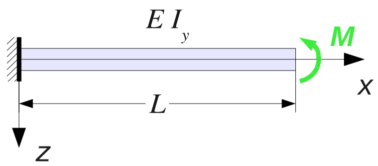
3.3 Biegelinie

Lösungen

Aufgabe 1

Aus dem Gleichgewicht für den rechten Teilbalken folgt für das Biegemoment:



$$M_y(x)=M=-EI_y \frac{d^2w}{dx^2}$$

Zweimaliges Integrieren führt auf die Biegelinie:

$$EI_y \frac{dw}{dx}(x)=-Mx+c_1$$

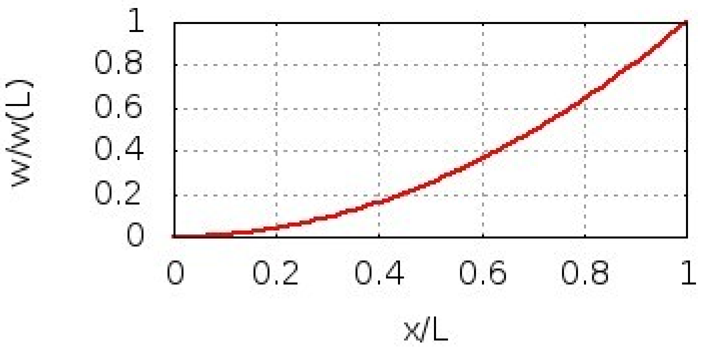
$$EI_y w(x)=-\frac{1}{2}Mx^2+c_1x+c_2$$

Die Konstanten werden aus den Randbedingungen am linken Ende bestimmt:

$$\frac{dw}{dx}(0)=0 \rightarrow c_1=0, \quad w(0)=0 \rightarrow c_2=0$$

Damit gilt für die Biegelinie:

$$w(x)=-\frac{Mx^2}{2EI_y}$$

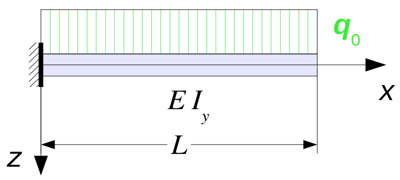


Die Verschiebung am freien Ende berechnet sich zu

$$w(L)=-\frac{ML^2}{2EI_y}.$$

Aufgabe 2

Die konstante Streckenlast muss viermal integriert werden:



$$EI_y \frac{d^4w}{dx^4}=q_0$$

$$EI_y \frac{d^3w}{dx^3}=q_0x+c_1=-Q_z$$

$$E\,I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{2} q_0 x^2 + c_1 x + c_2 = -M_y$$

$$E\,I_y \frac{dw}{dx} = \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$E\,I_y w = \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Randbedingungen:

Linkes Ende: $\frac{dw}{dx}(0) = 0 \;\rightarrow\; c_3 = 0$

$w(0) = 0 \;\rightarrow\; c_4 = 0$

Rechtes Ende: $Q_z(L) = 0 \;\rightarrow\; q_0 L + c_1 = 0 \;\rightarrow\; c_1 = -q_0 L$

$M_y(L) = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2} q_0 L^2 + c_1 L + c_2 = 0$

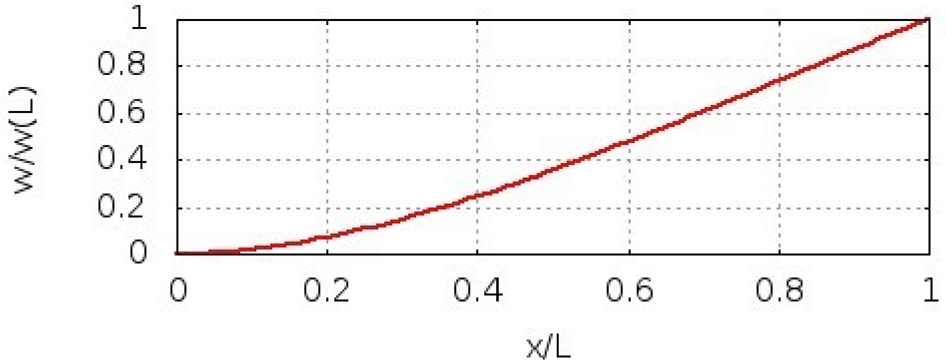
$\rightarrow\; c_2 = -\frac{1}{2} q_0 L^2 + q_0 L^2 = \frac{1}{2} q_0 L^2$

Biegelinie:

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24\,E\,I_y}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

Verschiebung am freien Ende:

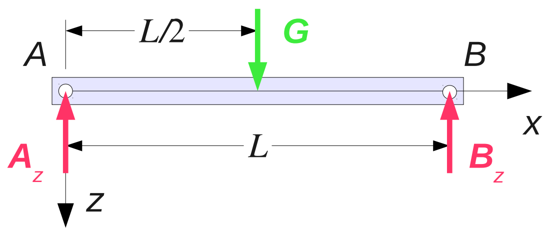
$$w(L) = \frac{q_0 L^4}{24\,E\,I_y}(1 - 4 + 6) = \frac{q_0 L^4}{8\,E\,I_y}$$



Aufgabe 3

a) Gewichtskraft als Einzelkraft

Schnittlasten:



$$Q_z(x) = -\left(-A_z + \left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^0 G\right)$$

$$M_y(x) = A_z x - \left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle G + c_1$$

$$M_y(0) = 0 \;\rightarrow\; c_1 = 0$$

$$M_y(L) = 0 \;:\; A_z L - \frac{L}{2} G = 0 \;\rightarrow\; A_z = \frac{G}{2}$$

$$\rightarrow\; M_y = \frac{G}{2} x - \left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle G : \; M_{ymax} = M_y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{4} G L$$

Mit $G = \rho g A L$ folgt: $\underline{M_{ymax} = \frac{1}{4} \rho g A L^2}$

Biegelinie:

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y = -\frac{G}{2} x + \left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle G$$

$$E I_y \frac{dw}{dx} = -\frac{G}{4} x^2 + \frac{1}{2}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^2 G + c_2$$

$$E I_y w = -\frac{G}{12} x^3 + \frac{1}{6}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^3 G + c_2 x + c_3$$

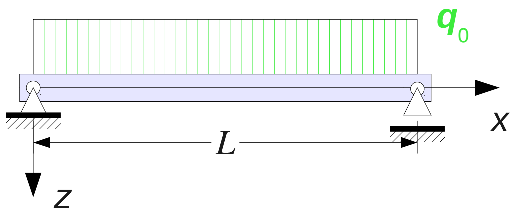
$$w(0) = 0 \;\rightarrow\; c_3 = 0$$

$$w(L) = 0 \;:\; -\frac{G L^3}{12} + \frac{G L^3}{48} + c_2 L = 0 \;\rightarrow\; c_2 = \frac{G L^2}{16}$$

$$w(x) = \frac{G L^3}{48 E I_y}\left[-4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 8\left\langle \frac{x}{L} - \frac{1}{2}\right\rangle^3 + 3\frac{x}{L}\right]$$

$$w_{max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{G L^3}{48 E I_y} = \frac{\rho g A L^4}{48 E A i_y^2} = \frac{1}{48}\frac{\rho g L^4}{E i_y^2} = \underline{0{,}02083 \frac{\rho g L^4}{E i_y^2}}$$

b) Gewichtskraft als Streckenlast



Schnittlasten:

$$q_z = q_0 = \rho g A$$

$$Q_z(x) = -\rho g a x + c_1$$

$$M_y(x) = -\frac{1}{2}\rho g A x^2 + c_1 x + c_2$$

$$M_y(0) = 0 \ \rightarrow \ c_2 = 0$$

$$M_y(L) = 0 \ : \ -\frac{1}{2}\rho g A L^2 + c_1 L = 0 \ \rightarrow \ c_1 = \frac{1}{2}\rho g A L$$

$$\rightarrow \ Q_z(x) = \frac{1}{2}\rho g A L\left(1 - 2\frac{x}{L}\right), \ \ M_y(x) = \frac{1}{2}\rho g A L^2\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$M_{ymax} = M_y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}\rho g A L^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} q_0 L^2 = \underline{\frac{1}{8}\rho g A L^2}$$

Biegelinie:

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y = \frac{1}{2}\rho g A L^2\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right]$$

$$E I_y \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2}\rho g A L^3\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + c_2\right] = \frac{\rho g A L^3}{12}\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6 c_2\right]$$

$$E I_y w = \frac{\rho g A L^4}{12}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 + 6 c_2 \frac{x}{L} + c_3\right]$$
$$= \frac{\rho g A L^4}{24}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 12 c_2 \frac{x}{L} + 2 c_3\right]$$

$$w(0) = 0 \ \rightarrow \ c_3 = 0$$

$$w(L) = 0 \ : \ 1 - 2 + 12 c_2 = 0 \ \rightarrow \ c_2 = \frac{1}{12}$$

$$\rightarrow \ w(x) = \frac{\rho g A L^4}{24 E I_y}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L}\right]$$

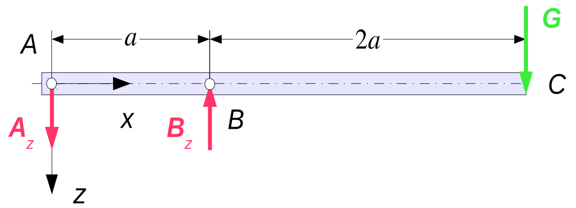
$$w_{max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\rho g A L^4}{24 E I_y}\left(\frac{1}{16} - \frac{2}{8} + \frac{1}{2}\right] = \frac{5}{384}\frac{\rho g A L^4}{E A i_y^2} = \underline{0{,}01302\frac{\rho g L^4}{E i_y^2}}$$

Die mit der Gewichtskraft als Einzelkraft ermittelten Ergebnisse sind deutlich zu groß.

Aufgabe 4

a) <u>Biegelinie</u>

Lagerkräfte:



$$\sum M^A = 0 \;:\; a B_z - 3 a G = 0$$

$$\rightarrow\; B_z = 3G$$

$$\sum M^B = 0 \;:\; a A_z - 2 a G = 0$$

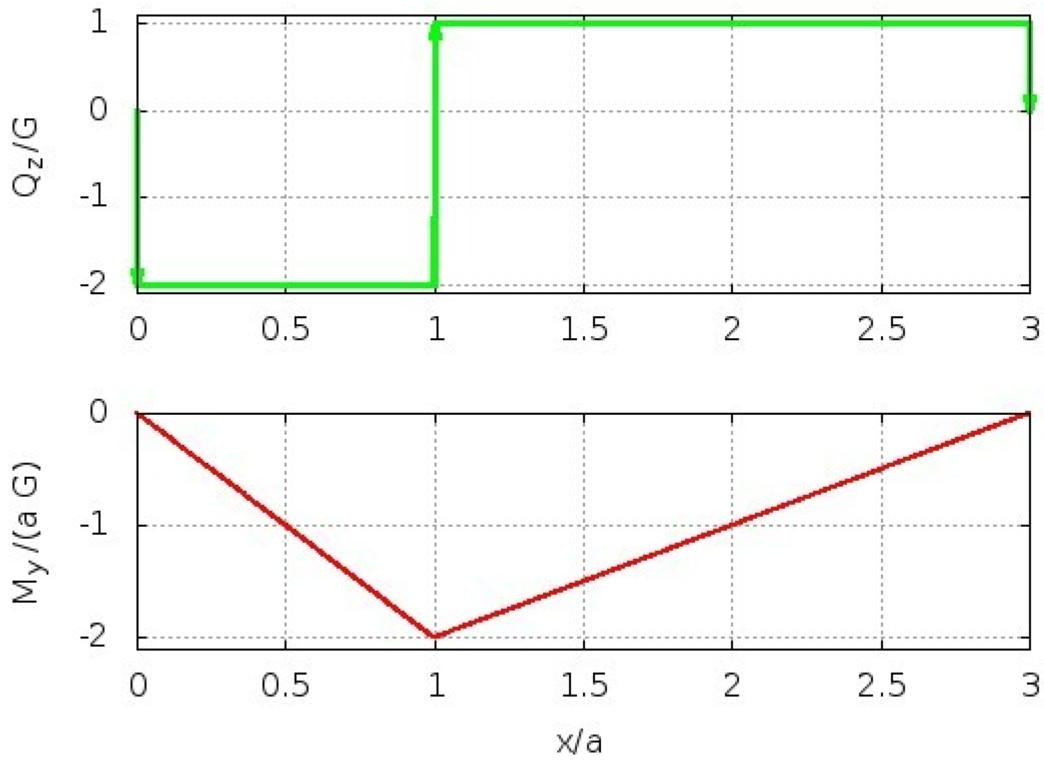
$$\rightarrow\; A_z = 2G$$

Querkraft: $Q_z(x) = -\left(A_z - \langle x-a\rangle^0 B_z\right) = -2G + 3\langle x-a\rangle^0 G$

Biegemoment: $M_y(x) = -2Gx + 3\langle x-a\rangle G + c_1$

$$M_y(0) = 0 \;\rightarrow\; c_1 = 0$$

$$M_y(3a) = -6aG + 3\cdot 2aG = 0$$



Biegelinie: $EI_y \dfrac{dw}{dx}(x) = G x^2 - \dfrac{3}{2}\langle x-a\rangle^2 G + c_2$

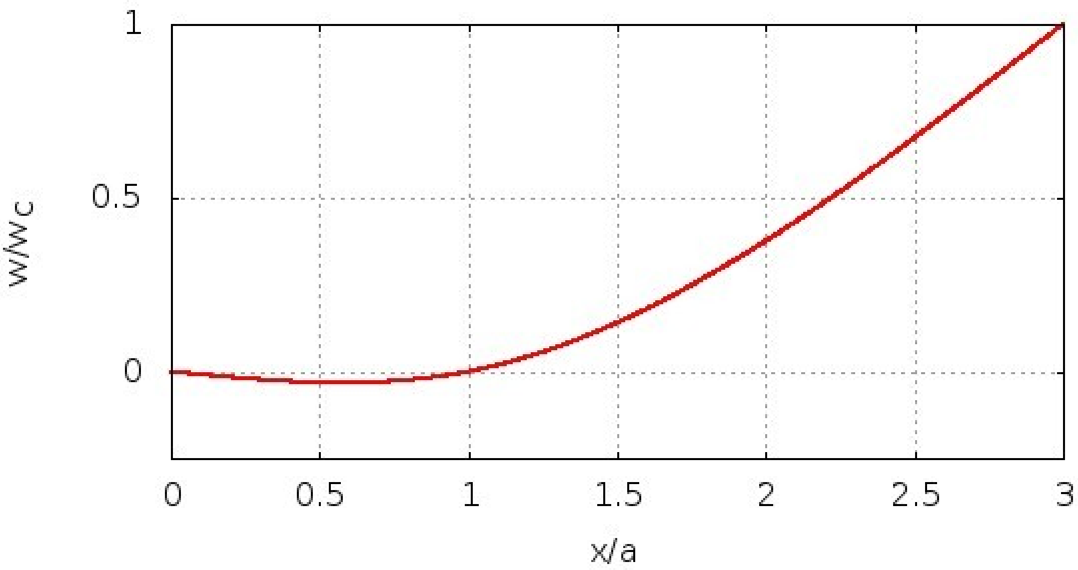
$$EI_y w(x) = \frac{1}{3} G x^3 - \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^3 G + c_2 x + c_3$$

$$w(0)=0 \rightarrow c_3=0$$

$$w(a)=0 \rightarrow \frac{1}{3}G a^3+c_2 a=0 \rightarrow c_2=-\frac{1}{3}G a^2$$

Ergebnis:

$$w(x)=\frac{G a^3}{6 E I_y}\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^3-3\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^3-2\frac{x}{a}\right]$$



b) <u>Durchbiegung im Punkt *C*</u>

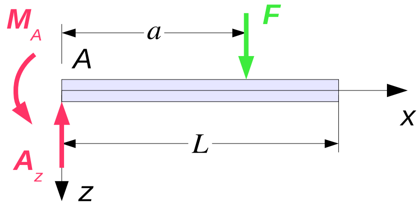
$$w_C=w(3a)=\frac{G a^3}{6 E I_y}\left(2\cdot 3^3-3\cdot 2^3-2\cdot 3\right)=4\frac{G a^3}{E I_y}$$

Zahlenwert:

$$w_C=4\cdot\frac{600\,N\cdot 10^9\,\mathrm{mm}^3}{5\cdot 10^{11}\,\mathrm{Nmm}^2}=\underline{4{,}800\,\mathrm{mm}}$$

Aufgabe 5

Schnittlasten:



$$Q_z(x)=-\left(-A_z+\langle x-a\rangle^0 F\right)$$

$$Q_z(L)=0 \;:\; A_z-F=0 \rightarrow A_z=F$$

$$M_y(x)=F\left(x-\langle x-a\rangle\right)+c_1$$

$$M_y(L)=0 \rightarrow F(L-L+a)+c_1=0$$

$$\rightarrow c_1=-a F$$

$\rightarrow \quad M_y(x) = F\left(x - a - \langle x-a \rangle\right)$

Biegelinie:

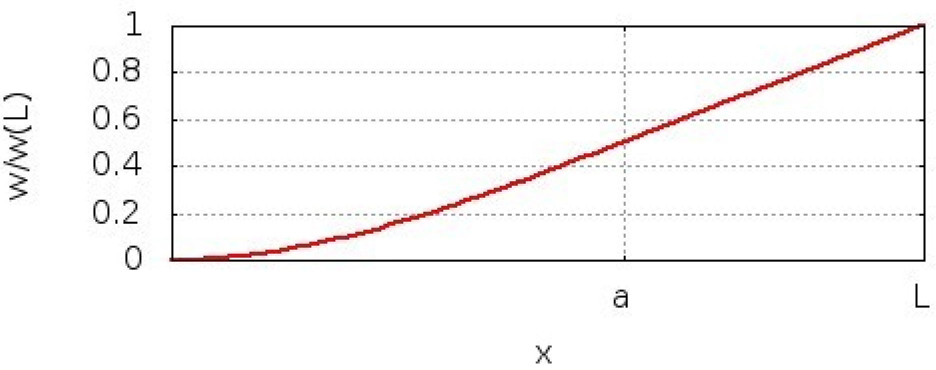
$$E I_y \frac{dw}{dx}(x) = -F\left(\frac{1}{2}x^2 - a\,x - \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^2\right) + c_2$$

$$\frac{dw}{dx}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$E I_y w(x) = -F\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}a\,x^2 - \frac{1}{6}\langle x-a\rangle^3\right) + c_3$$

$$w(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = 0$$

$$\rightarrow \quad w(x) = -\frac{F L^3}{6 E I_y}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\frac{a}{L}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left\langle \frac{x}{L} - \frac{a}{L}\right\rangle^3\right)$$



Verschiebung am freien Ende:

$$w(L) = -\frac{F L^3}{6 E I_y}\left(1 - 3\frac{a}{L} - \left(1 - \frac{a}{L}\right)^3\right)$$

$$= -\frac{F L^3}{6 E I_y}\left[1 - 3\frac{a}{L} - \left(1 - 3\frac{a}{L} + 3\left(\frac{a}{L}\right)^2 - \left(\frac{a}{L}\right)^3\right)\right]$$

$$= \frac{F L^3}{6 E I_y}\left[3\left(\frac{a}{L}\right)^2 - \left(\frac{a}{L}\right)^3\right]$$

Aufgabe 6

Aus dem Gleichgewicht für den rechten Teilbalken folgt für das Biegemoment:

$$M_y(x) = \left(1 - \langle x-a\rangle^0\right) M$$

Biegelinie: $$E I_y \frac{dw}{dx}(x) = -\left(x - \langle x-a \rangle\right) M + c_1$$

$$\frac{dw}{dx}(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$E I_y w(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - \langle x-a \rangle^2\right) M + c_2$$

$$w(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

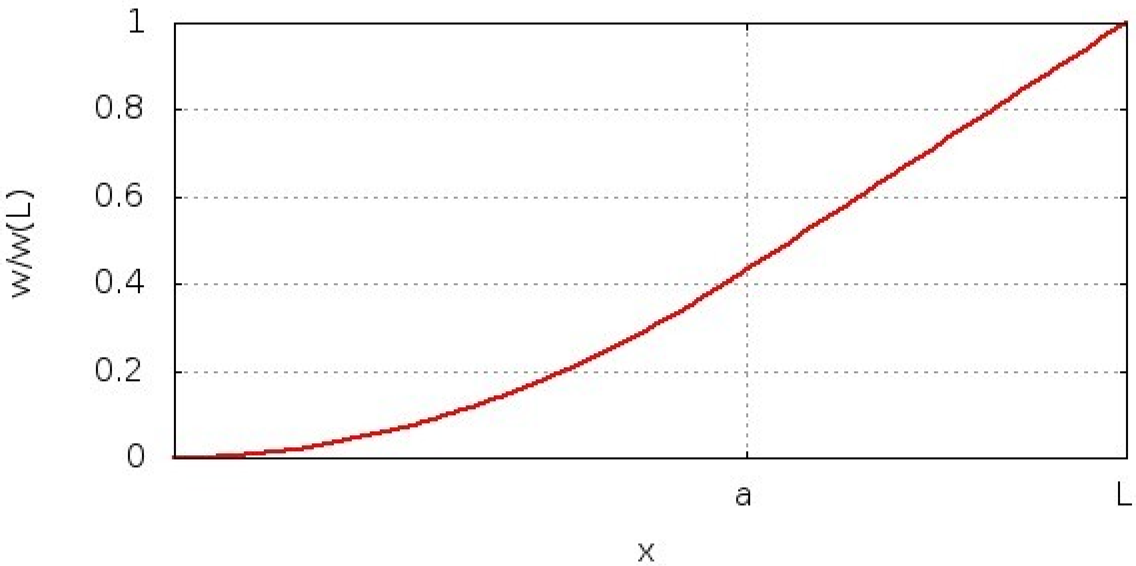
Ergebnis: $$w(x) = \frac{M L^2}{2 E I_y}\left[\left\langle \frac{x}{L} - \frac{a}{L} \right\rangle^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

Verschiebung am freien Ende:

$$w(L) = \frac{M L^2}{2 E I_y}\left[\left(1 - \frac{a}{L}\right)^2 - 1\right] = \frac{M L^2}{2 E I_y}\left[\left(\frac{a}{L}\right)^2 - 2\frac{a}{L}\right]$$

Probe: Für $a = L$ folgt

$$w(L) = \frac{M L^2}{2 E I_y}(1-2) = -\frac{M L^2}{2 E I_y}.$$



Aufgabe 7

Schnittlasten:

$$q(x) = \langle x-a \rangle^0 q_0$$

$$Q_z(x) = -\langle x-a \rangle q_0 + c_1$$

$$Q_z(L)=0 \;\rightarrow\; -(L-a)q_0+c_1=0 \;\rightarrow\; c_1=(L-a)q_0$$

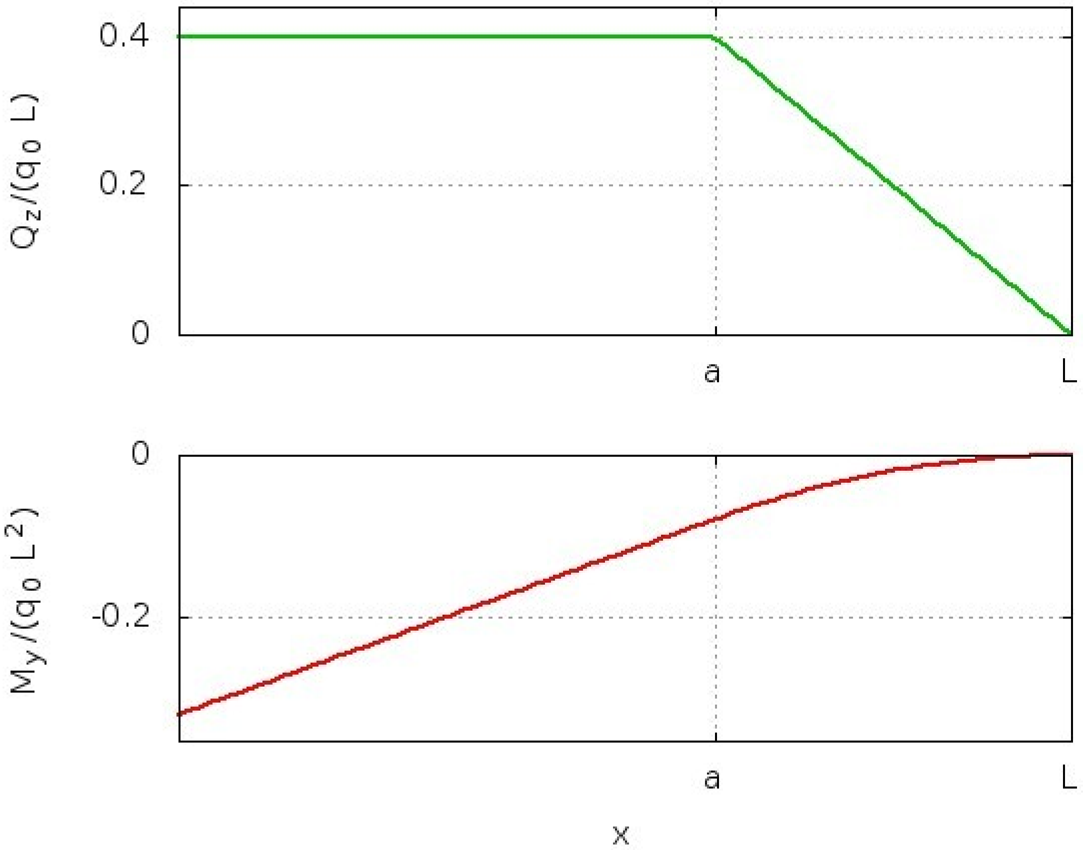
$$\rightarrow\; Q_z(x)=\left(L-a-\langle x-a\rangle\right)q_0$$

$$M_y(x)=(L-a)q_0 x-\frac{1}{2}\langle x-a\rangle^2 q_0+c_2$$

$$M_y(L)=0 \;\rightarrow\; (L-a)q_0 L-\frac{1}{2}(L-a)^2 q_0+c_2=0$$

$$\rightarrow\; c_2=\frac{1}{2}(L-a)q_0(L-a-2L)=-\frac{1}{2}\left(L^2-a^2\right)q_0$$

$$\rightarrow\; M_y(x)=q_0\left((L-a)x-\frac{1}{2}\langle x-a\rangle^2-\frac{1}{2}\left(L^2-a^2\right)\right)$$



Biegelinie:

$$E I_y \frac{dw}{dx}(x)=-q_0\left(\frac{1}{2}(L-a)x^2-\frac{1}{6}\langle x-a\rangle^3-\frac{1}{2}\left(L^2-a^2\right)x+c_3\right)$$

$$\frac{dw}{dx}(0)=0 \;\rightarrow\; c_3=0$$

$$EI_y w(x) = -q_0\left(\frac{1}{6}(L-a)x^3 - \frac{1}{24}\langle x-a\rangle^4 - \frac{1}{4}(L^2-a^2)x^2 + c_4\right)$$

$$w(0)=0 \;\rightarrow\; c_4=0$$

Ergebnis:

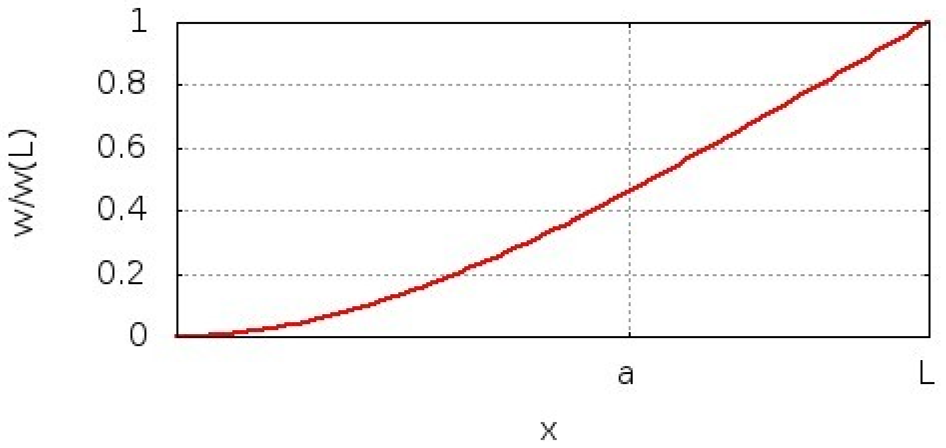
$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24 EI_y}\left[6\left(1-\left(\frac{a}{L}\right)^2\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left\langle\frac{x}{L}-\frac{a}{L}\right\rangle^4 - 4\left(1-\frac{a}{L}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

Verschiebung am freien Ende:

$$w(L) = \frac{q_0 L^4}{24 EI_y}\left[6\left(1-\left(\frac{a}{L}\right)^2\right) + \left(1-\frac{a}{L}\right)^4 - 4\left(1-\frac{a}{L}\right)\right]$$

$$= \frac{q_0 L^4}{24 EI_y}\left[6-6\left(\frac{a}{L}\right)^2 + 1 - 4\frac{a}{L} + 6\left(\frac{a}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{L}\right)^3 + \left(\frac{a}{L}\right)^4 - 4 + 4\frac{a}{L}\right]$$

$$= \frac{q_0 L^4}{24 EI_y}\left[3-4\left(\frac{a}{L}\right)^3 + \left(\frac{a}{L}\right)^4\right]$$



Probe: Für $a = 0$ folgt

$$w(L) = \frac{q_0 L^4}{24 EI_y}\cdot 3 = \frac{q_0 L^4}{8 EI_y}.$$

Aufgabe 8

Schnittlasten:

$$q_z(x) = q_0\left(1-\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle\right)$$

$$Q_z(x) = -q_0\left(x - \frac{a}{2}\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^2 + c_1\right)$$

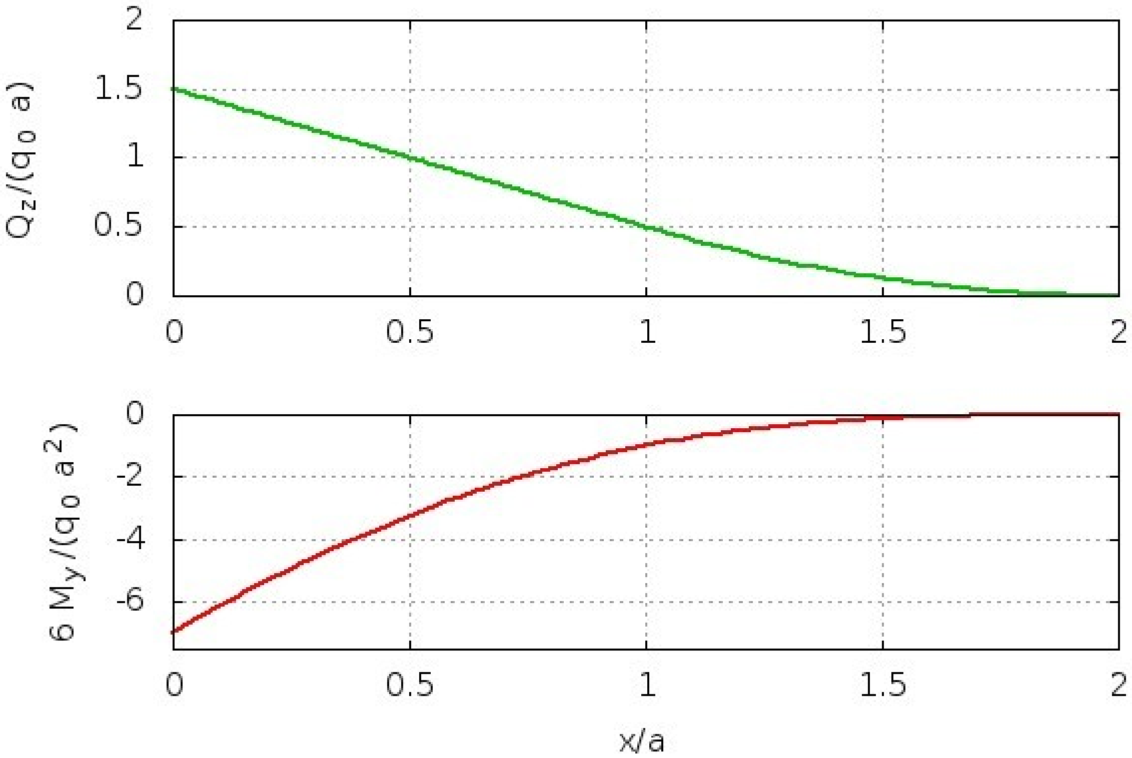
$$Q_z(2a)=0\ :\ 2a - \frac{a}{2} + c_1 = 0 \ \rightarrow\ c_1 = -\frac{3}{2}a$$

$$Q_z(x) = -q_0 a\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$M_y(x) = -q_0 a\left(\frac{x^2}{2a} - \frac{a}{6}\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^3 - \frac{3}{2}x + c_2\right)$$

$$M_y(2a)=0\ :\ 2a - \frac{a}{6} - 3a + c_2 = 0 \ \rightarrow\ c_2 = \frac{7}{6}a$$

$$M_y(x) = -\frac{1}{6}q_0 a^2\left[3\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^3 - 9\frac{x}{a} + 7\right]$$



Biegelinie:

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2}(x) = -M_y(x) = \frac{1}{6}q_0 a^2\left[3\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^3 - 9\frac{x}{a} + 7\right]$$

$$E I_y \frac{dw}{dx}(x) = \frac{1}{6}q_0 a^2\left[a\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{a}{4}\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^4 - \frac{9}{2}\frac{x^2}{a} + 7x + c_3\right]$$

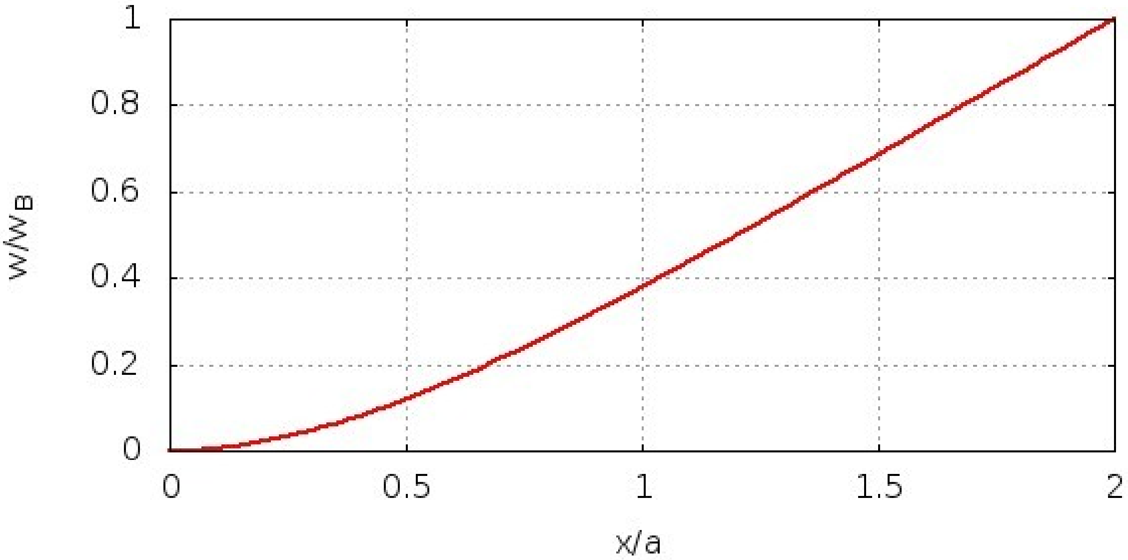
$$\frac{dw}{dx}(0)=0 \rightarrow c_3=0$$

$$E I_y \frac{dw}{dx}(x)=\frac{q_0 a^3}{24}\left[4\left(\frac{x}{a}\right)^3-\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^4-18\left(\frac{x}{a}\right)^2+28\frac{x}{a}\right]$$

$$E I_y w(x)=\frac{q_0 a^3}{24}\left[a\left(\frac{x}{a}\right)^4-\frac{a}{5}\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^5-6a\left(\frac{x}{a}\right)^3+14\frac{x^2}{a}+c_4\right]$$

$$w(0)=0 \rightarrow c_4=0$$

$$w(x)=\frac{q_0 a^4}{120 E I_y}\left[5\left(\frac{x}{a}\right)^4-\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^5-30\left(\frac{x}{a}\right)^3+70\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$



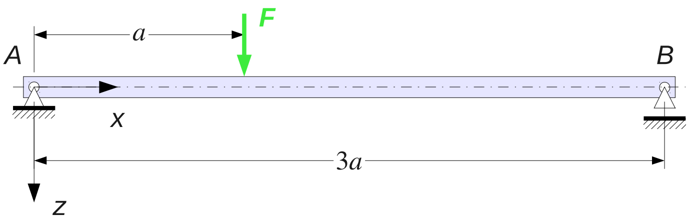
Durchbiegung am Flügelende:

$$w_B=w(2a)=\frac{q_0 a^4}{120 E I_y}(5\cdot 16-1-30\cdot 8+70\cdot 4)=\frac{119}{120}\frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

Aufgabe 9

Die Aufgabe lässt sich am einfachsten mit Superposition lösen.

Lastfall 1



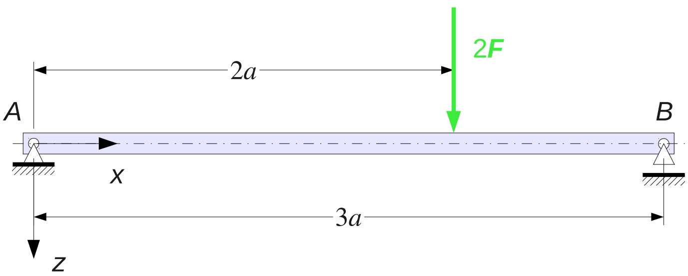
Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:

$$w_1(x)=\frac{F(3a)^3}{6EI_y}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{3}\right)\frac{x}{3a}-\left(\frac{x}{3a}\right)^3\right)+\left\langle\frac{x}{3a}-\frac{1}{3}\right\rangle^3\right]$$

$$=\frac{Fa^3}{18EI_y}\left[10\frac{x}{a}-2\left(\frac{x}{a}\right)^3+3\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^3\right]$$

$$w_1(a)=\frac{Fa^3}{18EI_y}(10-2)=\frac{4}{9}\frac{Fa^3}{EI_y}\ ,\quad w(2a)=\frac{Fa^3}{18EI_y}(20-16+3)=\frac{7}{18}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

Lastfall 2



Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:

$$w_2(x)=\frac{2F(3a)^3}{6EI_y}\left[\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right)\frac{x}{3a}-\left(\frac{x}{3a}\right)^3\right)+\left\langle\frac{x}{3a}-\frac{2}{3}\right\rangle^3\right]$$

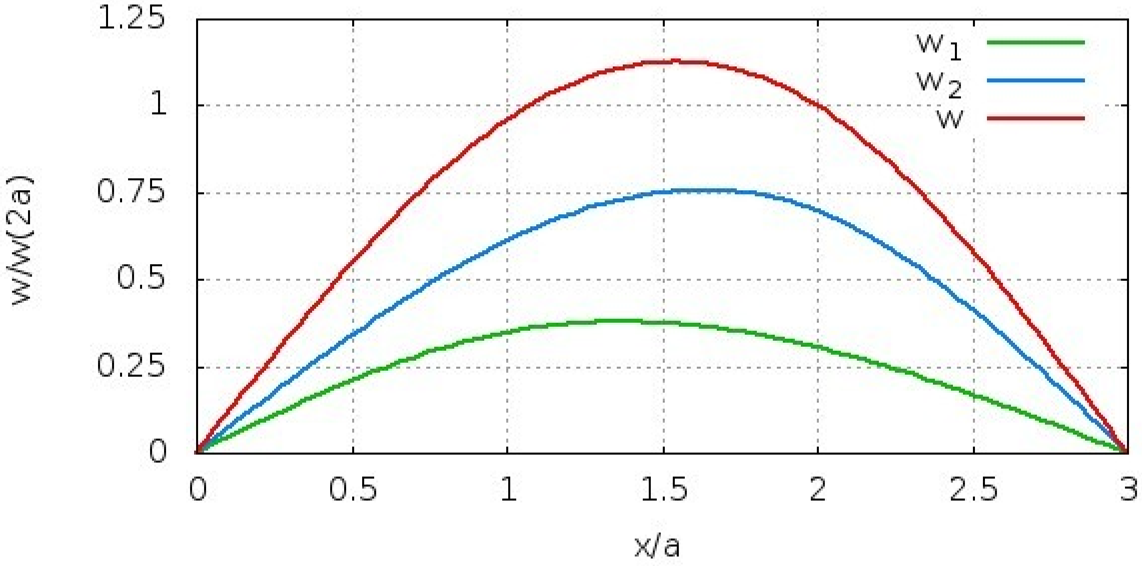
$$=\frac{Fa^3}{9EI_y}\left[8\frac{x}{a}-\left(\frac{x}{a}\right)^3+3\left\langle\frac{x}{a}-2\right\rangle^3\right]$$

$$w_2(a)=\frac{Fa^3}{9EI_y}(8-1)=\frac{7}{9}\frac{Fa^3}{EI_y}\ ,\quad w_2(2a)=\frac{Fa^3}{9EI_y}(16-8)=\frac{8}{9}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

Überlagerung

$$w(x)=w_1(x)+w_2(x)=\frac{F a^3}{18 E I_y}\left[26\frac{x}{a}-4\left(\frac{x}{a}\right)^3+3\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^3+6\left\langle\frac{x}{a}-2\right\rangle^3\right]$$

$$w(a)=w_1(a)+w_2(a)=\frac{11}{9}\frac{F a^3}{E I_y},\quad w(2a)=w_1(2a)+w_2(2a)=\frac{23}{18}\frac{F a^3}{E I_y}$$



Aufgabe 10

Die Belastung wird in drei Lastfälle aufgeteilt:

1. Lastfall: Kraft F_1
2. Lastfall: Kraft F_2
3. Lastfall: Eigengewicht

Das größte Biegemoment tritt in allen drei Lastfällen an der Einspannstelle auf.

Biegesteifigkeit: $E I_y = 210000\,\mathrm{N/mm^2}\cdot 2140\cdot(10\,\mathrm{mm})^4 = 4{,}494\cdot 10^{12}\,\mathrm{Nmm^2}$

Lastfall 1: Kraft F_1

Biegemoment an der Einspannstelle: $M_{y1}(0)=F_1 L$

Zahlenwert: $M_{y1}(0)=8\cdot 10^3 N\cdot 2\cdot 10^3\,\mathrm{mm}=16\cdot 10^6\,\mathrm{Nmm}$

Durchbiegung am freien Ende: $w_{B1}=\dfrac{F_1 L^3}{3 E I_y}$

Zahlenwert: $w_{B1}=\dfrac{8\cdot 10^3\,\mathrm{N}\cdot 2000^3\,\mathrm{mm}^3}{3\cdot 4{,}494\cdot 10^{12}\,\mathrm{Nmm}^2}=4{,}747\,\mathrm{mm}$

Lastfall 2: Kraft F_2

Biegemoment an der Einspannstelle: $M_{y2}(0)=F_2\,a$

Zahlenwert: $M_{y2}(0)=10\cdot 10^3\,\mathrm{N}\cdot 1500\,\mathrm{mm}=15\cdot 10^6\,\mathrm{Nmm}$

Durchbiegung am freien Ende: $w_{B2}=\dfrac{F_2 L^3}{6EI_y}\left[3\left(\dfrac{a}{L}\right)^2-\left(\dfrac{a}{L}\right)^3\right]$

Zahlenwert: $\dfrac{F_2 L^3}{6EI_y}=\dfrac{10\cdot 10^3\,\mathrm{N}\cdot 2000^3\,\mathrm{mm}^3}{6\cdot 4{,}494\cdot 10^{12}\,\mathrm{Nmm}^2}=2{,}967\,\mathrm{mm}$

$$3\left(\frac{a}{L}\right)^2-\left(\frac{a}{L}\right)^3=3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{81}{64}$$

$$w_{B2}=\frac{81}{64}\cdot 2{,}967\,\mathrm{mm}=3{,}755\,\mathrm{mm}$$

Lastfall 3: Eigengewicht

Biegemoment an der Einspannstelle: $M_{y3}(0)=\dfrac{(G/L)\,L^2}{2}$

Zahlenwert: $M_{y3}=\dfrac{263\,\mathrm{N/m}\cdot 2^2\,\mathrm{m}^2}{2}=526\,\mathrm{Nm}=526\cdot 10^3\,\mathrm{Nmm}$

Durchbiegung am freien Ende: $w_{B3}=\dfrac{(G/L)\,L^4}{8EI_y}$

Zahlenwert: $w_{B3}=\dfrac{263\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N/mm}\cdot 2000^4\,\mathrm{mm}^4}{8\cdot 4{,}494\cdot 10^{12}\,\mathrm{Nmm}^2}=0{,}1170\,\mathrm{mm}$

Gesamtergebnisse

Durchbiegung am freien Ende:

$$w_B=w_{B1}+w_{B2}+w_{B3}=\underline{8{,}619\,\mathrm{mm}}$$

Biegemoment an der Einspannstelle:

$$M_y(0)=M_{y1}(0)+M_{y2}(0)+M_{y3}(0)=31{,}53\cdot 10^6\,\mathrm{Nmm}$$

Biegespannung: $\sigma=\dfrac{M_y}{W_y}=\dfrac{31{,}53\cdot 10^6\,\mathrm{Nmm}}{213\cdot 10^3\,\mathrm{mm}^3}=148\,\mathrm{MPa}$

Sicherheit: $S_F = \frac{R_e}{\sigma} = \frac{240\,\text{MPa}}{148\,\text{MPa}} = \underline{1{,}6}$

Aufgabe 11

Die Aufgabe wird mit Superposition gelöst.

<u>Lastfall 1: Streckenlast</u>

Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:

$$w_1(x) = \frac{q_0(4a)^4}{24EI_y}\left[\left(\frac{x}{4a}\right)^4 - \left\langle\frac{x}{4a}-\frac{1}{2}\right\rangle^4 + 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{x}{4a}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}+4\right)\frac{x}{4a}\right]$$

$$= \frac{q_0 a^4}{24EI_y}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 - \left\langle\frac{x}{a}-2\right\rangle^4 - 6\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 36\,\frac{x}{a}\right]$$

$$w_1(2a) = \frac{q_0 a^4}{24EI_y}(16-6\cdot 8+36\cdot 2) = \frac{5}{3}\,\frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

$$\phi_{1A} = -w'_{1A} = -\frac{q_0(4a)^3}{24EI_y}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{2}+4\right] = -\frac{3}{2}\,\frac{q_0 a^3}{EI_y}$$

$$\phi_{1B} = -w'_{1B} = -\frac{q_0(4a)^3}{24EI_y}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\right] = \frac{7}{6}\,\frac{q_0 a^3}{EI_y}$$

<u>Lastfall 2: Einzelkraft</u>

Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:

$$w_2(x) = \frac{F(4a)^3}{6EI_y}\left[\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\left(2-\frac{3}{4}\right)\frac{x}{4a} - \left(\frac{x}{4a}\right)^3\right) + \left\langle\frac{x}{4a}-\frac{3}{4}\right\rangle^3\right]$$

$$= \frac{Fa^3}{24EI_y}\left[15\,\frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a}\right)^3 + 4\left\langle\frac{x}{a}-3\right\rangle^3\right]$$

$$w_2(2a) = \frac{Fa^3}{24EI_y}(30-8) = \frac{11}{12}\,\frac{Fa^3}{EI_y} = \frac{11}{3}\,\frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

$$\phi_{2A} = -w'_{2A} = -\frac{F(4a)^2}{6EI_y}\cdot\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(2-\frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{8}\,\frac{Fa^2}{EI_y} = -\frac{5}{2}\,\frac{q_0 a^3}{EI_y}$$

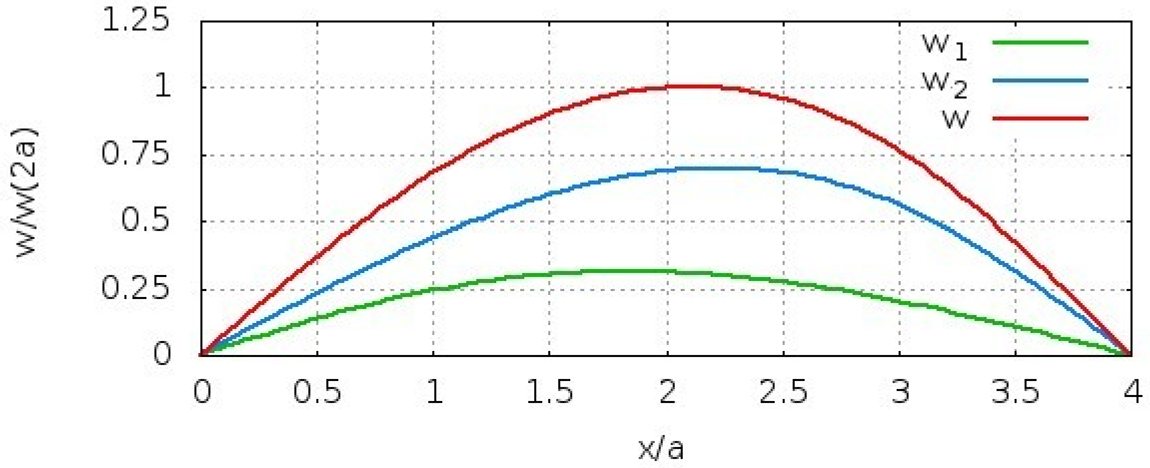
$$\phi_{2B} = -w'_{2B} = \frac{F(4a)^2}{6EI_y}\cdot\frac{3}{4}\left(1-\frac{9}{16}\right) = \frac{7}{8}\,\frac{Fa^2}{EI_y} = \frac{7}{2}\,\frac{q_0 a^3}{EI_y}$$

Überlagerung

$$w(2a)=w_1(2a)+w_2(2a)=\frac{q_0 y^4}{3EI_y}(5+11)=\frac{16}{3}\frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

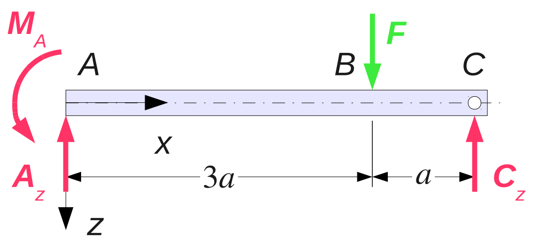
$$\phi_A=-\frac{q_0 a^3}{2EI_y}(3+5)=-4\frac{q_0 a^3}{EI_y}$$

$$\phi_B=\frac{q_0 y^3}{EI_y}\left(\frac{7}{6}+\frac{7}{2}\right)=\frac{14}{3}\frac{q_0 a^3}{EI_y}$$



Aufgabe 12

Die Aufgabe kann durch dreimalige Integration der Querkraft gelöst werden:



$$Q_z(x)=-\left(-A_z+\langle x-3a\rangle^0 F\right)$$

$$M_y(x)=A_z x-\langle x-3a\rangle F+c_1$$

$$EI_y\frac{d^2w}{dx^2}(x)=-M_y(x):$$

$$EI_y\frac{dw}{dx}(x)=-\frac{1}{2}A_z x^2+\frac{1}{2}\langle x-3a\rangle^2 F-c_1 x+c_2$$

$$EI_y w(x)=-\frac{1}{6}A_z x^3+\frac{1}{6}\langle x-3a\rangle^3 F-\frac{1}{2}c_1 x^2+c_2 x+c_3$$

Randbedingungen:

$$w(0)=0 \rightarrow c_3=0\,,\ \frac{dw}{dx}(0)=0 \rightarrow c_2=0$$

$$M_y(4a)=0 \;:\; 4aA_z-aF+c_1=0 \;\rightarrow\; c_1+4aA_z=aF$$

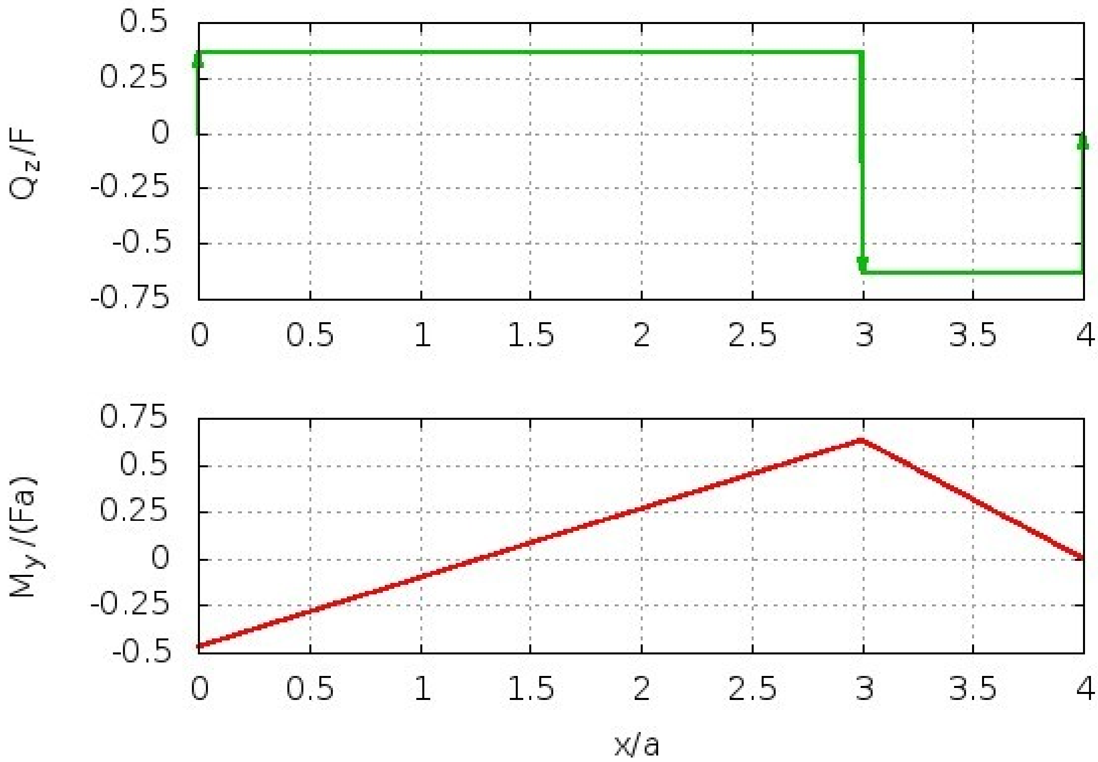
$$w(4a)=0 \;:\; -\frac{32}{3}a^3A_z+\frac{1}{6}a^3F-8c_1a^2=0 \;\rightarrow\; 48c_1+64aA_z=aF$$

Auflösen der Randbedingungen am rechten Ende nach c_1 und A_z ergibt:

$$c_1=-\frac{15}{32}aF\,,\quad A_z=\frac{47}{128}F$$

Damit gilt für die Schnittlasten:

$$Q_z(x)=\left(\frac{47}{128}-\langle x-3a\rangle^0\right)F\,,\quad M_y(x)=\left(\frac{47}{128}x-\langle x-3a\rangle-\frac{15}{32}a\right)F$$



Die noch fehlenden Lagerreaktionen können aus den Schnittlasten bestimmt werden:

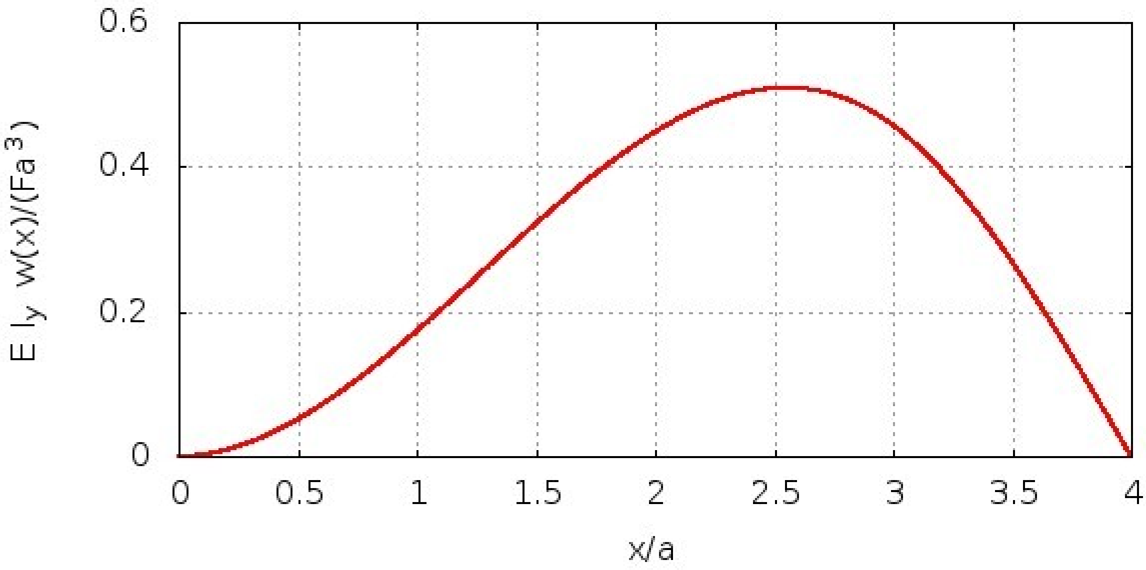
$$M_A=-M_y(0)=\frac{15}{32}aF \quad \text{(negatives Schnittufer)}$$

$$C_z=-Q_z(4a)=-\left(\frac{47}{128}-1\right)F=\frac{81}{128}F \quad \text{(positives Schnittufer)}$$

Für die Biegelinie folgt:

$$w(x)=\frac{F\,a^3}{E\,I_y}\left[-\frac{1}{6}\frac{47}{128}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\frac{1}{6}\left\langle\frac{x}{a}-3\right\rangle^3+\frac{15}{64}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$

$$=\frac{F\,a^3}{768\,E\,I_y}\left[180\left(\frac{x}{a}\right)^2-47\left(\frac{x}{a}\right)^3+128\left\langle\frac{x}{a}-3\right\rangle^3\right]$$



Verschiebung am Lastangriffspunkt:

$$w_B=w(3\,a)=\frac{F\,a^3}{768\,E\,I_y}\left(180\cdot 3^2-47\cdot 3^3\right)=\frac{117}{256}\frac{F\,a^3}{E\,I_y}$$

Aufgabe 13

Die Aufgabe kann durch viermalige Integration der Streckenlast gelöst werden:

$$q_z(x)=q_0\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

$$Q_z(x)=-q_0\left(x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{L}+c_1\,L\right)=-\frac{q_0 L}{2}\left(2\frac{x}{L}-\frac{x^2}{L^2}+2\,c_1\right)$$

$$M_y(x)=-\frac{q_0 L^2}{2}\left(\frac{x^2}{L^2}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{L^3}+2\,c_1\frac{x}{L}+c_2\right)=-\frac{q_0 L^2}{6}\left(3\frac{x^2}{L^2}-\frac{x^3}{L^3}+6\,c_1\frac{x}{L}+3\,c_2\right)$$

$$E\,I_y\frac{d^2 w}{dx^2}(x)=-M_y(x)=\frac{q_0 L^2}{6}\left(3\frac{x^2}{L^2}-\frac{x^3}{L^3}+6\,c_1\frac{x}{L}+3\,c_2\right)$$

$$E I_y \frac{dw}{dx}(x)=\frac{q_0 L^3}{6}\left(\frac{x^3}{L^3}-\frac{1}{4}\frac{x^4}{L^4}+3 c_1 \frac{x^2}{L^2}+3 c_2 \frac{x}{L}+c_3\right)$$

$$E I_y w(x)=\frac{q_0 L^4}{6}\left(\frac{1}{4}\frac{x^4}{L^4}-\frac{1}{20}\frac{x^5}{L^5}+c_1 \frac{x^3}{L^3}+\frac{3}{2} c_2 \frac{x^2}{L^2}+c_3 \frac{x}{L}+c_4\right)$$

Randbedingungen:

$$w(0)=0 \rightarrow c_4=0\,,\ \frac{dw}{dx}(0)=0 \rightarrow c_3=0$$

$$M_y(L)=0\ :\ 3-1+6 c_1+3 c_2=0 \rightarrow 6 c_1+3 c_1=-2$$

$$w(L)=0\ :\ \frac{1}{4}-\frac{1}{20}+c_1+\frac{3}{2} c_2=0 \rightarrow 20 c_1+30 c_2=-4$$

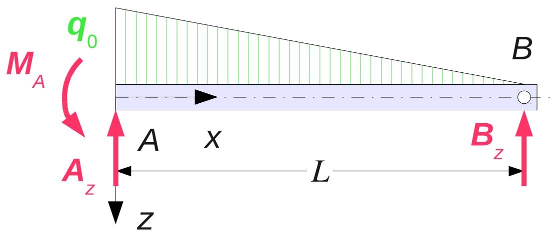
Auflösen der Randbedingungen am rechten Ende nach c_1 und c_2 ergibt:

$$c_1=-\frac{2}{5}\,,\quad c_2=\frac{2}{15}$$

Damit gilt für die Schnittlasten:

$$Q_z(x)=-\frac{q_0 L}{2}\left(2\frac{x}{L}-\frac{x^2}{L^2}-\frac{4}{5}\right),\quad M_y(x)=-\frac{q_0 L^2}{6}\left(3\frac{x^2}{L^2}-\frac{x^3}{L^3}-\frac{12}{5}\frac{x}{L}+\frac{2}{5}\right)$$

Die Lagerreaktionen können aus den Schnittlasten bestimmt werden:



$$A_z=Q_z(0)=\frac{2}{5} q_0 L$$

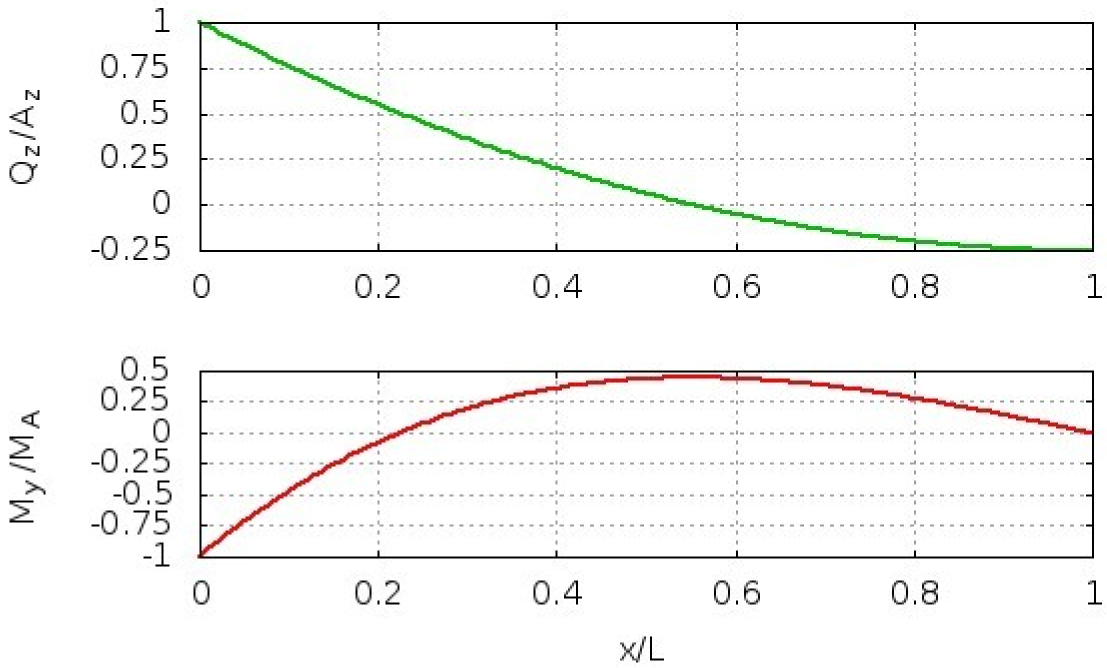
$$B_z=-Q_z(L)=\frac{1}{10} q_0 L$$

$$M_A=-M_y(0)=\frac{1}{15} q_0 L^2$$

Probe:

$$\sum F_z=-A_z-B_z+\frac{1}{2} q_0 L=\left(-\frac{2}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\right) q_0 L=0 \ ✔$$

$$\sum M^A=M_A-\frac{L}{3}\frac{q_0 L}{2}+L B_z=\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\right) q_0 L^2=0 \ ✔$$

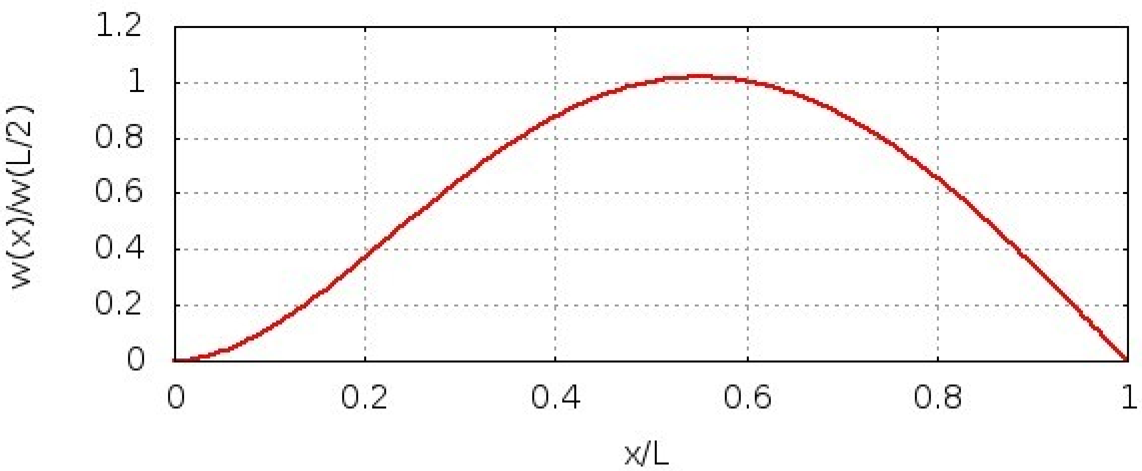


Für die Biegelinie folgt:

$$w(x)=\frac{q_0 L^4}{120\,E\,I_y}\left[5\left(\frac{x}{L}\right)^4-\left(\frac{x}{L}\right)^5-8\left(\frac{x}{L}\right)^3+4\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

Für den Biegewinkel im Punkt *B* gilt:

$$\phi_B=-\frac{dw}{dx}(L)=-\frac{q_0 L^3}{6\,E\,I_y}\left(1-\frac{1}{4}+3\,c_1+3\,c_2\right)=-\frac{q_0 L^3}{6\,E\,I_y}\left(1-\frac{1}{4}-\frac{6}{5}+\frac{2}{5}\right)=\frac{q_0 L^3}{120\,E\,I_y}$$



Aufgabe 14

Die Aufgabe kann durch viermalige Integration der Streckenlast gelöst werden:

$$E I_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_0$$

$$E I_y \frac{d^3 w}{dx^3} = q_0 x + c_1 = -Q_z(x)$$

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{2} q_0 x^2 + c_1 x + c_2 = -M_y(x)$$

$$E I_y \frac{dw}{dx} = \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$E I_y w(x) = \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Randbedingungen:

$$w(0)=0 \ \rightarrow \ c_4=0 \ , \ \frac{dw}{dx}(L)=0 \ \rightarrow \ c_3=0$$

$$w(L)=0 \ : \ \frac{1}{24} q_0 L^4 + \frac{1}{6} c_1 L^3 + \frac{1}{2} c_2 L^2 = 0 \ \rightarrow \ 4 c_1 L + 12 c_2 = -q_0 L^2$$

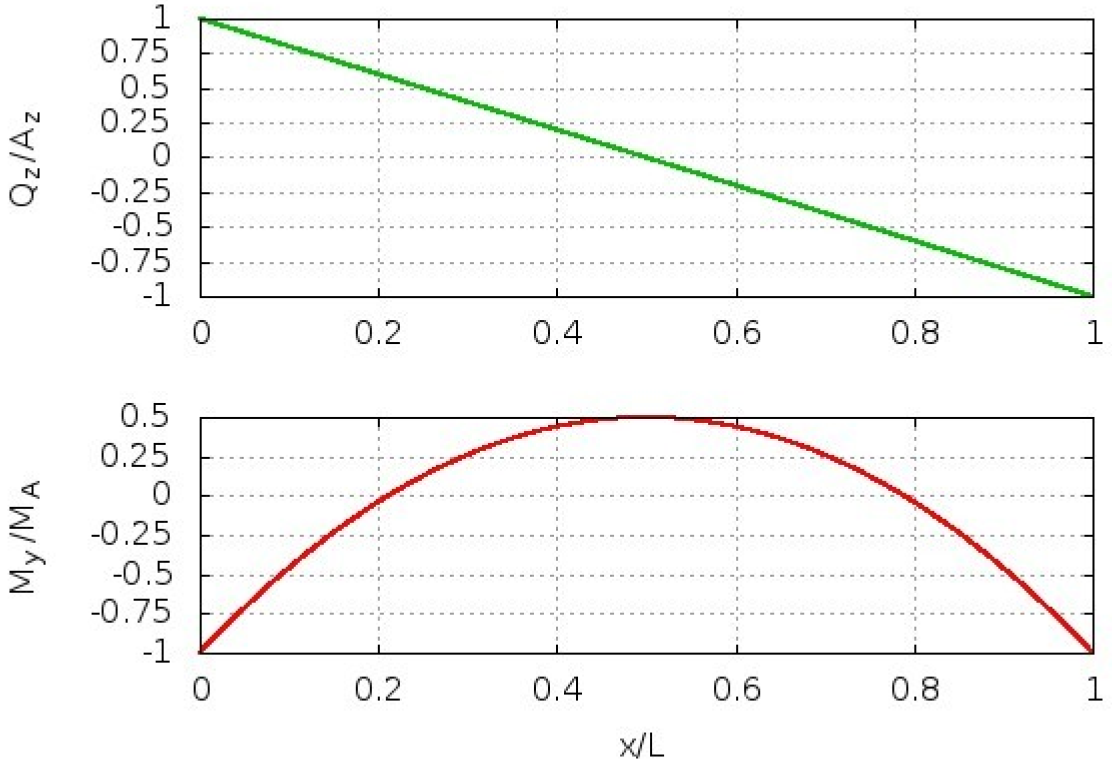
$$\frac{dw}{dx}(L)=0 \ : \ \frac{1}{6} q_0 L^3 + \frac{1}{2} c_1 L^2 + c_2 L = 0 \ \rightarrow \ 3 c_1 L + 6 c_2 = -q_0 L^2$$

Auflösen der Randbedingungen am rechten Ende nach c_1 und c_2 ergibt:

$$c_1 = -\frac{1}{2} q_0 L \ , \quad c_2 = \frac{1}{12} q_0 L^2$$

Damit gilt für die Schnittlasten:

$$Q_z(x) = -\frac{q_0 L}{2}\left(2\frac{x}{L}-1\right) \ , \ M_y(x) = -\frac{q_0 L^2}{12}\left[6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\frac{x}{L} + 1\right]$$



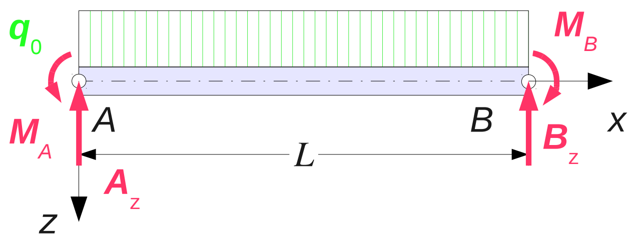
Die Lagerreaktionen können aus den Schnittlasten bestimmt werden:

$$A_z = Q_z(0) = \frac{q_0 L}{2}$$

$$B_z = -Q_z(L) = \frac{q_0 L}{2}$$

$$M_A = -M_y(0) = \frac{q_0 L^2}{12}$$

$$M_B = -M_y(L) = \frac{q_0 L^2}{12}$$



Das größte Biegemoment tritt an der Stelle auf, an der die Querkraft null ist:

$$Q_z(x_{max}) = 0 \;:\; 2\frac{x_{max}}{L} - 1 = 0 \;\rightarrow\; \frac{x_{max}}{L} = \frac{1}{2}$$

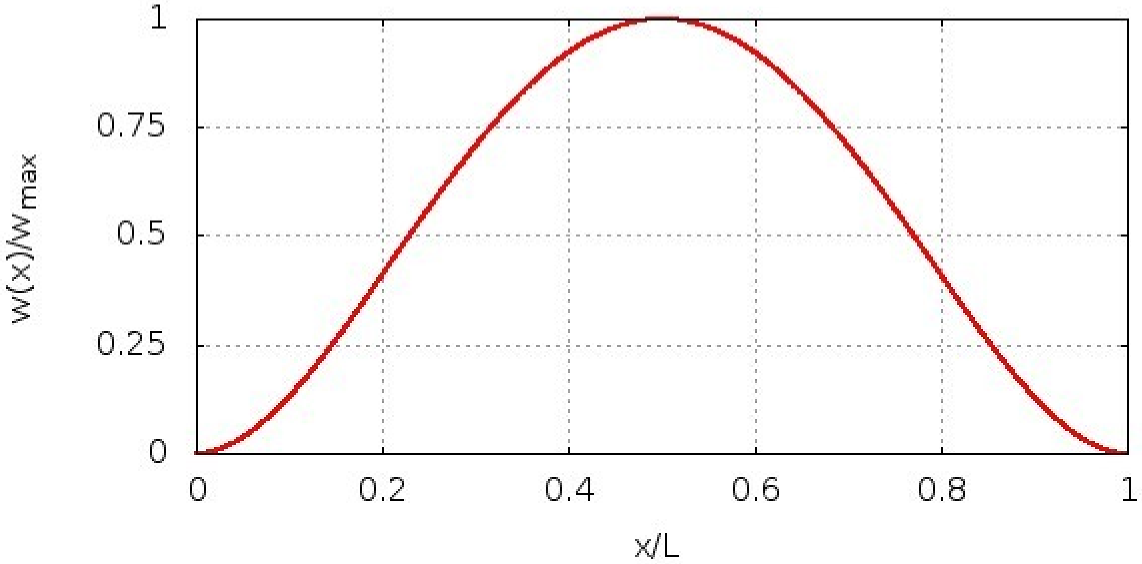
$$M_y(x_{max}) = -\frac{q_0 L^2}{12}\left(\frac{6}{4} - \frac{6}{2} + 1\right) = \frac{q_0 L^2}{24}$$

Dieser Wert ist vom Betrag kleiner als die Einspannmomente. Das betragsmäßig größte Biegemoment tritt daher an den Einspannstellen auf:

$$|M_y|_{max} = |M_y(0)| = \frac{q_0 L^2}{12}$$

Für die Biegelinie folgt:

$$w(x)=\frac{q_0 L^4}{24 E I_y}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4-2\left(\frac{x}{L}\right)^3+\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$



Die größte Durchbiegung tritt an der Stelle auf, an der der Biegewinkel null ist:

$$\frac{dw}{dx}(x_{max})=0 \quad : \quad \frac{1}{6}q_0 x_{max}^3-\frac{1}{4}q_o L x_{max}^2+\frac{1}{12}q_0 L^2 x_{max}=0$$

$$\rightarrow \ \frac{q_0 L^3}{12}\left(\frac{x_{max}}{L}\right)\left[2\left(\frac{x_{max}}{L}\right)^2-3\frac{x_{max}}{L}+1\right]=\frac{q_0 L^3}{12}\left(\frac{x_{max}}{L}\right)\left(\frac{x_{max}}{L}-1\right)\left(2\frac{x_{max}}{L}-1\right)=0$$

Der Biegewinkel ist am linken und rechten Ende und in der Mitte null. Die größte Durchbiegung tritt in der Mitte auf: $x_{max}/L=1/2$

$$w_{max}=w\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{q_0 L^4}{24 E I_y}\left(\frac{1}{16}-\frac{2}{8}+\frac{1}{4}\right)=\frac{q_0 L^4}{384 E I_y}$$

Zahlenwerte:

$$A_z=B_z=\frac{1}{2}\cdot 613\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot 4\,\text{m}=\underline{1226\,\text{N}}$$

$$M_A=M_B=\frac{1}{12}\cdot 613\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot 4^2\,\text{m}^2=\underline{817{,}3\,\text{Nm}}$$

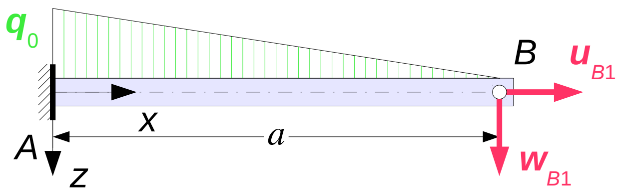
$$|M_y|_{max}=|M_A|=\underline{817{,}3\,\text{Nm}}$$

$$w_{max}=\frac{613\cdot 10^{-3}\,\text{N/mm}\cdot(4\cdot 10^3\,\text{mm})^4}{384\cdot 2{,}1\cdot 10^5\,\text{N/mm}^2\cdot 5700\cdot 10^4\,\text{mm}^4}=\underline{0{,}03414\,\text{mm}}$$

Aufgabe 15

Die Aufgabe wird mit Superposition gelöst.

<u>Lastfall 1: Streckenlast</u>

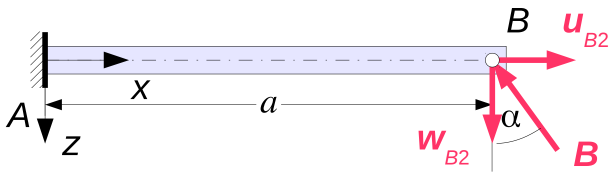


$$u_{B1}=0$$

Aus Tabelle:

$$w_{B1}=\frac{q_0 a^4}{30 E I_y}$$

<u>Lastfall 2: Lagerkraft</u>

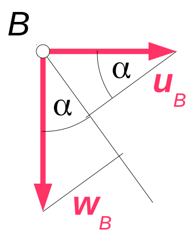


$$u_{B2}=-\frac{B\sin(\alpha)a}{EA}$$

Aus Tabelle:

$$w_{B2}=-\frac{B\cos(\alpha)a^3}{3EI_y}$$

<u>Verträglichkeit</u>



$$\sin(\alpha)u_B+\cos(\alpha)w_B=0$$

Einsetzen der Verschiebungen ergibt:

$$-\frac{B\sin^2(\alpha)a}{EA}+\frac{q_0 a^4\cos(\alpha)}{30EI_y}-\frac{B\cos^2(\alpha)a^3}{3EI_y}=0$$

Mit

$$\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}=\frac{1}{1+9/16}=\frac{4}{5} \text{ und } \sin(\alpha)=\frac{3}{4}\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$$

folgt:

$$\frac{4}{5}\frac{q_0 a}{30}=\left(\frac{9}{25}\frac{I_y}{Aa^2}+\frac{16}{75}\right)B$$

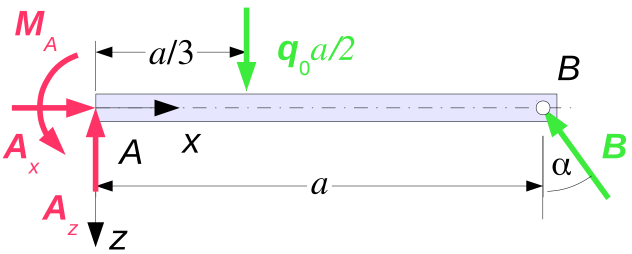
Mit $I_y/A=i_y^2$ gilt:

$$2q_0 a=\left(27\frac{i_y^2}{a^2}+16\right)B$$

Auflösen ergibt:

$$B = \frac{2 q_0 a}{16 + 27 i_y^2 / a^2}$$

Mit $i_y / a = \sqrt{3}/9$ folgt: $B = \frac{2}{17} q_0 a$



<u>Lagerreaktionen im Punkt *A*</u>

$$\sum F_x = 0 \ : \ A_x - B \sin(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow \ A_x = B \sin(\alpha) = \frac{6}{85} q_0 a$$

$$\sum F_z = 0 \ : \ -A_z + \frac{1}{2} q_0 a - B \cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow \ A_z = \frac{1}{2} q_0 a - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{17} q_0 a = \frac{69}{170} q_0 a$$

$$\sum M^A = 0 \ : \ M_A + B a \cos(\alpha) - \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2} q_0 a = 0$$

$$\rightarrow \ M_A = -\frac{2}{17} q_0 a^2 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} q_0 a^2 = \frac{37}{510} q_0 a^2$$

Aufgabe 16

a) <u>Schnittlasten und Biegelinie</u>

Integrationen:

$$E I_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{L}\right)$$

$$E I_y \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{2}{\pi} q_0 L \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{L}\right) + c_1 = -Q_z(x)$$

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{4}{\pi^2} q_0 L^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{L}\right) + c_1 x + c_2 = -M_y(x)$$

$$E I_y \frac{dw}{dx} = -\frac{8}{\pi^3} q_0 L^3 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$E I_y w = \frac{16}{\pi^4} q_0 L^4 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Randbedingungen:

$$M_y(L)=0 \;:\; c_1 L + c_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\phi(0)=0 \;:\; c_3 = 0$$

$$w(0)=0 \;:\; c_4 = -\frac{16}{\pi^4} q_0 L^4$$

$$w(L)=0 \;:\; \frac{1}{6} c_1 L^3 + \frac{1}{2} c_2 L^2 + c_4 = 0 \quad \rightarrow \; c_1 L + 3 c_2 = \frac{96}{\pi^4} q_0 L^2 \qquad (2)$$

(2) - (1) $\rightarrow \; 2 c_2 = \frac{96}{\pi^4} q_0 L^2 \;\rightarrow\; c_2 = \frac{48}{\pi^4} q_0 L^2$

(1) $\rightarrow \; c_1 = -\frac{48}{\pi^4} q_0 L$

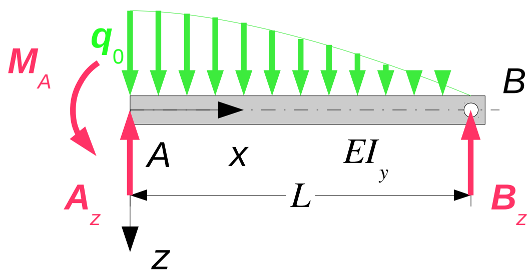
Ergebnisse:

$$Q_z(x) = q_0 L \left[\frac{48}{\pi^4} - \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right) \right]$$

$$M_y(x) = q_0 L^2 \left[\frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right) + \frac{48}{\pi^4} \frac{x}{L} - \frac{48}{\pi^4} \right]$$

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 E I_y} \left[16 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right) - 8 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 24 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 16 \right]$$

b) <u>Lagerreaktionen</u>



Punkt *A*: negatives Schnittufer

$$A_z = Q_z(0) = \frac{48}{\pi^4} q_0 L = 0{,}4928\, q_0 L$$

$$M_A = -M_y(0) = \left(\frac{48}{\pi^4} - \frac{4}{\pi^2} \right) q_0 L^2$$
$$= 0{,}08748\, q_0 L^2$$

Punkt *B*: positives Schnittufer

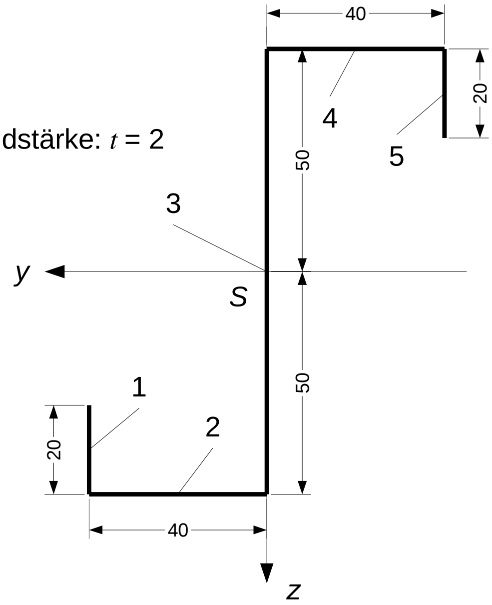
$$B_z = -Q_z(L) = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{48}{\pi^4} \right) q_0 L = 0{,}1439\, q_0 L$$

Aufgabe 17

Flächenträgheitsmomente:

Unterteilung des Profils:

Wandstärke: t = 2



	Profil 1	Profil 2	Profil 3	Profil 4	Profil 5	Summe	
A_i	40	80	200	80	40	440	mm^2
y_{Si}	40	20	0	-20	-40		mm
z_{Si}	40	50	0	-50	-40		mm
I_{Yi}	1333	0	166700	0	1333	169400	mm^4
I_{Zi}	0	10670	0	10670	0	21340	mm^4
A_i	64000	200000	0	200000	64000	528000	mm^4
$y_{Si}^2 A_i$	64000	32000	0	32000	64000	192000	mm^4
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	-64000	-80000	0	-80000	-64000	-288000	mm^4

Ergebnis: $I_y = (169400 + 528000)\,\mathrm{mm}^4 = \underline{69{,}74\,\mathrm{cm}^4}$

$I_z = (21340 + 192000)\,\mathrm{mm}^4 = \underline{21{,}33\,\mathrm{cm}^4}$

$I_{yz} = \underline{-28{,}80\,\mathrm{cm}^4}$

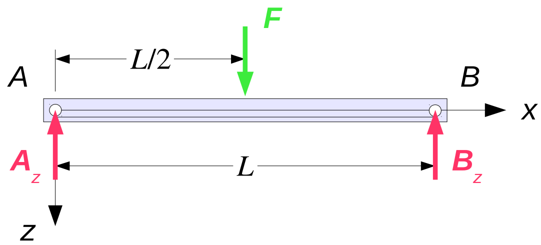
Lagerkräfte:

$$\sum M^B = 0 \ : \ -L A_z + \frac{L}{2} F = 0$$

$$\rightarrow\ A_z=\frac{F}{2}$$

$$\sum M^A=0\ :\ -\frac{L}{2}F+L\,B_z=0$$

$$\rightarrow\ B_z=\frac{F}{2}$$



Schnittlasten:

$$Q_z(x)=-\left(-A_z+\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^0 F\right)=F\left(\frac{1}{2}-\left\langle\frac{x}{L}-\frac{1}{2}\right\rangle^0\right)$$

$$M_y(x)=F\left(\frac{x}{2}-L\left\langle\frac{x}{L}-\frac{1}{2}\right\rangle\right)=\frac{F\,L}{2}\left(\frac{x}{L}-\left\langle 2\frac{x}{L}-1\right\rangle\right)$$

Ersatzmomente:

$$\bar{M}_y=\frac{1}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}M_y\ ,\quad \bar{M}_z=-\frac{I_{yz}/I_y}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}M_y=-\frac{I_{yz}}{I_y}\bar{M}_y$$

Vertikalverschiebung:

$$E\,I_y\frac{d^2w}{dx^2}=-\bar{M}_y=\frac{-F\,L}{2\left(1-I_{yz}^2/(I_y I_z)\right)}\left[\frac{x}{L}-\left\langle 2\frac{x}{L}-1\right\rangle\right]$$

$$E\,I_y\frac{dw}{dx}=\frac{-F\,L^2}{2\left(1-I_{yz}^2/(I_y I_z)\right)}\left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{L^2}-\frac{1}{4}\left\langle 2\frac{x}{L}-1\right\rangle^2+c_1\right]$$

$$E\,I_y w=\frac{-F\,L^3}{2\left(1-I_{yz}^2/(I_y I_z)\right)}\left[\frac{1}{6}\frac{x^3}{L^3}-\frac{1}{24}\left\langle 2\frac{x}{L}-1\right\rangle^3+c_1 x+c_2\right]$$

$$w(0)=0\ \rightarrow\ c_2=0$$

$$w(L)=0\ :\ \frac{1}{6}-\frac{1}{24}+c_1 L=0\ \rightarrow\ c_1=-\frac{3}{24}\frac{1}{L}=-\frac{1}{8\,L}$$

$$w(x)=-\frac{1}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}\frac{F\,L^3}{48\,E\,I_y}\left[4\left(\frac{x}{L}\right)^3-\left\langle 2\frac{x}{L}-1\right\rangle^3-3\frac{x}{L}\right]$$

$$w_F=w\left(\frac{L}{2}\right)=-\frac{1}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}\frac{F\,L^3}{48\,E\,I_y}\left(\frac{4}{2^3}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}\frac{F\,L^3}{48\,E\,I_y}$$

Horizontalverschiebung:

Da die Randbedingungen für die Verschiebung $v(x)$ mit denen für die Verschiebung $w(x)$ übereinstimmen, gilt:

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = \bar{M}_z = -\frac{I_{yz}}{I_y}\bar{M}_y$$

$$EI_z v(x) = -\frac{I_{yz}}{I_y}\frac{FL^3}{2\left(1-I_{yz}^2/(I_y I_z)\right)}\left[\frac{1}{6}\frac{x^3}{L^3} - \frac{1}{24}\left\langle 2\frac{x}{L}-1\right\rangle^3 - \frac{1}{8}\frac{x}{L}\right]$$

$$v(x) = -\frac{I_{yz}}{I_y}\frac{FL^3}{48EI_z}\left[4\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left\langle x\frac{x}{L}-1\right\rangle^3 - 3\frac{x}{L}\right] = \frac{I_{yz}}{I_z}w(x)$$

$$v_F = v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{I_{yz}}{I_z}w_F$$

Zahlenwerte:

$$1-\frac{I_{yz}^2}{I_y I_z} = 1-\frac{28{,}80^2}{69{,}74\cdot 21{,}33} = 0{,}4424$$

$$\frac{FL^3}{48EI_y} = \frac{5\cdot 10^3\,\mathrm{N}\cdot 1000^3\,\mathrm{mm}^3}{48\cdot 2{,}1\cdot 10^5\,\mathrm{N/mm^2}\cdot 69{,}74\cdot 10^4\,\mathrm{mm}^4} = 0{,}7113\,\mathrm{mm}$$

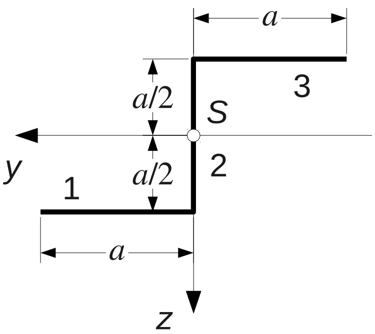
$$w_F = \frac{0{,}7113\,\mathrm{mm}}{0{,}4424} = \underline{1{,}608\,\mathrm{mm}}$$

$$v_F = \frac{-28{,}80}{21{,}33}\cdot 1{,}608\,\mathrm{mm} = \underline{-2{,}171\,\mathrm{mm}}$$

Aufgabe 18

a) Flächenträgheitsmomente

	Profil 1	Profil 2	Profil 3	Summe
A_i	at	at	at	$3at$
y_{Si}	$a/2$	0	$-a/2$	
z_{Si}	$a/2$	0	$-a/2$	
I_{Yi}	0	$a^3t/12$	0	$a^3t/12$
I_{Zi}	$a^3t/12$	0	$a^3t/12$	$a^3t/6$
$z_{Si}^2 A_i$	$a^3t/4$	0	$a^3t/4$	$a^3t/2$
$y_{Si}^2 A_i$	$a^3t/4$	0	$a^3t/4$	$a^3t/2$
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	$-a^3t/4$	0	$-a^3t/4$	$-a^3t/2$



Ergebnis: $I_y = \frac{a^3t}{12} + \frac{a^3t}{2} = \underline{\frac{7}{12}a^3t}$, $I_z = \frac{a^3t}{6} + \frac{a^3t}{2} = \underline{\frac{2}{3}a^3t}$, $I_{yz} = \underline{-\frac{a^3t}{2}}$

b) Verschiebungen

Die Verschiebungen können mithilfe von Superposition ermittelt werden.

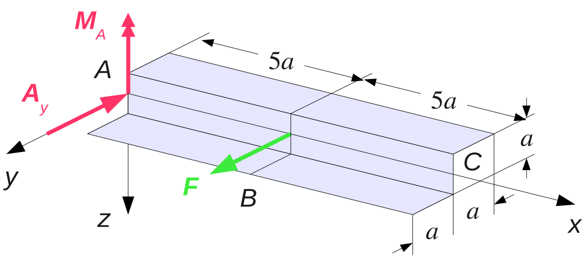
Für beide Lastfälle benötigte Werte:

$$1-\frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}=1-\frac{a^6 t^2\cdot 12\cdot 3}{4\cdot 7\cdot 2 a^6 t^2}=1-\frac{9}{14}=\frac{5}{14}$$

$$\frac{I_{yz}}{I_y}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{7}=-\frac{6}{7},\quad \frac{I_{yz}}{I_z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}$$

Lastfall 1: Kraft bei x_B

Lagerreaktionen:



$$\sum F_y=0\ :\ -A_y+F=0$$

$$\rightarrow\ A_y=F$$

$$\sum M_z^A=0\ :\ -M_A+5aF=0$$

$$\rightarrow\ M_A=5aF$$

Schnittlasten:

$$Q_{1y}=-\left(-A_y+\langle x-5a\rangle^0 F\right)=F\left(1-\langle x-5a\rangle^0\right)$$

$$M_{1z}=-\left(-M_A+A_y x-\langle x-5a\rangle F\right)=F\left(5a-x+\langle x-5a\rangle\right)$$

Ersatzmomente:

$$\bar{M}_{1y}=\frac{-M_{1z}I_{yz}/I_z}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{14}{5}M_{1z}=\frac{21}{10}M_{1z}=\frac{21}{10}Fa\left(5-\frac{x}{a}+\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle\right)$$

$$\bar{M}_{1z}=\frac{M_{1z}}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}=\frac{14}{5}M_{1z}=\frac{14}{5}Fa\left(5-\frac{x}{a}+\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle\right)$$

Horizontalverschiebung:

$$EI_z\frac{d^2v_1}{dx^2}=\bar{M}_{1z}=\frac{14}{5}Fa\left(5-\frac{x}{a}+\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle\right)$$

$$EI_z\frac{dv_1}{dx}=\frac{14}{5}Fa^2\left(5\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{2}\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle^2+c_1\right)$$

$$EI_z v_1=\frac{14}{5}Fa^3\left(\frac{5}{2}\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{6}\frac{x^3}{a^3}+\frac{1}{6}\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle^3+c_1 x+c_2\right)$$

$$v_1(0)=0 \;\rightarrow\; c_2=0,\quad \frac{dv_1}{dx}(0)=0 \;\rightarrow\; c_1=0$$

$$v_1(x)=\frac{14}{30}\frac{F a^3}{E I_z}\left[15\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle^3\right]$$

$$=\frac{14}{30}\cdot\frac{3}{2}\frac{F}{E t}\left[15\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle^3\right]=\frac{7}{10}\frac{F}{E t}\left[15\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle^3\right]$$

$$v_{1B}=v_1(5a)=\frac{7}{10}\frac{F}{E t}\left(15\cdot 5^2-5^3\right)=\frac{7\cdot 25 F}{10 E t}\left(15-5\right)=175\frac{F}{E t}$$

$$v_{1C}=v_1(10a)=\frac{7}{10}\frac{F}{E t}\left(15\cdot 10^2-10^3+5^3\right)=\frac{875 F}{2 E t}$$

Vertikalverschiebung:

Die Randbedingungen für die Vertikalverschiebung $w(x)$ stimmen mit den Randbedingungen für die Horizontalverschiebung $v(x)$ überein. Daher gilt:

$$E I_y\frac{d^2 w_1}{dx^2}=-\bar{M}_{1y}=-\frac{21}{10}F a\left(5-\frac{x}{a}+\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle\right)$$

$$E I_y w_1=-\frac{21}{10}F a^3\left(\frac{5}{2}\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{6}\frac{x^3}{a^3}+\frac{1}{6}\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle^3\right)$$

$$w_1(x)=-\frac{21}{60}\frac{F a^3}{E I_y}\left[15\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle^3\right]$$

$$=-\frac{21}{60}\cdot\frac{12}{7}\frac{F}{E t}\left[15\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle^3\right]$$

$$=-\frac{3}{5}\frac{F}{E t}\left[15\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left\langle\frac{x}{a}-5\right\rangle^3\right]$$

$$w_{1B}=-\frac{3}{5}\frac{F}{E t}\left(15\cdot 5^2-5^3\right)=-150\frac{F}{E t}$$

$$w_{1C}=-\frac{3}{5}\frac{F}{E t}\left(15\cdot 10^2-10^3+5^3\right)=-375\frac{F}{E t}$$

<u>Lastfall 2: Kraft bei x_C</u>

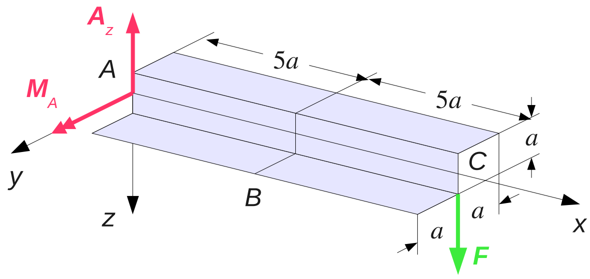
Lagerreaktionen:

$$\sum F_z=0 \;:\; -A_z+F=0$$

$$\rightarrow\; A_z=F$$

$$\sum M_y^A = 0 \;:\; M_A - 10\,a\,F = 0$$

$$\rightarrow\; M_A = 10\,a\,F$$



Schnittlasten:

$$Q_{2z} = -(-A_z) = A_z = F$$

$$M_{2y} = -(M_A - A_z\,x) = -F\,(10\,a - x)$$

Ersatzmomente:

$$\bar{M}_{2y} = \frac{M_{1y}}{1 - I_{yz}^2/(I_y I_z)} = -\frac{14}{5}\,F\,a\left(10 - \frac{x}{a}\right)$$

$$\bar{M}_{2z} = \frac{-M_{1y}\,I_{yz}/I_y}{1 - I_{yz}^2/(I_y I_z)} = \frac{14}{5}\left(\frac{-6}{7}\right)F\,a\left(10 - \frac{x}{a}\right) = -\frac{12}{5}\,F\,a\left(10 - \frac{x}{a}\right)$$

Horizontalverschiebung:

$$E\,I_z\,\frac{d^2 v_2}{dx^2} = \bar{M}_{2z} = -\frac{12}{5}\,F\,a\left(10 - \frac{x}{a}\right)$$

$$E\,I_z\,\frac{dv_2}{dx} = -\frac{12}{5}\,F\,a^2\left(10\,\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{a^2} + d_1\right)$$

$$E\,I_z\,v_2 = -\frac{12}{5}\,F\,a^3\left(5\,\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{6}\,\frac{x^3}{a^3} + d_1\,x + d_2\right)$$

$$v_2(0) = 0 \;\rightarrow\; d_2 = 0\,,\quad \frac{dv_2}{dx}(0) = 0 \;\rightarrow\; d_1 = 0$$

$$v_2(x) = -\frac{2}{5}\,\frac{F\,a^3}{E\,I_z}\left[30\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^3\right] = -\frac{3}{5}\,\frac{F}{E\,t}\left[30\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^3\right]$$

$$v_{2B} = v_2(5\,a) = -\frac{3}{5}\,\frac{F}{E\,t}\left(30\cdot 5^2 - 5^3\right) = -\frac{3\cdot 625\,F}{5\,E\,t} = -375\,\frac{F}{E\,t}$$

$$v_{2C} = v_2(10\,a) = -\frac{3}{5}\,\frac{F}{E\,t}\left(30\cdot 10^2 - 10^3\right) = -\frac{3\cdot 2000\,F}{5\,E\,t} = -1200\,\frac{F}{E\,t}$$

Vertikalverschiebung:

$$E\,I_y\,\frac{d^2 w_2}{dx^2} = -\bar{M}_{2y} = \frac{14}{5}\,F\,a\left(10 - \frac{x}{a}\right)$$

$$E\,I_y\,w_2 = \frac{14}{5}\,F\,a^3\left(5\,\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{6}\,\frac{x^3}{a^3}\right)$$

$$w_2 = \frac{14}{30}\frac{F a^3}{E I_y}\left[30\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^3\right] = \frac{4}{5}\frac{F}{E t}\left[30\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^3\right]$$

$$w_{2B} = w_2(5a) = \frac{4\cdot 625}{5}\frac{F}{E t} = 500\frac{F}{E t}$$

$$w_{2C} = w_2(10a) = \frac{4\cdot 2000}{5}\frac{F}{E t} = 1600\frac{F}{E t}$$

<u>Gesamtverschiebungen</u>

$$v_B = v_{1B} + v_{2B} = (175 - 375)\frac{F}{E t} = \underline{-200\frac{F}{E t}}$$

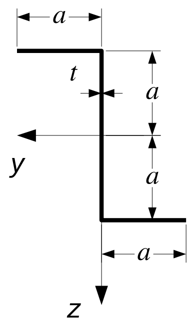
$$w_B = w_{1B} + w_{2B} = (-150 + 500)\frac{F}{E t} = \underline{350\frac{F}{E t}}$$

$$v_C = v_{1C} + v_{2C} = \left(\frac{875}{2} - 1200\right)\frac{F}{E t} = \underline{-\frac{1525}{2}\frac{F}{E t}}$$

$$w_C = w_{1C} + w_{2C} = (-375 + 1600)\frac{F}{E t} = \underline{1225\frac{F}{E t}}$$

Aufgabe 19

a) <u>Querschnittskennwerte</u>



$$I_y = 2a^2\cdot a t + \frac{(2a)^3 t}{12} = \frac{8}{3}a^3 t$$

$$I_z = 2\left(\frac{a^3 t}{12} + \frac{a^2}{4}\cdot a t\right) = \frac{2}{3}a^3 t$$

$$I_{yz} = 2\cdot a\cdot\frac{a}{2}\cdot a t = a^3 t$$

b) <u>Verschiebungen</u>

Schnittlasten:

$$E I_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_z(x) = q_0 \sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)$$

$$E I_y \frac{d^3 w}{dx^3} = -Q_z(x) = -\frac{q_0 L}{\pi}\cos\left(\pi\frac{x}{L}\right) + c_1$$

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y(x) = -\frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + c_1 x + c_2$$

$$M_y(0) = 0 \;\rightarrow\; c_2 = 0$$

$$M_y(L) = 0 \;:\; c_1 L = 0 \;\rightarrow\; c_1 = 0$$

$$\rightarrow\; M_y(x) = \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

Ersatzmomente:

$$1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \quad , \quad \frac{I_{yz}}{I_y} = \frac{3}{8}$$

$$\bar{M}_y = \frac{M_y}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} = \frac{16}{7} \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$\bar{M}_z = \frac{-M_y I_{yz} / I_y}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} = -\frac{3}{8} \frac{16}{7} \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) = -\frac{6}{7} \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

Horizontalverschiebung:

$$E I_z \frac{d^2 v}{dx^2} = \bar{M}_z = -\frac{6}{7} \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$E I_z \frac{dv}{dx} = \frac{6}{7} \frac{q_0 L^3}{\pi^3} \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) + c_3$$

$$E I_z v = \frac{6}{7} \frac{q_0 L^4}{\pi^4} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + c_3 x + c_4$$

$$v(0) = 0 \;\rightarrow\; c_4 = 0$$

$$v(L) = 0 \;:\; c_3 L = 0 \;\rightarrow\; c_3 = 0$$

$$v(x) = \frac{6}{7\pi^4} \frac{q_0 L^4}{E I_z} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) = \frac{6}{7\pi^4} \frac{3}{2} \frac{q_0 L^4}{E a^3 t} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) = \frac{9}{7\pi^4} \frac{q_0 L^4}{E a^3 t} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

Vertikalverschiebung:

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -\bar{M}_y = -\frac{16}{7} \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

Mit $w(0) = 0$ und $w(L) = 0$ folgt wie im Fall der Horizontalverschiebung:

$$E I_y w = \frac{16}{7} \frac{q_0 L^4}{\pi^4} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$w(x)=\frac{16}{7\pi^4}\frac{q_0 L^4}{E I_y}\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)=\frac{16}{7\pi^4}\frac{3}{8}\frac{q_0 L^4}{E a^3 t}\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)=\frac{6}{7\pi^4}\frac{q_0 L^4}{E a^3 t}\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)$$