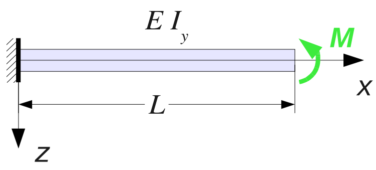
3.3 Biegelinie

Aufgaben

Aufgabe 1

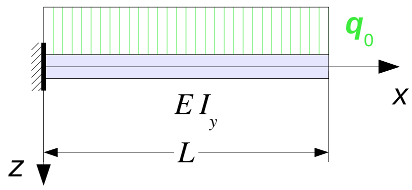
Der abgebildete Kragbalken mit der konstanten Biegesteifigkeit EI_y wird am freien Ende durch das Moment M belastet. Ermitteln Sie die Gleichung der Biegelinie und die Verschiebung am freien Ende.



(Ergebnis: $w(L) = -M L^2 / (2 E I_y)$)

Aufgabe 2

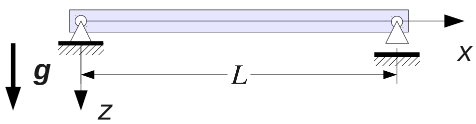
Der abgebildete Kragbalken mit der konstanten Biegesteifigkeit EI_y wird durch die konstante Streckenlast q_0 belastet. Ermitteln Sie die Gleichung der Biegelinie und die Verschiebung am freien Ende.



(Ergebnis: $w(L) = q_0 L^4 / (8 E I_y)$)

Aufgabe 3

Der abgebildete Balken ist an beiden Enden gelenkig gelagert. Er wird durch sein Eigengewicht belastet.



Ermitteln Sie das maximale Biegemoment M_{ymax} und die maximale Verschiebung w_{max},

a) wenn die Gewichtskraft als im Schwerpunkt angreifende Einzelkraft angenommen wird, und

b) wenn die Gewichtskraft korrekt als Streckenlast behandelt wird,

und vergleichen Sie die Ergebnisse.

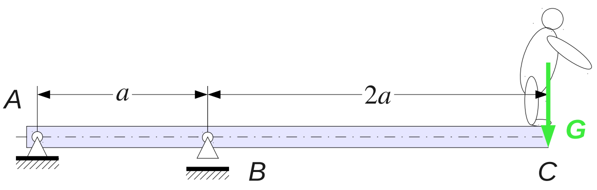
Gegeben sind die Länge L, der Elastizitätsmodul E, die Massendichte ρ, die Querschnittsfläche A und der Trägheitsradius i_y.

(Ergebnis: a) $M_{ymax} = \rho g A L^2 / 4$, $w_{max} = 0{,}02083 \rho g L^4 / (E i_y^2)$

b) $M_{ymax} = \rho\, g\, A\, L^2/8$, $w_{max} = 0{,}01302\, \rho\, g\, L^4/(E\, i_y^2))$

Aufgabe 4

Auf einem Sprungbrett steht eine Person mit dem Gewicht G. Das Sprungbrett hat die konstante Biegesteifigkeit EI_y.



a) Ermitteln Sie die Gleichung der Biegelinie und stellen Sie die Biegelinie graphisch dar.

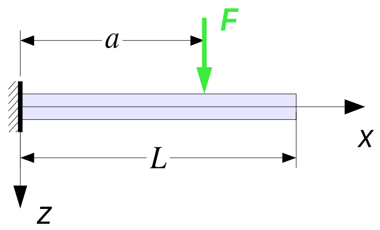
b) Wie groß ist die Durchbiegung w_C im Punkt C?

Zahlenwerte: $a = 1$ m, $G = 600$ N, Biegesteifigkeit $EI_y = 5 \cdot 10^{11}$ Nmm^2

(Ergebnis: $w_C = 4{,}800$ mm)

Aufgabe 5

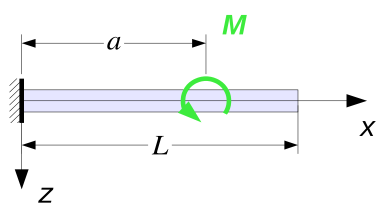
Der abgebildete Kragbalken mit der konstanten Biegesteifigkeit EI_y wird an der Stelle a durch die Kraft F belastet. Ermitteln Sie die Gleichung der Biegelinie und die Verschiebung am freien Ende.



(Ergebnis: $w(L) = \dfrac{F\,L^3}{6\,E\,I_y}\left[3\left(\dfrac{a}{L}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{L}\right)^3\right]$)

Aufgabe 6

Der abgebildete Kragbalken mit der konstanten Biegesteifigkeit EI_y wird an der Stelle a durch das Moment M belastet. Ermitteln Sie die Gleichung der Biegelinie und die Verschiebung am freien Ende.



(Ergebnis: $w(L) = \dfrac{M\,L^2}{2\,E\,I_y}\left[\left(\dfrac{a}{L}\right)^2 - 2\,\dfrac{a}{L}\right]$)

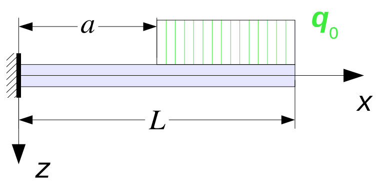
Aufgabe 7

Der abgebildete Kragbalken mit der konstanten Biegesteifigkeit EI_y wird im Bereich zwischen a und L durch die konstante Streckenlast q_0 belastet. Ermitteln Sie die Gleichung der Biegelinie und die Verschiebung am freien Ende.

Hinweis: Für die Streckenlast gilt:

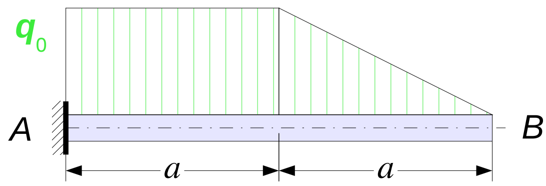
$$q_z(x) = q_0 \langle x - a \rangle^0$$

(Ergebnis: $w(L) = \dfrac{q_0 L^4}{24 E I_y}\left[3 - 4\left(\dfrac{a}{L}\right)^3 + \left(\dfrac{a}{L}\right)^4\right]$)



Aufgabe 8

Die Auftriebsverteilung eines Tragflügels wird durch die dargestellte Streckenlast angenähert. Der Tragflügel hat die konstante Biegesteifigkeit EI_y. Ermitteln Sie die Biegelinie $w(x)$ und die Verschiebung w_B am Flügelende.

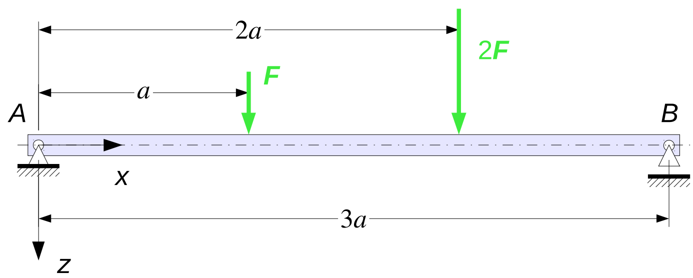


Hinweis: Für die Streckenlast gilt: $q_z(x) = q_0\left(1 - \left\langle \dfrac{x}{a} - 1 \right\rangle\right)$

(Ergebnis: $w_B = (119/120) q_0 a^4 / (E I_y)$)

Aufgabe 9

Der abgebildete Balken mit konstanter Biegesteifigkeit EI_y wird durch zwei Einzelkräfte belastet. Ermitteln Sie die Biegelinie $w(x)$ und die Verschiebungen $w(a)$ und $w(2a)$ der Kraftangriffspunkte.

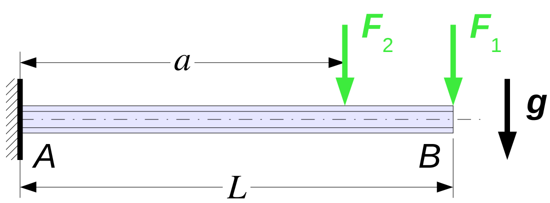


(Ergebnis:
$w(a) = (11/9) F a^3 / (E I_y)$, $w(2a) = (23/18) F a^3 / (E I_y)$)

Aufgabe 10

Der abgebildete Träger I 200 DIN 1025 – USt 37-2 ist im Punkt A fest eingespannt. Er wird durch sein Eigengewicht und die Kräfte F_1 und F_2 belastet.

Wie groß ist die Durchbiegung w_B im Punkt B und die Sicherheit S_F gegen Fließen?

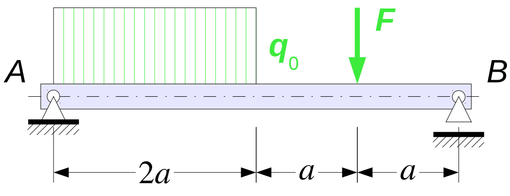


Zahlenwerte: $L = 2$ m, $a = 1{,}5$ m, $I_y = 2140\ \text{cm}^4$, $W_y = 214\ \text{cm}^3$, $E = 210000$ MPa, $G/L = 263$ N/m, $F_1 = 8$ kN, $F_2 = 10$ kN, $R_e = 240$ MPa

(Ergebnis: $w_B = 8{,}62$ mm, $S_F = 1{,}6$)

Aufgabe 11

Der abgebildete Balken mit konstanter Biegesteifigkeit EI_y wird in seiner linken Hälfte durch die konstante Streckenlast q_0 belastet. In der Mitte der zweiten Hälfte greift die Kraft $F = 4q_0a$ an.

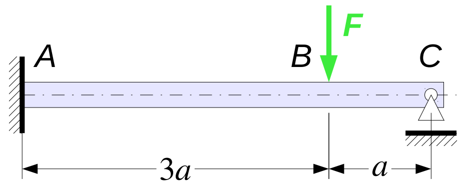


Ermitteln Sie die Durchbiegung $w(2a)$ in der Mitte des Balkens sowie die Biegewinkel ϕ_A und ϕ_B an den Enden.

(Ergebnis: $w(2a) = (16/3)q_0a^4/(EI_y)$, $\phi_A = -4\ q_0a^3/(EI_y)$, $\phi_B = (14/3)q_0a^3/(EI_y)$)

Aufgabe 12

Der abgebildete Träger mit der Biegesteifigkeit EI_y ist im Punkt *A* fest eingespannt und wird im Punkt *C* durch ein Loslager gestützt. Im Punkt *B* greift die Kraft F an.



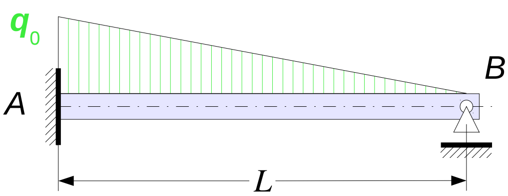
a) Ermitteln Sie die Lagerreaktionen in den Punkten *A* und *C* sowie den Verlauf der Schnittlasten und die Biegelinie.

b) Wie groß ist die Durchbiegung w_B am Lastangriffspunkt *B*?

(Ergebnis: $A_z = 47F/128 \uparrow$, $M_A = 15aF/32 \circlearrowleft$, $C_z = 81F/128 \uparrow$; $w_B = (117/256)Fa^3/(EI_y)$)

Aufgabe 13

Der abgebildete Träger mit der Biegesteifigkeit EI_y ist im Punkt *A* fest eingespannt und wird im Punkt *B* durch ein Loslager gestützt. Er wird durch eine Streckenlast q_z belastet, die linear vom Wert q_0 am linken Ende auf den Wert null am rechten Ende abfällt.

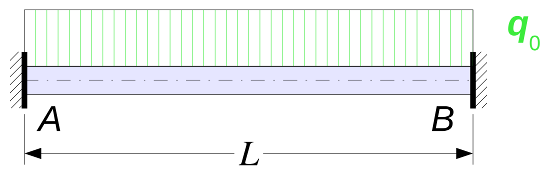


a) Ermitteln Sie die Lagerreaktionen in den Punkten *A* und *B* sowie den Verlauf der Schnittlasten und die Biegelinie.

b) Wie groß ist der Biegewinkel ϕ_B im Punkt *B*?

(Ergebnis: $A_z = 2q_0L/5 \uparrow$, $M_A = q_0L^2/15 \circlearrowleft$, $B_z = q_0L/10 \uparrow$; $\phi_B = q_0L^3/(120EI_y)$)

Aufgabe 14



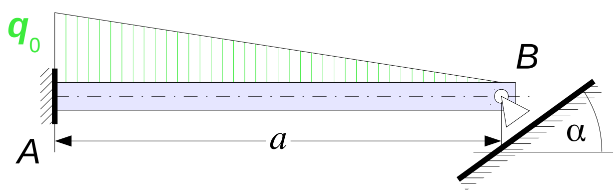
Der abgebildete Balken mit der Biegesteifigkeit EI_y ist an den Enden *A* und *B* fest eingespannt und wird durch sein Eigengewicht belastet.

Gesucht sind die Lagerreaktionen, der Verlauf der Schnittlasten, die Biegelinie sowie der Wert des größten Biegemoments $|M_y|_{max}$ und der größten Durchbiegung w_{max}.

Zahlenwerte: $L = 4$ m, $E = 210000$ MPa, $I_y = 5700$ cm^4, $q_0 = 613$ N/m

(Ergebnis: $A_z = 1226$ N $\uparrow$, $M_A = 817{,}3$ Nm $\circlearrowleft$, $B_z = 1226$ N $\uparrow$, $M_B = 817{,}3$ Nm $\circlearrowright$; $|M_y|_{max} = 817{,}3$ Nm, $w_{max} = 0{,}03414$ mm)

Aufgabe 15



Der abgebildet Balken ist im Punkt *A* fest eingespannt. Das Loslager im Punkt *B* kann sich auf der unter dem Winkel α geneigten Fläche bewegen. Der Balken hat die konstante Biegesteifigkeit EI_y und die konstante Dehnsteifigkeit EA. Er wird durch eine Streckenlast q_z belastet, die linear vom Wert q_0 am linken Ende auf den Wert null am rechten Ende abfällt.

Berechnen Sie die Kraft im Lager *B* sowie die Lagerreaktionen an der Einspannung *A*.

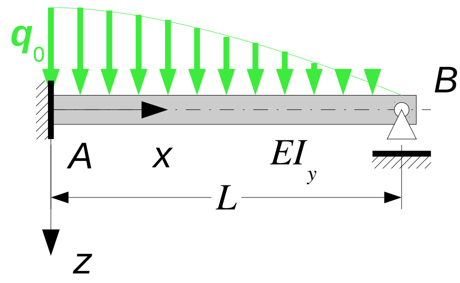
Zahlenwerte: $\tan(\alpha) = 3/4$, Trägheitsradius $i_y = \sqrt{3}a/9$

(Ergebnis: $B = 2q_0a/17 \nwarrow$, $A_x = 6q_0a/85 \rightarrow$, $A_z = 69q_0a/170 \uparrow$, $M_A = 37q_0a^2/510 \circlearrowleft$)

Aufgabe 16

Der abgebildete Balken ist im Punkt *A* fest eingespannt und wird im Punkt *B* zusätzlich durch ein Loslager gehalten. Er wird durch die Streckenlast

$$q_z(x) = q_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)$$



belastet.

a) Bestimmen Sie Querkraft $Q_z(x)$, Biegemoment $M_y(x)$ und Biegelinie $w(x)$ durch Integration.

b) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in *A* und *B*.

Gegeben: L, q_0, EI_y

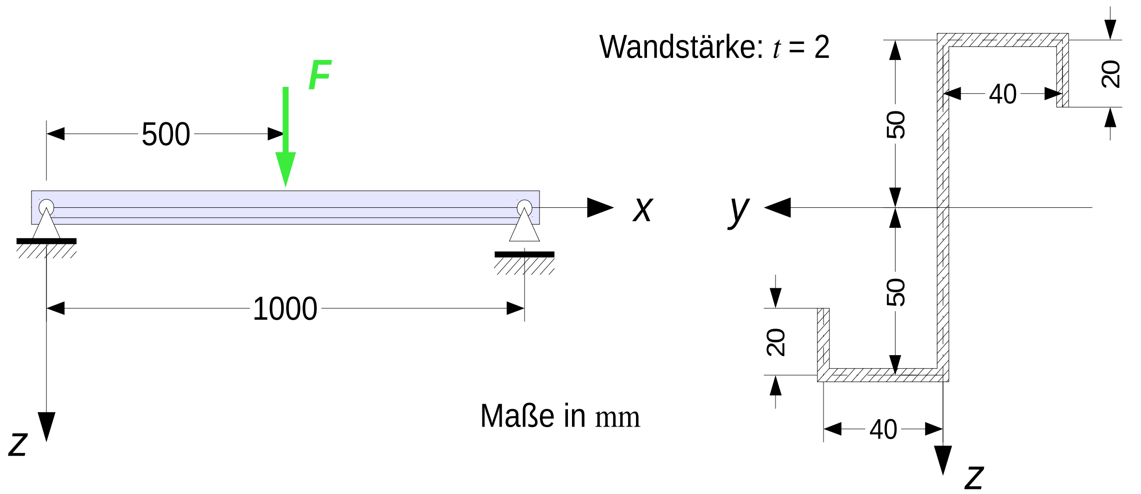
(HM, Prüfung WS 2020)

(Ergebnis: a) $Q_z(x) = q_0 L\left[\frac{48}{\pi^4} - \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)\right]$,

$M_y(x) = \frac{4 q_0 L^2}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right) + \frac{12}{\pi^2}\frac{x}{L} - \frac{12}{\pi^2}\right]$,

$w(x) = \frac{8 q_0 L^4}{\pi^4 E I_y}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\right]$; b) $A_z = 0{,}4982 q_0 L$, $B_z = 0{,}1439 q_0 L$, $M_A = 0{,}08748 q_0 L^2$)

Aufgabe 17



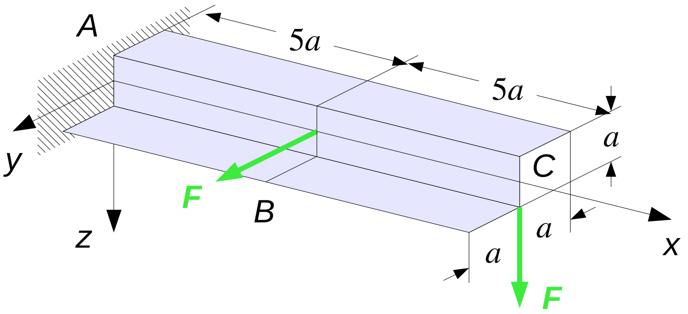
Der abgebildete Balken ist an beiden Enden gelenkig gelagert. In der Mitte greift die Kraft F an. Gesucht sind die Verschiebungen v_F und w_F des Lastangriffspunkts.

Zahlenwerte: $E = 210000$ MPa, $F = 5$ kN

(Ergebnis: v_F = -2,17 mm, w_F = 1,61 mm)

Aufgabe 18

Der abgebildete dünnwandige Balken (Wandstärke t, Elastizitätsmodul E) ist am Ende *A* fest eingespannt und wird an den Stellen *B* und *C* durch die Kraft F belastet.

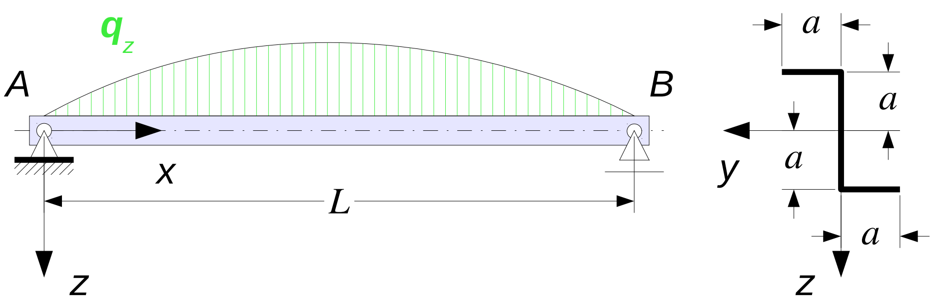


a) Bestimmen Sie die Flächenträgheitsmomente im eingezeichneten Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie die Verschiebungen an den Stellen x_B und x_C.

(Ergebnis: a) $I_y = 7a^3t/12$, $I_z = 2a^3t/3$, $I_{yz} = -a^3t/2$; b) $Etv_B = -200F$, $Etv_C = -1525F/2$, $Etw_B = 350F$, $Etw_C = 1225F$)

Aufgabe 19



Der beidseitig gelenkig gelagerte Balken *AB* (Elastizitätsmodul E) wird durch die Streckenlast

$$q_z(x) = q_0 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

belastet. Sein Querschnitt ist ein dünnwandiges Z-Profil mit der Wandstärke t.

a) Bestimmen Sie die Flächenträgheitsmomente im eingezeichneten Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie die Verschiebungen $v(x)$ und $w(x)$.

(Ergebnis: a) $I_y = 8a^3t/3,\ I_z = 2a^3t/3,\ I_{yz} = a^3t$; b) $v(x)=\frac{9}{7\pi^4}\frac{q_0 L^4}{a^3 t E}\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)$,
$w(x)=\frac{6}{7\pi^4}\frac{q_0 L^4}{a^3 t E}\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)$)