorgegangen. Der Massenstrom der trockenen Luft ist ja schon bekannt und damit kann der Massenstrom an Wasserdampf berechnet werden:

$$\dot{m}_{\mathrm{W,D,3}} = \dot{m}_{\mathrm{L,3}} \cdot x_{\mathrm{W,D,3}} = 0{,}05730\,\mathrm{kg/s} \cdot 0{,}13336 = 0{,}00764\,\mathrm{kg/s}\ .$$

Damit gilt für den Massenstrom des im Zustand 2 zugeführten flüssigen Wassers

$$\begin{aligned}\dot{m}_{\mathrm{W,F,2}} &= \dot{m}_{\mathrm{W,D,3}} - \dot{m}_{\mathrm{W,D,1}} = 0{,}00764\,\mathrm{kg/s} - 0{,}0008567\,\mathrm{kg/s}\\ &= 0{,}00678\,\mathrm{kg/s}\end{aligned}$$

und der Massenstrom der feuchten Luft, der in die Sauna geht, ist

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_{\mathrm{L,3}} + \dot{m}_{\mathrm{W,D,3}} = 0{,}0573\,\mathrm{kg/s} + 0{,}00764\,\mathrm{kg/s} = 0{,}0649\,\mathrm{kg/s}\ .$$

Im Aufgabenteil c) muss für die Berechnung des Wärmstromes die Energiebilanz aufgestellt werden. Diese lautet

$$\dot{Q} = H_3 - H_1 - H_2\ ,$$

wenn man gleich passend umstellt. Die Enthalpien können durch die spezifischen Größen und die Massenströme ersetzt werden

$$\dot{Q} = \dot{m}_{\mathrm{L,3}} \cdot h_{\mathrm{L,3}} + \dot{m}_{\mathrm{W,D,3}} \cdot h_{\mathrm{W,D,3}} - \dot{m}_{\mathrm{L,1}} \cdot h_{\mathrm{L,1}} + \dot{m}_{\mathrm{W,D,1}} \cdot h_{\mathrm{W,D,1}} - \dot{m}_{\mathrm{W,F,2}} \cdot h_{\mathrm{W,F,2}}$$

und die *spezifischen* Enthalpien können mit Hilfe von Stoffdaten berechnet werden:

$$\begin{aligned}\dot{Q} = {} & \dot{m}_{\mathrm{L,3}} \cdot c_{\mathrm{P,L}} \cdot t_3 + \dot{m}_{\mathrm{W,D,3}} \cdot \left(c_{\mathrm{P,W,D}} \cdot t_3 + r_{\mathrm{W,D}}\right)\\ & - \dot{m}_{\mathrm{L,1}} \cdot c_{\mathrm{P,L}} \cdot t_1 - \dot{m}_{\mathrm{W,D,1}} \cdot \left(c_{\mathrm{P,W,D}} \cdot t_1 + r_{\mathrm{W,D}}\right) - \dot{m}_{\mathrm{W,F,2}} \cdot c_{\mathrm{P,W,F}} \cdot t_2\ .\end{aligned}$$

Dann wird aus der letzten Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{Q} = {} & 0{,}05730\,\mathrm{kg/s} \cdot 1{,}005\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot 60\,°\mathrm{C}\\ & + 0{,}00764\,\mathrm{kg/s} \cdot \left(1{,}852\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot 60\,°\mathrm{C} + 2502\,\mathrm{kJ/kg}\right)\\ & - 0{,}05730\,\mathrm{kg/s} \cdot 1{,}005\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot 20\,°\mathrm{C}\\ & - 0{,}0008567\,\mathrm{kg/s} \cdot \left(1{,}852\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot 20\,°\mathrm{C} + 2502\,\mathrm{kJ/kg}\right)\\ & - 0{,}00678\,\mathrm{kg/s} \cdot 4{,}19\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot 35\,°\mathrm{C}\\ = {} & 19{,}1\,\mathrm{kW}\end{aligned}$$

und „schon“ haben wir den zur Beheizung der Sauna erforderlichen Wärmestrom berechnet. Der Wärmestrom ist positiv, also war unsere Annahme richtig, dass er in die Mischkammer hinein geht.

Aufgabe: 34 Kapitel: 11.3.2 Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$

Eine nicht gemischte Sauna mit $t = 60$ °C und $\varphi = 0{,}6$ wird versehentlich durch einen Elektrotechnik-Studenten betreten. Dessen Brille hat in dem Augenblick, wo die Saunatür von innen zugemacht wird, eine Temperatur von 25 °C und beschlägt folgerichtig sofort. Wie lange dauert es, bis der „männliche“[179] Saunierer wieder freie Sicht hat und seinen *Fehler* erkennen kann, die Brille mit der Masse $m_B = 0{,}05$ kg und der mittleren Wärmekapazität des Brillenmaterials $c_B = 500$ J/(kgK) also nicht mehr beschlagen ist? Die Wärmeaufnahme der Brille kann für die ersten 5 Minuten nach dem Betreten der Sauna mit $\dot{Q} = 3\,\mathrm{W}$ als konstant angenommen werden. Der Sättigungsdruck von Wasserdampf soll mit der Antoine-Gleichung

$$\log_{10}\left[\frac{p_S}{\text{bar}}\right] = 5{,}19625 - \frac{1730{,}630}{233{,}426 + t/{}^\circ\mathrm{C}}$$

berechnet werden.

[179] ...über die Männlichkeit von E-Technikern lässt sich diskutieren.

Lösung

Zuerst muss für die Luft in der Sauna die Taupunkttemperatur berechnet werden, denn das ist genau die Temperatur, welche die Brille erreichen muss, damit sich das auf dem Glas kondensierte Wasser wieder verflüchtigt. Dazu wird zuerst der Partialdruck des Wasserdampfes in der Sauna bei den gegebenen Werten mit Hilfe der Antoine-Gleichung berechnet:

$$p_{\mathrm{W,D}} = \varphi \cdot p_{\mathrm{S}}(t = 60\,°\mathrm{C}) = 0{,}6 \cdot 10^{\left(5{,}19625 - \frac{1730{,}630}{233{,}426+60}\right)} = 119{,}23\,\mathrm{mbar} \ .$$

Dieser Druck wird dann wieder in die Antoine-Gleichung eingesetzt um die Taupunkt-Temperatur

$$T_{\mathrm{T}} = 49{,}36\,°\mathrm{C}$$

zu berechnen. Jetzt wird die Energiebilanz für die Brille aufgestellt (erster Hauptsatz für ein instationäres System):

$$\frac{dU}{d\tau} = \dot{Q}$$

und dann die thermische Zustandsgleichung für die Brille eingesetzt:

$$\frac{dU}{dt} = m_{\mathrm{B}} \cdot c_{\mathrm{B}} \ .$$

Wenn man dann noch umsortiert, dann haben wir die Temperaturänderung mit der Zeit, die wegen des (laut Aufgabenstellung) konstanten Wärmestroms auch konstant ist:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{3\,\mathrm{W}}{500\,(\mathrm{J/kgK}) \cdot 0{,}05\,\mathrm{kg}} = 0{,}12\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \ .$$

Daraus wird dann

$$d\tau = \frac{49{,}36\,°\mathrm{C} - 25\,°\mathrm{C}}{0{,}12\ \mathrm{K/s}} = 203{,}03\,\mathrm{s} \ .$$

Hinter der letzten Umformung steckt übrigens ein einfaches Integral über einen konstanten Wert. Die Erkenntnis kommt unserem E-Techniker also frühestens nach 3 Minuten und ca. 23 Sekunden, sofern sich nicht vorher schon irgendwelche Auffälligkeiten ergeben haben, die dann aber ohnehin nicht Gegenstand der Thermodynamik wären.

13.9 Aufgaben zur Verbrennung

Aufgabe: 35	**Kapitel: 12.2**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} > 0$**

In einem Behälter befindet sich ein Gemisch aus 1 kg Methan CH_4 und 5 kg Sauerstoff O_2. Das Gemisch wird gezündet.

a) Wie lautet die Reaktionsgleichung?

b) Welche Masse Sauerstoff ist notwendig, um 1 kmol Methan zu verbrennen?

c) Wie viel Sauerstoff bleibt übrig, wenn das 1 kg des Methans im Behälter vollständig verbrennt?

Gegeben: $M_{CH_4} = 16$ kg/kmol, $M_{O_2} = 32$ kg/kmol

Lösung

Um bei a) die Reaktionsgleichung hinschreiben zu können, muss man die Chemie der Verbrennung der chemischen Elemente des Methans (Kohlenstoff und Wasserstoff) kennen:

$$\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{CO_2}$$

$$\mathrm{H_2} + \frac{1}{2}\mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{H_2O}$$

Dann können wir versuchsweise einmal Folgendes hinschreiben:

$$1\,\mathrm{mol\,CH_4} + n_1\,\mathrm{mol\ O_2} \longrightarrow n_2\,\mathrm{mol\,CO_2} + n_3\,\mathrm{mol\,H_2O} \ .$$

Die n_i sind die noch unbekannten stöchiometrischen Koeffizienten der Reaktionsgleichung, die wir durch eine Bilanz für jedes beteiligte chemische Element (oder durch Ausprobieren) rausbekommen. Chemisch korrekt lautet die Reaktionsgleichung

$$\mathrm{CH_4} + 2\,\mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{CO_2} + 2\,\mathrm{H_2O} \ .$$

Aufgabenteil b) ist jetzt easy: Die Reaktionsgleichung sagt uns, dass zur Verbrennung von 1 kmol Methan genau 2 kmol Sauerstoff erforderlich sind. Damit wird die erforderliche Sauerstoff- Masse zu

$$m_{\mathrm{O_2}} = 2\,\mathrm{kmol} \cdot M_{\mathrm{O_2}} = 64\,\mathrm{kg} \ .$$

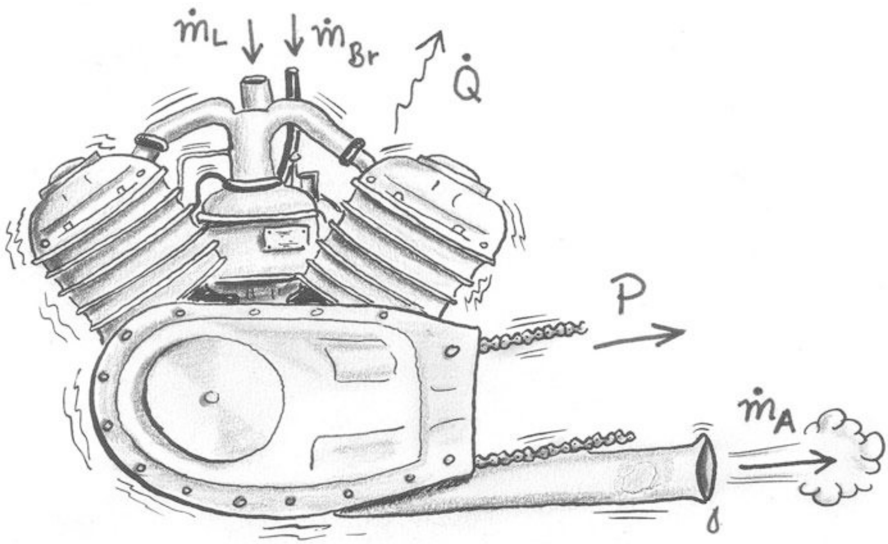
Aufgabenteil c) ist auch ganz entspannt zu machen. Im Behälter ist 1kg Methan, also ist dessen Stoffmenge

$$n_{\mathrm{CH_4}} = \frac{1\,\mathrm{kg}}{M_{\mathrm{CH_4}}} = \frac{1}{16}\,\mathrm{kmol} \ .$$

Laut der Reaktionsgleichung wird dafür die doppelte Menge an Sauerstoff benötigt. Daher ist die Masse an Sauerstoff, die nach der Verbrennung übrig bleibt

$$m_{O_2,\mathrm{Rest}} = 5\,\mathrm{kg}\ - \frac{1}{8}\,\mathrm{kmol} \cdot 32\,\frac{\mathrm{kmol}}{\mathrm{kg}} = 1\,\mathrm{kg}\ .$$

Aufgabe: 36	**Kapitel: 12.4**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} >> 0$**



In einem Verbrennungsmotor wird Benzin (Elementaranalyse: $x_C = 0{,}855$, $x_{H2} = 0{,}145$, Heizwert: $h_u = 43{,}5$ MJ/kg) beim Luftverhältnis $\lambda = 1$ verbrannt. Die Motorleistung ist $P = 62{,}5$ kW, der Brennstoffmassenstrom beträgt $\dot{m}_{Br} = 5{,}75$ g/s. Der Brennstoff und die Luft werden bei $t_{Br} = t_L = 25$ °C zugeführt. Das Abgas verlässt den Motor mit $t_A = 900$ °C. Man berechne den Wärmestrom $\dot{Q}$, der durch Kühlwasser oder Kühlluft abgeführt wird.

Die mittlere spezifischen isobaren Wärmekapazitäten $\tilde{c}_P$ des stöchiometrischen Verbrennungsgases stehen in der folgenden Mini-Tabelle.

t / °C	$\tilde{c}_P$ / kJ/(kgK)
25	1,0595
900	1,1835

Lösung

Als Erstes bitte den ersten Hauptsatz für den Verbrennungsvorgang aufstellen. Dann haben wir

$$\dot{Q} = \dot{m}_{\mathrm{Br}}\left[c_{\mathrm{P,B}}\left(t_{\mathrm{B}} - t_0\right)\right] + \dot{m}_{\mathrm{Br}}\lambda L_{\min}\left[c_{\mathrm{P,L}}\left(t_{\mathrm{L}} - t_0\right)\right] - \dot{m}_{\mathrm{A}}\left[c_{\mathrm{P,A}}\left(t_{\mathrm{A}} - t_0\right)\right] + \dot{m}_{\mathrm{Br}} h_{\mathrm{u}} - P$$

für den abgehenden Wärmestrom. Jetzt können wir uns ein paar von den Größen in der Gleichung besorgen. Zuerst die Massenströme. Der stöchiometrische Sauerstoffbedarf ist

$$\overline{O}_{\min} = \left(\frac{x_{\mathrm{c}}}{12} + \frac{x_{\mathrm{H_2}}}{4}\right) = \left(\frac{0{,}855}{12} + \frac{0{,}145}{4}\right) = 0{,}1075\ \frac{\mathrm{kmol\,O_2}}{\mathrm{kg\,Br}}$$

und daraus kann die erforderliche Sauerstoff*masse* berechnet werden

$$L_{\min} = 0{,}1075\frac{\mathrm{kmol\,O_2}}{\mathrm{kg\,Br}} \cdot \frac{32\dfrac{\mathrm{kg\,O_2}}{\mathrm{kmol\,O_2}}}{0{,}232} = 14{,}83\frac{\mathrm{kg\,Luft}}{\mathrm{kg\,Br}}$$

und ebenso der Luftmassenstrom

$$\dot{m}_{\mathrm{L}} = \dot{m}_{\mathrm{Br}} \cdot \lambda \cdot L_{\min} = 5{,}75\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}} \cdot 14{,}83 = 85{,}26\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}\quad .$$

Mit einer einfachen Massenbilanz um den stationär arbeitenden Motor bekommen wir dann auch den Abgasmassenstrom

$$\dot{m}_{\mathrm{A}} = \dot{m}_{\mathrm{Br}} + \dot{m}_{\mathrm{L}} = 91{,}01\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}\quad .$$

Dann nehmen wir uns die Wärmekapazitäten für das Abgas vor:

$$\tilde{c}_{\mathrm{P,A}} = \frac{\tilde{c}_{\mathrm{P}}\Big|_{0\,°\mathrm{C}}^{900\,°C} \cdot 900\,°\mathrm{C} - \tilde{c}_{\mathrm{P}}\Big|_{0\,°\mathrm{C}}^{25\,°C_1} \cdot 25\,°\mathrm{C}}{900\,°\mathrm{C} - 25\,°\mathrm{C}} = 1{,}1870\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}\quad .$$

Als Bezugstemperatur nehmen wir natürlich t_0 = 25 °C und damit wird die Bilanz etwas einfacher:

$$\begin{aligned}
\dot{Q} = &\quad \dot{m}_{\mathrm{Br}} h_{\mathrm{u}} - P - \dot{m}_{\mathrm{A}}\left[c_{\mathrm{P,A}}\left(t_{\mathrm{A}} - t_0\right)\right] \\
= &\quad 5{,}75 \cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \cdot 43{,}5 \cdot 10^{3}\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} - 62{,}5\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{s}} \\
&\quad - 91{,}01 \cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \cdot \left[1{,}1870\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}} \cdot \left(900\,°\mathrm{C} - 25\,°\mathrm{C}\right)\right] \\
= &\quad 93{,}1\,\mathrm{kW}\,.
\end{aligned}$$

Der Wärmestrom wurde in der Energiebilanz als vom Motor abgegeben angesetzt und das positive Vorzeichen des Ergebnisses bestätigt unsere Annahme.

Aufgabe: 37	**Kapitel: 12.4**	**Schwierigkeitsgrad: $S^{irr} >> 0$**

Der adiabaten Brennkammer einer Gasturbinenanlage wird Gasöl als Brennstoff mit $\dot{m}_B = 0{,}975$ kg/s und $t_B = 20$ °C zugeführt. Die zur Verbrennung benötigte Luft ($R_L = 0{,}2871$ kJ/(kgK), $\dot{m}_L = 50{,}0$ kg/s) wird mit $t_1 = 20$ °C und $p_1 = 1{,}01$ bar aus der Umgebung angesaugt und in einem adiabatem Verdichter ($\eta_{s,V} = 0{,}877$) auf $p_2 = 12{,}5$ bar verdichtet. Die Temperaturabhängigkeiten des Heizwertes des Gasöls $h_U = 42{,}9$ MJ/kg und der Wärmekapazität $c_B = 2{,}05$ kJ/(kgK) können im Temperaturbereich zwischen 0 °C und 100 °C vernachlässigt werden. Der stöchiometrische Luftbedarf für die Verbrennung ist $L_{min} = 14{,}527$. In der ersten Tabelle stehen die spezifischen Entropien der als ideales Gas zu behandelnden Luft .

t / °C	20	300	320	340
s_L / kJ/(kgK)	6,8473	7,5299	7,5658	7,6007

Spezifische Entropie von Luft bei 1,01 bar

Die mittleren spezifischen Wärmekapazitäten von Luft und dem stöchiometrischen Verbrennungsgas (beides ideale Gase) sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

t / °C	20	300	350	400	1000	1050	1100
$\tilde{c}_{P,L}$ / kJ/(kgK)	1,0041	1,0192	1,0237	1,0286	1,0910	1,0956	1,1001
$\tilde{c}_{P,A,stöch.}$ / kJ/(kgK)	1,0537	1,0901	1,0973	1,1047	1,1916	1,1979	1,2041

Spezifische Wärmekapazitäten von Luft und Abgas

a) Wie groß ist die Leistung P_{12} des Verdichters?
b) Wie groß ist die Celsiustemperatur t_2 der Luft beim Eintritt in die Brennkammer?
c) Wie groß ist das Luftverhältnis λ der Verbrennung?
d) Mit welcher Temperatur t_A strömt das Verbrennungsgas aus der Brennkammer? Tipp: Wähle $t_0 = 0$ °C als Bezugstemperatur für die Aufstellung der Energiebilanz der Brennkammer.

Lösung

Im Aufgabenteil a) wird zuerst nur der Verdichter betrachtet. Da wir einen isentropen Wirkungsgrad gegeben haben, müssen wir zuerst einmal die Temperatur im Austritt bestimmen, die die Luft *hätte*, wenn der Verdichter reversibel *wäre*. Weil wir davon ausgehen dürfen, dass die Entropie gleich bleibt, können wir für die Luft als ideales Gas

$$s_2 - s_1 = 0 = c_P \cdot \ln\frac{T_2'}{T_1} - R_L \ln\frac{p_2}{p_1}$$

schreiben. Der erste Term auf der rechten Seite stellt die Temperaturabhängigkeit der Entropie der Luft dar. Zahlenwerte für die Entropie der Luft in Abhängigkeit von der Temperatur stehen in der ersten der beiden Tabellen. Wir müssen dann zusätzlich noch die Druckabhängigkeit beachten. Dann können wir auch

$$s_1(t_1, p_1) = s_2(t_2', p_2) = s_2(t_2', p_1) - R_L \ln\frac{p_2}{p_1}$$

schreiben. In der letzten Gleichung ist genau auf die Indices von Druck und Temperatur zu achten! Jetzt alles einsetzen, was schon bekannt ist und wir haben mit

$$s_2(t_2', p_1) = 6{,}8473\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} + 0{,}2871\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\ln\frac{12{,}5}{1{,}01} = 7{,}56958\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

eine Gleichung, mit deren Hilfe wir t_2' durch lineare Interpolation in der ersten Tabelle berechnen können. Man muss dazu mit Hilfe der Entropie eine Temperatur ermitteln. Das ist von der Vorgehensweise her zwar etwas ungewöhnlich, geht aber genauso gut wie die umgekehrte Bestimmung der Entropie, wenn man die Temperatur kennt! Die lineare Interpolation ergibt

$$t_2' = 322{,}17\,°\text{C} \ .$$

Für die Energiebilanz brauchen wir die mittlere Wärmekapazität der Luft. Auch hier muss an einer Stelle linear interpoliert werden, dieses mal aber in der zweiten Tabelle:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{P,L}\Big|_{t_1}^{t_2'} &= \frac{\tilde{c}_{P,L}\Big|_{0°C}^{t_2'} \cdot t_2' - \tilde{c}_{P,L}\Big|_{0°C}^{t_1} \cdot t_1}{t_2' - t_1} \\ &= \frac{1{,}0212\,\text{kJ/(kgK)} \cdot 322{,}17\,°\text{C} - 1{,}0041\,\text{kJ/(kgK)} \cdot 20\,°\text{C}}{322{,}17\,°\text{C} - 20\,°\text{C}} \\ &= 1{,}0223\,\text{kJ/(kgK)}\,.\end{aligned}$$

Dann lautet der erste Hauptsatz, umgestellt nach der vom Verdichter abgegebenen Leistung:

$$P_{12} = \frac{1}{\eta_{\mathrm{s,V}}} \cdot \dot{m}_{\mathrm{L}} \cdot \widetilde{c}_{\mathrm{p,L}}\Big|_{t_1}^{t_2'} \cdot \left(t_2' - t_1\right) = \frac{1}{0{,}877} \cdot 50\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}0223\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}} \cdot \left(322{,}17\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C}\right)$$

$$= 17{,}61\,\mathrm{MW}\,.$$

Für Aufgabenteil b), die Berechnung der realen Temperatur im Verdichteraustritt, wird die Definition des isentropen Wirkungsgrades

$$\eta_{\mathrm{S,V}} = \frac{w_{\mathrm{t,12,rev}}}{w_{\mathrm{t,12}}} = \frac{h_2' - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{\widetilde{c}_{\mathrm{P,L}}\Big|_{t_1}^{t_2'} \cdot \left(t_2' - t_1\right)}{\widetilde{c}_{\mathrm{P,L}}\Big|_{t_1}^{t_2} \cdot \left(t_2 - t_1\right)}$$

verwendet. Umstellen nach der Temperatur t_2 und Einsetzen von allem, was bekannt ist, ergibt:

$$t_2 = \frac{\widetilde{c}_{\mathrm{p,L}}\Big|_{t_1}^{t_2'} \cdot \left(t_2' - t_1\right)}{\eta_{\mathrm{S,V}} \cdot \widetilde{c}_{\mathrm{P,L}}\Big|_{t_1}^{t_2}} + t_1 = \frac{1{,}0223\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot \left(322{,}17\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C}\right)}{0{,}877 \cdot \widetilde{c}_{\mathrm{P,L}}\Big|_{t_1}^{t_2}} + 20\,^\circ\mathrm{C}$$

$$= \frac{352{,}2331\,\mathrm{kJ/kg}}{\widetilde{c}_{\mathrm{P,L}}\Big|_{t_1}^{t_2}} + 20\,^\circ\mathrm{C}\;.$$

Hier muss iterativ gearbeitet werden und dabei auch noch interpoliert werden (ächz). Die Vorgehensweise ist dabei die Folgende: Es wird zuerst ein Startwert für t_2 geraten[180], dann wird damit die mittlere Wärmekapazität berechnet, dann damit eine neue Temperatur, dann damit eine neue mittlere Wärmekapazität und so weiter.

t_2 in °C	$\widetilde{c}_{\mathrm{P,L}}\Big\|_{t_1}^{t_2}$ in kJ/(kgK)
322,17	1,0223
364,55	1,0251
363,60	1,0250
363,63	1,0250

[180] Wirklich geraten wird hier nicht, denn es wird einfach die Temperatur als Startwert genommen, die für den Austrittsquerschnitt des isentrop arbeitenden Verdichters berechnet wurde.

Hier wird die Iteration abgebrochen, denn die Wärmekapazität „steht“ im Rahmen unserer Genauigkeit und damit auch die Temperatur. Also ist t_2 = 363,6 °C.

Ab Aufgabenteil c) geht es dann endlich auch mal um Verbrennung. Zur Berechnung des Luftüberschusses λ haben wir die folgende Gleichung:

$$L = \frac{\dot{m}_\mathrm{L}}{\dot{m}_\mathrm{B}} = \lambda \cdot L_\mathrm{min} \ .$$

Umstellen und Einsetzen ergibt

$$\lambda = \frac{\dot{m}_\mathrm{L}}{L_\mathrm{min} \cdot \dot{m}_\mathrm{B}} = 3{,}53 \ .$$

Jetzt kommt im Aufgabenteil d) der krönende Abschluss, die Berechnung der adiabaten Verbrennungstemperatur, denn das ist im nach außen adiabaten Idealfall die Temperatur, mit der das Abgas die Brennkammer verlässt. Dazu stellen wir die Energiebilanz für die stationär arbeitende Brennkammer auf:

$$\begin{aligned} 0 = {} & c_\mathrm{P,B} \cdot t_\mathrm{B} + \lambda \cdot L_\mathrm{min} \cdot \tilde{c}_\mathrm{P,L}\left(t_\mathrm{L}\right) \cdot t_\mathrm{L} \\ & - (\lambda - 1) \cdot L_\mathrm{min} \cdot \tilde{c}_\mathrm{P,L}\left(t_\mathrm{A}\right) \cdot t_\mathrm{A} - \left(1 + L_\mathrm{min}\right) \cdot \tilde{c}_\mathrm{P,A,stöch.}\left(t_\mathrm{A}\right) \cdot t_\mathrm{A} + h_\mathrm{u} \ . \end{aligned}$$

Zuerst ist hier zu sagen, dass durch die *äußerst* geschickte Wahl der Bezugstemperatur t_0 = 0 °C die Berechnung der temperaturabhängigen Wärmekapazitäten *deutlich* einfacher wurde, denn die Werte können jetzt direkt aus der zweiten Tabelle genommen werden.

Außerdem ist hier wichtig, dass in der zweiten Tabelle die Wärmekapazitäten des stöchiometrischen Verbrennungsgases gegeben sind, also des Abgases, das bei einer Verbrennung mit λ = 1 entstehen würde. Da die Brennkammer aber mit Luftüberschuss gefahren wird, muss auch der unverbrannte, aber natürlich auch erwärmte Anteil der Luft am Abgas (λ-1) mit betrachtet werden. Jetzt, alles was wir kennen in die Gleichung rein werfen, und wir haben:

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2{,}05\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot 20\,°\mathrm{C} + 51{,}28031 \cdot 1{,}0250\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot 363{,}6\,°\mathrm{C} \\ & - 36{,}75331 \cdot \tilde{c}_\mathrm{P,L}\left(t_\mathrm{A}\right) \cdot t_\mathrm{A} - 15{,}527 \cdot \tilde{c}_\mathrm{P,A,stöch.}\left(t_\mathrm{A}\right) \cdot t_\mathrm{A} + 42900\,\mathrm{kJ/kg} \ . \end{aligned}$$

Umstellen nach der gesuchten Abgastemperatur t_A ergibt dann

$$t_\mathrm{A} = \frac{62052{,}66\,\mathrm{kJ/kg}}{36{,}75331\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot \tilde{c}_\mathrm{P,L}\left(t_\mathrm{A}\right) + 15{,}527\,\mathrm{kJ/(kgK)} \cdot \tilde{c}_\mathrm{P,A,stöch.}\left(t_\mathrm{A}\right)}$$

und wir können, auch wenn es langsam langweilig wird, wieder prima interpolieren (gleich zweifach!) und iterieren:

t_A in °C	$\widetilde{c}_{P,L}$ in kJ/(kgK)	$\widetilde{c}_{P,A,stöch.}$ in kJ/(kgK)
1050,00	1,0956	1,1979
1054,12	1,0984	1,1984
1052,14	1,0958	1,1982
1053,92	1,0960	1,1984
1053,75	1,0960	1,1984

Ab hier „stehen“ beide Wärmekapazitäten und damit auch die Temperatur. Die Iteration wird abgebrochen und das Ergebnis lautet t_A = 1053,75 °C.

Herzlichen Glückwunsch!

Wer diese Aufgabe (ohne Hilfe!) bis zum Ende rechnen konnte, braucht sich wegen einer Thermo-Prüfung *eigentlich* keine allzu großen Sorgen mehr zu machen. Das Einzige, was einen dann noch gefährden kann, ist ein totaler Blackout[181] in der Prüfung.

Aus unserer Erfahrung ist es aber trotzdem extrem sinnvoll, auch noch Aufgaben aus alten Klausuren (vom selben Prof natürlich) unter Klausurbedingungen (also zum Beispiel mit Blick auf die Uhr und nur unter Verwendung der zugelassenen Hilfsmittel) zu rechnen. Das hilft einem, die Eigenarten des Prüfers besser kennen zu lernen und ist außerdem der ultimative Prüfstein für den Stand der eigenen Vorbereitungen!

[181] Bitte nicht verwechseln mit einer Blackbox! Eine Blackbox ist ein extrem nützliches Werkzeug in der Thermo-Prüfung, ein Blackout ist extrem hinderlich.